Die geometrische Analysis der Aufgaben.

Die Mathematik stand bei den alten Griechen in hohen Ehren. Selbst das Wort (*μαθηματική τέχνη* oder *ἐπιστήμη*) ist griechischen Ursprungs und bedeutet Lernkunst, Studium. Ueber die Bedeutung dieser Wissenschaft in der jetzigen Zeit sagt Littrow[1]:

„Abgesehen von der Nothwendigkeit dieser (mathematischen) Kenntnisse im wissenschaftlichen wie im gemeinen Leben; abgesehen, daß ohne sie das schönste und dem Menschen angemessenste Studium, das der Natur im Großen[*]), beinahe unmöglich ist, so sollte doch schon der wohlthätige Einfluß, welchen die Cultur dieser Wissenschaft auf die Bildung des menschlichen Geistes überhaupt äußert, uns bestimmen, ihr in dem Felde unserer öffentlichen Erziehung eine der ersten Stellen anzuweisen. Welche andere Doctrin bietet diese Bestimmtheit der Begriffe, diese strenge Ordnung der Schlüsse, diese Gewißheit der Beweise dar? Endlich, und dies möchte in unseren Tagen nicht zu übersehen sein, bietet diese Wissenschaft, als die beste Disciplin des menschlichen Geistes, unserer Jugend und durch sie den kommenden Geschlechtern die angemessenste Gelegenheit dar, ihre geistige Kraft zu üben und ihren Sinn für das Höchste, was uns angeht, für Recht und Wahrheit zu wecken und zu stählen."

Die Mathematik umfaßt die Wissenschaft des Raumes und der Zahl (Geometrie und Arithmetik). Allein nicht beide Zweige haben in Bezug auf die Zwecke und gewisse Stufen des Gymnasiums gleichen Antheil an der hohen Ehre.

Plato (429—347), der größte unter den griechischen Philosophen, sah die Kenntniß der Geometrie als die beste Vorschule der Philosophie an[2]), d. h. derjenigen Wissen-

---

[1]) Littrow. Die Wunder des Himmels. 5. Aufl. 1866. S. 8.

[*]) Die Mathematik ist die Grammatik der Natur.

[2]) *Πρὸ τῶν προθύρων τῶν αὐτοῦ γράψας ὑπῆρχε Πλάτων.*
Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω που τὴν στέγην.
Τουτέστιν· ἄδικος μηδεὶς παρεισερχέσθω τῇδε.
Ἰσότης γὰρ καὶ δίκαιόν ἐστι γεωμετρία.
Tzetzes chiliad. VIII. 249, 972. sqq.

schaft, welche sich die Erforschung der Wahrheit zum Ziele gesetzt hat. Kein Lehrgegenstand ist nämlich so geeignet, eine reine Wahrheitsliebe in dem Gemüthe zu erwecken und zu beleben, als die Geometrie. Alles Interesse des Satzes liegt ganz darin, daß er wahr ist, und daß man die unbeschränkteste Ueberzeugung von der Wahrheit erlangt.

Die ministerielle Instruction [3]) sagt: Es ist zweckmäßig, in den mittleren Classen mehr die geometrischen Constructionsaufgaben, als die calculatorischen zur Anwendung zu bringen, welche für diese Stufe weniger bildende Wirkung haben, als die Beschäftigung mit der Raumgrößenlehre.

Noch unvergeßlich sind dem Unterzeichneten die Worte seines ehemaligen Lehrers, Prof. J. A. Diesterweg in Bonn: In der Geometrie steckt mehr Mathematik als im Calcul.

Die geometrische Analysis der Aufgaben hat nichts anderes zum Gegenstande als die Zurückführung der Auflösung der Aufgabe auf die näheren oder entfernteren Bedingungen, von welchen die Auflösung abhängt.

Bei der Analysis einer geometrischen Aufgabe ist es meistens nöthig, einige Hülfslinien zu ziehen, und es kommt zunächst auf die geschickte Wahl derselben an. Das Wesen der geometrischen Analysis besteht nun etwa in Folgendem:

Man nimmt an, die Aufgabe sei bereits gelöst, und entwirft nach dem Augenmaß eine Zeichnung, worin die gegebenen und die gesuchten Stücke vorkommen. In den meisten Fällen wird es von Nutzen sein, alle in der Zeichnung vorkommenden Linien als unbegrenzt zu denken, die Verlängerung gegebener Linien diesen gleich zu machen, durch einen gegebenen Punkt gerade Linien zu ziehen, die auf anderen senkrecht stehen oder mit ihnen parallel sind, Winkel gegebenen Winkeln gleich zu machen, aus gegebenen Punkten mit einem gegebenen Radius Kreise zu beschreiben, aus gegebenen Stücken eines Dreiecks das Dreieck selbst zu zeichnen und mit anderen zu vergleichen, Dreiecke und überhaupt Figuren zu zeichnen, welche einer gegebenen congruent oder ähnlich sind oder zu ihr ein gegebenes Verhältniß haben. Ist der Unterschied zweier Seiten eines Dreiecks oder Vierecks gegeben, so kann man die kleinere von der größeren abschneiden oder die kleinere um den gegebenen Unterschied verlängern.

Hat man den Zusammenhang des Unbekannten mit dem Gegebenen aufgefunden, so werden die einzelnen Theile nach möglichster Kürze und Einfachheit zusammengestellt. Man überzeugt sich aber erst von der Richtigkeit der Auflösung, wenn die Schlüsse, welche bei der Herleitung gemacht wurden, auch in umgekehrter Ordnung ihre Gültigkeit behalten. Wenn bei der Zusammenstellung (Synthesis, Construction) die

[3]) Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der Realschulen und der höheren Bürgerschulen. Berlin. 1859. S. 60.

Linien, welche zur Construction des einen Theils gedient haben, so viel als thunlich, auch zur Construction der folgenden Theile mit benutzt werden, so wird die Lösung eine elegante genannt.

Der Beweis hat zu zeigen, daß das Gefundene wirklich die verlangten Eigenschaften hat und enthält dieselben Schlüsse, nur in umgekehrter Ordnung.

Endlich bleibt noch zu untersuchen übrig, ob und unter welchen Bedingungen und auf wie viele Arten aus den gegebenen Stücken das Gesuchte gefunden werden kann. Diese Untersuchung heißt Determination (διορισμός).

