Vorwort.

Es ist das Verdienst Plücker's, durch Einführung von kurzen symbolischen Zeichen für die Gleichung der geraden Linie und für die Gleichungen von Kurven ein neues Feld für die analytische Geometrie gewonnen zu haben. Durch die verkürzte Schreibweise wurden nicht nur die Beweise von vielen geometrischen Lehrsätzen ausserordentlich vereinfacht, sondern auch neue Eigenschaften der Linien entdeckt. Noch fruchtbringender zeigte sich der Gedanke Plücker's, dass sich die Gleichung des ersten Grades nicht nur als Gleichung der geraden Linie, sondern auch als Gleichung des Punktes auffassen lässt, da hierdurch eine Dualitätsbeziehung zwischen dem Punkte und der geraden Linie hergestellt wurde. In der vorliegenden Arbeit habe ich in kurzen Zügen die allgemeinen Dualitätsbeziehungen, welche durch Linien- und Punktcoordinaten vermittelt werden, auseinandergesetzt mit Benutzung von „Plücker: analytisch-geometrische Entwicklungen 1828, Hesse: Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene 1873, Salmon: analytische Geometrie der Kegelschnitte, bearbeitet von Fiedler 1873“ und einigen kürzeren Notizen in Fachzeitschriften. Eine genauere Begründung habe ich insbesondere im Artikel 4 von dem Satze geliefert: „Wenn $a_1 = o$ und $a_2 = o$ die Gleichungen von zwei Punkten sind, so ist $a_1 + \xi a_2 = o$ die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie.“

Sodann habe ich in ausführlicher Weise an einem von Plücker herrührenden Lehrsatze im Artikel 7 u. d. f. die mannigfaltigen Wechselbeziehungen dargestellt, welche beim Beweise von Lehrsätzen durch die Benutzung von Linien- und Punktcoordinaten entstehen. An die vermittelst der Normalgleichung der geraden Linie

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bewiesenen Sätze von den Halbierungslinien der Winkel und der Aussenwinkel eines Dreiecks und die durch die Punktcoordinaten entsprechenden Sätze schliesst sich dann eine grössere Anzahl von neuen Untersuchungen über das allgemeine Viereck, über ein specielles Viereck und das Parallelogramm an. Durch Uebertragung von einfachen Lehrsätzen vermittelst des Punkt- resp. Liniencoordinatensystems werden eine Reihe von interessanten neuen Lehrsätzen abgeleitet. Der Fachmann wird erkennen, dass hier noch ein weites Feld für Untersuchungen offen liegt, besonders wenn man Dreieckcoordinaten, homogene Coordinaten und die harmonischen Wechselbeziehungen in die Untersuchung hineinzieht, was bei dem Umfange einer Programmarbeit nicht möglich war.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1.

Die Gleichung einer geraden Linie hat die allgemeine Form

$$ax + by + c = o \text{ oder}$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$= vx + w.$$

In dieser Gleichung bedeutet v bekanntlich $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, wenn α der Winkel ist, welchen die Linie mit der positiven x Achse, β der Winkel, welchen die Linie mit der positiven y Achse macht. Ist das Achsensystem rechtwinklig, so wird $v = \tan \alpha$. Die Grösse w bedeutet den Abschnitt, welchen die gerade Linie in der y Achse bestimmt, x und y sind die veränderlichen Coordinaten eines Punktes der geraden Linie.

Ist in der Gleichung c und somit auch $w = o$, so stellt die Gleichung

$$ax + by = o \text{ oder}$$

$$y = -\frac{a}{b}x \text{ oder}$$

$$y = vx$$

eine durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Linie dar, und v hat wieder die ebenerwähnte Bedeutung.

Ist in der allgemeinen Gleichung $b = o$, so stellt die Gleichung

$$ax + c = o \text{ oder}$$

$$x = -\frac{c}{a} \text{ oder}$$

$$1) \qquad x = u$$

eine Parallele zur y Achse dar, die auf der x Achse ein Stück $= u$ bestimmt. Ist endlich in der allgemeinen Gleichung $a = o$, so stellt die Gleichung

$$by + c = o \text{ oder}$$

$$y = -\frac{c}{b} \text{ oder}$$

$$2) \qquad y = w$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine Parallele zur x Achse dar, die auf der y Achse ein Stück = w bestimmt. Kennen wir die Lage einer durch die Gleichungen 1) oder 2) dargestellten Linie und den Coordinatenanfangspunkt, so ist die zweite Achse von selbst bestimmt.

2.

In der allgemeinen Gleichung der geraden Linie

$$ax + by + c = o \text{ oder}$$
$$y = vx + w$$

sind die Grössen v und w als constante Grössen aufzufassen, y und x hingegen als veränderliche. Wenn v und w uns gegeben sind, so ist die gerade Linie ihrer Lage und Richtung nach unzweifelhaft bestimmt. Legen wir in der Gleichung der geraden Linie der Grösse x, welche wir als unabhängig veränderlich ansehen können, einen bestimmten Werth x_1 bei, so erhält auch y einen ganz bestimmten Werth y_1, und die so entstehende Gleichung

$$y_1 = vx_1 + w$$

sagt uns, dass die Gleichung der geraden Linie $y = vx + w$ durch die Coordinaten eines Punktes x_1 y_1 befriedigt wird, mit anderen Worten, dass die gerade Linie durch den Punkt x_1 y_1 hindurch geht.

Fassen wir in der Gleichung $y_1 = vx_1 + w$ nun v und w als veränderlich auf, so stellt uns diese Gleichung eine unendliche Anzahl von Linien dar, welche alle durch den Punkt x_1 y_1 gehen müssen, weil ihre Gleichung durch x_1 y_1 befriedigt wird. Den Punkt können wir aber als den Durchschnitt von unendlich vielen geraden Linien ansehen und somit

$$y_1 = vx_1 + w$$

als die Gleichung eines Punktes x_1 y_1 betrachten, wenn wir v und w als veränderliche Grössen auffassen.

Ein und dieselbe Gleichung $y = vx + w$ können wir also als die Gleichung einer geraden Linie und auch als die eines Punktes auffassen, je nachdem wir x und y oder v und w als veränderlich ansehen.

Somit können wir auch die allgemeine Form

$$ax + by + c = o$$

sowohl als die Gleichung einer geraden Linie, als auch als die Gleichung eines Punktes auffassen.

Je nachdem wir die Gleichung der geraden Linie oder des Punktes zu Grunde legen, können wir zwei verschiedene Coordinatensysteme aufstellen, das Liniencoordinatensystem und das Punktcoordinatensystem.

Beide Systeme sind durch das Princip der Reciprocität mit einander verbunden. Haben wir etwa in dem einen Coordinatensystem einen geometrischen Satz bewiesen, so erhalten wir noch einen neuen, wenn wir den vorkommenden Gleichungen diejenige Bedeutung beilegen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welche sie in dem andern Coordinatensystem haben. Die doppelte Interpretation analytischer Fakta liefert uns so zwei verschiedene geometrische Lehrsätze.

3.

$$1)\quad a x + b y + c = 0$$
$$2)\quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

seien die Gleichungen zweier geraden Linien. Diese Gleichungen können wir auch kurz schreiben

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0,$$

wo a_1 und a_2 lineare Funktionen der Veränderlichen x und y sind.

Jede Funktion von der Form

$$m a_1 + n a_2 = 0,$$

wo m und n constante Grössen sind, stellt dann eine durch den Durchschnittspunkt beider Linien gehende gerade Linie dar.

Um dieses zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, dass die Gleichung

$$m a_1 + n a_2 = 0 \text{ oder}$$
$$3)\ (m a + n \alpha)\, x + (m b + n \beta)\, y + (m c + n \gamma) = 0$$

durch die Coordinaten des Durchschnittspunktes beider Linien befriedigt wird. Um diese Coordinaten zu finden, eliminiren wir aus den Gleichungen 1) und 2) y resp. x und erhalten

$$x = \frac{b\gamma - \beta c}{a\beta - \alpha b}$$
$$y = \frac{\alpha c - a\gamma}{a\beta - \alpha b},$$

vorausgesetzt, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ \alpha, & \beta \end{vmatrix}$$

nicht $= 0$ ist. Setzen wir diese Werthe von x und y in die Gleichung 3) ein, so wird die linke Seite

$$(m a + n \alpha)\, \frac{b\gamma - \beta c}{a\beta - \alpha b} + (m b + n \beta)\, \frac{\alpha c - a\gamma}{a\beta - \alpha b} + (m c + n \gamma) \text{ oder}$$

$(m a b\gamma + n\alpha b\gamma - m a\beta c - n\alpha\beta c + m\alpha b c + n\alpha\beta c - m a b\gamma - n a\beta\gamma + m a\beta c + n a\beta\gamma - m\alpha b c - n\alpha b\gamma) : (a\beta - \alpha b)$, was in der That $= 0$ ist, da der Zähler verschwindet.

Ist $\begin{vmatrix} a, & b \\ \alpha, & \beta \end{vmatrix} = a\beta - \alpha b = 0$, so haben wir zu unterscheiden, ob die Zähler von x und y nicht $= 0$ oder $= 0$ sind. Im ersten Falle wird

$$x = \infty,\ y = \infty,$$

der Durchschnittspunkt liegt also im Unendlichen, d. h. die Linien $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$ schneiden sich nicht, sondern sind parallel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung $m a_1 + n a_2 = o$ stellt dann eine durch den unendlich entfernt liegenden Schnittpunkt gehende Linie, also eine Linie dar, die den Linien $a_1 = o$ und $a_2 = o$ parallel ist.

Dass die Linien $a_1 = o$ und $a_2 = o$ parallel sein müssen, wenn $a\beta - \alpha b = o$ ist, ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung.

Nennen wir die Winkel, welche die Linien $a_1 = o$ und $a_2 = o$ mit der positiven x Achse machen, φ_1 und φ_2 und nehmen ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, so ist

$$\tan \varphi_1 = -\frac{a}{b}$$

$$\tan \varphi_2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\operatorname{cosec} \varphi_1 = \frac{1}{\sin \varphi_1} = \pm \sqrt{1 + \cot^2 \varphi_1}, \text{ also}$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \cot^2 \varphi_1}}$$

$$= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}$$

$$= \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sec \varphi_1 = \frac{1}{\cos \varphi_1} = \mp \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_1}, \text{ also}$$

$$\cos \varphi_1 = \mp \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Damit $\tan \varphi_1 = -\frac{a}{b}$ wird, müssen wir die Vorzeichen bei den Ausdrücken für $\sin \varphi_1$ und $\cos \varphi_1$ entgegengesetzt wählen.

Ganz ebenso ist

$$\sin \varphi_2 = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\cos \varphi_2 = \mp \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Daher ist $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1$

$$= \frac{-\alpha b + a\beta}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Da aber $a\beta - \alpha b = o$ ist, so wird

$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = o$, also $\varphi_2 - \varphi_1 = 0^0$ oder $= 180^0$ d. h. die Linien sind parallel.

Wir haben endlich noch den Fall zu betrachten, dass $a\beta - \alpha b = o$ und einer der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zähler, entweder der von x oder der von y ebenfalls $= o$ ist. Wir können zunächst ze..., dass wenn ein Zähler $= o$ ist, es auch der andere sein muss.

Ist nämlich 4) $a\beta - \alpha b = o$ und ausserdem etwa

5) $b\gamma - \beta c = o$, so folgt aus diesen beiden Gleichungen

$$\begin{array}{l} a\beta\gamma - \alpha b\gamma = o \\ \underline{\alpha b\gamma - \alpha\beta c = o} \\ a b\gamma - \alpha\beta c = o \end{array} \text{ oder 6) } \alpha c - a\gamma = o.$$

Aus den Gleichungen 4), 5) und 6) folgt ferner

$$a : \alpha = b : \beta = c : \gamma.$$

Ist also etwa $a = M \,.\, \alpha$, so ist auch

$$b = M \,.\, \beta$$
$$c = M \,.\, \gamma.$$

Die Gleichung $ax + by + c = o$ ist daher von der Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma = o$ nur durch den constanten Factor M verschieden, also dieselbe Gleichung, d. h. wir haben nur eine Linie.

