Abhandlung

über das

elementare Kristallzeichnen.

Vorbemerkung.

In den Lehrbüchern der Mineralogie findet man gewöhnlich keine Anleitung für die Zeichnung der Kristalle; es soll daher hier, wenigstens für das reguläre und für das hexagonale System, eine solche gegeben werden, die sich hauptsächlich auf die Benützung der Symmetrieebenen und der Symmetrieachsen gründet und durch besondere Bezeichnungsweise eine einfache Darstellung der verschiedenen Formen gestattet.

Bei solchen parallel-perspektivischen Zeichnungen ist auf dreierlei zu achten:

1. Dass bei der Bestimmung von Punkten schiefe Schnitte möglichst vermieden werden.
2. Dass die Projektionen der Kanten nicht zusammenfallen.
3. Dass bezeichnende Eigentümlichkeiten wie z. B. die einspringenden Winkel der Zwillinge deutlich hervortreten.

Diese drei Forderungen befriedigen wir, indem wir jedesmal auf die orthogonale Projektion zurückgehen und so die berechnende Methode mit der zeichnenden verbinden, indem wir für den Winkel zwischen der Querrichtung und der Projektion der Längsrichtung (Projektionswinkel φ) und für das Verhältnis der Projektion einer Längsstrecke zu ihrer wahren Grösse (Verkürzungsverhältnis μ) geeignete Annahmen machen, und indem wir den Körper drehen, bis er die günstigste Ansicht gewährt.

Da die einer solchen Arbeit gesteckten Grenzen die Veröffentlichung der zu Grunde liegenden Zeichnungen nicht gestatten, so sind jedesmal die Masszahlen in Zentimetern angegeben und zugleich die Nummern der entsprechenden Figuren in dem Lehrbuch der Mineralogie von Max Baur (Verlag von Guttentag, Berlin und Leipzig 1886) in Klammer beigesetzt.

Wird nichts besonderes angegeben, so ist $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_3$.

Bezeichnungen.

Achsenstrecken und Achsenwinkel werden üblicherweise mit kleinen Buchstaben bezeichnet; für die Ecken wählen wir grosse lateinische Buchstaben. O ist der Mittelpunkt des Achsenkreuzes.

Im regulären System bedeutet
A gleichliegende Punkte auf den Hauptachsen,
B und C solche auf den Nebenachsen erster und zweiter Ordnung.
Im hexagonalen System bedeutet
C gleichliegende Punkte auf der Hauptachse,
A und B solche auf den Nebenachsen erster und zweiter Ordnung.

Gleichliegende Punkte auf verschiedenen gleichwertigen Achsen lassen sich durch Indices unterscheiden, die beiden Richtungen derselben Achse unterscheiden wir durch Vorzeichen. Für verschiedene Punkte derselben Achse wählen wir verschiedene Buchstaben.

Die Zeichenebene geht durch die Querachse (X-Achse) und durch die Vertikalachse (Z-Achse); sie steht senkrecht auf der Längsachse (Y-Achse); y ist der Abstand eines beliebigen Punktes von der Zeichenebene, y′ ist die parallelperspektivische Projektion dieses Abstandes; $\mu = \frac{y'}{y}$.

Für die orthogonale Projektion bedeuten A^2, B^2, C^2 die zusammenfallenden Projektionen zweier zu der Zeichenebene symmetrischer Punkte A, B, C.

Die Projektionen ihrer Abstände von der Zeichenebene seien a′, b′, c′; dann erhalten wir ihre parallelperspektivischen Bilder, indem wir durch A^2, B^2, C^2 Parallelen zu Y′ ziehen und auf diesen Parallelen nach beiden Seiten hin die Strecken a′, b′, c′ abtragen.

Die Bedeutung anderer Bezeichnungen erhellt aus dem Zusammenhang.

I. Das reguläre Kristallsystem.

Die Symmetrie-Verhältnisse.

Drei Hauptachsen A, drei Hauptsymmetrieebenen. Vier Nebenachsen B, die Würfeldiagonalen. Sechs Nebenachsen C, die Medianen der Winkel zwischen den Hauptachsen; sechs Nebensymmetrieebenen.

Bezeichnungen.

Wir setzen AO = a und bezeichnen mit b den Abstand der B^2 von X oder Z, mit c den Abstand der Punkte C von den sie nicht enthaltenden Hauptsymmetrieebenen. Für die Punkte C in der Zeichenebene bedeutet also c den Abstand von X oder Z, für die Punkte C^2 auf X oder Z dagegen den Abstand von O.

A) Einfache Formen.

a) Die Ganzflächner.

1. Das Oktaeder. Fig 1. (55).

A, A^2; a = 6 a′ = 2.

2. Der Würfel. Fig. 2 (56).

B^2; b = 3 b′ = 1.

3. Das Rhomben-Dodekaeder. Fig. 3 (57).

A, B; $a = 6$ $\quad b = 3$ $\quad a' = 2$ $\quad b' = 1$.

4. Das Pyramiden-Oktaeder. Fig. 4 (61).

$a : a : 2a$, $\varphi = 15^0$, $\mu = {}^1/_4$. $a = 6$, $b = 2{,}4$, $a' = 1{,}5$, $b' = 0{,}6$.

Man findet $b = {}^2/_5 a$, indem man die Koordinaten des Schnittpunktes der B-Achse $x = y = z$ mit der Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{2a} = 1$ berechnet.

5. Das Ikositetraeder. Fig. 5 (59).

$a : 2a : 2a$, $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_4$. $a = 4{,}8$, $b = 2{,}4$, $c = 3{,}2$, $a' = 1{,}2$, $b' = 0{,}6$, $c' = 0{,}8$.

B ist der Schnittpunkt der B-Achse mit der Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{2a} = 1$ und C der Schnittpunkt der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{z}{2a} = 1$ und $x = z$, woraus sich die obigen Werte von b und c ableiten lassen.