Newton[4]) gibt als oft vorkommende Hülfsmittel der geometrischen Analysis mehrere Sätze aus Euklid's Elementen an, welche bezüglich den folgenden aus Boyman's Lehrbuch (3. Aufl.) entsprechen:

§. 24: 3; §. 33: 1, 2, 3, 5; §. 50: 1, 2, 4; §. 55: 1; §. 63: 2;
§. 77: 1; §. 78: 1, 2, 3, 4; §. 79: 2.; §. 80: 1, 2, 3. Zus. §. 82: 1.

Die übrigen Regeln, welche Newton ebendaselbst gibt, beziehen sich mehr auf die algebraische Analysis geometrischer Aufgaben; von der letzteren soll hier nicht die Rede sein.

Ein wichtiges Hülfsmittel der geometrischen Analysis gewähren die geometrischen Oerter. Bekanntlich wird jede gerade oder krumme Linie, deren Punkte alle eine ganz bestimmte Eigenschaft haben, der geometrische Ort dieses Punktes genannt. Kennt man nun zwei geometrische Oerter eines zu bestimmenden Punktes, so liegt er im Durchschnitte derselben und ist folglich gefunden. In Boyman's Lehrbuch der Geometrie sind fünfzig geometrische Oerter aufgeführt. Dieses Buch hat dadurch eine wesentliche Vermehrung seiner Brauchbarkeit erhalten und wird sich bald neben Heis' Sammlung eine ebenbürtige Stelle erobern. Wer mehr von der Methode der Griechen wissen will, und das soll wenigstens jeder Lehrer der Mathematik, denn

„In die Tiefe mußt Du steigen,
Soll sich Dir das Wesen zeigen,“

der findet es zunächst in folgenden Werken: Euklid's Data von J. Ch. Schwab. Apollonius von Perga (in Pamphylien) ebene Oerter von Camerer. Die Bücher des Apollonius de sectione rationis, de sectione determinata, wiederhergestellt von Robert Simson, de inclinationibus, wiederhergestellt von Sam. Horsley — in freier Uebersetzung aus dem Lateinischen von J. A. Diesterweg.

Bei der Wahl der Aufgaben ist darauf zu sehen, daß auch ein Schüler von mittlerer Fähigkeit die Auflösung versuchen kann. Hat er sie gefunden, so wird sein freudiges εὕρηκα ihm Muth und Kraft geben, schwerere Aufgaben zu versuchen und zu lösen.

[4]) Is. Newton. Arithmetica universalis cum comment. I. Castillionei. Amatelod. 1761. p. 140. sqq.

Es soll hier zur Erläuterung des Gesagten, wie zur Uebung und zum Selbststudium für Schüler der mittleren Classen, Anleitung zur geometrischen Analysis nach der Methode der Alten, und zwar ohne Figurentafel, da die Entwerfung der Zeichnung nach der Beschreibung selbst eine nützliche Uebung ist, in einigen Beispielen[5]) gegeben werden.

In allen diesen Aufgaben ist angenommen, daß die gegebenen Punkte, Linien und Winkel wie die gesuchten Stücke alle in derselben Ebene liegen.

Behufs kürzerer Fassung der Aufgaben bezeichnen:

1) in einem beliebigen Dreiecke ABC:

   a, b, c, die Seiten BC AC, AB,
   α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel,
   h_a, h_b, h_c die entsprechenden Höhentransversalen,
   m_a, m_b, m_c die entsprechenden Mitteltransversalen.

2) in einem beliebigen Vierecke:

   a, b, c, d die Seiten AB, BC, CD, DA,
   e, f die Diagonalen AC, BD,
   $<$ ef den von den Diagonalen e, f gebildeten Winkel.

I. Ein Dreieck zu construiren aus:

1) $a + b$, c, $\alpha - \beta = \delta$

Analysis. Es sei ABC, (worin B rechts von A liegt) das verlangte Dreieck. Verlängert man, um die gegebene Summe der Seiten in die Zeichnung zu bringen, AC[6]) um CD = CB, so ist in dem gleichschenkligen Dreiecke BCD der Winkel $CBD = \frac{2R - \alpha - \beta}{2} = \varphi$; kommt hierzu der Winkel β, so ist der ganze Winkel

$$ABD = \frac{2R - \alpha - \beta}{2} + \beta = \frac{2R - (\alpha - \beta)}{2} = R - \delta/_2,$$ also auch gegeben.

Man kennt nun von dem Dreieck ABD die Seite AD, die Seite AB und den Gegenwinkel der größeren Seite Es kann also construirt werden und man kennt alsdann von dem $\triangle$ ABC die Winkel α und β, mithin eine Seite und die anliegenden Winkel.

Construction. Auf einer unbegrenzten Geraden nehme man $AB = c$, trage an B (etwa unterhalb AB) einen Winkel $ABE = {}^1/_2\delta$, errichte in B auf EB die unbegrenzte Senkrechte BD, schneide von A aus mit $a + b$ dieselbe in D und mache den

---

[5]) In scientiis addiscendis magis exempla prosunt quam praecepta: Newton.

[6]) d. h die Verlängerung geschehe über C hinaus; im anderen Falle würde es heißen: man verlängere CA.

Winkel $\varphi = D$; trifft der hinreichend verlängerte Schenkel die Gerade AD in C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Weil $D = \varphi$, ist $CD = CB$, folglich $CB + AC = a + b$. Ferner ist $\alpha + \beta + 2\varphi = 2\varphi + 2\beta + \delta$, denn jede dieser Summen $= 2R$, mithin $\alpha + \beta = 2\beta + \delta$, folglich $\alpha - \beta = \delta$.

Determination. Damit die Seite $AD = a + b$ die Senkrechte trifft, muß $a + b > c$.

2) $a - b$, c, $\alpha - \beta = \delta$.

Analysis. Das Dreieck ABC sei das verlangte. Macht man auf BC die $CD = CA$, so ist $DB = a - b$; zieht man AD so ist, weil $CA = CD$, $\angle CDA = CAD = x$, der andere Winkel an A sei y, so ist

$$\begin{array}{rl} & \alpha = x + y \\ & \beta = x - y \\ \hline \text{folglich} & \alpha - \beta = 2y \\ & \frac{\alpha - \beta}{2} = y = \delta/_2. \end{array}$$

Man kennt jetzt von dem $\triangle$ ABD zwei Seiten und einen Winkel.

Construction. Man nehme eine Gerade $AB = c$, lege an A, etwa oberhalb AB, einen Winkel $BAD = {}^1/_2\,\delta$, beschreibe aus B mit $a - b$ einen Kreis; dieser schneide den Schenkel AD in D, verlängere BD und mache den Winkel $DAC = ADC$; treffen sich die Geraden AC und DC in C, so ist ABC das verlangte $\triangle$.