Aus dieser ganzen Betrachtung ersehen wir, dass, wenn

$$ax + by + c = o \text{ oder } a_1 = o$$
$$\text{und } \alpha x + \beta y + \gamma = o \text{ oder } a_2 = o$$

die Gleichungen zweier Linien sind, die Gleichung

$m a_1 + n a_2 = o$ immer eine durch den Schnittpunkt beider gehende gerade Linie darstellt, speciell dieser Schnittpunkt auch in's Unendliche fallen kann, wenn die Determinante $a\beta - \alpha b = o$ ist. Dividieren wir die Gleichung $m a_1 + n a_2 = o$ noch durch m, so erhält sie die Gestalt

$$a_1 + \xi a_2 = o.$$

Dieses ist also die Gleichung aller Linien, welche durch den Schnittpunkt der Linien $a_1 = o$ und $a_2 = o$ gehen.

Von der Grösse des Werthes ξ hängt natürlich die Richtung ab, welche die Linie $a_1 + \xi a_2 = o$ in Bezug auf die Richtung der Linien $a_1 = o$ und $a_2 = o$ hat. Geben wir ξ der Reihe nach alle möglichen Werthe, so erhalten wir die Gleichung aller Linien, die durch den Schnittpunkt der Linien $a_1 = o$ und $a_2 = o$ hindurchgehen; für $\xi = o$ erhalten wir die Linie $a_1 = o$, für $\xi = \infty$ die Linie $a_2 = o$.

4.

Die Gleichungen

$$ax + by + c = o \text{ und}$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma = o \text{ oder}$$
$$a_1 = o \text{ und}$$
$$a_2 = o$$

können wir aber auch als Gleichungen zweier Punkte auffassen, oder genauer $a_1 = o$ ist die Gleichung aller Linien, die durch einen bestimmten Punkt gehen, $a_2 = o$ die Gleichung aller Linien, die durch einen andern bestimmten Punkt gehen. Die lineare Gleichung $m a_1 + n a_2 = o$ muss wieder einen Punkt darstellen, oder genauer unzählige Linien, welche durch diesen Punkt hindurchgehen. Unter den Linien $a_1 = o$ wird es aber eine geben $a_1^\lambda = o$, welche auch durch den Punkt $a_2 = o$ geht, ebenso unter den Linien $a_2 = o$ eine $a_2^\mu = o$, welche auch durch den Punkt $a_1 = o$ geht. Die Linien $a_1^\lambda = o$ und $a_2^\mu = o$ sind daher dieselben. Die unter den Gleichungen $m a_1 + n a_2 = o$ vorkommende Gleichung $m a_1^\lambda + n a_2^\mu = o$ kann sich daher von den Gleichungen $a_1^\lambda = o$ und $a_2^\mu = o$ nur durch einen constanten Faktor unterscheiden, stellt also ebenfalls die Verbindungslinie der Punkte $a_1 = o$ und $a_2 = o$ dar. Der Punkt $m a_1 + n a_2 = o$ liegt nothwendig auf der Linie $m a_1^\lambda + n a_2^\mu = o$, daher ist $m a_1 + n a_2 = o$ ein Punkt auf der Verbindungslinie der Punkte $a_1 = o$ und $a_2 = o$.

Auch diese Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie der Punkte $a_1 = o$ und $a_2 = o$ können wir auf die Form bringen

$$a_1 + \xi a_2 = o.$$

Von der Grösse des Werthes ξ hängt natürlich die Lage des Punktes in Bezug auf die Lage der Punkte $a_1 = o$ und $a_2 = o$ ab. Für $\xi = o$ erhalten wir den Punkt $a_1 = o$, für $\xi = \infty$ den Punkt $a_2 = o$.

5.

Wenn zwischen den Gleichungen von drei geraden Linien $a_1 = o$, $a_2 = o$, $a_3 = o$ die identische Gleichung besteht:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \equiv o,$$

so schneiden sich die drei geraden Linien in einem und demselben Punkte.

Die identische Gleichung sagt aus, dass

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \equiv - \lambda_3 a_3$, also dass die durch die Gleichung $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = o$ dargestellte Linie dieselbe Linie wie die durch die Gleichung $- \lambda_3 a_3 = o$ dargestellte ist. Die Gleichung $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = o$ stellt aber irgend eine durch den Schnittpunkt der Linien $a_1 = o$ und $a_2 = o$ gehende gerade Linie dar, die Gleichung $- \lambda_3 a_3 = o$ oder $a_3 = o$ stellt die dritte Linie dar. Sollen daher die Gleichungen $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = o$ und $a_3 = o$ dieselbe Linie darstellen, so muss die Linie $a_3 = o$ nothwendig durch den Schnittpunkt der Linien $a_1 = o$ und $a_2 = o$ hindurchgehen, mit anderen Worten, die drei Linien schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6.

Wenn zwischen den Gleichungen von drei Punkten $a_1 = o$, $a_2 = o$, $a_3 = o$ identische Gleichung besteht:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \equiv o,$$

o liegen die drei Punkte auf einer und derselben geraden Linie.

Die identische Gleichung sagt aus, dass

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \equiv - \lambda_3 a_3$, also dass der durch die Gleichung $\lambda_1 a_1$ $\lambda_2 a_2 = o$ dargestellte Punkt derselbe Punkt wie der durch die Gleichung $- \lambda_3 a_3 = o$ ırgestellte ist. Die Gleichung $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = o$ stellt aber irgend einen Punkt auf der erbindungslinie der Punkte $a_1 = o$ und $a_2 = o$ dar, die Gleichung $- \lambda_3 a_3 = o$ oder $a_3 = o$ stellt den dritten Punkt dar. Sollen daher die Punkte $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = o$ und $a_3 = o$ lenselben Punkt darstellen, so muss der Punkt $a_3 = o$ nothwendig auf der Verbindungslinie ler Linien $a_1 = o$ und $a_2 = o$ liegen, mit andern Worten, die drei Punkte liegen auf einer ınd derselben geraden Linie.

7.

Wir wollen in diesem und den folgenden Artikeln einen geometrischen Lehrsatz vermittelst es Liniencoordinatensystems beweisen, dann einen zweiten Satz dadurch ableiten, dass wir ie analytischen Fakta vermittelst des Punktcoordinatensystems interpretieren, endlich den vermittelst des Liniencoordinatensystems bewiesenen Lehrsatz durch das Punktcoordinatensystem nd den durch das Punktcoordinatensystem bewiesenen Lehrsatz durch das Liniencoordinatensystem beweisen.

(Tafel I, Fig. I.) Durch zwei Punkte sollen je drei Linien I, II, III und 1, 2, 3 gehen. ie Verbindungslinie der beiden Punkte habe die Gleichung

$$r = o.$$

Die Linie I habe die Gleichung $p = o$,
„ „ 1 „ „ „ $q = o$.

ieraus können wir die Gleichungen der übrigen Linien finden.

II geht durch den Schnittpunkt von p und r, hat also die Gleichung
$r + \lambda_1 p = o$, wo λ_1 eine bestimmte Grösse ist.

III geht durch den Schnittpunkt von p und r, hat also die Gleichung
$r + \lambda_2 p = o$, wo λ_2 eine bestimmte Grösse ist.

2 geht durch den Schnittpunkt von q und r, hat also die Gleichung
$r + \lambda_3 q = o$, wo λ_3 eine bestimmte Grösse ist.

3 geht durch den Schnittpunkt von q und r, hat also die Gleichung
$r + \lambda_4 q = o$, wo λ_4 eine bestimmte Grösse ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir bezeichnen nun mit (I 2) den Schnittpunkt von I und 2, mit (II 1) den von II und 1. Alsdann bezeichnen wir mit (I 2, II 1) die Verbindungslinie dieser beiden Schnittpunkte.

Wir behaupten nun, dass die drei Linien

(I 2, II 1), (I 3, III 1), (II 3, III 2)

sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Wir wollen uns, um dies zu beweisen, die Gleichungen der drei Linien bilden.

(I 2) ist der Durchschnittspunkt von I und 2; die Gleichung einer durch (I 2) gehenden Linie ist daher eine algebraische Folge von $p = o$ und $r + \lambda_3 q = o$, hat also die Form

$$r + \lambda_3 q + \lambda_5 p = o, \text{ wo } \lambda_5 \text{ eine unbestimmte Grösse ist.}$$

(II 1) ist der Durchschnittspunkt von II und 1; die Gleichung einer durch (II 1) gehenden Linie ist daher eine algebraische Folge von $r + \lambda_1 p = o$ und $q = o$, hat also die Form

$$r + \lambda_1 p + \lambda_6 q = o, \text{ wo } \lambda_6 \text{ eine unbestimmte Grösse ist.}$$

Für die Linie (I 2, II 1) muss daher

$$r + \lambda_3 q + \lambda_5 p \equiv r + \lambda_1 p + \lambda_6 q \text{ werden.}$$

Diese identische Gleichung verlangt $\lambda_6 = \lambda_3$ und $\lambda_5 = \lambda_1$.

Eliminieren wir die unbestimmten Grössen λ, welche nicht zur Darstellung der ursprünglichen Linien nothwendig waren, so wird die Gleichung der Linie (I 2, II 1)

$$\text{A)}\ r + \lambda_3 q + \lambda_1 p = o.$$

(I 3) ist der Durchschnittspunkt von I und 3; die Gleichung einer durch (I 3) gehenden Linie ist daher eine algebraische Folge von $p = o$ und $r + \lambda_4 q = o$, hat also die Form

$$r + \lambda_4 q + \lambda_7 p = o, \text{ wo } \lambda_7 \text{ eine unbestimmte Grösse ist.}$$

(III 1) ist der Durchschnittspunkt von III und 1; die Gleichung einer durch (III 1) gehenden Linie ist daher eine algebraische Folge von $r + \lambda_2 p = o$ und $q = o$, hat also die Form

$$r + \lambda_2 p + \lambda_8 q, \text{ wo } \lambda_8 \text{ eine unbestimmte Grösse ist.}$$

Für die Linie (I 3, III 1) muss daher

$$r + \lambda_4 q + \lambda_7 p \equiv r + \lambda_2 p + \lambda_8 q \text{ werden.}$$

Diese identische Gleichung verlangt $\lambda_8 = \lambda_4$ und $\lambda_7 = \lambda_2$.

Somit wird die Gleichung der Linie (I 3, III 1)

$$\text{B)}\ r + \lambda_4 q + \lambda_2 p = o.$$

Schliesslich haben wir uns noch die Gleichung der Linie (II 3, III 2) zu bilden.

(II 3) ist der Durchschnittspunkt von II und 3; die Gleichung einer durch (II 3) gehenden Linie ist daher eine algebraische Folge von $r + \lambda_1 p = o$ und $r + \lambda_4 q = o$, hat also die Form

$$\lambda_9 (r + \lambda_1 p) + \lambda_{10} (r + \lambda_4 q) = o, \text{ wo } \lambda_9 \text{ und } \lambda_{10} \text{ unbestimmte Grössen sind.}$$

Wir wenden hier die beiden unbestimmten Faktoren λ_9 und λ_{10} statt eines einzigen an,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

weil sich so die Gleichungen leichter ableiten lassen, die aus der nächsten identischen Gleichung folgen.