6. Der Pyramidenwürfel. Fig. 6 (58).

$a : 2a : \infty a$, $\varphi = 15^0$, $\mu = {}^1/_3$. $a = 5{,}4$, $b = 3{,}6$, $a' = 1{,}8$, $b' = 1{,}2$.

Der Wert $b = {}^2/_3 a$ folgt aus $\frac{x}{a} + \frac{z}{2a} = 1$ und $x = y = z$.

7. Das Hexakisoktaeder. Fig. 7 (59).

$a : {}^2/_3 a : 3a$, $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_4$. $a = 4$, $b = 2$, $c = 2{,}4$, $a' = 1$, $b' = 0{,}5$, $c' = 0{,}6$.

Die Werte $b = {}^1/_2 a$ und $c = {}^3/_5 a$ ergeben sich aus den Gleichungen:

1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{{}^3/_2 a} + \frac{z}{3a} = 1$ und $x = y = z$.

2) $\frac{x}{a} + \frac{z}{{}^3/_2 a} = 1$ und $x = z$.

b) Die tetraedrischen Halbflächner.

Vorbemerkung.

Unter Tetraederecken D verstehen wir Punkte auf den B-Achsen in den Oktanten, deren ursprüngliche Flächen infolge der Hemiedrie verschwunden sind. Sobald solche Ecken D auftreten, so haben wir b′ und d′ von B^2 und D^2 aus nur nach einer Seite und zwar abwechselnd nach vorn und nach hinten abzutragen.

1. Das Tetraeder. Fig. 8 (82).

$d = a = 4{,}2$, $d' = 1{,}4$.

2. Das Pyramiden-Tetraeder. Fig. 9 (84).

${}^1/_2(a : 2a : 2a)$, $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_4$. $d = a = 4{,}8$, $b = 2{,}4$, $d' = 1{,}2$, $b' = 0{,}6$.

3. Das Deltoeder. Fig. 10 (85).

${}^1/_2(a : a : 2a)$, $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_4$. $a = 6$, $b = 2{,}4$, $d = 4$, $a' = 1{,}5$, $b' = 0{,}6$, $d' = 1$, $b = {}^2/_5 a$, wie beim Pyramidenoktaeder.

Den Wert von $d = {}^2/_3 a$ findet man, wenn man D als Schnittpunkt der B-Achse $-x = y = z$ mit der Ebene $\frac{x}{2a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$ betrachtet.

4. Das Hexakistetraeder. Fig. 11 (80).

$^1/_2(a : {}^3/_2a : 3a)$, $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_3$. $a = 6$, $b = 3$, $d = 4{,}5$, $a' = 2$, $b' = 1$, $d' = 1{,}5$. Der Wert $d = {}^3/_4a$ ergiebt sich aus $\frac{x}{3a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{{}^3/_2a} = 1$ und $- x = y = z$.

c) Die pyritoedrischen Hemieder.

Vorbemerkung.

Unter asymmetrischen Punkten E verstehen wir Punkte, die zwar in einer Hauptsymmetrieebene, aber nicht auf einer Symmetrieachse liegen. Wir unterscheiden sie durch Indices, indem wir festsetzen, dass sich der Index 1 auf die Ebene YZ, der Index 2 auf die XZ-Ebene, der Index 3 auf die XY-Ebene bezieht.

Die Abstände der Punkte E von den in derselben Hauptsymmetrieebene liegenden Hauptachsen bezeichnen wir mit e unter Beifügung zweier Indices, von denen sich der erste auf den Punkt, der zweite auf die Achse beziehen soll, so dass z. B. e_{13} den Abstand eines der Punkte E_1 von der Z-Achse bedeutet. Die Abstände der Punkte E_1 und E_3 von der Zeichenebene sind e_1 und e_3 und ihre Projektionen e_1' und e_3'.

1. Das Pentagondodekaeder. Fig 12 (97).

$^1/_2(a : 2a : \infty a)$, $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_3$. $e_{21} = e_{31} = e_{13} = a = 5{,}4$, $e_{12} = e_{23} = e_{31} = {}^1/_2a = 2{,}7$. $b = 3{,}6$, $e_1' = 1{,}8$, $e_3' = 0{,}9$, $b' = 1{,}2$.

Wir erhalten e_{21} und e_{23}, wenn wir E_2 als Schnittpunkt der Geraden $\frac{z}{a} = 1$ und $\frac{x}{a} + \frac{z}{2a} = 1$ betrachten. Auf der X-Achse liegen zwei Punkte $E_3{}^2$, im Abstand $e_{32} = a$ von O; auf der Z-Achse liegen zwei Punkte $E_1{}^2$ im Abstand $e_{12} = {}^1/_2a$ von O.

Dabei ist $e_3 = {}^1/_2a$ und $e_1 = a$.

2. Das Diploeder.

$^1/_2[a : {}^3/_2a : 3a]$, $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_5$. $a = 7$, $e_{12} = e_{23} = e_{31} = {}^3/_7a = 3$. $e_{21} = e_{32} = e_{13} = {}^6/_7a = 6$. $a' = 1{,}4$, $e_3' = 0{,}6$, $e_1' = 1{,}2$, $b = 3{,}5$, $b' = 0{,}7$.

Die Werte von e folgen aus den Gleichungen $\frac{x}{a} + \frac{z}{{}^3/_2a} = 1$ und $\frac{x}{3a} + \frac{z}{a} = 1$.

B) Kombinationen.

Man erhält sämtliche Kombinationen, indem man die Kanten der einfachen Formen, beziehungsweise die der einfacheren Kombinationen in bestimmten Verhältnissen teilt und die Teilpunkte T, U, V, W in geeigneter Weise verbindet.