Beweis. Es hat die gegebene Seite $AB = c$, und weil $\angle DAC = ADC$, ist $AC = CD$, mithin $DB = a - b$. Ferner ist $DAB = {}^1/_2\,\delta$, also nach Analysis $\alpha - \beta = \delta$.

Determination. Wenn der aus B mit $a - b$ beschriebene Kreis den Schenkel AD nicht trifft, also wenn $a - b$ kleiner ist als die aus B auf AD gefällte Senkrechte, so ist die Auflösung unmöglich. Ist $a - b$ gleich dieser Senkrechte,n also $\angle ADB = R$, so wird $AC \parallel DC$, und ist wieder die Auflösung unmöglich. Schneidet endlich der Kreis den Schenkel AD, so geschieht dies zwar in 2 Punkten; da aber AC die verlängerte BD treffen muß, so ist die Summe der inneren Winkel kleiner als 2 R, und, da wegen der Gleichheit der Schenkel die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind, so ist jeder derselben kleiner als 1 R, folglich sein Nebenwinkel stumpf. Es gibt demnach im letzteren Falle ein Dreieck mit den verlangten Eigenschaften.

3) h_c, m_a, m_b.

Analysis. Man nehme an, die Aufgabe sei bereits gelöset und ABC sei das gesuchte Dreieck, D die Mitte von BC, E die Mitte von AC, ferner sei $AD = m_a$, $BE = m_b$, CF die Senkrechte aus C auf $AB = h_c$. Fällt man aus D auf AB die Senkrechte DG, so ist $DG = {}^1/_2\,CF = {}^1/_2 h_c$; da auch $AD = m_a$ gegeben, so kennt man in dem rechtwinkligen $\triangle$ ADG die Hypotenuse und eine Kathete. Bekanntlich schneiden sich die Mitteltransversalen AD und BE in O so, daß $OD = \frac{1}{2} AO$ oder $\frac{1}{3} AD$, $EO = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{3} EB$. Man kennt nun O und OB, also auch die Lage und Größe von EB. Hieraus ergibt sich folgende

Construction. Auf einer unbegrenzten Geraden errichte man in einem beliebigen Punkte G eine Senkrechte, mache sie gleich $\frac{1}{2} h_c = GD$, schneide aus D mit $m_a = DA$ den anderen Schenkel in A, so erhält man das $\triangle$ AGD. Man mache $DO = \frac{1}{3} AD$, beschreibe aus O mit $\frac{2}{3} m_b$ als Radius einen Kreis, welcher die begrenzte Gerade in B schneide, verlängere BO um $OE = \frac{1}{3} m_b$, endlich verlängere man AE und BD bis sie sich in C treffen, so ist ABC das verlangte $\triangle$.

Beweis. Aus der Construction folgt, daß $AD = m_a$, $BE = m_b$. Es ist nun zu beweisen, daß D die Mitte von BC, und E die Mitte von AE ist. In dem $\triangle$ AOB sei K die Mitte von AO, und L die Mitte von OB, verbinde K mit L, und ziehe ED, so ist $KL = ED$, und parallel mit AB wie mit ED; es ist $KL = \frac{1}{2} AB$, also auch $ED = \frac{1}{2} AB$. Zieht man aus D mit AC eine Parallele, welche AB in M trifft, so ist $AM = ED$ (wegen Congruenz der Dreiecke AED und AMD), also M die Mitte von AB, deshalb ist auch D die Mitte von BC; weil D die Mitte von BC und DE $\parallel$ AB, ist auch E die Mitte von AC. Fällt man aus C auf AB die Senkrechte CF, so ist diese gleich $2\,DG = 2 \cdot \frac{1}{2} h_c = h_c$.

Determination. Da der aus O mit $\frac{2}{3} m_b$ beschriebene Kreis im Falle des Schneidens 2 Pkte., also außer B noch einen Pkt. B′ bestimmt, so erhält man ein zweites $\triangle$ AB′C′, das dieselben Stücke hat.

II. Drei festliegende in A, B, C sich schneidende Geraden sind gegeben; in BC einen Punkt X so zu bestimmen, daß, wenn auf AB und AC beziehlich die Senkrechten XM und XN gefällt werden,

1) $XM + XN$ gleich ist einer gegebenen Strecke a.

Dieser Aufgabe wird man folgende zwei leicht zu erweisende Sätze vorausgehen lassen.

Die von den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Schenkel gefällten Senkrechten sind einander gleich.

Die aus einem beliebigen Punkte in der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Schenkel gefällten Senkrechten sind zusammen so groß, wie die aus einem Endpunkte der Grundlinie auf einen Schenkel gefällte Senkrechte.

Analisis. Es sei X so bestimmt, das $XM + XN = a$, so liegt X in der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks. Zieht man durch X eine Gerade, welche auf den Richtungen AC und AB gleiche Stücke abschneidet, diese seien beziehlich AN und AK, so muß sowohl die Senkrechte KE auf AC, als die Senkrechte NL auf AB der Strecke a gleich sein.

Construction. Man lege zwischen die Schenkel des Winkels A eine Linie $= a$, welche senkrecht auf AB ist und den Schenkel AC in N treffe, schneide auf der Richtung AB eine Gerade $AK = AN$ ab, verbinde N mit K, so ist der Durchschnitt mit BC der gesuchte Punkt X.

Beweis. Denn fällt man aus X auf AB und AC die Senkrechten, so ist nach dem vorigen Satze $XM + XN = a$.

2) $XM - XN = a$.

Analysis. Es sei wieder X so bestimmt, daß $XM - XN = a$. Verlängert man XN um ein Stück $NQ = a$, so daß $XO = MX$, und zieht durch O eine Parallele mit AC, welche die Richtung BA in Q schneidet, verbindet alsdann Q mit X, so sind die Dreiecke QOX und QXM congruent, folglich ist der Winkel OQM durch QX halbirt und X liegt in dieser Halbirungslinie und auch in BC.

Construction. Man errichte in einem beliebigen Punkte der Geraden AC eine Senkrechte, mache dieselbe gleich a, durch den Scheitelpunkt O dieser Senkrechten ziehe man mit AC eine Parallele, welche die Richtung BA in Q schneide, halbire den Winkel OQB, so bestimmt die Halbirungslinie den Punkt X.

