

Ueber den allgemeinen geometrischen Satz des Cavalieri.

In der Stereometrie bieten sich bei der Raumbestimmung der Pyramide und der Kugel gewisse Schwierigkeiten dar, welche es üblich geworden ist, mit Hülfe des sogenannten Cavalieri'schen Princip's zu umgehen. Dass dieses vermeintliche Princip nicht so ohne weiteres evident ist, wird von mehreren Lehrbüchern durch das Bestreben anerkannt, das Princip durch Erläuterungen glaubwürdig zu machen. Wenn aber der Satz als das, was er in Wirklichkeit ist, und wofür ihn auch sein Urheber angesehen wissen will, nämlich als Lehrsatz aufgefasst wird, so verursacht sein Beweis Schwierigkeiten, die mindestens ebenso gross sind, als diejenigen, welche mit seiner Hülfe umgangen werden sollen. Während so die Schwierigkeiten bestehen bleiben, wird durch die vorzeitige Einführung des Satzes nur der natürliche Gedankengang auf Abwege geleitet. Die Quadratur der Flächen und die Cubatur der Körper wird naturgemäss immer wieder auf dem Wege zu erfolgen haben, auf welchem seit des Archimedes Zeiten die Lösung dieser Aufgaben der fortschreitenden Wissenschaft zuerst gelungen ist, — nämlich durch Auffassung der Gebilde als bestimmte Integrale, also auf dem nämlichen Wege, der schliesslich auch zu einem vollgültigen Beweise des Cavalieri'schen Satzes selbst führt.

Der angedeutete Gedankengang soll im folgenden an den beiden Körpern, welche hierbei vorzugsweise in Betracht kommen, an der dreiseitigen Pyramide und der Kugel ausführlich dargestellt werden. Für die Raumbestimmung der Pyramide sind zwei Entwicklungen gegeben, von denen die erste den Vorzug hat, dass sie mit der einfachen geometrischen Reihe auskommt, die andere zwar die Summierung einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung erfordert, dafür aber den Vortheil grösserer Uebersichtlichkeit gewährt. Die Betrachtungen an der Kugel sind auf Calotte und Sektor beschränkt worden, weil die sonst noch in Frage kommenden Flächen und Räume sich dann durch blosse Rechnung ableiten lassen. Die Erörterungen machen in ihren Einzelheiten nicht den Anspruch darauf, wesentlich Neues zu bieten; sie sollen vielmehr nur an den Hauptbeispielen eine zusammenhängende Darstellung geben, welche des Cavalieri'schen Princip's nicht benötigt ist.

Wenn nachträglich noch einige Betrachtungen hinzugefügt sind, welche auf den geometrischen Satz des Cavalieri besondern Bezug haben, so hat damit nicht etwa zum Ausdruck gebracht werden sollen, dass die Aufnahme dieses Satzes in das Gymnasialpensum besonders gewünscht wird.

I.

Raumbestimmung der dreiseitigen Pyramide.

Erste Lösung (Fig. 1). Wenn ABCD die auszumessende dreiseitige Pyramide vorstellt, so suche man die Mitten E, F, G, H, I, K der sechs Seitenkanten. Alsdann ist $EF \parallel$ und $= \frac{1}{2} BC$ und ebenso $IK \parallel$ und $= \frac{1}{2} BC$; folglich EFIK ein Parallelogramm. Breitet man noch die Ebenen EFG und EIH aus, so sind GDEIFK und EFIKHC dreiseitige Prismen; dieselben lassen sich, wie in der Zeichnung veranschaulicht wird, als Hälften kongruenter Parallelepipeda auffassen und sind darum raumgleich. Die dreiseitigen Pyramiden AGEF und EIBH sind kongruent; diese sowohl, wie das Prisma GEFDIK haben eine Grundfläche, welche gleich dem vierten Teile der Grundfläche BCD, und eine Höhe, welche gleich der Hälfte der von A auf BCD gefällten Höhe ist. Das Ergebnis der bisherigen Betrachtung kann so ausgesprochen werden: „Jede dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h lässt sich durch drei ebene Schnitte in zwei raumgleiche dreiseitige Prismen, deren jedes den Rauminhalt $\frac{1}{4} G \cdot \frac{1}{2} h$ hat, und in zwei kongruente dreiseitige Pyramiden zerlegen, welche die Grundfläche $\frac{1}{4} G$ und die Höhe $\frac{1}{2} h$ haben.“ Wiederholt man diese Zerlegung an den Pyramiden AGEF und EIBK, so ergeben sich kleinere Pyramiden, an welchen die Zerlegung von neuem vorgenommen werden kann u. s. w. Um die Raumbeziehungen, welche aus dieser ins Unendliche fortgehenden Zerlegung hervorgehen, übersichtlicher zu machen, mögen bedeuten: P den Rauminhalt der gegebenen Pyramide, $P_1, P_2, P_3 \dots$ die Räume einer jeden der kleinen Pyramiden der ersten, zweiten, dritten \dots Zerlegung; es seien ferner G und h Grundfläche und Höhe von P, G_1 und h_1 von P_1 , G_2 und h_2 von P_2 u. s. w. Nunmehr bestehen nach einander die folgenden Gleichungen:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{4} G \cdot \frac{1}{2} h + 2P_1,$$