Hat eine Kante gleichwertige Endpunkte wie z. B. AA, so erhalten wir auf ihr für $AT = \lambda AA$ zwei Teilpunkte T, die für $\lambda = {}^1/_2$ zusammenfallen. Hat eine Kante ungleichwertige Endpunkte wie z. B. AB, so giebt $AT = \lambda AB$ nur einen Teilpunkt T.

Die Teilung der Kanten lässt sich mit Hilfe von Parallelen bewerkstelligen, wobei sich verschiedene Zeichenproben ergeben.

a) Holoedrische Kombinationen.

1. Das Oktaeder.

$a = 6$, $AT = \lambda AA$. Oktaeder mit Würfel.
$\lambda = {}^1/_2$. Kuboktaeder. Fig. 14 (64).
$\lambda = {}^1/_3$. Archimedisches Polyeder. Fig. 15.
$\lambda = {}^1/_4$. Oktaeder mit Würfel. Fig. 16 (63).

2. Der Würfel.

$b = 4{,}8$, $BU = \lambda BB$. Würfel mit Oktaeder.
$\lambda = {}^1/_3$. Fig. 17(65).
$\lambda = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ (bekannte Konstruktion des regulären Achtecks) Archimedisches Polyeder. Fig. 18.

3. Das Rhombendodekaeder.

$a = 6$, $AT = \lambda AB$. Kombination mit dem Würfel: BT. $\lambda = {}^1/_2$. Fig. 19 (67).
$BU = \lambda_1 BA$. Kombination mit dem Oktaeder: AU. $\lambda_1 = {}^1/_2$. Fig. 20 (69).
$\lambda = \lambda_1 = {}^1/_4$. Rhombendodekaeder mit Würfel und Oktaeder: TU (70.)

$AT = \lambda AB$, $TV = \lambda_2 TT$ gibt eine Kombination derselben Formen: V, bei der die Ecken B und T zugleich durch die den Oktaederflächen parallelen Ebenen V abgestumpft werden: $\lambda = {}^1/_2$, $\lambda_2 = {}^1/_3$. Fig. 21 (71).

Eine andere Kombination derselben Formen erhält man mit $BU = \lambda_1 BA$, $UW = \lambda_3 UU$.

Bei dieser werden die Ecken A und U durch die zu den Würfelflächen parallelen Ebenen W abgestumpft. $\lambda_1 = {}^1/_2$, $\lambda_3 = {}^1/_3$. Fig. 22.

Oktaeder mit Rhombendodekaeder.

A seien die Ecken des Oktaeders und R die des kantenabstumpfenden Rhombendodekaeders; dann ist aus der orthogonalen Projektion ersichtlich, dass für

$$AT = \lambda AA \text{ zugleich } AR = \lambda AO.$$

Man hat also für $\lambda = {}^1/_8$. $a = 7{,}2$, $r = 6{,}3$, $a' = 2{,}4$, $r' = 2{,}1$. Fig. 23 (68).

Würfel mit Rhombendodekaeder.

Die Ecken S des kantenabstumpfenden Rhombendodekaeders liegen auf den B-Achsen, von B entfernt um $BS = \lambda BO$, wenn $BU = \lambda BB$ gemacht wird, wie sich aus der Betrachtung des Würfeldiagonalschnittes ergibt. Man hat also für $\lambda = {}^1/_{10}$
$b = 3$, $s = 2{,}7$, $b' = 1$, s' 0,9. Fig. 24 (66).

4. Das Pyramidenoktaeder.

$a : a : 2a$. $a = 6$, $b = 2{,}4$, $\varphi = 15^0$, $\mu = {}^1/_4$. $AT = \lambda BA$, $\lambda = {}^1/_4$. Fig. 25.

Pyramidenoktaeder mit Oktaeder: AT.

$AT = \lambda AB$, $\lambda = {}^1/_4$. Fig. 26.

Pyramidenoktaeder mit Würfel und Rhombendodekaeder: BT.

Die Ecken A werden abgestumpft durch die Quadrate T und die Kanten AA durch die Rechtecke T.

Werden auch noch die Ecken B abgestumpft durch die gleichseitigen Dreiecke T, so verschwindet die ursprüngliche Form ganz und man erhält eine Kombination des Oktaeders mit dem Würfel und Rhombendodekaeder (T). Fig. 27 (71).

Werden dann auch noch die zweierlei Kanten TT gleich, so entsteht ein von acht gleichseitigen Dreiecken und von achtzehn Quadraten begrenzter archimedischer Körper. Fig. 28.

Für diesen Fall ergibt sich λ aus den Gleichungen

$$TT : AA = (1-\lambda) : 1 \text{ und } TT : BB = \lambda : 1. \quad AA = \sqrt{2} \times a. \quad BB = {}^4/_5 a.$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+0{,}8} = \frac{25 - 10\sqrt{2}}{17}$$

Kombination mit dem Würfel: TUB. Fig. 29.

$AT = {}^1/_2 AB$, $AU = {}^3/_{10} AA$.

Die Ecken A werden durch die Ebenen TU abgestumpft. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion folgt aus der Betrachtung der orthogonalen Projektion.

Es seien nämlich F und G die Fusspunkte der von B^2 und T^2, beziehungsweise U^2, auf OA gefällten Lote, so ist $AG = {}^1/_2 AF = {}^1/_2 \times {}^3/_5 a = {}^3/_{10} a$, also auch $AU = {}^3/_{10} AA$.

Kombination mit dem Rhombendodekaeder. Fig. 30.

$AT = {}^1/_3 AB$, $AR = {}^1/_{15} AO$. $a = 6$, $b = 2{,}4$, $r = 5{,}6$, $a' = 1{,}5$, $b' = 0{,}6$, $r' = {,}1{,}4$.