(III 2) ist der Durchschnittspunkt von III und 2; die Gleichung einer durch (III 2) gehenden Linie ist daher eine algebraische Folge von $r + \lambda_2 p = o$ und $r + \lambda_3 q = o$, hat also die Form

$$\lambda_{11} (r + \lambda_2 p) + \lambda_{12} (r + \lambda_3 q) = o,$$ wo λ_{11} und λ_{12} unbestimmte Grössen sind.

Für die Linie (II 3, III 2) muss daher

$$\lambda_9 (r + \lambda_1 p) + \lambda_{10} (r + \lambda_4 q \equiv \lambda_{11} (r + \lambda_2 p) + \lambda_{12} (r + \lambda_3 q)$$ werden.

Diese identische Gleichung setzt uns in den Stand, den Werth der Multiplicatoren λ_9, λ_{10}, λ_{11}, λ_{12} zu bestimmen. Sie lässt sich nämlich in drei Gleichungen zwischen den Coefficienten von r, p und q zerlegen.

Da wir nur drei Gleichungen für die Bestimmung von λ_9, λ_{10}, λ_{11}, λ_{12} haben, so können wir eine dieser Grössen beliebig annehmen.

Wir setzen etwa $\lambda_{10} = 1$. Wir erhalten dann aus der identischen Gleichung die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 1)\ & \lambda_9 + 1 = \lambda_{11} + \lambda_{12} \\ 2)\ & \lambda_9 \lambda_1 = \lambda_{11} \cdot \lambda_2 \\ 3)\ & \lambda_4 = \lambda_{12} \cdot \lambda_3. \end{aligned}$$

Aus 3) folgt $\lambda_{12} = \dfrac{\lambda_4}{\lambda_3}$.

Setzen wir diesen Werth in 1) ein, so ist $\lambda_{11} = \lambda_9 + 1 - \dfrac{\lambda_4}{\lambda_3}$ und wenn wir diesen Werth von λ_{11} in 2) einsetzen:

$$\left(\lambda_9 + 1 - \frac{\lambda_4}{\lambda_3}\right) \lambda_2 = \lambda_9 \lambda_1$$

$$\lambda_9 (\lambda_2 - \lambda_1) = \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3} - 1\right) \lambda_2$$

$$\lambda_9 = \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

Die Berechnung von λ_{11} ist unnöthig.

Setzen wir die Werthe von λ_9 und λ_{10} in die Gleichung

$$\lambda_9 (r + \lambda_1 p) + \lambda_{10} (r + \lambda_4 q) = o$$ ein, so erhalten wir

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_3} (r + \lambda_1 p) + (r + \lambda_4 q) = o \text{ oder}$$

$$\left(\frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_3} + 1\right) r + \lambda_4 q + \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \lambda_1 p = o \text{ oder}$$

$$[(\lambda_3 - \lambda_4) \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_3] r + (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_3 \lambda_4 q + (\lambda_3 - \lambda_4) \lambda_1 \lambda_2 p = o \text{ oder}$$

$$\text{C)} \quad (\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_4) r + (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_3 \lambda_4 q + (\lambda_3 - \lambda_4) \lambda_1 \lambda_2 p = o.$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Dieses ist also die Gleichung der Linie (II 3, III 2).

Die drei Gleichungen A), B), C) erfüllen aber, wie leicht ersichtlich ist, die Bedingung des Artikels 5):

$$\mu_1 A + \mu_2 B + \mu_3 C \equiv o,$$

wenn wir $\mu_1 = \lambda_2 \lambda_4$, $\mu_2 = -\lambda_1 \lambda_3$ und $\mu_3 = 1$ setzen.

Daher schneiden sich die drei Linien (I 2, II 1), (I 3, III 1), (II 3, III 2) in einem und demselben Punkte.

Was wir von diesem Complexe von drei Linien gezeigt haben, können wir im Ganzen von 6 Complexen zeigen, nämlich von

(I 1, II 2), (I 3, III 2), (II 3, III 1)
(I 1, II 3), (I 2, III 3), (II 2, III 1)
(I 2, II 1), (I 3, III 1), (II 3, III 2)
(I 2, II 3), (I 1, III 3), (II 1, III 2)
(I 3, II 1), (I 2, III 1), (II 2, III 3)
(I 3, II 2), (I 1, III 2), (II 1, III 3);

wir haben also 6 solcher Punkte, in denen sich je 3 Linien schneiden. (Tafel II.)

8.

Wir wollen nun, wie gesagt, unsere ganze Betrachtung wiederholen mit dem Unterschiede, dass wir die Gleichungen $r = o$, $p = o$, $q = o$ etc. nicht wie bisher als die Gleichungen von geraden Linien, sondern als die Gleichungen von Punkten auffassen. Hierdurch ändert sich unsere Betrachtung folgendermassen. (Tafel I Fig. II.)

Auf 2 geraden Linien sollen je 3 Punkte I, II, III und 1, 2, 3 liegen. Die Gleichung des Durchschnittspunktes beider Linien sei $r = o$.

Die Gleichung des Punktes I sei $p = o$,
" " " " II " $q = o$.

Hieraus können wir die Gleichungen der übrigen Punkte finden.

II liegt auf der Verbindungslinie von p und r, hat also die Gleichung

$$r + \lambda_1 p = o, \text{ wo } \lambda_1 \text{ eine bestimmte Grösse ist.}$$

III liegt auf der Verbindungslinie von p und r, hat also die Gleichung

$$r + \lambda_2 p = o, \text{ wo } \lambda_2 \text{ eine bestimmte Grösse ist.}$$

2 liegt auf der Verbindungslinie von q und r, hat also die Gleichung

$$r + \lambda_3 q = o, \text{ wo } \lambda_3 \text{ eine bestimmte Grösse ist.}$$

3 liegt auf der Verbindungslinie von q und r, hat also die Gleichung

$$r + \lambda_4 q = o, \text{ wo } \lambda_4 \text{ eine bestimmte Grösse ist.}$$

Wir bezeichnen nun mit (I 2) die Verbindungslinie von I und 2, mit (II 1) die Verbindungslinie von II und 1. Alsdann bezeichnen wir mit (I 2, II 1) den Durchschnittspunkt dieser beiden Verbindungslinien.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir behaupten nun, dass die drei Punkte

$$(\mathrm{I}\,2,\ \mathrm{II}\,1),\ (\mathrm{I}\,3,\ \mathrm{III}\,1),\ (\mathrm{II}\,3,\ \mathrm{III}\,2)$$

auf derselben geraden Linie liegen.

Wir wollen uns, um dies zu beweisen, die Gleichungen der drei Punkte bilden.

(I 2) ist die Verbindungslinie von I und 2. Die Gleichung eines auf (I 2) liegenden Punktes ist daher eine algebraische Folge von $p = o$ und $r + \lambda_3 q = o$, hat also die Form

$$r + \lambda_3 q + \lambda_5 p = o, \text{ wo } \lambda_5 \text{ eine unbestimmte Grösse ist.}$$

(II 1) ist die Verbindungslinie von II und 1. Die Gleichung eines auf (II 1) liegenden Punktes ist daher eine algebraische Folge von $r + \lambda_1 p = o$ und $q = o$, hat also die Form

$$r + \lambda_1 p + \lambda_6 q = o, \text{ wo } \lambda_6 \text{ eine unbestimmte Grösse ist.}$$

Für den Punkt (I 2, II 1) muss daher

$$r + \lambda_3 q + \lambda_5 p \equiv r + \lambda_1 p + \lambda_6 q \text{ werden.}$$

Diese identische Gleichung verlangt $\lambda_6 = \lambda_3$ und $\lambda_5 = \lambda_1$.

Somit wird die Gleichung des Punktes (I 2, II 1)

$$\text{A) } r + \lambda_3 q + \lambda_1 p = o.$$

(I 3) ist die Verbindungslinie von I und 3; die Gleichung eines auf (I 3) liegenden Punktes ist daher eine algebraische Folge von $p = o$ und $r + \lambda_4 q = o$, hat also die Form

$$r + \lambda_4 q + \lambda_7 p = o, \text{ wo } \lambda_7 \text{ eine unbestimmte Grösse ist.}$$

(III 1) ist die Verbindungslinie von III und 1; die Gleichung eines auf (III 1) liegenden Punktes ist daher eine algebraische Folge von $r + \lambda_2 p = o$ und $q = o$, hat also die Form

$$r + \lambda_2 p + \lambda_8 q = o, \text{ wo } \lambda_8 \text{ eine unbestimmte Grösse ist.}$$

Für den Punkt (I 3, III 1) muss daher

$$r + \lambda_4 q + \lambda_7 p \equiv r + \lambda_2 p + \lambda_8 q \text{ werden.}$$

Diese identische Gleichung verlangt $\lambda_8 = \lambda_4$ und $\lambda_7 = \lambda_2$.

Somit wird die Gleichung des Punktes (I 3, III 1)

$$\text{B) } r + \lambda_4 q + \lambda_2 p = o.$$

Schliesslich haben wir uns noch die Gleichung des Punktes (II 3, III 2) zu bilden.

(II 3) ist die Verbindungslinie von II und 3; die Gleichung eines auf (II 3) liegenden Punktes ist daher eine algebraische Folge von $r + \lambda_1 p = o$ und $r + \lambda_4 q = o$, hat also die Form

$$\lambda_9 (r + \lambda_1 p) + \lambda_{10} (r + \lambda_4 q) = o, \text{ wo } \lambda_9 \text{ und } \lambda_{10} \text{ unbestimmte Grössen sind.}$$

(III 2) ist die Verbindungslinie von III und 2; die Gleichung eines auf (III 2) liegenden Punktes ist daher eine algebraische Folge von $r + \lambda_2 p = o$ und $r + \lambda_3 q = o$, hat also die Form

$$\lambda_{11} (r + \lambda_2 p) + \lambda_{12} (r + \lambda_3 q) = o, \text{ wo } \lambda_{11} \text{ und } \lambda_{12} \text{ unbestimmte Grössen sind.}$$

Für den Punkt (II 3, III 2) muss daher

$$\lambda_9 (r + \lambda_1 p) + \lambda_{10} (r + \lambda_4 q) \equiv \lambda_{11} (r + \lambda_2 p) + \lambda_{12} (r + \lambda_3 q) \text{ werden.}$$

Ganz wie im vorigen Artikel können wir aus dieser identischen Gleichung den Werth der unbestimmten Multiplicatoren $\lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}$ berechnen und erhalten so als Gleichung für den Punkt (II 3, III 2)

$$\text{C)}\ (\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_4)\, r + (\lambda_1 - \lambda_2)\, \lambda_3 \lambda_4\, q + (\lambda_3 - \lambda_4)\, \lambda_1 \lambda_2\, p = o.$$

Die drei Gleichungen A), B), C) erfüllen aber die Bedingung des Artikels 6):

$$\mu_1 A + \mu_2 B + \mu_3 C \equiv o,$$

wenn wir $\mu_1 = \lambda_1 \lambda_4$, $\mu_2 = - \lambda_1 \lambda_3$ und $\mu_3 = 1$ setzen.

Daher liegen die drei Punkte (I 2, II 1), (I 3, III 1), (II 3, III 2) auf einer und derselben geraden Linie.

Dasselbe können wir von den fünf übrigen Complexen von je drei Punkten zeigen, welche den Liniencomplexen des vorigen Artikels entsprechen.

(Tafel ~~I, Fig.~~ IV.) Bei der Figur ist zu bemerken, dass die Lage der drei Punktpaare so gewählt ist, dass die Linien (I 1) und (III 3) parallel sind, der Punkt (I 1, III 3) also im Unendlichen liegt. Die Folge davon ist, dass die Linie, auf der die drei Punkte (I 2, II 3), (I 1, III 3), (II 1, III 2) liegen, den parallelen Linien (I 1) und (III 3) ebenfalls parallel werden muss.

9.