Beweis. Denn fällt man aus X die Senkrechten XM und XO, so sind diese einander gleich, folglich ist $XM - NX = a$.

III. Drei in A, B, C sich schneidende Geraden und eine Strecke a sind gegeben; in AB einen Punkt x und in AC einen Punkt y so zu bestimmen, daß

1) $AX = XY = CY$.

Analysis. Wenn $AX = XY$, so sind die Winkel an der Grundlinie AY einander gleich; weil $XY = CY$, so sind auch, wenn CX gezogen ist, in dem Dreiecke CYX die Winkel an der Grundlinie CX einander gleich; es ist aber $\angle YCX = \frac{1}{2} AYX = \frac{1}{2} CAB$, mithin ist die Richtung der Geraden CX gegeben.

Construction. Man lege im Punkte C an AC einen Winkel $= \frac{1}{2} CAB$; der Schenkel schneide AB in X, in X an CX trage man einen Winkel $= ACX$, so bestimmt sein Schenkel in AC den Punkt Y.

Beweis folgt leicht aus der Construction.

2) $AX = XY$ und $BX = AY$.

Analysis. Ist $AX = XY$, so ist auch $\angle XAY = XYA$. Ist ferner $BX = AY$, so wird, wenn aus Y mit AB eine Parallele und aus B mit XY eine Parallele gezogen wird, welche in O sich schneiden, $BX = YO = AY$ sein. Weil $BO \parallel XY$, so wird die verlängerte BO die Richtung AC, etwa in Q, schneiden, und es ist $\angle AQB = QAB$. Zieht man AO, so ist $\angle YOA = YAO$; $\angle YOA$ ist auch seinem Wechselwinkel OAB gleich, folglich ist der Winkel CAB halbirt, und der Punkt O ist gefunden.

Construction. Man schneide von B aus die Richtung AC unter einem Winkel $= CAB$ der Durchschnittspunkt sei Q, verbinde B mit Q, halbire den Winkel CYB durch eine Gerade, welche BQ in O trifft, ziehe aus O mit BA die Parallele OY, aus Y mit BQ die Parallele YX.

Beweis ist aus der Analysis leicht zu entnehmen.

3) $AX = CY$ und $XY = a$.

Analysis. Es sei XY so bestimmt, daß $AX = CY$ und $XY = a$. Man zieht aus X mit AC eine Parallele und aus C mit XY eine Parallele, welche die vorhin gezogene in O treffe, so ist $XO = CY = AX$, folglich ist, wenn A mit O verbunden wird, $\angle XOA = XAO$; der Winkel $XOA = OAY$ als Wechselwinkel, folglich ist $\angle CAB$ halbirt, der Punkt O liegt in dieser Halbirungslinie; er liegt aber, weil $XY = CO = a$ ist, auch in der aus C mit a als Radius beschriebene Kreislinie, also im Durchschnittspunkt der Winkelhalbirungslinie und dieses Kreises. Durch den Punkt O ist alles Uebrige gegeben.

Construction Man halbire den Winkel CAB, beschreibe aus C mit a als Radius einen Kreis, welcher die Halbirungslinie in O schneide, ziehe $OX \parallel CA$ und $XY \parallel CO$.

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Construction.

Determination. Ist a kleiner als die aus C auf AO gefällte Senkrechte, so ist die Auflösung unmöglich. Ist a gleich dieser Senkrechte, so gibt es eine Gerade XY, wie verlangt war. Ist a größer als die gedachte Senkrechte, so gibt es außer der gefundenen noch eine zweite $X' Y'$ mit der verlangten Eigenschaft.

4) $XY \parallel BC$ und $BX + CY \parallel a$.

Analysis. Es sei die Gerade XY gezogen, und $AB > AC$. Zieht man $XR \parallel AC$, so ist $XR = YC$; verlängert man RX und macht $RS = a$, so ist $SX = XB$, und wenn S mit B verbunden wird, sind die Winkel an der Grundlinie SB einander gleich Nun ist $RX \parallel AC$ und $\angle RXB = CAB = 2 XBS$, folglich $\angle XBS = \frac{1}{2} CAB$ und also bekannt. Der Punkt S liegt in der Schenkel des Winkels ABS. Zieht man aus S mit BC die Parallele SQ, so ist auch $CQ = a = SR$. Hieraus ergibt sich folgende

Construction. An B der Geraden AB trage man einen Winkel $= \frac{1}{2} CAB$; der Schenkel sei BS, schneide von C aus auf CA ein Stück gleich a ab, der andere Endpunkt sei Q, ziehe durch Q mit CB eine Parallele, welche den Schenkel BS in S trifft, ziehe $SR \parallel AC$; diese schneide AB in X und ziehe endlich $XY \parallel BC$, so ist $BX + CY = a$.

Der Beweis ist leicht zu führen.

5) $XY \parallel BC$ und $BX - CY = a$.

Analysis. Angenommen, XY sei die gesuchte Linie. Zieht man durch X mit AC die Parallele XR, welche BC in Q durchschneide und macht man $XR = XB$, so ist, weil $XQ = CY$, QR der gegebene Unterschied a. Von dem Dreiecke QBR kennt man eine Seite und zwei Winkel, da $QBR = XBR - XBQ$.

Construction. Man verlängere AC um ein Stück $CS = a$, ziehe durch S mit CB eine Parallele, ziehe auch durch B mit AB eine Parallele PM, halbire den Winkel CBM, die Halbirungslinie schneide die vorige Parallele in R, durch R ziehe mit AC eine Parallele, welche AB in X treffe, und ziehe endlich $XY \parallel BC$.

Der Beweis folgt leicht aus der Construction. Die Strecke a muß kleiner als AC sein.

IV. Ein Dreieck zu construiren aus:

1) $a + b$, h_a, h_b.

Analysis. ABC sei das verlangte Dreieck, $AD = h_a$, $BE = h_b$. Verlängert man, um die gegebene Summe der Seiten $BC + CA$ in die Figur zu bringen, die Seite AC und macht $CF = BC$, zieht durch D mit CB eine Parallele, verlängert AD bis zum Durchschnitte mit der Parallelen in G, so ist $DG = BE = h_b$; was leicht zu erweisen, wenn $CH \parallel DG$ gezogen wird, aus der Congruenz der Dreiecke CFH und CBE, welche die Hypotenuse und eine Kathete beziehlich gleich haben. In dem rechtwinkeligen Dreiecke AFG ist die Seite $AF = a + b$, die Seite $AG = h_a + h_b$; es kann also construirt werden, und daraus ergeben sich die übrigen Stücke.