Hiebei bezeichnen wir mit R die Rhombendodekaederecken; es sei ferner M die Mitte einer in der Zeichenebene gelegenen Kante AA, und N der Schnittpunkt der OM mit der entsprechenden Rhombendodekaederfläche, so ist $MN = {}^1/_3 B^2M$ und $B^2M = {}^1/_5 OM$, also $MN = {}^1/_{15} OM$ und daher auch $AR = {}^1/_{15} AO$, wie oben angenommen wurde.

5. Das Ikositetraeder.

$a : 2a : 2a$. $a = 4{,}8$, $b = 2{,}4$, $c = 3{,}2$. $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_4$.

$BU = {}^1/_2 BC$. Ikositetrader mit Oktaeder: ACU. Fig. 31.

$AT = {}^1/_2 AC$. Ikositetraeder mit Würfel: BCT. Fig. 32.

Kombination mit Würfel und Oktaeder: CTU. Fig. 33.

Andere Kombinationen erhalten wir, wenn wir dieselben Punkte anders verbinden:

Oktaeder mit Ikositetraeder: TA. Fig. 34.

Gleichzeitige Abstumpfung der Ecken B und C.

Würfel mit Ikositetraeder: UB. Fig. 35 (75).

Gleichzeitige Abstumpfung der Ecken A und C.

Ikositetraeder mit Rhombendodekaeder: ABTU. Fig. 36 (76).

Die Ecken C werden durch die zu den Rhomben AB parallelen Rhomben TU abgestumpft.

6. Der Pyramidenwürfel.

$a : 2a : \infty a$. $a = 5{,}4$, $b = 3{,}6$, $\varphi = 15^0$, $\mu = {}^1/_3$.

$AT = {}^1/_2 AB$ Pyramidenwürfel mit Würfel. Fig. 37 (73).

Die Kombination mit dem Rhombendodekaeder ergibt sich folgendermassen:

Es sei M die Mitte von AA und N der Schnittpunkt der Geraden OM mit der zugehörigen Rhombendodekaederfläche; es sei ferner BT $= {}^1/_3$BA, dann ist auch $B^2N = {}^1/_3 B^2M$ und $B^2M : B^2O = {}^1/_6a : {}^2/_3a$. $B^2M = {}^1/_4 B^2O$, $B^2N = {}^1/_{12} B^2O$. Die Ecken S des kantenabstumpfenden Rhombendodekaeders sind also von B entfernt um ${}^1/_{12}$BO und wir haben: a = 5,4, b = 3,6, s = 3,3, a′ = 1,8, b′ = 1,2, s′ = 1,1. Fig. 38.

7. Das Hexakisoktaeder.

$a : {}^3/_2a : 3a$. a = 4, b = 2, c = 2,4. $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_4$.

Jeder Achtundvierzigflächner, für den $b = {}^1/_2a$ ist, liefert eine einfache Kombination mit dem Rhombendodekaeder: AT $= {}^1/_2$AC, BU $= {}^1/_2$ BC, ABTU. Fig. 39.

Eine Kombination mit dem Oktaeder erhält man mit BU $= {}^1/_3$BC, BW $= {}^1/_5$BA (Fig. 40), denn die Oktaederfläche $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$ wird von der Geraden BC, deren Gleichungen sich mit Hilfe der Koordinaten von B $({}^1/_2a, {}^1/_2a, {}^1/_2a)$ und von C $({}^3/_5a, 0, {}^3/_5a)$ aufstellen lassen, geschnitten im Punkte Q $({}^2/_3a, -{}^1/_3a, {}^2/_3a)$.

Hieraus folgt BQ $= {}^3/_5$BC, da BQ : BC $= ({}^1/_2a - {}^2/_3a) : ({}^1/_2a - {}^3/_5a) = {}^1/_6 : {}^1/_{10} = 5 : 3$.

Verschiebt man nun die Oktaederfläche sich selbst parallel, bis sie die BA in W schneidet, wobei BW $= {}^1/_5$BA, so ist BU $= {}^1/_5$BQ $= {}^1/_3$BC.

Die Kombination mit dem Würfel erhalten wir mit AT $= {}^1/_4$AC, AV $= {}^1/_5$AB. Fig. 41.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Betrachtung der orthogonalen Projektion.

Rücken die Flächen des Oktaeders und des Würfels herein, bis sie durch C gehen, so werden die Punkte C für diese Flächen Mittelpunkte der in diesem Falle auf einen Punkt zusammengeschrumpften Kanten.

Man hat dann

BU = BC, BW $= {}^3/_5$BA, AW $= {}^2/_5$AB. Fig. 42.
AT = AC, AV $= {}^4/_5$AB, BV $= {}^1/_5$BA. Fig. 43.

Wird dieses Verfahren noch weiter fortgesetzt, so werden Oktaeder und Hexaeder die Träger der Kombination und wir erhalten:

Oktaeder mit Hexakisoktaeder mit AT $= {}^1/_2$AC, AW $= {}^1/_2$AB. Fig. 44
und Würfel mit Hexakisoktaeder mit BU $= {}^1/_2$BC, BV $= {}^1/_{10}$BA. Fig. 45 (78).

b) Kombinationen der tetraedrischen Hemieder.

Vorbemerkung.

Sind alle Würfelecken B vorhanden, so dürfen bei Abtragung der Strecken BT, wenn es sich um Kombinationen der tetraedrischen Hemiedrie handelt, nur die abwechselnden Oktanten berücksichtigt werden.

1. Das Tetraeder.

d = a = 4,8. DT $= {}^1/_4$DD $= {}^1/_2$DA. Tetraeder mit Gegentetraeder. Fig. 46 (87).

Bei der Kombination des Würfels oder Rhombendodekaeders mit dem Tetraeder können die Teilpunkte T auf zweierlei Arten verbunden werden; bei der einen Art ist der Würfel oder das Rhombendodekaeder, bei der anderen das Tetraeder Träger der Kombination.