$$P_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} G_1 \cdot \frac{1}{2} h_1 + 2P_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P_n = 2 \cdot \frac{1}{4} G_n \cdot \frac{1}{2} h_n + 2P_{n+1}, \text{ dazu}$$

die Beziehungen:

$$G_1 = \frac{1}{4} G, \quad h_1 = \frac{1}{2} h,$$

$$G_2 = \frac{1}{4} G_1, \quad h_2 = \frac{1}{2} h_1,$$

und

$$G_n = \frac{1}{4} G_{n-1}, \quad h_n = \frac{1}{2} h_{n-1}.$$

Durch Multiplikation der beiden letzten Gruppen von Gleichungen ergibt sich:

$$G_n = \frac{1}{4^n} \cdot G, \quad h_n = \frac{1}{2^n} \cdot h,$$

und wenn man diese Werte in das erste System von Gleichungen einsetzt:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{4} G \cdot \frac{1}{2} h + 2P_1 = \frac{1}{4} Gh + 2P_1,$$

$$P_1 = 2 \cdot \frac{1}{4^2} G \cdot \frac{1}{2^2} h + 2P_2 = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} Gh + 2P_2,$$

$$P_2 = 2 \cdot \frac{1}{4^3} G \cdot \frac{1}{2^3} h + 2P_3 = \frac{1}{4^3} \cdot \frac{1}{2^2} Gh + 2P_3,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$P_n = 2 \cdot \frac{1}{4^{n+1}} G \cdot \frac{1}{2^{n+1}} h + 2P_{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n} Gh + 2P_{n+1}.$$

Multipliziert man die zweite der Gleichungen mit 2^1 , die dritte mit 2^2 , ... die letzte mit 2^n , so geht hervor:

$$P = \frac{1}{4} Gh + 2P_1,$$

$$2P_1 = \frac{1}{4^2} Gh + 2^2 P_2,$$

$$2^2 P_2 = \frac{1}{4^3} Gh + 2^3 P_3,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$2^n P_n = \frac{1}{4^{n+1}} Gh + 2^{n+1} P_{n+1}, \text{ und hieraus}$$

durch Addition der Gleichungen:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{n+1}} \right) Gh + 2^{n+1} P_{n+1} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) Gh + 2^{n+1} P_{n+1}. \end{aligned}$$

Die Pyramide P_{n+1} ist jedenfalls kleiner, als das dreiseitige Prisma, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat; daher $G_{n+1} h_{n+1} > P_{n+1} > 0$ oder $\frac{1}{4^{n+1}} G \cdot \frac{1}{2^{n+1}} h > P_{n+1} > 0$. Hieraus folgt $\frac{1}{4^{n+1}} Gh > 2^{n+1} P_{n+1} > 0$, und wenn überall die positive Grösse $\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) Gh$ hinzugefügt wird:

$$\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^{n+1}} \right) Gh > P > \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) Gh.$$

Da die beiden Werte, zwischen denen P eingeschlossen ist, sich mit wachsendem n der Grösse $\frac{1}{3} Gh$ unaufhörlich nähern, so ist $P = \frac{1}{3} Gh$.