Construction. Auf einer unbegrenzten Geraden nehme man $AG = h_a + h_b$, errichte in G eine Senkrechte, schneide dieselbe aus A mit $a + b$ in F, von G aus schneide man $GD = h_b$ ab, ziehe durch D mit FG eine Parallele, welche AF in C schneidet, mache $CB = CF$ und verbinde B mit A.

Der Beweis folgt leicht aus der Analysis.

2) $a - b$, h_a, h_b.

Analysis. Es sei in dem $\triangle ABC$ $AD = h_a$, $BE = h_b$. Verlängert man CA und macht $CF = CB$, so ist $AF = a - b$. Fällt man aus F auf CB die Senkrechte FG, so ist $FG = BE = h_b$; zieht man ferner $AH \parallel CB$, so ist $FH = h_a - h_b$; das $\triangle$ AFH ist also gegeben und liefert die nöthigen Stücke zur Construction des $\triangle$s ABC.

Construction. Man nehme eine Gerade $FH = h_b h_a$, errichte in H eine Senkrechte, schneide dieselbe von F aus mit $a - b$ in A, verlängere FH bis G, so daß $FG = h_b$, in G errichte man eine Senkrechte, welche die verlängerte FA in C schneide, beschreibe alsdann aus C mit CA einen Kreis, welcher die verlängerte CG in B schneidet, und verbinde B mit A.

Der Beweis ist leicht. Zur Determination ist zu bemerken, daß, da $a > b$ $h_a < h_b$ ist.

V. Einen Rhombus zu construiren aus a, $e + f$.

Analysis. Es sei ABCD der verlangte Rhombus. Im Rhombus halbiren sich die Diagonalen unter rechten Winkeln. Es sei O der Durchschnittspunkt, so ist $AO + OB = \frac{1}{2}(e + f)$. Von dem rechtwinkeligen $\triangle$ AOB kennt man die Hypotenuse $AB = a$ und die Summe der Katheten.

Construction. Man nehme $AE = \frac{1}{2}(e + f)$, lege an E einen Winkel $= \frac{1}{2}R$, schneide von A aus den Schenkel mit a in B, fälle von B auf AE die Senkrechte BO, verlängere BO und mache $OD = OB$, verlängere ebenso AO um ihre eigene Länge bis C und verbinde die Endpunkte D und C beziehlich mit A und B.

Der Beweis folgt leicht aus der Construction.

Wenn der aus A mit a beschriebene Kreis den Schenkel EB noch in einem anderen Punkte schneidet, so erhält man einen zweiten Rhombus $AB'CD'$.

VI. Eine Strecke AB ist gegeben; dieselbe in einem Punkte X so zu schneiden, daß

1) $AX \cdot XB$ gleich ist einem gegebenen Quadrate m^2.

Analysis. Angenommen, der Punkt X sei gefunden. Errichtet man in X eine Senkrechte $XC = m$ und verbindet C mit A und B, so ist ABC ein rechtwinkeliges $\triangle$, folglich liegt C in dem über AB beschriebenen Halbkreise.

Construction. Man beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis, der Mittelpunkt sei O; in O errichte man eine Senkrechte, welche den Kreis in D trifft, schneide von O aus auf OD ein Stück OE gleich m ab, ziehe durch E mit AB eine Parallele, welche den Kreis in C schneide, fälle von C auf AB die Senkrechte CX, so ist X der gesuchte Punkt.

Der Beweis beruhet auf dem bekannten Satze: das Quadrat über der aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällten Senkrechten ist gleich dem Rechtecke aus den Abschnitten der Hypotenuse.

Determination. Ist $m = \frac{1}{2}AB$, so ist O der gesuchte Punkt; ist aber $m > \frac{1}{2}AB$, so ist die Auflösung unmöglich.

2) $AX^2 + XB^2 = m^2$.

Analysis. Es sei X gefunden. Errichtet man in X eine Senkrechte und macht sie gleich XB, zieht AC, so ist $AC^2 = AX^2 + XC^2 = AX^2 + XB^2$. Weil $XB = XC$, ist $\angle B = \frac{1}{2}R$.

Construction. Man trage an AB im Punkte B einen rechten Winkel, schneide von A aus dessen Schenkel in C, fälle die Senkrechte CX.

Der Beweis ist leicht. Damit die Auflösung möglich werde, muß m den Schenkel BC treffen oder schneiden.

3) $AX^2 - XB^2 = m^2$.

Analysis. In der Geraden AB sei X so bestimmt, daß $AX^2 - XB^2 = m^2$. Errichtet man in B die Senkrechte $BC = m$, verbindet C mit A und mit X, so ist $BC^2 = XC^2 = XB^2$. Damit $XC = AX$ werde, muß $XAC = XCA$ sein Der Winkel XAC ist bekannt, folglich auch die Lage der Linie CX.

Construction. In B errichte man eine Senkrechte $BC = m$, verbinde C mit A, lege an C der Geraden AC einen Winkel = BAC, so wird dadurch der Punkt X bestimmt.

Der Beweis ist leicht und die Auflösung immer möglich.

4) AX^2 doppelt so groß als BX^2.

Analysis. Es sei X gefunden Legt man an A einen Winkel $= \frac{1}{2}R$ und eben so an X, so daß die Schenkel sich in C schneiden, so ist $ACX = R$, folglich $AC^2 + CX^2 = AX^2$; eben so muß, damit $AC = CX = XB$ sei, $\angle AXC = \frac{1}{2} R$. $\angle XBC = \frac{3}{4} R$ Man kennt jetzt AB und die anliegenden Winkel, folglich die Lage des Punktes C und damit CX.

Construction. Man trage an B einen Winkel $= \frac{1}{4} R$, an A einen Winkel $= \frac{1}{2} R$. Die Schenkel dieser Winkel treffen sich in C, an CB im Punkte C trage man einen Winkel $= \frac{1}{4} R$, trifft der Schenkel die AB in X, so ist dies der gesuchte Punkt.

Der Beweis ist leicht, die Auflösung immer möglich.

VII. Eine Strecke AB ist gegeben; dieselbe bis zu einem Punkte X zu verlängern, daß

1) $AX \,.\, XB$ gleich ist einem gegebenen Quadrate m^2.