Würfel mit Tetraeder.

$b = 4{,}8$, $BT = \frac{1}{3}BB$. Fig. 47 (90).

Tetraeder mit Würfel.

$BT = \frac{2}{3}BB$ oder $BT = \frac{1}{3}BB$ mit anderer Verbindung der T. Fig. 48 (89).

Rhombendodekaeder mit Tetraeder.

$a = 6$, $b = 3$, $BT = \frac{1}{2}\,BA$. Fig. 49 (92).

Die abwechselnden Ecken B werden abgestumpft durch die Dreiecke T.

Tetraeder mit Rhombendodekaeder.

$BT = \frac{1}{2}BA$ mit anderer Verbindung der T. Fig. 50 (91).

Vom ursprünglichen Rhombendodekaeder bleiben die vier Pyramiden BT übrig, deren Basisecken T zu den Sechsecken T, den Tetraederflächen, zu verbinden sind.

2. Das Pyramidentetraeder.

$\frac{1}{2}(a : 2a : 2a)$. $a = 4{,}8$, $\varphi = 15^0$, $\mu = \frac{1}{3}$.

$BT = \frac{1}{2}BB$. Pyramidentetraeder mit Tetraeder gleicher Stellung. Fig. 51 (93).

Die Kombination mit dem Gegentetraeder findet man folgendermassen:

Die Tetraederfläche $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$ wird von der Geraden BD, deren Endpunkte die Koordinaten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a$, und a, $-a$, a haben, im Punkte $Q(\frac{3}{5}a, \frac{1}{5}a, \frac{3}{5}a)$ geschnitten.

Hieraus folgt: $DQ : DB = (a - \frac{3}{5}a) : (a - \frac{1}{2}a)$ oder $DQ = \frac{4}{5}DB$. Macht man also $DT = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{4}DD$, so ist $DU = \frac{1}{2}DQ = \frac{2}{5}DB$ zu machen. Fig. 52 (94).

c) Kombinationen der pyritoedrischen Hemiedrie.

1. Das Pentagondodekaeder: $\frac{1}{2}[a : 2a : \infty a]$.

$ET = BT = \frac{1}{2}EB$ Pentagondodekaeder mit Würfel. Fig. 53 (100).

Die Kanten EE werden abgestumpft durch die Rechtecke T.

$ET = BT = \frac{1}{2}EB$ Pentagondodekaeder mit Oktaeder. Fig. 54 (102).

Die Ecken B werden abgestumpft durch die Dreiecke T.

$BT = BE$ Pentagondodekaeder mit Oktaeder im Gleichgewicht. Fig. 55 (103).

Bezeichnen wir die Symmetrieachsen der Fünfecke mit (AE), so erhalten wir eine Kombination des Oktaeders mit dem Pentagondodekaeder, wenn wir $AT = \frac{1}{2}AE$ und $AU = \frac{1}{2}(AE)$ machen und die T und U in geeigneter Weise verbinden. Fig. 56 (104).

2. Das Diploeder: $\frac{1}{2}[a : \frac{3}{2}a : 3a]$.

$a = 7$, $\varphi = 30^0$, $\mu = \frac{1}{5}$.

$BT = \frac{1}{2}BE$. Kombination mit dem Oktaeder. Fig. 57.

Abstumpfung der Ecken B durch die Dreiecke T.

$BT = BE$. Diploeder mit Oktaeder im Gleichgewicht. Fig. 58.

$AT = \frac{1}{2}AE$. Oktaeder mit Diploeder. Fig. 59.

Gleichzeitige Abstumpfung der Ecken B und E.

Würfel mit Diploeder.

Legen wir durch E_2 eine Würfelfläche parallel zur XY-Ebene, so schneidet diese die Z-Achse in einem Punkte, der von A_3 um 1 cm entfernt ist und folglich die $E_1{}^2A_3$ im Verhältnis 3 : 4 teilt. Bezeichnen wir nun mit (AE) die längeren und mit AE die kürzeren Hauptebenenkanten des Diploeders, so erhalten wir Kombinationen beider Flächen

mit $AT = AE$, $AU = \frac{1}{4}(AE)$. Fig. 60
und mit $AT = \frac{1}{2}AE$, $AU = \frac{1}{8}(AE)$. Fig. 61.

Rücken die Würfelflächen weiter herein, so erhält man, wie die orthogonale Projektion zeigt, eine neue Kombination mit

$AU = \frac{1}{2}(AE)$, $EW = \frac{1}{6}(AE)$, $EV = \frac{2}{5}EB$. Fig. 62.

Gehen die Würfelflächen durch den Schnittpunkt der (AE) mit der Symmetrieachse C, so fallen U und W mit diesem Punkte zusammen, der als Schnittpunkt der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{z}{{}^3/_2a} = 1$ und $x = z$ die Koordinaten $\frac{3}{5}a$, $\frac{3}{5}a$ besitzt.

Es ergibt sich hieraus:

$AU : (AE) = \frac{3}{5}a : \frac{6}{7}a$, $AU = \frac{7}{10}(AE)$, $EU = \frac{3}{10}(AE)$
$EV : EB = (\frac{6}{7}a - \frac{3}{5}a) : (\frac{6}{7}a - \frac{1}{2}a)$, $EV = \frac{18}{25}EB$.

Die Konstruktion geschieht am einfachsten von der orthogonalen Projektion aus. Fig. 63 (105).

Die Punkte U sind die Mitten der Würfelkanten; diese selbst kommen erst zum Vorschein, wenn die Flächen noch weiter hereinrücken.

Für diesen Fall bezeichnen wir die Ecken des Würfels mit H und die Teilpunkte auf HH mit P. Wir gehen zunächst von der orthogonalen Projektion aus, in der wir P als Schnitt der HH mit der zugehörigen VW erhalten.