Zweite Lösung (Fig. 2). Man teile die Höhe der dreiseitigen Pyramide in n gleiche Teile und mache durch die Teilpunkte Schnitte parallel der Grundfläche; die Schnittfiguren mögen heissen

$G_1, G_2, \dots, G_{n-1}, G_n$, sodass $G_n = G$ ist. Ueber den Schnittfiguren errichte man Prismen, deren Seitenkanten einer Kante der gegebenen Pyramide parallel laufen, und die sämtlich die Höhe $\frac{1}{n}h$ haben. Errichtet man die Prismen, von G_n beginnend, alle nach der Spitze zugekehrt, so nehmen sie zusammen einen grösseren Raum ein, als die Pyramide; errichtet man aber die Prismen, mit G_1 anfangend und mit G_{n-1} aufhörend, nach der Grundfläche zugekehrt, so erfüllen sie nicht ganz den Raum der Pyramide. Demgemäss ergibt sich $G_n \frac{h}{n} + G_{n-1} \frac{h}{n} + \dots + G_1 \frac{h}{n} > P > G_1 \frac{h}{n} + G_2 \frac{h}{n} + \dots + G_{n-1} \frac{h}{n}$. Für jeden Schnitt G_p gilt aber die Gleichung: $G_p : G = \left(\frac{p}{n}\right)^2 : h^2$; daher $G_p = \frac{p^2}{n^2} G$. Die vorige Relation nimmt dadurch die Form an:

$$G \cdot \frac{h}{n} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} > P > G \cdot \frac{h}{n} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^2} \text{ oder}$$

$$*) G \cdot \frac{h}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} > P > G \cdot \frac{h}{n} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2} \text{ oder endlich}$$

$$G \cdot \frac{h}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) > P > G \cdot \frac{h}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Die beiden Werte, zwischen denen P liegt, nähern sich, der eine beständig abnehmend, der andere beständig zunehmend, mit wachsendem n der gemeinschaftlichen Grenze $\frac{1}{3}Gh$; darum ist $P = \frac{1}{3}Gh$.

II.

Die Fläche der Kugelkappe und der Raum des Kugelausschnitts.

Hilfssatz 1. Wenn ein gleichschenkliges Dreieck um eine durch seinen Scheitel gehende, in seiner Ebene gelegene, aber seine Fläche nicht durchschneidende Achse eine volle Umdrehung macht, so beschreibt die Grundlinie desselben eine krumme Fläche; diese Fläche ist dem Mantel eines geraden Cylinders gleich, welcher die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks zum Radius des Grundkreises und die Projektion der Grundlinie auf die Achse zur Höhe hat.

Beweis. Ist zunächst (Fig. 3) der Schenkel OA selbst die Umdrehungsachse, und fällt

*) Die Summe der Quadratzahlen lässt sich aus der identischen Gleichung $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ ableiten. Setzt man nämlich für x der Reihe nach $n, n-1, \dots, 2, 1$, so erhält man

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,$$

.

.

.

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1; \text{ folglich durch Addition}$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{1}^n n^2 + 3 \sum_{1}^n n + n, \text{ und weiter}$$

$$3 \sum_{1}^n n^2 = (n+1)^3 - 1 - 3 \sum_{1}^n n - n = (n+1)^3 - (n+1) - 3 \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2} = (n+1) \cdot \left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2} \right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}; \text{ also}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

man die Lote $BC \perp OA$, $OE \perp AB$, so ist $O(AB) = \pi BC \cdot AB$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ACB und AEO folgt aber $AC:BC = AE:OE = AB:2OE$; daher $BC \cdot AB = 2OE \cdot AC$ und $O(AB) = 2\pi OE \cdot AC$. Der letzte Ausdruck giebt aber den Mantel eines geraden Cylinders, dessen Grundradius = OE , dessen Höhe = AC ist.

Fällt zweitens (Fig. 4) die Achse nicht mit einem Schenkel zusammen, so ziehe man wieder $OE \perp AB$, ferner die Lote auf die Achse AD , EF , BC , endlich $AG \perp BC$. Da nunmehr AB den Mantel eines abgestumpften Kegels beschreibt, so ist $O(AB) = \pi AB \cdot (AD+BC)$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AGB und EFO folgt aber $AG:AB = EF:OE = (AD+BC):2OE$; daher $AB \cdot (AD+BC) = 2OE \cdot AG = 2OE \cdot DC$ und endlich $O(AB) = 2\pi OE \cdot DC$. —

Hilfssatz 2. Wenn ein gleichschenkliges Dreieck um eine durch seinen Scheitel gehende, in seiner Ebene gelegene, aber seine Fläche nicht durchschneidende Achse eine volle Umdrehung macht, so ist der räumliche Inhalt des von ihm erzeugten Umdrehungskörpers dem eines Kegels gleich, dessen Grundfläche so gross ist, wie die von der Grundlinie des Dreiecks beschriebene krumme Fläche, und dessen Höhe so gross ist, wie die Höhe des Dreiecks.