Analysis. Es sei X so gelegen, daß $AX \,.\, XB = m^2$. Ist O die Mitte von AB, so ist

$$\begin{array}{ll} & AX = OX + OB \\ & \underline{BX = OX - OB} \\ \text{folglich} & AX \,.\, BX = OX^2 - OB^2 = m^2 \\ \text{oder} & OX^2 = OB^2 + m^2. \end{array}$$

Es ist also OX die Hypotenuse eines Dreiecks, dessen Katheten OB und M gegeben sind.

Construction. Man nehme von AB die Mitte in O, errichte in B die Senkrechte $BC = m$, verbinde O mit C und mache $OX = OC$.

Beweis leicht.

2) $AX^2 + XB^2 = m^2$.

Analysis. Es sei der Punkt X gefunden. Errichtet man in X eine Senkrechte und schneidet von B aus diese Senkrechte mit m in C, so ist in dem rechtwinkligen

$\triangle$ BCX $BC^2 = CX^2 + BX^2$. Ist nun $CX = AX$, so ist auch $AX^2 + BX^2 = m^2$, folglich $\angle CAX = \frac{1}{2}R$. Man kennt nun von dem $\triangle$ ABC zwei Seiten und einen Winkel.

Construction. Im Punkte A trage man an AB einen Winkel $BAC = \frac{1}{2}R$, beschreibe aus B mit m einen Kreis, welcher AC in C schneide, von C fälle man die Senkrechte CX, so ist X der gesuchte Punkt.

Beweis leicht.

$$3)\quad AX^2 - XB^2 = m^2.$$

Analysis. Ist der Punkt X gefunden, in B eine Senkrechte $BC = m$ errichtet und C mit A und X verbunden, so ist $BC^2 = XC^2 - BX^2$. Ist $CX = AX$, so ist der Winkel $XAC = XCA$; das $\triangle$ ABC ist gegeben, folglich auch $\angle A$ und damit auch die Lage der Geraden CX.

Construction. In B errichte man eine Senkrechte $BC = m$, verbinde A mit C, trage an AC in C einen Winkel $=$ CAB, schneidet der Schenkel die Richtung AB in X, so ist dies der gesuchte Punkt.

Beweis leicht.

$$4)\quad AX^2 = 2\,BX^2.$$

Analysis. Wenn $AX^2 = 2\,BX^2$, so ist, wenn über AX das gleichschenklige rechtwinklige $\triangle$ ACX beschrieben wird, $AX^2 = AC^2 + CX^2 = 2\,XC^2$. Nun ist, da $XC^2 = BX^2$, $CX = BX$. Verbindet man B mit C, so ist BXC ein gleichschenkeliges $\triangle$; $\angle BXC = \frac{1}{2}R$, folglich $\angle XBC = \frac{3}{4}R$, also sein Nebenwinkel $ABC = \frac{5}{4}R$. Von dem $\triangle$ ABC kennt man jetzt die Seite AB und die anliegenden Winkel, folglich ist C gegeben und damit auch X gefunden.

Construction. An A der Geraden AB trage man einen Winkel $= \frac{1}{2}R$, an B einen Winkel $= \frac{5}{4}R$; beide Schenkel treffen sich, da die Summe der inneren Ergänzungswinkel kleiner als 2 R ist, in einem Punkte C, in C errichte man auf AC eine Senkrechte; schneidet diese die verlängerte AB in X, so ist dies der gesuchte Punkt.

Beweis leicht.

VIII. Eine festliegende Gerade LL' und zwei festliegende Punkte A und B auf derselben Seite der Geraden sind gegeben; in LL' einen Punkt X zu bestimmen, daß

1) AX und BX mit LL' gleiche Winkel bilden.

Analysis. Es sei X so bestimmt, daß $AXL = BXL'$, so wird, wenn BX verlängert wird, auch $LXC = AXL$. Fällt man aus A auf die Gerade LL' eine Senkrechte AO und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitte mit der verlängerten BX in C, so ist $AO = OC$, folglich bestimmt die aus C nach B gezogene Linie den Punkt X in der Geraden LL'.

Beweis leicht.

2) Der Unterschied der Winkel einem gegebenen Winkel δ gleich sei.

Analysis. Es sei X so bestimmt, daß AXL (α) — BXL′ $(\beta) = \delta$. Fällt man aus A auf LL′ die Senkrechte AO, verlängert AO und macht AO = OC, verlängert auch BX bis zum Durchschnitte OC in D, und zieht CX, so ist OXC $= \alpha$, OXD $= \beta$, folglich DXC $= \delta$, also CXB $= 2R - \delta$ ein gegebener Winkel. Da auch CB gegeben ist, so liegt X in dem über CB als Sehne beschriebenen, des Winkels $2R - \delta$ fähigen Kreisbogen; der Durchschnitt dieses Bogens mit LL′ bestimmt den Punkt X.

Construction und Beweis folgen leicht aus der Analysis.

3) AX + BX am kleinsten wird.

Auflösung. Der gesuchte Punkt kann kein anderer als der in der Construction der 1. Aufgabe gefundene Punkt X sein. Denn nimmt man beliebig einen anderen Punkt X′ und verbindet denselben mit A und B, so ist, wenn CX′ gezogen wird, CX′ = XA′; da aber XC′ + X′B > CB, so ist auch AX′ + X′B größer als AX + BX. Da dieselbe Schlußfolge für jeden anderen außer X angenommenen Punkt gilt, so ist AX + BX am kleinsten.

4) AX — BX am größten wird.

Diese Aufgabe setzt voraus, daß AB und LL′ convergente Geraden sind. Der Punkt X liegt alsdann im Treffpunkte beider Geraden, in X. Denn nun ist der Unterschied zwischen AX und BX gleich AB. Nimmt man aber einen anderen Punkt X′ an und zieht X′A und X′B, so ist in dem △ AX′B jedesmal AX′ — BX′ kleiner als AB.

5) A und B seien die Mittelpunkte zweier Kreise; in der Geraden LL′ einen Punkt X so zu bestimmen, daß die aus demselben an beide Kreise gezogenen Tangenten mit LL′ gleiche Winkel bilden.

Analysis. X sei gefunden, XD sei die Tangente an den Kreis A, XE die an den Kreis B. Verlängert man EX, fällt von A auf LL′ die Senkrechte AO und macht die Verlängerung OC = AO, fällt aus C auf die verlängerte EX eine Senkrechte CF und zieht man endlich XA und XC: so ist CF = AD. Man kennt also die Lage des Punktes C und den Radius CF = AD. Beschreibt man aus C mit CF = AD einen Kreis, so ist EF eine Tangente an die der Lage und Größe nach gegebenen Kreise B und C.