Für $EV = \frac{4}{5}EB$, $EW = \frac{2}{6}(EA)$ oder $BV = \frac{1}{5}EB$, $EW = \frac{1}{3}(EA)$ ist $h = 4$.
V hat die Koordinaten: $\frac{4}{5} \times 3{,}5 = 2{,}8$, $3 + \frac{4}{5} \times 0{,}5 = 3{,}4$.
W hat die Koordinaten 0 $\quad 3 + \frac{1}{3} \times 4 = 4\frac{1}{3}$.
Die Koordinaten von P sind x, 4, woraus folgt: $(-x) : (4\frac{1}{3} - 4) = 2{,}8 : (3{,}4 - 4\frac{1}{3})$ oder $x : 1 = 2{,}8 : (13 - 10{,}2)$ also $x = 1$, $HP = \frac{3}{8}HH$.
$h = 4$, $b = 3{,}5$, $e_{21} = e_{32} = e_{13} = 6$, $e_{12} = e_{23} = e_{31} = 3$.
$h' = 0{,}8$, $b' = 0{,}7$, $e_1' = 1{,}2$, $e_3' = 0{,}6$, $BV = \frac{1}{5}BE$, $HP = \frac{3}{8}HH$. Fig. 64.

C) Zwillinge.

1. Das Oktaeder. $\varphi = 60^0$, $\mu = \frac{1}{3}$, $a = 6$.

Die Zwillingsebene sei parallel der Oktaederfläche $(-A_1)A_2A_3$, oben, links, vorn.
Die sechs Kanten, die die Ecken $(-A_1)$, A_2, A_3 mit den Ecken der Gegenfläche verbinden, werden halbiert und die Mitten der von $(-A_1)$ ausgehenden Kanten werden bezeichnet mit M_1, die Mitten der von A_2 ausgehenden mit M_2 und die Mitten der von A_3 ausgehenden mit M_3. Die Punkte M sind die Ecken eines regulären Sechsecks.

Das Gegendreieck $A_1(-A_2)(-A_3)$ wird in seiner Ebene um 180^0 um seinen Schwerpunkt S gedreht und kommt in die neue Lage $G_1G_2G_3$; die Verbindungslinien entsprechender Punkte A_1G_1, $(-A_2)G_2$, $(-A_3)G_3$ werden durch S halbiert.

Verbindet man noch G_1 mit den beiden M_1, G_2 mit den beiden M_2, G_3 mit den beiden M_3, so ist die Zeichnung des Zwillings vollendet. Fig. 65 (213).

2. Der Würfel. $\varphi = 15^0$, $\mu = {}^1/_4$, $b = 4$.

Die Zwillingsachse sei die Würfeldiagonale PQ; P liege hinten, links, oben; Q vorn, rechts, unten. Die andern sechs Würfelecken werden bezeichnet mit B; die Mitten M der sie verbindenden Zickzackkanten BB bilden ein regelmässiges Sechseck mit den Seitenmittelpunkten N.

Die Punkte N werden mit P und mit Q verbunden und die Strecken PN und QN um ein Drittel ihrer Länge über N hinaus verlängert. Dadurch erhält man sowohl die Ecken B des gegebenen Würfels als auch die Ecken H eines neuen Würfels, der mit jenem die Zwillingsachse PQ und die Zwillingsebene M gemein hat. Fig. 66 (216).

3. Das Tetraeder. $\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_3$, $a = 4{,}8$.

Die korrelaten Tetraeder geben einen Zwilling. Fig. 67 (219).

4. Das Pentagondodekaeder: ${}^1/_2[a : 2a : \infty a]$. $\varphi = 52{}^1/_2{}^0$, $\mu = {}^1/_3$, $a = 5{,}4$.

Die beiden korrelaten Pentagondodekaeder geben einen Zwilling. Fig. 68 (220).

Die Zeichnungen der Zwillinge werden deutlicher, wenn die heraustretenden Teile der einen Form schattiert werden.

II. Das hexagonale Kristallsystem.

Die Symmetrieverhältnisse.

Eine Hauptachse C; eine Hauptsymmetrieebene AB. Drei Nebenachsen erster Ordnung A; drei Symmetrieebenen CA. Drei Nebenachsen zweiter Ordnung B (Zwischenachsen) und drei Nebensymmetrieebenen zweiter Ordnung CB (Zwischenebenen).

Bezeichnungen.

Punkte auf X bezeichnen wir mit A, Punkte auf den andern Nebenachsen mit A_1, Punkte auf Y mit B und Punkte auf den andern Zwischenachsen mit B_1.

Wir setzen ferner $OA = a$, $\frac{a}{2}\sqrt{3} = e_a$, $\frac{b}{2}\sqrt{3} = e_b$; e_a und e_b sind also die Höhen in gleichseitigen Dreiecken mit den Seiten a, beziehungsweise b.

Die Punkte A_1 projizieren sich auf X nach $A_1{}^2$ im Abstand ${}^1/_2a$ von O; ihre Entfernung von der Zeichenebene ist e_a.

Die Punkte B projizieren sich nach O; ihr Abstand von der Zeichenebene ist b.

Die Punkte B_1 projizieren sich auf X nach $B_1{}^2$ im Abstand e_b von O; ihre Entfernung von der Zeichenebene ist $^1/_2$b.

Die halbe Höhe der Prismen bezeichnen wir mit h.

A) Einfache Formen.

a) Ganzflächner.

1. Die hexagonale Pyramide erster Stellung.

$a = 4{,}8$, $^1/_2a = 2{,}4$, $a_1' = {}^1/_3e_a$, $c = 8$. Fig. 69 (109).

2. Das hexagonale Prisma erster Stellung.

$a = 4{,}8$, $^1/_2a = 2{,}4$, $a_1' = {}^1/_3e_a$, $h = 5$. Fig. 70 (111).