Beweis. Ist zunächst (Fig. 3) der Schenkel OA selbst Umdrehungsachse, und fällt man die Lote $BC \perp OA$, $OE \perp AB$, so ist $V(OAB) = V(OBC) + V(BCA) = \frac{1}{3} \pi BC \cdot OC + \frac{1}{3} \pi BC \cdot CA = \frac{1}{3} \pi BC \cdot OA$. Aus den ähnlichen Dreiecken BCA und OEA aber folgt $BC:AB = OE:OA$; also $BC \cdot OA = AB \cdot OE$. Demnach ist $V(OAB) = \frac{1}{3} (\pi BC \cdot AB) \cdot OE = \frac{1}{3} O(AB) \cdot OE$. —

Fällt zweitens (Fig. 4) die Achse nicht mit einem Schenkel zusammen, so zeichne man wieder $OE \perp AB$, ferner die Lote AD , EF , BC auf die Achse und $AG \perp BC$ und verlängere endlich BA bis zum Schnittpunkte J mit der Achse. Alsdann ist $V(OAB) = V(OBJ) - V(OAJ) = \frac{1}{3} \pi BC \cdot OJ - \frac{1}{3} \pi AD \cdot OJ = \frac{1}{3} \pi OJ \cdot (BC - AD) \cdot (BC + AD)$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BAG und OEJ folgt $BG:AB = (BC - AD):AB = OE:OJ$; mithin $OJ \cdot (BC - AD) = OE \cdot AB$ und weiter $V(OAB) = \frac{1}{3} \pi OE \cdot AB \cdot (BC + AD)$. Es ist aber $\pi AB \cdot (BC + AD) = O(AB)$; folglich $V(OAB) = \frac{1}{3} OE \cdot O(AB)$. w. z. b. w.

Auf Grund dieser beiden Hilfssätze soll nun der Flächeninhalt der Kugelkappe und der Rauminhalt des Kugelausschnitts ermittelt werden. Zu diesem Zwecke stelle man sich vor, dass der Kreisausschnitt OAB (Fig. 5) eine volle Umdrehung ausgeführt hat um die Achse OA , und es sich darum handle, die von dem Kreisbogen AB beschriebene Calotte und den von dem Kreis-ausschnitt OAB beschriebenen Kugelsektor zu bestimmen. Man teile den Bogen AB in n gleiche Teile. Es ist dabei gleichgültig, auf welchem Wege die Teilung erreicht ist; besteht man darauf, die Teilung mit den Hilfsmitteln der Geometrie auszuführen, so genügt es auch, n von der Form 2^p anzunehmen und das Wachsen von n durch fortgesetzte Verdoppelung geschehen zu lassen; die übrigen Schlussfolgerungen werden dadurch nicht beeinträchtigt. Ist CD einer der Teile, und zieht man die Sehne CD und an den Kreisbogen parallel mit CD die Tangente, welche OC und OD verlängert in den Punkten C' und D' trifft, so ist aus planimetrischen Gründen $\widehat{C'D'} > \widehat{CD} > \overline{CD}$, und darum besteht zwischen den durch die Umdrehung um OA entstehenden Flächen die Beziehung $O(\widehat{C'D'}) > O(\widehat{CD}) > O(\overline{CD})$. Das von O auf $C'D'$ gefällte Lot ist gleich dem Kugelradius r . Bezeichnet man noch das Lot von O auf CD mit ρ , und nennt man γ , δ , γ' , δ' die

Fusspunkte der von C, D, C', D' auf die Achse gefällten Lote, so ergibt sich durch zweimalige Anwendung des Hilfssatzes 1

$$2\pi r \cdot \overline{\gamma\delta'} > O(\widehat{CD}) > 2\pi\rho \cdot \overline{\gamma\delta}.$$