Construction. Man fälle von A auf LL′ die Senkrechte AO, verlängere AO und mache OC gleich AO, beschreibe aus C mit AD als Radius einen Kreis und lege endlich an die Kreise B und C eine Tangente EF, der Durchschnitt derselben mit LL′ bestimmt den Punkt X.

Beweis. Verbindet man X mit A und C, zieht aus den Mittelpunkten A und C zu den Berührungspunkten D und F die Radien AD und CF, so ist AX = CX,

$\angle$ AXO = OXC; ferner ist auch $\angle$ AXD = CXF, folglich auch $\angle$ OXD = OXF als Summen aus beziehlich gleichen Winkeln, also auch OXD = EXL'.

6) AX + BX gleich ist einer gegebenen Strecke a.

Analysis Es sei X so bestimmt, daß AX + BX = a. Verlängert man BX um GX = AX, so ist BG = a, mithin ein aus B mit BG als Radius beschriebener Kreis gegeben. Fällt man aus A auf LL' die Senkrechte AM und macht MC = AM, so ist AX = CX. Da XG = AX, so ist XA = XC = XG, folglich liegen die Punkte A, C, G auf dem Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt X ist. Dieser Kreis berührt, da die Punkte B, X, G in gerader Linie liegen, den aus B beschriebenen ersten Kreis in einem Punkte G; zieht man daher an G die Tangente GO, welche die verlängerte AC in O trifft, so ist OG^2 = OA . OC. Von O ziehe man durch den aus B beschriebenen Kreis eine Secante ODE, so ist OG^2 = OE . OD (das Quadrat über der Tangente ist gleich dem Rechtecke aus der ganzen Secante und ihrem äußeren Abschnitte); folglich ist OA . OC = OE . OD, mithin liegen die Punkte A, C, E, D in dem Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt in LL' ist. Die Punkte A und C und die Gerade LL' sind gegeben; man braucht also nur einen Kreis zu beschreiben, der durch A und C geht und den ersten aus B mit a beschriebenen Kreis schneidet; was jedenfalls ausführbar ist; dadurch erhält man den Punkt O, die Tangente OG, den Punkt G, und damit auch BG und endlich den Punkt X.

Construction. Man fälle aus A auf LL' eine Senkrechte AM, verlängere AM um MC = AM; man beschreibe aus B mit BG = a einen Kreis. Alsdann beschreibe man einen Kreis, der durch A und C geht und seinen Mittelpunkt in der Geraden LL' hat und den ersten Kreis in den Punkten D und E schneide; man verbinde ED und verlängere ED, bis sie die verlängerte AC in O trifft; aus O ziehe man an den ersten Kreis eine Tangente OG, ziehe GB, so ist der Durchschnitt mit der Geraden LL' der verlangte Punkt.

Beweis. Da ODE und OCA zwei Secanten am Kreise ACDE sind, so ist OE . OD = OA . OC, und da OG eine Tangente am Kreise GDE ist, ODE aber eine Secante an demselben Kreise, so ist auch OG^2 = OA . OC. Folglich wird ein durch A, C, G gezogener Kreis die Linie OG in G berühren (gemäß der Umkehrung des oben erwähnten Satzes) und da BG senkrecht auf OG steht, so wird der Mittelpunkt dieses Kreises auf BG liegen (der Mittelpunkt eines Kreises liegt in der auf der Tangente im Berührungspunkte errichteten Senkrechten), aber derselbe Mittelpunkt muß auch auf LL' liegen (weil LL' auf der Mitte der Sehne AC senkrecht steht), daher ist der Punkt X, worin BG und LL' sich schneiden, der Mittelpunkt des durch G, C und A gehenden Kreises. Es ist also AX = XG, daher BX + AX = BX + XG = BG = a.

Determination. Ist die Strecke a kleiner als BC, so ist die Aufgabe unmöglich. Ist a = BC, so ist der im VIII. 3. Aufgabe der gefundene Punkt der verlangte. Ist a > als die kleinste Summe der Linien, die von A und B nach einem Punkte der Geraden LL' gezogen werden können, so zeigt die Construction, wie der Punkt X gefunden wird. Da endlich von O an den ersten Kreis zwei Tangenten gezogen werden können, so erhält man noch einen Punkt X' mit der verlangten Eigenschaft.

7) $AX = 2BX$ oder $AX : BX = 2 : 1$.

Analysis. Es sei X so bestimmt, daß $AX : BX = 2 : 1$. Halbirt man den Winkel AXB durch XC, so ist auch

$$AX : BX = AC : CB = 2 : 1.$$

Verlängert man AX und halbirt auch den Nebenwinkel BXD durch eine Gerade, welche die Richtung AB in E durchschneidet, so ist auch

$$AE : BE = AC : CB.$$

Da die Geraden XC und XE zwei Nebenwinkel halbiren, so bilden sie einen rechten Winkel, es ist $\angle CXE = R$, folglich liegt der Punkt X in dem Umfange des über CE als Durchmesser beschriebenen Kreises.

Construction. Man theile AB in C so, daß $AC : CB = 2 : 1$, in der Richtung AB nehme man $BE = AB$, halbire CE im Punkte O und beschreibe aus O mit CO als Radius einen Kreis, welcher die Gerade LL' in X schneide, verbinde X mit A und B.

Beweis. Nach der Construction ist

$AE : BE = AC : CB$, also auch

$AE - AC : BE - CB = AC : CB$.

Weil $CE = 2CO$, $BE = 2BO + CB$, ist auch

$CO : BO = AC : CB$, folglich auch

$AC + CO : CB + BO = AC : CB$ oder

$AO : CO = CO : BO$.

Verbindet man O mit X, so ist, weil $OX = OC$, $AO : XO = XO : BO$.