3. Die hexagonale Pyramide zweiter Stellung.

$e_b = a = 3{,}6$, $b_1 = {}^2/_3e_a$, $b = {}^4/_3e_a$, $b_1' = {}^2/_9e_a$, $b' = {}^4/_9e_a$, $c = 8$. b' ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite 0,8. $b_1' = {}^1/_2b'$. Fig. 71 (110).

4. Das hexagonale Prisma zweiter Stellung.

$e_b = a = 3{,}6$, $b_1' = {}^2/_9e_a$, $b' = {}^4/_9e_a$, $h = 5$. Fig. 72 (112).

5. Die dihexagonale Pyramide: $a : {}^4/_3a : c$.

$\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_6$, $a = 4{,}2$, $^1/_2a = 2{,}1$, $a_1' = {}^1/_6e_a$, $e_b = 3{,}6$, $b_1 = {}^4/_7e_a$, $b = {}^8/_7e_a$, $c = 6$, $b_1' = {}^2/_{21}e_a$, $b' = {}^4/_{21}e_a$. Fig. 73 (107).

a_1' ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite 0,7, b' die eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite 0,8 und b_1' die eines solchen mit der Höhe 0,4.

Man erhält diese Werte, indem man B_1 als Schnittpunkt der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{^4/_3a} = 1$ und $x = y$ betrachtet.

Die schiefwinkligen Koordinaten von B_1 sind somit $^4/_7a$, $^4/_7a$ und folglich seine Abscisse im rechtwinkligen System: $e_b = {}^4/_7a + {}^2/_7a = {}^6/_7a = 3{,}6$: ferner ist

$$b_1 = \frac{e_b}{\sqrt{3}} = \frac{6a}{7\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{7}a = {}^4/_7e_a.$$

6. Das dihexagonale Prisma.

$\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_6$, $a = 4{,}2$, $^1/_2a = 2{,}1$, $a_1' = {}^1/_6e_a$, $e_b = 3{,}6$, $b_1' = {}^2/_{21}e_a$, $b' = {}^4/_{21}e_a$, $h = 6$. Fig. 74 (108).

b) Die rhomboedrischen Halbflächner.

Vorbemerkung.

Die sechs Nebenecken des Rhomboeders, die wir mit D bezeichnen, bilden zwei gleichseitige Dreiecke mit den Seiten 2a und den Höhen $2e_a$, deren Ebenen zu der Hauptsymmetrieebene AB parallel sind und deren Schwerpunkte E im Abstande $^1/_3$c von O auf der Hauptachse liegen.

Wir ziehen durch die beiden Punkte E Parallelen zu X und Y und erhalten so zwei neue Achsensysteme, für die die Punkte D den Punkten B des alten Systems entsprechen; nur haben wir der Hemiedrie wegen festzusetzen, dass von D^2 und $D_1{}^2$ aus die Strecken d′ und d_1' nur einmal und zwar abwechselnd nach vorn und nach hinten abzutragen sind.

1. Das Rhomboeder: $^1/_2$(a : a : c).

$\varphi = 30^0$, $\mu = {}^1/_6$. $c = 3$, $^1/_3c = 1$, $e_d = a = 4{,}2$, $d_1 = {}^2/_3e_a$, $d = {}^4/_3e_a$, $d_1' = {}^1/_9e_a$, $d' = {}^2/_9e_a$. Fig. 75 (126).

2. Das Skalenoeder: $^1/_2$(a : $^4/_3$a : 2c) = R2.

Dieses Skalenoeder hat dieselben Ecken D wie das Rhomboeder a : a : c. Wir erhalten somit das Skalenoeder, wenn wir die Rhomboederecken D mit den Hauptecken S des Skalenoeders verbinden. Fig. 76 (129).

Beweis: F sei der auf Y liegende Schnittpunkt der Grundkanten AA_1 der hexagonalen Pyramide a : a : c, und M die Mitte von A_1A_1. Die Entfernungen dieser Punkte von O sind $f = 2e_a$ und $m = e_a$.

D ist der Schnittpunkt der Geraden CF und (— C)M oder $\frac{z}{c} + \frac{y}{2m} = 1$ und $\frac{z}{-c} + \frac{y}{m} = 1$. Seine Koordinaten sind folglich $^1/_3$c und $^4/_3$m.

Die Grundkanten B_1A_1 der dihexagonalen Pyramide a : $^4/_3$a : 2c schneiden sich auf Y in einem Punkte G. Um die Entfernung g dieses Punktes von O zu erhalten, stellen wir mit Hilfe der Koordinaten von $A_1({}^1/_2a,\ e_a)$ und von $B_1({}^6/_7a,\ {}^4/_7e_a)$ die Gleichung der A_1B_1 auf:

$$\frac{x - {}^1/_2a}{{}^6/_7a - {}^1/_2a} = \frac{y - e_a}{{}^4/_7e_a - e_a}$$

und erhalten hieraus für $x = 0$, $g = {}^8/_5e_a = {}^8/_5m$, während $b = {}^8/_7m$. Um aber ein Nebeneck des Skalenoeders zu finden, haben wir die Geraden SG und (—S)B zum Schnitte zu bringen, deren Gleichungen sind:

$$\frac{z}{2c} + \frac{y}{{}^8/_5m} = 1 \text{ und } \frac{z}{-2c} + \frac{y}{{}^8/_7m} = 1.$$

Die Koordinaten ihres Schnittpunktes sind $^1/_3$c und $^4/_3$m. Die Nebenecken des Skalenoeders fallen also zusammen mit den Rhomboederecken D.