Es sind aber $\overline{\gamma\gamma'}$ und $\overline{\delta\delta'}$ die Projektionen der gleich grossen Strecken CC' und DD' auf die Achse, und da die Projektion einer Strecke desto grösser ausfällt, je kleiner ihr Neigungswinkel ist, so ist $\overline{\gamma\gamma'} > \overline{\delta\delta'}$; da ausserdem $\overline{\gamma\delta'} = \overline{\gamma\delta} + \overline{\gamma\gamma'} - \overline{\delta\delta'}$ ist, so folgt noch $\overline{\gamma\delta'} > \overline{\gamma\delta}$. Man wiederhole dieselbe Betrachtung für alle n Teile, in welche der Bogen AB geteilt ist, und nenne, um eine übersichtliche Rezeichnung zu haben, die Projektionen der einzelnen Sehnen auf die Achse nach der Reihe h_1, h_2, \dots, h_n ; ferner die den Strecken $\overline{\gamma\gamma'}$, $\overline{\delta\delta'}$ entsprechenden Projektionsstücke $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; endlich die auf einander folgenden n Bogen b_1, b_2, \dots, b_n . Auf solche Weise ergibt sich das System von Beziehungen

$$2\pi r(h_1 + \omega_0 - \omega_1) > O(b_1) > 2\pi\rho h_1,$$

$$2\pi r(h_2 + \omega_1 - \omega_2) > O(b_2) > 2\pi\rho h_2,$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$2\pi r(h_n + \omega_{n-1} - \omega_n) > O(b_n) > 2\pi\rho h_n;$$

folglich durch Summierung, wenn man noch $h_1 + h_2 + \dots + h_n$ durch h, ferner $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ durch \widehat{AB} ersetzt:

$$2\pi r(h + \omega_0 - \omega_n) > O(\widehat{AB}) > 2\pi\rho h.$$

Da $\omega_0 > \omega_n$ ist, so liegt der Flächeninhalt der Calotte immer, wie gross auch n angenommen wird, zwischen $2\pi rh$ und $2\pi\rho h$. Je grösser aber n wird, desto mehr nähert sich der Wert von ρ dem von r, und desto kleiner werden die Grössen ω . Stellt man sich die Anzahl der Teile ins Unendliche wachsend vor, so wird der Wert von ρ nicht mehr von r, die Grösse ω nicht mehr von Null, aber auch der auf einander folgende Zug der Sehnen nicht mehr von dem Bogen zu unterscheiden sein. Die beiden Werte, zwischen denen noch der Inhalt der Calotte liegen soll, fallen an dieser Grenze zusammen in den Ausdruck $2\pi rh$. —

Die gleichen Erwägungen, auf die durch die Rotation entstehenden Körper bezogen, liefern die Relation

$$V(O\widehat{C'D'}) > V(O\widehat{CD}) > V(O\overline{CD});$$

folglich durch Anwendung des Hilfssatzes 2:

$$\frac{1}{3}r \cdot O(\widehat{C'D'}) > V(O\widehat{CD}) > \frac{1}{3}\rho \cdot O(\overline{CD}).$$

Hieraus aber ergibt sich durch dieselben Schlussfolgerungen, wie bei der Calotte

$$\frac{2}{3}\pi r^2(h + \omega_0 - \omega_n) > V(O\widehat{AB}) > \frac{2}{3}\pi\rho^2 h$$

und endlich durch Uebergang zur Grenze für ein unendlich gross werdendes n

$$V(O\widehat{AB}) = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

III.

Der Satz des Cavalieri.

Der fragliche Satz des Cavalieri hat in der deutschen Uebertragung den Wortlaut:*) „Zwei Raumgebilde sind inhaltlich gleich, wenn in gleicher Höhe bei beiden geführte Schnitte gleiche

*) Nach M. Cantor, Geschichte der Mathematik, B II, p. 766.