Den im vorigen Artikel im Punktcoordinatensystem bewiesenen Lehrsatz wollen wir jetzt im Liniencoordinatensystem beweisen.

(Tafel I, Fig. III.) Auf zwei Linien $p = o$ und $q = o$ liegen je drei Punkte I, II, III und 1, 2, 3. Die Verbindungslinie von I und 1 habe die Gleichung $r = o$. Wir bilden uns nun die Gleichungen der Verbindungslinien der einzelnen Punkte.

(I 2) ist die Verbindungslinie der Punkte I und 2, ihre Gleichung ist also, da sie durch den Durchschnittspunkt von r und p geht

$$r + \lambda_1 p = o, \text{ wo } \lambda_1 \text{ eine bestimmte Grösse ist.}$$

(I 3) geht durch den Durchschnittspunkt von r und p, hat also die Gleichung

$$r + \lambda_2 p = o, \text{ wo } \lambda_2 \text{ eine bestimmte Grösse ist.}$$

(II 1) geht durch den Durchschnittspunkt von r und q, hat also die Gleichung

$$r + \lambda_3 q = o, \text{ wo } \lambda_3 \text{ eine bestimmte Grösse ist.}$$

(III 1) geht durch den Durchschnittspunkt von r und q, hat also die Gleichung

$$r + \lambda_4 q = o, \text{ wo } \lambda_4 \text{ eine bestimmte Grösse ist.}$$

(II 2) geht erstens durch den Durchschnittspunkt von p und (II 1), hat also die Gleichung $r + \lambda_3 q + \lambda_5 p = o$, zweitens durch den Durchschnittspunkt von q und (I 2), hat also auch die Gleichung

$$r + \lambda_1 p + \lambda_6 q = o.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese beiden Gleichungen müssen daher für die Linie (II 2) identisch werden; also ist

$$r + \lambda_3 q + \lambda_5 p \equiv r + \lambda_1 p + \lambda_6 q.$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\lambda_5 = \lambda_1$ und $\lambda_6 = \lambda_3$ ist; daher wird die Gleichung für die Linie (II 2)

$$r + \lambda_1 p + \lambda_3 q = o.$$

(II 3) geht erstens durch den Durchschnittspunkt von p und (II 1), hat also die Gleichung $r + \lambda_3 q + \lambda_7 p = o$, zweitens durch den Durchschnittspunkt von q und (I 3), hat also auch die Gleichung

$r + \lambda_2 p + \lambda_8 q = o.$

Diese beiden Gleichungen müssen daher für die Linie (II 3) identisch werden; also ist

$$r + \lambda_3 q + \lambda_7 p \equiv r + \lambda_2 p + \lambda_8 q.$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\lambda_7 = \lambda_2$ und $\lambda_8 = \lambda_3$ ist; daher wird die Gleichung der Linie (II 3)

$$r + \lambda_2 p + \lambda_3 q = o.$$

(III 2) geht erstens durch den Durchschnittspunkt von p und (III 1), hat also die Gleichung $r + \lambda_4 q + \lambda_9 p = o$, zweitens durch den Durchschnittspunkt von q und (I 2), hat also auch die Gleichung

$r + \lambda_1 p + \lambda_{10} q = o.$

Diese beiden Gleichungen müssen daher für die Linie (III 2) identisch werden; also ist

$$r + \lambda_4 q + \lambda_9 p \equiv r + \lambda_1 p + \lambda_{10} q.$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\lambda_9 = \lambda_1$ und $\lambda_{10} = \lambda_4$ ist; daher wird die Gleichung der Linie (III 2)

$$r + \lambda_1 p + \lambda_4 q = o.$$

(III 3) endlich geht erstens durch den Durchschnittspunkt von p und (III 1), hat also die Gleichung $r + \lambda_4 q + \lambda_{11} p = o$, zweitens durch den Durchschnittspunkt von q und (I 3), hat also auch die Gleichung

$r + \lambda_2 p + \lambda_{12} q = o.$

Diese beiden Gleichungen müssen daher für die Linie (III 3) identisch werden; also ist

$$r + \lambda_4 q + \lambda_{11} p \equiv r + \lambda_2 p + \lambda_{12} q.$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\lambda_{11} = \lambda_2$ und $\lambda_{11} = \lambda_4$ ist; daher wird die Gleichung der Linie (III 3)

$$r + \lambda_2 p + \lambda_4 q = o.$$

Wir behaupten nun wieder, dass die früher genannten sechs Gruppen von je drei Punkten in einer geraden Linie liegen, und wollen den Beweis wieder für die drei Punkte

(I 2, II 1), (I 3, III 1), (II 3, III 2) führen.

Eine Linie, welche durch (I 2, II 1) geht, hat die Gleichung

$\mu_1 (r + \lambda_1 p) + \mu_2 (r + \lambda_3 q) = o$, weil die Gleichung eine algebraische

Folge der Gleichungen $r + \lambda_1 p = o$ und $r + \lambda_3 q = o$ sein muss; die Grössen μ bedeuten hier unbestimmte Coëfficienten.

Ebenso hat eine Linie, welche durch (I 3, III 1) geht, die Gleichung

$$\mu_3 (r + \lambda_2 p) + \mu_4 (r + \lambda_4 q) = o.$$

Schliesslich hat eine Linie, welche durch (II 3, III 2) geht, die Gleichung

$$\mu_5 (r + \lambda_2 p + \lambda_3 q) + \mu_6 (r + \lambda_1 p + \lambda_4 q) = o.$$

Wenn nun die genannten drei Punkte in einer geraden Linie liegen sollen, so muss die Gleichung der Linie, welche durch die beiden ersten Punkte geht, also die Gleichung der Linie (I 2, II 1) (I 3, III 1) identisch mit der Gleichung der Linie sein, welche durch den ersten und letzten Punkt geht, also mit der Gleichung der Linie (I 2, II 1) (II 3, III 2).

Um dieses zu zeigen, bilden wir uns die Gleichungen der genannten beiden Linien.

Die Linie (I 2, II 1) (I 3, III 1) geht durch die Punkte (I 2, II 1) und (I 3, III 1). Es muss für sie daher

$$\mu_1 (r + \lambda_1 p) + \mu_2 (r + \lambda_3 q) \equiv \mu_3 (r + \lambda_2 p) + \mu_4 (r + \lambda_4 q) \text{ sein.}$$

Einen der unbestimmten Faktoren etwa μ_3 können wir $= 1$ setzen und erhalten zur Bestimmung der übrigen aus der identischen Gleichung die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 1)\ & \mu_1 + \mu_2 = 1 + \mu_4, \\ 2)\ & \mu_1 \lambda_1 = \lambda_2, \\ 3)\ & \mu_2 \lambda_3 = \mu_4 \lambda_4. \end{aligned}$$

Aus 2) folgt $\mu_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Setzen wir diesen Werth in die mit λ_3 multiplicierte Gleichung 1) ein, so wird

$$\begin{aligned} 1)\ & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \lambda_3 + \mu_2 \lambda_3 = \lambda_3 + \mu_4 \lambda_3; \text{ hiervon subtrahieren wir} \\ 3)\ & \mu_2 \lambda_3 = \mu_4 \lambda_4 \quad \text{und erhalten} \\ \hline & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \lambda_3 = \lambda_3 + \mu_4 (\lambda_3 - \lambda_4), \text{ also} \\ & \mu_4 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_4} \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Setzen wir den Werth von μ_3 und μ_4 etwa in die zweite der identischen Gleichungen ein, so erhalten wir als Gleichung unserer Linie

$$r + \lambda_2 p + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_4} \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_1} (r + \lambda_4 q = o, \text{ oder}$$

$$\left(1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_4} \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) r + \lambda_2 p + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_4} \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot \lambda_4 q = o, \text{ oder}$$

$$[(\lambda_3 - \lambda_4) \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_3] r + (\lambda_3 - \lambda_4) \lambda_1 \lambda_2 p + (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_3 \lambda_4 q = o, \text{ oder}$$

$$\text{A)}\ (\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4) r + (\lambda_3 - \lambda_4) \lambda_1 \lambda_2 p + (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_3 \lambda_4 q = o.$$

Dieses ist also die Gleichung der Linie (I 2, II 1) (I 3; III 1).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Linie (I 2, II 1) (II 3, III 2) geht durch die Punkte (I 2, II 1) und (II 3, III 2). Es muss für sie daher

$$\mu_1 \,(\mathrm{r} + \lambda_1 \mathrm{p}) + \mu_2 \,(\mathrm{r} + \lambda_3 \mathrm{q}) \equiv \mu_5 \,(\mathrm{r} + \lambda_2 \mathrm{p} + \lambda_3 \mathrm{q}) + \mu_6 \,(\mathrm{r} + \lambda_1 \mathrm{p} + \lambda_4 \mathrm{q})$$

sein, oder

$$(\mu_1 + \mu_2)\, \mathrm{r} + \mu_1 \lambda_1 \mathrm{p} + \mu_2 \lambda_3 \mathrm{q} \equiv (\mu_5 + \mu_6)\, \mathrm{r} + (\mu_5 \lambda_2 + \mu_6 \lambda_1)\, \mathrm{p} + (\mu_5 \lambda_3 + \mu_6 \lambda_4)\, \mathrm{q}.$$

Einen der unbestimmten Faktoren etwa μ_5 können wir $= 1$ setzen und erhalten dann aus der identischen Gleichung zur Bestimmung der drei übrigen Faktoren die Gleichungen

$$4)\ \mu_1 + \mu_2 = 1 + \mu_6,$$
$$5)\ \mu_1 \lambda_1 = \lambda_2 + \mu_6 \lambda_1,$$
$$6)\ \mu_2 \lambda_3 = \lambda_3 + \mu_6 \lambda_4.$$

Aus 5) folgt $\mu_1 = \mu_6 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Setzen wir diesen Werth in die mit λ_3 multiplicierte Gleichung 4) ein, so wird

$$\mu_6 \lambda_3 + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} + \mu_2 \lambda_3 = \lambda_3 + \mu_6 \lambda_3 \text{ oder}$$

$$\frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} + \mu_2 \lambda_3 = \lambda_3. \text{ Hiervon subtrahieren wir}$$

$$6) \qquad \mu_2 \lambda_3 = \lambda_3 + \mu_6 \lambda_4 \text{ und erhalten}$$

$$\frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} = - \mu_6 \lambda_4, \text{ also } \mu_6 = - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_4}.$$

Setzen wir den Werth von μ_5 und μ_6 in die zweite der identischen Gleichungen ein, so erhalten wir als Gleichung unserer Linie

$$\left(1 - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_4}\right) \mathrm{r} + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_4} \lambda_1\right) \mathrm{p} + \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_4} \lambda_4\right) \mathrm{q} = \mathrm{o} \text{ oder}$$

$$(\lambda_1 \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_3)\, \mathrm{r} + (\lambda_4 - \lambda_3)\, \lambda_1 \lambda_2 \mathrm{p} + (\lambda_1 - \lambda_2)\, \lambda_3 \lambda_4 \mathrm{q} = \mathrm{o} \text{ oder}$$

$$\mathrm{B})\ (\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4)\, \mathrm{r} + (\lambda_3 - \lambda_4)\, \lambda_1 \lambda_2 \mathrm{p} + (\lambda_2 - \lambda_1)\, \lambda_3 \lambda_4 \mathrm{q} = \mathrm{o}.$$

Dieses ist also die Gleichung der Linie (I 2, II 1) (II 3, III 2).

Die Gleichungen A) und B) sind aber, was wir beweisen wollten, identisch.

10.