Weil die Dreiecke AXO und BXO auch noch den Winkel AOX gemein haben, sind sie ähnlich, und es ist

$$\begin{aligned} AX : BX &= AO : XO \\ &= AO : CO \\ &= AC : BC \\ &= 2 : 1. \end{aligned}$$

Determination. Im Falle des Schneidens schneidet der aus O mit OC als Radius beschriebene Kreis die LL' noch in einem anderen Punkt X'. — Da $AC : CB = AX : XB = 2 : 1$, ist $AX > XB$, daher $\angle ABX > X$. Der Nebenwinkel von AXB, nämlich BXK ist halbirt und es ist angenommen worden, daß diese Winkelhalbirungslinie die Richtung AB durchschneide; dies wird, wenn $AX > XB$

ist, jedenfalls geschehen. Denn der Winkel BXK oder 2 BXE ist gleich $\angle A + ABX$; es ist aber $A > ABX$, folglich ist

$$2\,BXE < 2\,ABX \text{ oder}$$
$$BXE < ABX, \text{ folglich}$$
$$BXE + XBE < ABX + XBE$$
$$< 2\,R.$$

Anmerkung 1. Es ist leicht einzusehen, daß nicht allein die Punkte X, oder X' die Eigenschaft haben, daß $AX : BX = 2 : 1$, sondern daß jeder Punkt im Umfange des aus O mit OC beschriebenen Kreises dieselbe Eigenschaft hat. Denn nimmt man im Umfange des gedachten Kreises einen beliebigen Punkt, etwa M, an und zieht MA, MB, so sind auch die Dreiecke AOM und BOM einander ähnlich und es ist wieder

$$AM : BM = 2 : 1.$$

Anmerkung 2. Verbindet man X mit C, so wird, weil

$$AX : XB = AC : CB$$

der Winkel AXB durch die Gerade XC halbirt. Es ergibt sich hieraus die Lösung folgender Aufgaben:

1) Drei Punkte liegen in gerader Linie; man soll in einer anderen gegebenen Geraden einen Punkt X bestimmen, von welchem aus jene Punkte in gleicher Entfernung von einander erscheinen.

2) An eine gegebene Strecke AB ist in A eine Gerade unter einem gegebenen Winkel angelegt; in dieser letzteren einen Punkt X zu bestimmen, daß

$AX : BX$ einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich wird.

Ist das Verhältniß $AX : BX$ nicht in Zahlen, sondern in Linien, etwa $p : q$ $(p > q)$ gegeben, und soll

$$AX : BX = p : q$$

so errichte man in A eine Senkrechte $AP = p$ und in B nach der anderen Seite eine Senkrechte $BQ = q$, verbinde P mit Q; es schneide diese Linie die AB in C, so verhält sich $AC : CB = p : q$. Errichtet man in B auf derselben Seite wie AP die Senkrechte BQ', und verbindet P mit Q' bis zum Durchschnitte mit der Richtung AB in E, so ist auch

$$AE : BE = p : q.$$

Oder: Man errichte in A eine Senkrechte, schneide von A aus auf derselben ein Stück $AP = p$ und in der Verlängerung von AP ein Stück $PQ = q$ ab, verbinde Q mit B und ziehe aus P mit QB eine Parallele, welche AB in C schneide, so ist offenbar

$$AC : CB = p : q.$$

Schneidet man von P aus nach A hin ein Stück $PQ' = q$ ab und verbindet Q' mit B und zieht durch P mit Q'B eine Parallele, welche die verlängerte AB in E trifft, so ist

$$AE : BE = p : q, \text{ folglich auch}$$
$$AC : CB = AE : BE.$$

Die Strecke AB ist im Punkte E, weil er außerhalb AB liegt, äußerlich in dem Verhältnisse p : q getheilt, während dieselbe in C innerlich in demselben Verhältnisse getheilt ist.

Nimmt man von CE die Mitte in O, beschreibt aus O mit CO = OE einen Kreis, so hat jeder Punkt, etwa M, in dem Umfange dieses Kreises die Eigenschaft, daß

$$AM : BM = p : q.$$

Hieraus folgt: Der geometrische Ort des Punktes, dessen Entfernungen von zwei festliegenden Punkten A und B in dem gegebenen Verhältnisse p : q stehen, ist der über dem Abstande der beiden Punkte, in welchen die Strecke AB nach dem Verhältnisse p : q innerlich und äußerlich getheilt wird, als Durchmesser beschriebene Kreis.

IX. Im $\triangle$ ABC sei $AD = {}^1/_3\,AB$, $BE = {}^1/_3\,BC$, $CF = {}^1/_3\,CA$, es sei ferner F mit E, und C mit D verbunden.

1) In welchem Verhältnisse schneiden sich die Transversalen im Punkte O?

Auflösung. Zieht man durch D mit AC eine Parallele, welche CB in G treffe und FE in K schneide, so ist $CG = {}^1/_3\,CB$, $EB = {}^1/_3\,CB$ folglich auch $GE = {}^1/_3\,BC$, demnach $EG = {}^1/_2\,EC$, und $KG = {}^1/_2\,FC = {}^1/_2 \cdot {}^1/_3\,CA = {}^1/_6\,CA$. Ferner ist, da

$$DG = {}^2/_3\,AC$$
$$KG = {}^1/_6\,AC$$
$$\overline{DK = DG - KG = {}^1/_2\,AC = {}^1/_2 \cdot 3\,FC = {}^3/_2\,FC};$$

also hat DK 3 Theile, wie FC deren 2 hat, folglich hat auch DO 3 Theile, wie OC 2 hat, also ist $DO = {}^3/_5\,CD$. Eben so ist $FO = {}^2/_3\,OK = {}^2/_5\,FK = {}^2/_5 \cdot {}^1/_2\,FE = {}^1/_5\,FE$ und $OE = {}^4/_5\,FE$.

2) In welchem Verhältnisse stehen die vier Stücke zu dem ganzen Dreiecke $\triangle$, in welche dasselbe getheilt ist?

Auflösung. Zieht man FB, so ist $BCF = {}^1/_3\triangle$;

$$CEF = {}^2/_3\,BCF = {}^2/_3 \cdot {}^1/_3\,\triangle = {}^2/_9\,\triangle;$$
$$CFO = {}^1/_5\,CFE = {}^1/_5 \cdot {}^2/_9\,\triangle = {}^2/_{45}\,\triangle;$$
$$COE = {}^4/_5\,CEF = {}^4/_5 \cdot {}^2/_9\,\triangle = {}^8/_{45}\,\triangle;$$
$$AFOD = {}^1/_3\,\triangle - {}^2/_{45}\,\triangle = {}^{13}/_{45}\,\triangle$$
$$BFOD = {}^2/_3\,\triangle - {}^8/_{45}\,\triangle = {}^{22}/_{45}\,\triangle.$$

Vorstehende zwei Aufgaben gestatten viele Abwechselungen und sind geeignet, um gleichzeitig mehreren Schülern gleichartige und doch verschiedene Aufgaben zur Lösung vorzulegen.

Siegburg.

Huberti.