Flächen ergeben.⁴⁵ Bonaventura Cavalieri hat seine Geometrie, aus welcher der Satz herstammt, unter dem Titel: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* im Jahre 1635 in Bologna veröffentlicht. In dieser Geometrie kommt der Satz mehrmals zur Sprache, weil der Autor demselben eine grosse Bedeutung beilegt, — ausführlicher als vierter Satz des zweiten Buchs und als erster Satz des siebenten Buchs. Jedesmal hat der Autor das Bedürfnis empfunden, den Satz zu beweisen. Von den gegebenen Beweisen ist aber keiner geeignet, um heute in den Unterricht übernommen zu werden. Der erste Beweis, den Cavalieri auf seine eigenste Methode der Indivisibilen gründet, leidet an Unklarheit.*) Seine unklare Auffassung einer Figur als Gesamtheit aller Geraden einer bestimmten Richtung, sowie eines Körpers als Gesamtheit aller Ebenen einer bestimmten Stellung ist zu entschuldigen durch seine Zeit, in welcher der Infinitesimalbegriff sich noch nicht zur völligen Klarheit durchgearbeitet hatte.

Der zweite Beweis, welchen Cavalieri nur giebt, weil er es selber anerkennen muss, dass man in den ersten Zweifel setzen kann, stellt an das Anschauungsvermögen zu grosse Anforderungen: Man soll die beiden Körper auf einer Grundebene parallel mit dieser soweit verschieben, dass sie einander teilweise durchdringen; von beiden Körpern wird jetzt der gemeinsame Raumteil fortgenommen. Die übrig bleibenden Stücke, gleichgültig ob noch zusammenhängend oder nicht, werden parallel der Grundebene von neuem verschoben, bis wieder Teile einander durchdringen, welche von beiden Körpern fortzudenken sind u. s. w. Bei der gemachten Voraussetzung, dass in allen Abständen mit der Grundfläche parallele Schnitte gleiche Schnittfiguren liefern, muss das Verfahren endlich dahin führen, dass die übrig bleibenden Stücke genau in einander passen.

Wenn aber die Beweise, welche Cavalieri von seinem Satze giebt, für unsere Schule nicht geeignet erscheinen, so ist es noch durchaus nicht gerechtfertigt den Satz ganz ohne Beweis hinzunehmen. Nötig ist der Satz für ein System der Geometrie überhaupt nicht. Soll er aber einmal aufgenommen werden, so hat dies als Lehrsatz zu geschehen, und darum sei hier zum Schluss noch ein Beweis des Satzes hinzugefügt, dessen Betrachtungen sich genau an die vorhin bei der Pyramide und Kugel ausgeführten anlehnen.

Lehrsatz des Cavalieri: Wenn es möglich ist, zwei Körper in eine solche Lage zwischen zwei parallelen Ebenen zu bringen, dass jede einzige die Körper schneidende Ebene, welche jenen Grenzebenen parallel gestellt ist, in beiden Körpern gleiche Schnittfiguren liefert, so haben die beiden Körper gleichen Rauminhalt.

Beweis. Man bringe die Körper zunächst in die besondere Lage zwischen zwei parallelen Ebenen, bei welcher jede neue mit den Grenzebenen parallele Ebene gleiche Schnittfiguren liefert, und breite zwischen den Grenzebenen $n-1$ neue, mit ihnen parallele Ebenen so aus, dass die benachbarten Ebenen den gleichen Abstand k von einander erhalten. Auf solche Weise wird der Raum V des einen Körpers in die n Teile $v_1, v_2 \dots v_n$, der Raum V' des andern Körpers in die n Teil $v'_1, v'_2 \dots v'_n$ zerlegt. Von den unzähligen Ebenen, die noch parallel mit den Grenzebenen möglich sind, werden die verschiedensten Schnittfiguren entstehen, welche im besondern Falle in Strecken und Punkte ausarten können und dann den Wert Null haben, sonst aber in beiden Körpern gleich gross sind. Bezeichnet man in dem ersten Teilraum die grösste so entstehende Schnittfigur mit a_1 , die kleinste mit b_1 (wobei nicht ausgeschlossen ist, dass $a_1 = b_1$ werden kann), und konstruiert man zwei Cylinder mit der Höhe k und den Grundflächen a_1 und b_1 , so sind die Volumina derselben $a_1 \cdot k$ und $b_1 \cdot k$; der Rauminhalt aber von v_1 sowohl wie von v'_1 wird kleiner sein als der grössere der Cylinder und grösser als der kleinere. Dasselbe lässt sich von

*) cf. M. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, II, p. 759 ff.