Schliesslich wollen wir unsere letzte Betrachtung wiederholen, indem wir die Gleichungen $\mathrm{p} = \mathrm{o}$, $\mathrm{q} = \mathrm{o}$ und $\mathrm{r} = \mathrm{o}$ etc., die wir eben als Gleichungen von Linien ansahen, nunmehr als Gleichungen von Punkten ansehen. Unsere Betrachtung gestaltet sich dann folgendermassen:

Tafel I, Fig. IV. Wir haben je drei Linien I, II, III und 1, 2, 3, welche durch die Punkte $\mathrm{p} = \mathrm{o}$ resp. $\mathrm{q} = \mathrm{o}$ gehen. Der Durchschnittspunkt der Linien I und 1 habe die Gleichung $\mathrm{r} = \mathrm{o}$.

Wir bilden uns nun die Gleichungen der Durchschnittspunkte der einzelnen Linien.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(I 2) liegt auf der Verbindungslinie der Punkte r und p, hat also die Gleichung

$r + \lambda_1 p = o$, wo λ_1 eine bestimmte Grösse ist.

(I 3) liegt auf der Verbindungslinie der Punkte r und p, hat also die Gleichung

$r + \lambda_2 p = o$, wo λ_2 eine bestimmte Grösse ist.

(II 1) liegt auf der Verbindungslinie der Punkte r und q, hat also die Gleichung

$r + \lambda_3 q = o$, wo λ_3 eine bestimmte Grösse ist.

(III 1) liegt auf der Verbindungslinie der Punkte r und q, hat also die Gleichung

$r + \lambda_4 q = o$, wo λ_4 eine bestimmte Grösse ist.

(II 2) liegt erstens auf der Verbindungslinie von p und (II 1), hat also die Gleichung $r + \lambda_3 q + \lambda_5 p = o$, zweitens auf der Verbindungslinie von q und (I 2), hat also auch die Gleichung $r + \lambda_1 p + \lambda_6 q = o$.

Diese beiden Gleichungen müssen daher für den Punkt (II 2) identisch werden; also ist

$$r + \lambda_3 q + \lambda_5 p \equiv r + \lambda_1 p + \lambda_6 q.$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\lambda_5 = \lambda_1$ und $\lambda_6 = \lambda_3$ ist; daher wird die Gleichung des Punktes (II 2)

$$r + \lambda_1 p + \lambda_3 q = o.$$

(II 3) liegt erstens auf der Verbindungslinie von p und (II 1), hat also die Gleichung $r + \lambda_3 q + \lambda_7 p = o$, zweitens auf der Verbindungslinie von q und (I 3), hat also auch die Gleichung

$r + \lambda_2 p + \lambda_8 q = o$.

Diese beiden Gleichungen müssen daher für den Punkt (II 3) identisch werden; also ist

$$r + \lambda_3 q + \lambda_7 p \equiv r + \lambda_2 p + \lambda_8 q.$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\lambda_7 = \lambda_2$ und $\lambda_8 = \lambda_3$ ist; daher wird die Gleichung des Punktes (II 3)

$$r + \lambda_2 p + \lambda_3 q = o.$$

(III 2) liegt erstens auf der Verbindungslinie von p und (III 1), hat also die Gleichung $r + \lambda_4 q + \lambda_9 p = o$, zweitens auf der Verbindungslinie von q und (I 2), hat also auch die Gleichung

$r + \lambda_1 p + \lambda_{10} q = o$.

Diese beiden Gleichungen müssen daher für den Punkt (III 2) identisch werden; also ist

$$r + \lambda_4 q + \lambda_9 p \equiv r + \lambda_1 p + \lambda_{10} q.$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\lambda_9 = \lambda_1$ und $\lambda_{10} = \lambda_4$ ist; daher wird die Gleichung des Punktes (III 2)

$$r + \lambda_1 p + \lambda_4 q = o.$$

(III 3) endlich liegt erstens auf der Verbindungslinie von p und (III 1), hat also die Gleichung $r + \lambda_4 q + \lambda_{11} p = o$, zweitens auf der Verbindungslinie von q und (I 3), hat also auch die Gleichung

$r + \lambda_2 p + \lambda_{12} q = o$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese beiden Gleichungen müssen daher für den Punkt (III 3) identisch werden; also ist

$$r + \lambda_4 q + \lambda_{11} p \equiv r + \lambda_2 p + \lambda_{12} q.$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\lambda_{11} = \lambda_2$ und $\lambda_{12} = \lambda_4$ ist; daher wird die Gleichung des Punktes (III 3)

$$r + \lambda_2 p + \lambda_4 q = o.$$

Wir behaupten nun wieder, dass die früher genannten sechs Gruppen von je drei Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden, und wollen den Beweis wieder für die drei Linien

(I 2, II 1), (I 3, III 1), (II 3, III 2) führen.

Ein Punkt, welcher auf der Linie (I 2, II 1) liegt, hat die Gleichung

$\mu_3 (r + \lambda_1 p) + \mu_2 (r + \lambda_3 q) = o$, weil die Gleichung eine algebraische Folge der Gleichungen $r + \lambda_1 p = o$ und $r + \lambda_3 q = o$ sein muss; die Grössen μ bedeuten hier unbestimmte Coëfficienten.

Ebenso hat ein Punkt, welcher auf der Linie (I 3, III 1) liegt, die Gleichung

$$\mu_3 (r + \lambda_2 p) + \mu_4 (r + \lambda_4 q) = o.$$

Schliesslich hat ein Punkt, welcher auf der Linie (II 3, III 2) liegt, die Gleichung

$$\mu_5 (r + \lambda_2 p + \lambda_3 q) + \mu_6 (r + \lambda_1 p + \lambda_4 q) = o.$$

Wenn nun die genannten drei Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden sollen, so muss die Gleichung des Punktes (I 2, II 1) (I 3, III 1) identisch mit der des Punktes (I 2, II 1) (II 3, III 2) sein.

Um dieses zu zeigen, bilden wir uns die Gleichungen der genannten beiden Punkte. Der Punkt (I 2, II 1) (I 3, III 1) liegt sowohl auf der Linie (I 2, II 1), als auf der Linie (I 3, III 1). Es muss für ihn daher

$$\mu_1 (r + \lambda_1 p) + \mu_2 (r + \lambda_3 q) \equiv \mu_3 (r + \lambda_2 p) + \mu_4 (r + \lambda_4 q) \text{ sein.}$$

Bestimmen wir aus dieser identischen Gleichung den Werth der unbestimmten Faktoren wieder ganz wie früher, so erhalten wir als Gleichung für den Punkt (I 2, II 1) (I 3, III 1)

$$\text{A)}\ (\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4)\, r + (\lambda_3 - \lambda_4)\, \lambda_1 \lambda_2\, p + (\lambda_2 - \lambda_1)\, \lambda_3 \lambda_4\, q = o.$$

Der Punkt (I 2, II 1) (II 3, III 2) liegt sowohl auf der Linie (I 2, II 1), als auf der Linie (II 3, III 2). Es muss für ihn daher

$$\mu_1 (r + \lambda_1 p) + \mu_2 (r + \lambda_3 q) \equiv \mu_5 (r + \lambda_2 p + \lambda_3 q) + \mu_6 (r + \lambda_1 p + \lambda_4 q) \text{ sein.}$$

Bestimmen wir aus dieser identischen Gleichung den Werth der unbestimmten Faktoren ganz wie früher, so erhalten wir als Gleichung für den Punkt (I 2, II 1) (I 3, III 1)

$$\text{B)}\ (\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4)\, r + (\lambda_3 - \lambda_4)\, \lambda_1 \lambda_2\, p + (\lambda_2 - \lambda_1)\, \lambda_3 \lambda_4\, q = o.$$

Die Gleichungen A) und B) sind aber, was wir beweisen wollten, identisch.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

11.

Die allgemeine Gleichung der geraden Linie

$$ax + by + c = 0$$

lässt sich auf eine andere Form bringen, welche vielfach für die Anwendung praktischer ist. Dividieren wir nämlich die Gleichung durch $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$, so geht sie über in

$$\frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} y + \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Nennen wir das vom Coordinatenanfangspunkte auf die Linie gefällte Loth p und bezeichnen die Winkel, welche dieses Loth mit den Coordinatenaxen macht, mit α und β, so ist

$$\cos \alpha = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$p = \frac{-c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{a^2 + b^2}$ ist dabei so zu wählen, dass p unter allen Umständen positiv wird.

Die Gleichung geht so über in

$$x \,.\, \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0.$$

Diese Form der Gleichung nennt man die Normalform der Gleichung der geraden Linie. Wenn wir uns die Gleichung der geraden Linie in ihrer Normalform denken, so wollen wir für sie im Folgenden die abgekürzten Zeichen

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 0 \text{ etc.,}$$

also die Buchstaben des griechischen Alphabets gebrauchen, während wir mit

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0 \text{ etc.}$$

die Gleichung der geraden Linie in der allgemeinen Form bezeichnen.

12.

Die Gleichung einer geraden Linie sei

$$ax + by + c = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{a}{c} x + \frac{b}{c} y + 1 = 0 \text{ oder}$$

$ux + vy + 1 = 0$, wo x, y die Coordinaten des veränderlichen Punktes und u und v constante Grössen sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nehmen wir x und y als constante und u und v als veränderliche Grössen an, so stellt unserer früheren Betrachtung entsprechend die Gleichung

$$ux + vy + 1 = o$$

den durch seine Coordinaten gegebenen Punkt x, y dar oder genauer alle Linien, welche durch diesen Punkt hindurchgehen.

Die Gleichung $ux + vy + 1 = o$ nennt man die Normalform der Gleichung des Punktes, u und v die Coordinaten der Linie $ux + vy + 1 = o$.

Wenn wir uns der Gleichung des Punktes in der Normalform im Folgenden bedienen, so wollen wir für sie die abgekürzten Zeichen

$$\alpha_1 = o$$
$$\alpha_2 = o \text{ etc.,}$$

also die Buchstaben des griechischen Alphabets gebrauchen, während wir mit

$$a_1 = o$$
$$a_2 = o \text{ etc.}$$

die Gleichung des Punktes in der allgemeinen Form bezeichnen.

13.

Eine Linie hat die Gleichung

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - p = o.$$

Es soll die Länge L des Abstandes eines Punktes P von der Linie bestimmt werden, der durch seine Coordinaten $x_1 y_1$ gegeben ist.

Nehmen wir an, dass P mit dem Coordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der geraden Linie liegt, so hat L dasselbe Vorzeichen wie p, ist also positiv. Ziehen wir durch den Punkt P eine parallele Linie zu der gegebenen und bezeichnen mit p′ das vom Coordinatenanfangspunkte auf diese Parallele gefällte Loth, so hat die Parallele die Gleichung

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - p' = o.$$

Weil aber der Punkt P auf dieser Linie liegt, so erfüllen seine Coordinaten x_1, y_1 die Gleichung. Es ist daher auch

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta - p' = o.$$

Hieraus folgt $p' = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta$ und somit ist

$$L = p - p' = - x_1 \cos\alpha - y_2 \cos\beta + p \text{ oder}$$
$$- L = x_1 \cos\alpha + y_2 \cos\beta - p.$$

Liegt P mit dem Coordinatenanfangspunkt nicht auf derselben Seite der geraden Linie, so wird entsprechend

$$L = x_1 \cos\alpha + y_2 \cos\beta - p.$$

Ist die Gleichung der geraden Linie also in der Normalform $\alpha = o$ gegeben, so drückt $+ \alpha$ oder $- \alpha$ den senkrechten Abstand eines durch die Coordinaten xy gegebenen Punktes von der geraden Linie aus, je

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nachdem der Punkt mit dem Coordinatenanfangspunkt nicht auf derselben Seite oder auf derselben Seite der geraden Linie liegt.

14.

Ein Punkt hat die Gleichung

$$ux + vy + 1 = o.$$

Es soll die Länge L des Abstandes des Punktes von der Linie bestimmt werden, die durch ihre Coordinaten u und v gegeben ist.