B. Die Kombinationen.

Man erhält die Kombinationen, indem man die Kanten der einfachen Formen proportional teilt und die Teilpunkte in geeigneter Weise verbindet oder indem man neue dem ursprünglichen parallele Achsensysteme einführt, deren Mittelpunkte E, F, G, H auf der Hauptachse liegen und von O die Entfernungen e, f, g, h haben. Die Pyramidenhöhen c sind in diesem Falle von dem nächstgelegenen Achsenmittelpunkte zu rechnen und nur nach der freien Seite hin abzutragen.

a) holoedrische Kombinationen.

1. Prisma mit Pyramide gleicher (erster) Stellung, Parallelachsensystem H.

a = 4,8, h = 2, c = 5. Fig. 77 (117).

2. Pyramiden gleicher (erster) Stellung C und S.

a = 4,8, c = 8, s = 6, AT = $^1/_2$AC. Fig. 78 (116).

3. Prisma erster Stellung mit Pyramide zweiter Stellung.

$\varphi = 15^0$, $\mu = {}^1/_3$.

Die Mitten der AA seien bezeichnet mit M.

Auf den Prismakanten werden die Strecken AT = h, auf den Mittellinien der Seitenflächen des Prismas die Strecken MU = i abgetragen; dann werden die Punkte T und U unter einander und mit C verbunden.

Dabei ist i — h = $^1/_4$(c — h); denn da AO durch MM im Punkte P im Verhältnis 1 : 4 geschnitten wird, so ist auch (i — h) : (c — h) = AP : AO = 1 : 4.

Wir erhalten daher die Kombination CTU mit a = 4,8, h = 1,5, i = 3, c = 7,5. Fig. 79 (118).

4. Pyramiden verschiedener Stellung.

a = 4,8, c = 8, CT = $^1/_2$CA, AU = $^1/_4$AA. Fig. 80 (120).

Die Kombinationskanten TU werden parallel zu den Mittellinien CM mit a = 4,8, c = 8, CT = $^1/_4$CA, MU = $^1/_4$MA. Fig. 81 (121).

Die Spitze C der Pyramide erster Stellung wird ersetzt durch die Spitze S der Pyramide zweiter Stellung, wenn wir AT = $^1/_2$AC, AU = $^1/_4$AA machen, die TT in den Punkten V halbieren und die Hauptachse durch die Ebenen UV in S schneiden.

Die Ebene der T trifft die Hauptachse in J. Die AO wird durch UU in P im Verhältnis 1 : 8, die TJ durch VV in Q im Verhältnis 1 : 4 geteilt; hieraus folgt:

OP = $^7/_8$OA, JQ = $^3/_4$JT = $^3/_8$OA und somit SO : SJ = OP : JQ = 7 : 3 oder
SO : JO = 7 : 4, also SO = s = $^7/_4$JO = $^7/_8$c.

Wir erhalten daher die Kombination SVU mit $a = 4{,}8$, $c = 8$, $s = 7$.
$AU = \frac{1}{4}AA$, $AT = \frac{1}{2}AC$, $TV = \frac{1}{2}TT$. Fig. 82 (121).

Eine andere Kombination mit der Spitze S ergibt sich folgendermassen. Es sei:
$$AT = \tfrac{1}{2}AC,\ TV = \tfrac{1}{2}\ TT,\ AW = \tfrac{1}{4}AC.$$
Die Hauptachse werde durch die Ebene VW in S, durch die Ebene der T in J und durch die Ebene der W in K getroffen. VV teilt die JT in Q im Verhältnis 3 : 4. Es ist also $JQ = \frac{3}{4}JT = \frac{3}{8}OA$ und folglich, da $KW = \frac{3}{4}OA$ ist, $SJ : SK = JQ : KW = 1 : 2$, also $SK = 2SJ$ oder $SO - KO = 2(SO - JO)$ und da $JO = \frac{1}{2}c$, $KO = \frac{1}{4}c$,
$$SO = s = \tfrac{3}{4}c.$$
Wir erhalten also die Kombination SVWA mit $a = 4{,}8$, $c = 8$, $s = 6$.
$AT = \frac{1}{2}AC$, $TV = \frac{1}{2}TT$, $AW = \frac{1}{4}AC$. Fig. 83 (119).

b) Rhomboedrische Kombinationen.

1. Prisma erster Stellung mit Rhomboeder.

Auf den Prismenkanten werden die Strecken $AT = h$ nach oben und nach unten, auf den Mittellinien der Prismenflächen dagegen die Strecken $MU = i$ abwechselnd nach oben und nach unten abgetragen. Die Punkte U werden C und mit T verbunden.
$\varphi = 15^0$, $\mu = \frac{1}{3}$, $a = 4{,}8$, $h = 2$, $i = 4$, $c = 6$. Fig. 84 (134).

2. Prisma zweiter Stellung mit Rhomboeder.

Die Strecken $BT = h$ werden von den Punkten B_1 und $(-B)$ aus nach oben, von den Punkten $(-B_1)$ und B aus nach unten abgetragen. Umgekehrt werden die Strecken $BU = i$ von B_1 und $(-B)$ aus nach unten, von $(-B_1)$ und B aus nach oben abgetragen.
$\varphi = 30^0$, $\mu = \frac{1}{3}$. $a = 4$, $h = 2$, $i = 4$, $c = 6$. Fig. 85 (135).

C) Zwillinge.

1. Rhomboeder.

Die untere Hälfte der Fig. 75 bleibt, das Sechseck A ist auszuziehen; für die obere Hälfte erhalten d_1, d, d_1' und d' dieselben Vorzeichen wie für die untere.
Zwillingsebene die Basis. Fig. 86 (408).

2. Skalenoeder.

Die untere Hälfte der Fig. 76 bleibt, das Zwölfeck AB ist auszuziehen, für die obere Hälfte wechseln die d das Vorzeichen, sie bekommen also dieselben Vorzeichen wie für die untere Hälfte.
Zwillingsebene die Basis. Fig. 87 (410).