den übrigen Teilräumen sagen, in denen die grössten möglichen Schnittfiguren mit $a_2 \dots a_n$, die kleinsten mit $b_2 \dots b_n$ bezeichnet werden mögen, und führt zu dem doppelten System von Beziehungen:

$$\begin{array}{lcl} a_1 k > v_1 > b_1 k, & a_1 k > v_1' > b_1 k, \\ a_2 k > v_2 > b_2 k, & a_2 k > v_2' > b_2 k, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n k > v_n > b_n k & a_n k > v_n' > b_n k; \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

hieraus aber folgt:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)k > V > (b_1 + b_2 + \dots + b_n)k$$

$$\text{und } (a_1 + a_2 + \dots + a_n)k > V' > (b_1 + b_2 + \dots + b_n)k. -$$

Lässt sich nun zeigen, dass der Unterschied zwischen den Summen $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)k$ und $(b_1 + b_2 + \dots + b_n)k$ der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn nur n ausreichend gross genommen wird, so ist damit die Gültigkeit der Gleichung $V = V'$ dargethan. Um diesen Nachweis zu führen, unterziehe man irgend eins von den Schichtenpaaren v, v' einer genauern Untersuchung; a und b seien darin wieder die grösste und kleinste Schnittfigur. Der Ausnahmefall $a = b$ erledigt sich sofort durch die Gleichung $ak = v = v' = bk$. Ist aber $a > b$, so kann jede dieser Schnittfiguren ebensogut nur einmal, wie in unbestimmter Wiederholung auftreten, und auch der Fall ist denkbar, dass es ausser a und b keine andern Schnittfiguren in der Schicht giebt.

Schaltet man parallel den Grenzebenen noch $\nu - 1$ Ebenen in gleichen Abständen $\frac{k}{\nu}$ von einander und von den Grenzebenen ein, so entstehen ν kleine Schichtenpaare, für welche die grössten und kleinsten Schnittfiguren $\alpha_1 \dots \alpha_\nu$ und $\beta_1 \dots \beta_\nu$ heissen mögen. Aus den nunmehrigen Beziehungen $\alpha_1 \leq a \dots \alpha_\nu \leq a$ und $\beta_1 \geq b \dots \beta_\nu \geq b$ ergibt sich $(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \frac{k}{\nu} + \dots + (\alpha_\nu - \beta_\nu) \cdot \frac{k}{\nu} \leq (a - b)k$; die Gleichheit bezieht sich hier auf den ausnahmsweisen Fall, dass zu gleicher Zeit $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_\nu = a$ und $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_\nu = b$ ist. Es ist aber immer möglich, ν so gross anzunehmen, dass der soeben bezeichnete Ausnahmefall nicht eintritt, und dann muss $(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \frac{k}{\nu} + \dots + (\alpha_\nu - \beta_\nu) \cdot \frac{k}{\nu} < (a - b)k$ sein. Wiederholt man die nämliche Schlussfolgerung für sämtliche Schichtenpaare v und v' , so braucht die Zahl ν nicht gerade für alle Schichten dieselbe zu sein; es genügt aber für den vorliegenden Zweck, sich unter den vorkommenden Zahlen ν die grösste auszusuchen. Versteht man unter ν diese Zahl, so reicht es aus, statt der Ebenen im Abstände k solche im Abstände $\frac{k}{\nu}$ zu wählen, um sicher zu sein, dass der Unterschied zwischen den Summen $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)k$ und $(b_1 + b_2 + \dots + b_n)k$ sich verkleinert. Da das ganze Verfahren immer von neuem die Wiederholung gestattet, so lässt sich die fragliche Differenz der Null beliebig nahe bringen. w. z. b. w.



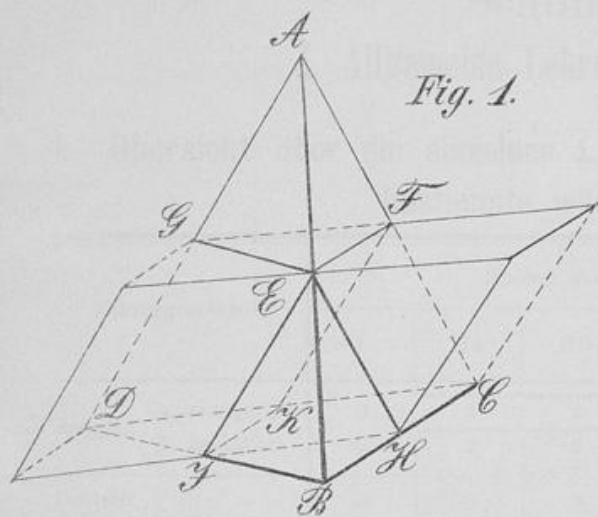


Fig. 1.