Die Gleichung $ux + vy + 1 = o$ ist die Gleichung eines Punktes oder genauer die Gleichung jeder Linie, welche durch diesen Punkt hindurchgeht. Die Normalform der Gleichung dieser Linien ist daher nach Artikel 11)

$$\frac{ux + vy + 1}{-\sqrt{u^2 + v^2}} = o \text{ und somit}$$

die Länge L des senkrechten Abstandes des Punktes von der durch die Coordinaten u und v bestimmten geraden Linie

$$= \mp \frac{ux + vy + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$ je nachdem der Punkt mit dem Coordinatenanfangspunkt nicht auf derselben Seite oder auf derselben Seite der geraden Linie liegt.

Ist die Gleichung eines Punktes also in der Normalform $\alpha = o$ gegeben, so drückt $\mp \frac{\alpha}{\sqrt{u_2 + v_2}}$ den senkrechten Abstand des Punktes von der durch die Coordinaten u und v bestimmten geraden Linie aus, je nachdem der Punkt mit dem Coordinatenanfangspunkt nicht auf derselben Seite oder auf derselben Seite der geraden Linie liegt.

15.

$$\alpha_1 = o$$
$$\alpha_2 = o$$

seien die Gleichungen zweier geraden Linien. Entsprechend der Betrachtung, die wir für die allgemeine Form der Gleichung der geraden Linie gemacht haben, ist dann

$$\alpha_1 + \xi\alpha_2 = o \text{ oder wenn wir } \xi = -\varkappa \text{ setzen}$$
$$\alpha_1 - \varkappa\alpha_2 = o$$

die Gleichung einer Linie, welche durch den Schnittpunkt der Linien $\alpha_1 = o$ und $\alpha_2 = o$ geht. Wir wollen untersuchen, welche Bedeutung die Grösse $\varkappa$ hat.

Aus der Gleichung $\alpha_1 - \varkappa\alpha_2 = o$ folgt

$$\varkappa = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

α_1 und α_2 stellen aber, abgesehen von den Vorzeichen, wie wir gesehen haben, die senkrechten Abstände eines Punktes von den Linien $\alpha_1 = o$ und $\alpha_2 = o$ dar; $\varkappa$ ist also das Verhältniss dieser Perpendikel, welches für jeden Punkt der Linie $\alpha_1 - \varkappa \alpha_2 = o$ constant ist. Für eine Linie, welche den von α_1 und α_2 gebildeten Winkel halbiert, sind die Perpendikel gleich und haben auch dasselbe Vorzeichen; es ist also $\varkappa = 1$ und die Gleichung der Halbierungslinie somit

$$\alpha_1 - \alpha_2 = o.$$

Für eine Linie, welche den Nebenwinkel des von α_1 und α_2 gebildeten Winkels halbiert, sind die Perpendikel gleich, haben aber ungleiches Vorzeichen; es ist also $\varkappa = -1$ und die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = o$$

stellt somit die Halbierungslinie des Nebenwinkels des von den beiden Linien $\alpha_1 = o$ und $\alpha_2 = o$ gebildeten Winkels dar.

16.

$$\alpha_1 = o$$
$$\alpha_2 = o$$

seien die Gleichungen zweier Punkte. Entsprechend der Betrachtung, die wir für die allgemeine Form der Gleichung des Punktes gemacht haben, ist dann

$$\alpha_1 + \xi \alpha_2 = o \text{ oder, wenn wir } \xi = -\varkappa \text{ setzen}$$
$$\alpha_1 - \varkappa \alpha_2 = o$$

die Gleichung eines Punktes, welcher auf der Verbindungslinie der Punkte $\alpha_1 = o$ und $\alpha_2 = o$ liegt. Wir wollen untersuchen, welche Bedeutung die Grösse $\varkappa$ hat. Aus der Gleichung $\alpha_1 - \varkappa \alpha_2 = o$ folgt

$$\varkappa = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$= \frac{\frac{\alpha_1}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{\frac{\alpha_2}{\sqrt{u^2 + v^2}}}, \text{ wo u und v die Coordinaten einer geraden}$$

Linie l sein sollen.

$\frac{\alpha_1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ und $\frac{\alpha_2}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ stellen aber, abgesehen von den Vorzeichen, wie wir gesehen haben, die senkrechten Abstände der Punkte $\alpha_1 = o$ und $\alpha_2 = o$ von der durch die Coordinaten u und v bestimmten geraden Linie l dar; $\varkappa$ ist also das Verhältniss dieser Perpendikel.

Für jede Linie l, welche durch den Mittelpunkt der Verbindungslinie der Punkte $\alpha_1 = o$ und $\alpha_2 = o$ geht, sind die von $\alpha_1 = o$ und $\alpha_2 = o$ gefällten Perpendikel gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen; es ist also $\varkappa = -1$ und die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = o$$

stellt somit den Mittelpunkt der Verbindungslinie dar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für jede Linie l, welche durch den unendlich entfernten Punkt der Verbindungslinie der Punkte $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ geht, mit anderen Worten für jede Linie, welche dieser Verbindungslinie parallel ist, sind die von $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ gefällten Perpendikel gleich und haben auch gleiches Vorzeichen; es ist also $\varkappa = 1$ und die Gleichung

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

stellt somit den unendlich entfernten Punkt der Verbindungslinie dar.

17.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

seien die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks. Die Gleichungen der Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks sind dann

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 - \alpha_1 = 0.$$

Die Summe der linken Seiten der Gleichungen ist identisch $= 0$, also

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) \equiv 0.$$

Somit ist die Bedingung des Artikels 5) für die drei Halbierungslinien erfüllt und es schneiden sich daher diese drei Linien in einem und demselben Punkte.

Der Beweis lässt sich auch unabhängig von dem früheren Satze auf folgende Weise führen.

Die Halbierungslinie $(\alpha_1 \alpha_2)$ hat die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$,

die Halbierungslinie $(\alpha_2 \alpha_3)$ hat die Gleichung $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$.

Eine durch den Durchschnittspunkt $(\alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3)$ beider Halbierungslinien gehende Linie hat die Gleichung

$$1)\ \alpha_1 - \alpha_2 + \xi(\alpha_2 - \alpha_3) = 0.$$

Eine durch den Durchschnittspunkt $(\alpha_3 \alpha_1)$ gehende Linie hat die Gleichung

$$2)\ \alpha_1 + \eta \alpha_3 = 0.$$

Für die Verbindungslinie von $(\alpha_3 \alpha_1)$ und $(\alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3)$ müssen die Gleichungen 1) und 2) identisch werden. Es ist also

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \xi(\alpha_2 - \alpha_3) \equiv \alpha_1 + \eta \alpha_3.$$

Diese identische Gleichung wird erfüllt durch $\xi = 1$ und $\eta = -1$. Jede der Gleichungen 1) und 2) geht dadurch über in

$$\alpha_1 - \alpha_3 = 0.$$

Dieses ist aber die Gleichung der Halbierungslinie des von α_1 und α_3 gebildeten Winkels. Wir haben also den Satz bewiesen:

Die drei Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

18.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

seien die Gleichungen der drei Eckpunkte eines Dreiecks.

Die Gleichungen

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 - \alpha_1 = 0$$

stellen dann, wie wir gesehen haben, die unendlich entfernten Punkte auf den Seiten des Dreiecks dar.

Die identisch erfüllte Gleichung

$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) \equiv 0$, sagt daher aus, dass diese drei Punkte auf einer geraden Linie liegen.

Je nach der Anschauungsweise, die man sich macht, kann man diesen Satz verschieden ausdrücken, z. B.:

Wenn man eine gerade Linie, welche zwei Seiten eines Dreiecks durchschneidet, immer weiter von der Gegenecke entfernt, so entfernt sich auch der Schnittpunkt der Linie mit der dritten Seite immer weiter; oder:

Verlegt man zwei Schnittpunkte von zwei Seiten eines Dreiecks mit einer geraden Linie in's Unendliche, so rückt auch der Schnittpunkt der dritten Seite mit der Linie in's Unendliche; oder:

Die unendlich entfernte gerade Linie ist den drei Seiten eines Dreiecks parallel; oder:

Die unendlich entfernte gerade Linie ist ein Kreis mit unendlich grossem Radius.

19.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

seien die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks. Dann sind

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 - \alpha_1 = 0$$

die Gleichungen der Halbierungslinien der Winkel und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_1 = 0$$

die Gleichungen der Halbierungslinien der Aussenwinkel des Dreiecks.

Es bestehen nun die identisch erfüllten Gleichungen

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) \equiv 0$$
$$(\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) \equiv 0$$
$$(\alpha_3 + \alpha_1) - (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) \equiv 0.$$

Diese drei identischen Gleichungen drücken den Satz aus:

Die Halbierungslinien eines Winkels und zweier Aussenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte.

20

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

seien die Gleichungen der drei Eckpunkte eines Dreiecks. Dann sind

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 - \alpha_1 = 0$$

die Gleichungen von unendlich entfernten Punkten auf den Dreiecksseiten und

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_1 = 0$$

die Gleichungen der Halbierungspunkte der Dreiecksseiten.

Die drei identisch erfüllten Gleichungen

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) \equiv 0$$
$$(\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) \equiv 0$$
$$(\alpha_3 + \alpha_1) - (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) \equiv 0$$

drücken daher den Satz aus:

Die Halbierungspunkte von zwei Seiten eines Dreiecks liegen in gerader Linie mit dem unendlich entfernten Punkte der dritten Seite, d. h. die Verbindungslinie der Mitten zweier Seiten schneidet die dritte Seite im Unendlichen, ist ihr also parallel.

21.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

seien die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks. Dann sind

$$\alpha_1 + \lambda_1 (\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$
$$\alpha_2 + \lambda_2 (\alpha_3 + \alpha_1) = 0$$
$$\alpha_3 + \lambda_3 (\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

die Gleichungen von allen Linien, die durch die Durchschnittspunkte der Halbierungslinien der einzelnen Aussenwinkel mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks gehen, wenn wir den Grössen λ alle möglichen Werthe beilegen.

Es wird aber

$$\alpha_1 + \lambda_1 (\alpha_2 + \alpha_3) \equiv \alpha_2 + \lambda_2 (\alpha_3 + \alpha_1) \equiv \alpha_3 + \lambda_3 (\alpha_1 + \alpha_2),$$

wenn wir die Grössen $\lambda = 1$ setzen, also unter den drei Gruppen von Linien, welche durch obige Gleichungen dargestellt werden, je eine bestimmte Linie auswählen. Die identische Gleichung sagt nun uns, dass diese durch die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

dargestellte Linie jeder Gruppe angehörig ist. Dieses ist aber nur möglich, wenn die drei Punkte, in denen die Halbierungslinien eines Aussenwinkels mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten zusammentreffen, in einer geraden Linie liegen. Wir haben also den Satz bewiesen:

Wenn man in einem Dreieck die Aussenwinkel halbiert, so schneiden die Halbierungslinien die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.

22.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

seien die Gleichungen der drei Eckpunkte eines Dreiecks. Dann sind

$$\alpha_1 + \lambda_1 (\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$
$$\alpha_2 + \lambda_2 (\alpha_3 + \lambda_1) = 0$$
$$\alpha_3 + \lambda_3 (\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

die Gleichungen von allen Punkten, welche auf den Verbindungslinien der Mitten der drei Seiten mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks liegen, wenn wir den Grössen λ alle möglichen Werthe beilegen.