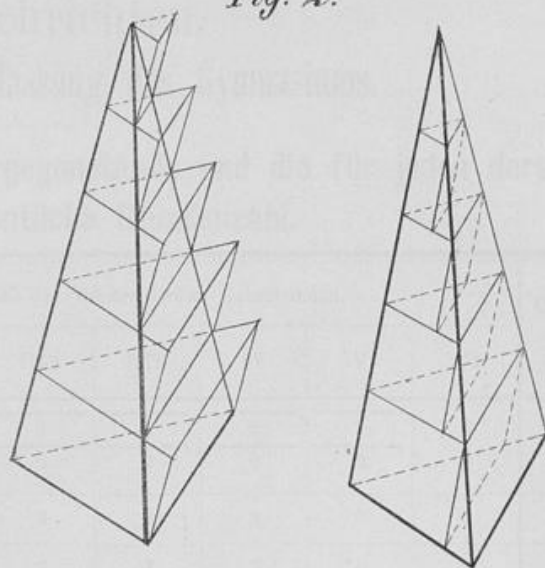


Fig. 2.

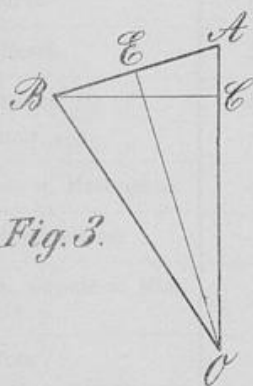


Fig. 3.

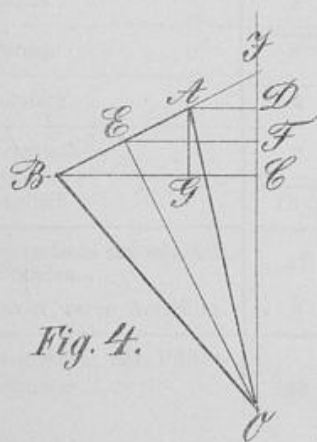


Fig. 4.

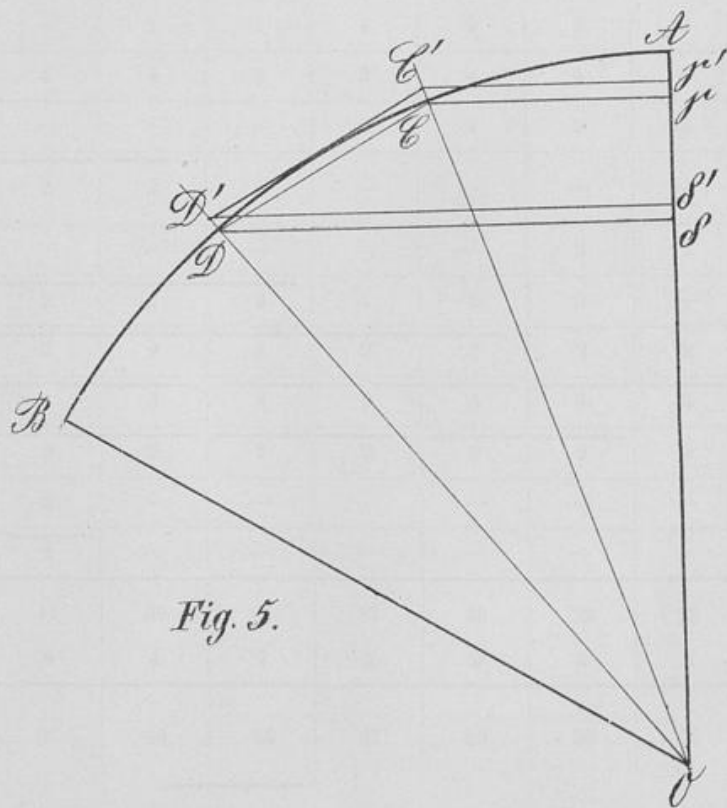


Fig. 5.