Es wird aber

$$\alpha_1 + \lambda_1 (\alpha_2 + \alpha_3) \equiv \alpha_2 + \lambda_2 (\alpha_3 + \alpha_1) \equiv \alpha_3 + \lambda_3 (\alpha_1 + \alpha_2),$$

wenn wir die Grössen $\lambda = 1$ setzen, also unter den drei Punktreihen, welche durch obige Gleichungen dargestellt werden, je einen bestimmten Punkt auswählen. Der durch die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

dargestellte Punkt muss also auf jeder der Verbindungslinien der Mitten der drei Seiten mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks liegen. Wir haben also den Satz bewiesen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Verbindungslinien der Mitten der Seiten eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken schneiden sich in einem und demselben Punkte.

23.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

seien die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks. Dann sind

$$\alpha_1 + \lambda_1 (\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$
$$\alpha_2 + \lambda_2 (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$$
$$\alpha_3 + \lambda_3 (\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

die Gleichungen von allen Linien, die durch die Durchschnittspunkte der Halbierungslinien eines Aussenwinkels resp. zweier innerer Winkel mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks gehen, wenn wir den Grössen λ alle möglichen Werthe beilegen. Es wird aber, abgesehen von den Vorzeichen der ganzen Ausdrücke,

$$\alpha_1 + \lambda_1 ((\alpha_2 + \alpha_3) \equiv \alpha_2 + \lambda_2 (\alpha_3 - \lambda_1) \equiv \alpha_3 + \lambda_3 (\alpha_1 - \alpha_2),$$

wenn wir $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ setzen, also unter den drei Gruppen von Linien, welche durch obige Gleichungen dargestellt werden, je eine bestimmte Linie auswählen. Diese durch die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_1 - \alpha_3 = 0$ oder

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

dargestellte Linie muss also jeder der drei Gruppen angehören. Dieses ist aber nur möglich, wenn die drei Punkte, in denen die Halbierungslinien eines Aussenwinkels und zweier innerer Winkel die drei gegenüberliegenden Seiten schneiden, in einer geraden Linie liegen. Wir haben also den Satz bewiesen:

Die Halbierungslinien eines Aussenwinkels und zweier innerer Winkel eines Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.

24.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

seien die Gleichungen der drei Eckpunkte eines Dreiecks. Dann sind

$$\alpha_1 + \lambda_1 (\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$
$$\alpha_2 + \lambda_2 (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$$
$$\alpha_3 + \lambda_3 (\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

die Gleichungen von allen Punkten, welche auf den Verbindungslinien der Mitte einer Seite

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

resp. den unendlich entfernten Punkten der beiden anderen Seiten mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks liegen, wenn wir den Grössen λ alle möglichen Werthe beilegen.

Es wird aber, abgesehen von den Vorzeichen der ganzen Ausdrücke

$$\alpha_1 + \lambda_1 (\alpha_2 + \alpha_3) \equiv \alpha_2 + \lambda_2 (\alpha_3 - \alpha_1) \equiv \alpha_3 + \lambda_3 (\alpha_1 - \alpha_2),$$

wenn wir $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ setzen, also unter den drei Punktreihen, welche durch obige Gleichungen dargestellt werden, je einen bestimmten Punkt auswählen. Der durch die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = o$ oder

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = o$$

dargestellte Punkt muss also auf jeder der genannten Verbindungslinien liegen. Es ist aber die Verbindungslinie des Punktes α_2 resp. α_3 mit dem unendlich entfernten Punkte der Linie $(\alpha_3\,\alpha_1)$ resp. $(\alpha_1\,\alpha_2)$ nichts anderes, als eine Parallele zu der Linie $(\alpha_3\,\alpha_1)$ resp. $(\alpha_1\,\alpha_2)$. Wir haben also den Satz gefunden:

Zieht man durch zwei Ecken eines Dreiecks Parallelen zu den Gegenseiten und zieht ferner die Verbindungslinie der dritten Ecke mit der Mitte der Gegenseite, so schneiden sich diese Verbindungslinie und die beiden Parallelen in einem und demselben Punkte.

Dieses ist nur eine andere Form des Satzes:

In einem Parallelogramme halbieren sich die Diagonalen.

25.

$$\alpha_1 = o$$
$$\alpha_2 = o$$
$$\alpha_3 = o$$

seien die Gleichungen der drei Eckpunkte eines Dreiecks.

Nach dem vorigen Artikel sind dann

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = o$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = o$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = o$$

die Gleichungen von Punkten, von denen jeder mit den drei gegebenen Punkten die Ecken eines Parallelogramms bilden. (Tafel III, Fig. I) und zwar liegt der Punkt $(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ dem Punkt α_1, der Punkt $(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)$ dem Punkt α_2 und der Punkt $(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)$ dem Punkt α_3 gegenüber.

Bestehen also für die Eckpunkte eines Vierecks die Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcr} \alpha_1 = o & & \alpha_1 = o & & \alpha_1 = o \\ \alpha_2 = o & \text{oder} & \alpha_2 = o & \text{oder} & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = o \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = o & & \alpha_3 = o & & \alpha_2 = o \\ \alpha_3 = o & & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = o & & \alpha_3 = o, \end{array}$$

so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Um das Dualitätsprincip im folgenden Artikel deutlich hervortreten lassen zu können, geben wir diesem Satze folgende Form:

Bestehen für die Eckpunkte eines Vierecks die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

und verbindet man den Punkt α_1 mit dem Mittelpunkt der Linie $(\alpha_2 \alpha_3)$, die Punkte α_2 und α_3 mit den unendlich entfernten Punkten der Linien $(\alpha_1 \alpha_3)$ resp. $(\alpha_1 \alpha_2)$, so schneiden sich die drei Verbindungslinien in einem und demselben Punkte und zwar in dem Punkte $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

26.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

seien die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks.

Nach Artikel 23) sind dann

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen von drei Linien, von denen jede zwei Seiten und die Verlängerung der dritten Seite so schneidet, dass wenn man die Durchschnittspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken verbindet, je zwei Winkel und je ein Aussenwinkel des Dreiecks durch diese Verbindungslinien halbiert werden. (Tafel III, Fig. II.)

Es bilden aber die Linien

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ebenso} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ebenso} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

drei Paare von Vierecken, deren Eigenschaften wir durch folgenden Satz charakterisieren können:

Bestehen für die Seiten eines Vierecks die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

und bringt man die Linie α_1 zum Durchschnitt mit der Halbierungslinie des Nebenwinkels vom Winkel $(\alpha_2 \alpha_3)$, die Linien α_2 und α_3 zum Durchschnitt mit den Hal-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bierungslinien der Winkel $(\alpha_1 \alpha_3)$ resp. $(\alpha_1 \alpha_2)$, so liegen die drei Durchschnittspunkte auf einer und derselben geraden Linie und zwar auf der Linie $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Ein solches Viereck, welches also dem Parallelogramm durch das Dualitätsprincip entspricht, wollen wir ein Halbierungsviereck nennen. Wir wählen diese Bezeichnung, weil dem Parallelismus der Seiten die Halbierung der Winkel durch die Diagonalen entspricht.

Das vollständige Viereck, welches durch die Verlängerung der Seiten α_1 und $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ resp. α_2 und α_3 bis zum Durchschnitt entsteht, nennen wir ein vollständiges Halbierungsviereck, die Ecken $(\alpha_3 \alpha_1)$ und $(\alpha_1 \alpha_2)$, an denen die halbierten Winkel des Vierecks liegen, die Hauptecken, die Ecke $(\alpha_2 \alpha_3)$, an der derjenige Winkel des vollständigen Halbierungsvierecks liegt, dessen Nebenwinkel halbiert wird, die Nebenecke, endlich die Ecken $(\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, $(\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ und $(\alpha_1, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ die Beiecken. Ferner nennen wir die Diagonalen des ursprünglichen Vierecks, also die Linien $(\alpha_3 \alpha_1)$ $(\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ und $(\alpha_2 \alpha_1)$ $(\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ die Hauptdiagonalen und die Verbindungslinie der durch die Verlängerung der Seiten des Vierecks erhaltenen Punkte, also die Linie $(\alpha_1, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ $(\alpha_3 \alpha_2)$ die Nebendiagonale. Jede Hauptdiagonale verbindet also eine Hauptecke mit einer Beiecke, die Nebendiagonale die Nebenecke mit einer Beiecke.

Ziehen wir in dem Dreiecke $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ (Tafel III, Fig. I) durch die Ecken α_2 und α_3 Linien nach den unendlich entfernten Punkten von $(\alpha_1 \alpha_3)$ resp. $(\alpha_1 \alpha_2)$, mit andern Worten parallele Linien zu diesen Seiten, welche sich im Punkte $(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ schneiden, so entsteht schon ein Parallelogramm und die Verbindungslinie $(\alpha_1, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ halbiert von selbst die Linie $(\alpha_2 \alpha_3)$. Entsprechend muss daher ein Viereck schon ein Halbierungsviereck sein, wenn zwei anliegende Winkel durch die Diagonalen halbiert werden.

Diesen Satz können wir folgendermassen beweisen:

Die Seiten eines Vierecks seien

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_4 = 0$$
$$\alpha_3 = 0.$$

Die beiden an α_1 anliegenden Winkel seien durch die Diagonalen halbiert. Wir können nun zunächst zeigen, dass

$$\alpha_4 \equiv -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \text{ sein muss.}$$

Die Diagonale $(\alpha_3 \alpha_1)$ $(\alpha_2 \alpha_4)$ hat, weil sie den Winkel $(\alpha_3 \alpha_1)$ halbiert, die Gleichung

$$\alpha_3 - \alpha_1 = 0.$$

Die Diagonale $(\alpha_1 \alpha_2)$ $(\alpha_3 \alpha_4)$ hat, weil sie den Winkel $(\alpha_1 \alpha_2)$ halbiert, die Gleichung

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0.$$

Die Linie α_4 geht nun erstens durch den Schnittpunkt der Seite α_2 und der Diagonale $(\alpha_3 - \alpha_1)$, hat also die Gleichung

$$\alpha_2 + \lambda_1 (\alpha_3 - \alpha_1) = 0,$$

zweitens geht sie durch den Schnittpunkt der Seite α_3 und der Diagonale $(\alpha_1 - \alpha_2)$, hat also auch die Gleichung

$$\alpha_3 + \lambda_2 (\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Für die Linie α_4 muss daher

$$\alpha_2 + \lambda_1 (\alpha_3 - \alpha_1) \equiv \alpha_3 + \lambda_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \text{ sein.}$$

Diese identische Gleichung ist erfüllt durch

$$\lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_2 = -1.$$

Daher geht, wie wir behauptet haben, die Gleichung der Linie α_4 über in

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass die Nebendiagonale des vollständigen Vierecks auch den Aussenwinkel der Nebenecke halbiert Denn die Nebendiagonale geht erstens durch den Schnittpunkt der Linien α_1 und $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, hat also die Gleichung

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \mu_1 \alpha_1 = 0,$$

zweitens durch den Schnittpunkt der Linien α_2 und α_3, hat also auch die Gleichung

$$\alpha_2 + \mu_2 \alpha_3 = 0.$$

Für die Nebendiagonale muss daher

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \mu_1 \alpha_1 \equiv \alpha_2 + \mu_2 \alpha_3 \text{ sein.}$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ist. Die Gleichung der Nebendiagonale wird also

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Diese Gleichung sagt aber aus, dass die Nebendiagonale in der That den Aussenwinkel der Nebenecke halbiert.

Ebenso, wie wir ein Viereck ein Parallelogramm nennen, wenn die Gegenseiten parallel sind, können wir daher für das Halbierungsviereck die Definition aufstellen:

Ein Viereck, in welchem die Diagonalen zwei an einer Seite anliegende Winkel halbieren, nennt man ein Halbierungsviereck.

Dem Satze, dass sich in einem Parallelogramme die Diagonalen halbieren, entspricht der Satz, dass die Nebendiagonale den Aussenwinkel der Nebenecke halbiert und zu gleicher Zeit der von der Nebendiagonale und derjenigen Seite gebildete Winkel, in welcher die Hauptecken liegen, von der Seite halbiert wird, welche durch keine Hauptecke geht. Der erste Theil entspricht der Eigenschaft des Parallelogramms, dass eine Diagonale die andere halbiert, der zweite Theil der Eigenschaft, dass gleichzeitig die erste Diagonale auch von der zweiten halbiert wird.

Nennen wir die Seite α_1, welche durch die Hauptecken geht, die Hauptseite, die Seiten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

α_3 und α_2, welche durch die Nebenecke gehen, die Nebenseiten und endlich die Seite $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, welche durch die Beiecken geht, die Beiseite, so können wir unseren Satz folgendermassen ausdrücken:

In jedem vollständigen Halbierungsviereck halbiert die Nebendiagonale den Aussenwinkel der Nebenecke und der von der Nebendiagonale und der Hauptseite gebildete Winkel wird von der Beiseite halbiert.

27.

(Tafel III, Fig. I.) Construiren wir uns bei einem Dreiecke mit den Ecken

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

die drei Parallelogramme, die mit dem Dreiecke die drei Ecken gemeinschaftlich haben, deren Ecken also durch die Gleichungeen

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

dargestellt werden, so erhalten wir ein Dreieck, dessen Ecken durch die drei letzten Gleichungen dargestellt werden. Die Verbindungslinien der Mitten der drei Seiten dieses Dreiecks bilden wieder die Seiten des ursprünglichen Dreiecks, also eines Dreiecks, dessen Seiten den Seiten des neuen Dreiecks parallel sind.

Umgekehrt können wir auch zeigen, dass die Verbindungslinien der Mitten der Seiten eines Dreiecks parallel den entsprechenden Seiten des Dreiecks sind. Es seien nämlich

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

die Ecken eines Dreiecks. Die Mitte der Seite $\alpha_1 \alpha_2$ hat die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Die Mitte der Seite $\alpha_1 \alpha_3$ hat die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0.$$

Endlich hat die Mitte der Seite $\alpha_2 \alpha_3$ die Gleichung

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Wir betrachten das Viereck, welches die Ecken

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \text{ hat.}$$

Setzen wir $\alpha_1 + \alpha_3 \equiv \mu_1$
$\alpha_2 + \alpha_3 \equiv \mu_2$
$\alpha_1 + \alpha_2 \equiv \mu_3$, so wird $\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 2\,\alpha_1$. Unsere Gleichungen gehen also über in die Gleichungen

$$\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 0$$
$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = 0$$
$$\mu_3 = 0.$$

Diese vier Gleichungen sagen aber uns, dass das betrachtete Viereck ein Parallelogramm ist, woraus sich unsere Behauptung unmittelbar ergiebt:

Die Verbindungslinie der Mitten zweier Seiten eines Dreiecks ist parallel der dritten Seite.

28.

Construiren wir uns bei einem Dreiecke mit den Seiten

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

die drei Halbierungsvierecke, die mit dem Dreieck die drei Seiten gemeinschaftlich haben, deren vierte Seiten also durch die Gleichungen

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

dargestellt werden, so erhalten wir ein Dreieck, dessen Seiten durch die drei letzten Gleichungen dargestellt werden. Die Halbierungslinien der Aussenwinkel dieses Dreiecks bilden wieder die Seiten des ursprünglichen Dreiecks.

Dieser Satz lässt eine dem Satze im vorigen Artikel entsprechende Umkehrung zu. Es seien nämlich die Seiten eines Dreiecks

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0.$$

Die Halbierungslinie des Aussenwinkels von $(\alpha_1\,\alpha_2)$ hat dann die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Die Halbierungslinie des Aussenwinkels von $(\alpha_1\,\alpha_3)$ hat die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0.$$

Endlich hat die Halbierungslinie des Aussenwinkels von $(\alpha_2\,\alpha_3)$ die Gleichung

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir betrachten das Viereck, welches die Seiten

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \text{ hat.} \end{aligned}$$

Setzen wir $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv \mu_1$

$\alpha_2 + \alpha_3 \equiv \mu_2$

$\alpha_1 + \alpha_3 \equiv \mu_3$, so wird $\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 \equiv 2\,\alpha_1$. Unsere Gleichungen gehen also über in die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 &= 0 \\ \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 0 \\ \mu_3 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sagen aber analog dem Satze im vorigen Artikel aus:

Halbiert man in einem Dreiecke zwei Aussenwinkel, so wird der von den beiden gegenüberliegenden Seiten gebildete Winkel durch diejenige Linie halbiert, welche den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbindet.

29.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

seien die Gleichungen der Ecken eines Vierecks, von dem wir voraussetzen wollen, dass seine Diagonalen sich halbieren. Analytisch drückt sich unsere Voraussetzung aus durch die identische Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_3 \equiv \alpha_2 + \alpha_3,$$

da die Gleichung $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ ja den Mittelpunkt der Diagonale $\alpha_1\,\alpha_3$ und die Gleichung $\alpha_2 + \alpha_4 = 0$ den Mittelpunkt der Diagonale $\alpha_2\,\alpha_4$ darstellt.

Diese identische Gleichung sagt aus, dass

$\alpha_1 \equiv \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$ ist. Unsere Gleichungen gehen daher über in die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus diesen vier Gleichungen ergiebt sich aber, dass das betrachtete Viereck ein Parallelogramm ist.

Wir haben also den Satz bewiesen:

Wenn in einem Viereck die Diagonalen sich halbieren, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

30.

(Tafel III, Fig. III.)

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_4 = 0$$

seien die Gleichungen der Seiten eines Vierecks, von dem wir voraussetzen wollen, dass die Nebendiagonale des vollständigen Vierecks einen Aussenwinkel desselben halbiert und dass der von der Nebendiagonale und einer Vierecksseite gebildete Winkel von der Gegenseite der letzteren halbiert wird.

Analytisch drückt sich unsere Voraussetzung aus durch die identische Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_3 \equiv \alpha_2 + \alpha_4,$$

indem die Gleichung $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ die Halbierungslinie des Aussenwinkels von $(\alpha_1 \alpha_3)$ darstellt, und $\alpha_2 + \alpha_4 = 0$ die Gleichung der Linie ist, welche mit α_4 einen Winkel bildet, der von α_2 halbiert wird, die identische Gleichung selbst aber aussagt, dass die Linie $\alpha_1 + \alpha_3$ mit der Linie $\alpha_2 + \alpha_4$ zusammenfällt.

Aus der identischen Gleichung folgt, dass

$\alpha_1 \equiv \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$ ist. Unsere Gleichungen gehen also über in die Gleichungen

$$\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_4 = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergiebt sich aber, dass das betrachtete Viereck ein Halbierungsviereck ist, und zwar ist α_4 die Hauptseite desselben.

Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Wenn im vollständigen Viereck die Nebendiagonale einen Aussenwinkel halbiert und der Winkel, welchen die Nebendiagonale an ihrem andern Ende mit einer Vierecksseite bildet, von der Gegenseite der letzteren halbiert wird, so ist das Viereck ein Halbierungsviereck, dessen Hauptseite die zuerst genannte Vierecksseite ist.

In den folgenden Artikeln beschränke ich mich darauf, Sätze vermittelst der Punktcoordinaten abzuleiten; die Resultate lassen sich analog dem Früheren sofort vermittelst der Liniencoordinaten zu neuen Sätzen transformieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

31.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

seien die Gleichungen der Eckpunkte eines Parallelogrammes. Die Mitten der vier Seiten haben alsdann die Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0.$$

Setzen wir $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv \mu_1$
$-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \equiv \mu_2$
$\alpha_1 + \alpha_3 \equiv \mu_3$, so gehen die vier letzten Gleichungen über in

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = 0$$
$$-\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$$
$$\mu_3 = 0.$$

Dieses sind aber wieder die Gleichungen der Eckpunkte eines Parallelogramms. Wir haben also den Satz bewiesen:

Die Mittelpunkte der Seiten eines Parallelogramms sind die Ecken eines neuen Parallelogramms.

Der eben bewiesene Satz gilt bekanntlich auch für jedes beliebige Viereck, wie sich leicht auch analytisch zeigen lässt.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_4 = 0$$

seien die Gleichungen der vier Eckpunkte eines beliebigen Vierecks. Dann sind

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$
$$\alpha_4 + \alpha_1 = 0$$

die Gleichungen der Mittelpunkte der Seiten.

Setzen wir $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv \mu_1$
$\alpha_2 + \alpha_3 \equiv \mu_2$
$\alpha_4 + \alpha_1 \equiv \mu_3$, so gehen die vier letzten Gleichungen über in

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 0 \\ -\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &= 0 \\ \mu_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses sind aber wieder die Gleichungen der Eckpunkte eines Parallelogramms. Wir haben also den Satz bewiesen:

Die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks bilden die Ecken eines Parallelogramms.

32.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

seien die Gleichungen der vier Ecken eines Parallelogramms. Dann sind

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\,\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

wie wir eben gesehen haben, die Gleichungen der Mittelpunkte der vier Seiten und diese Punkte bilden die Ecken eines neuen Parallelogramms.

Die Gleichung des Durchschnittspunktes der beiden Diagonalen in dem ursprünglichen Parallelogramm ist

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Die Gleichung des Durchschnittspunktes der beiden Diagonalen in dem neuen Parallelogramm ist

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\,\alpha_3) \equiv (-\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_1) = 0 \text{ oder}$$
$$2\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 \equiv 2\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 = 0 \text{ oder}$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Wir haben somit folgenden Satz bewiesen:

Das Parallelogramm, dessen Ecken die Mittelpunkte der Seiten eines andern Parallelogramms sind, hat mit diesem den Durchschnittspunkt der Diagonalen gemeinschaftlich.

33.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

seien die Gleichungen der Ecken eines beliebigen Vierecks. Dann sind

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

die Gleichungen der Mitten zweier Gegenseiten und

$$\alpha_3 + \alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_4 = 0$$

die Gleichungen der Halbierungspunkte der beiden Diagonalen. Die vier Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_4 = 0$$

gehen aber, wenn wir

$$\alpha_1 + \alpha_2 \equiv \mu_1$$
$$\alpha_2 + \alpha_4 \equiv \mu_3$$
$\alpha_1 + \alpha_3 \equiv \mu_2$ setzen, über in die Gleichungen

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = 0$$
$$-\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$$
$$\mu_3 = 0.$$

Die durch sie dargestellten Ecken sind also die Ecken eines Parallelogramms.

Wir haben also den Satz bewiesen:

Die Halbierungspunkte zweier Gegenseiten eines Vierecks bilden mit den Halbierungspunkten der Diagonalen die Ecken eines Parallelogramms.

34.

Die vier Punkte im vorigen Artikel

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_4 = 0$$

sollen die Lage haben, dass drei von ihnen, etwa

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

auf einer geraden Linie liegen. Diese Bedingung drückt sich durch die identische Gleichung

$$\lambda_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_2 (\alpha_1 + \alpha_3) + \lambda_3 (\alpha_3 + \alpha_4) \equiv 0 \text{ aus.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir können nun $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_3$

$\lambda_2 = \mu_2 - \mu_3$

$\lambda_3 = \mu_3$ setzen, wo also $\mu_1 = \lambda_1 - \lambda_3$

$\mu_2 = \lambda_2 + \lambda_3$

$\mu_3 = \lambda_3$ wird. Dann geht die identische Gleichung über in

$$(\mu_1 + \mu_3)(\alpha_1 + \alpha_2) + (\mu_2 - \mu_3)(\alpha_1 + \alpha_3) + \mu_3(\alpha_3 + \alpha_4) \equiv 0 \text{ oder}$$

$$\mu_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \mu_3\alpha_1 + \mu_3\alpha_2 + \mu_2(\alpha_1 + \alpha_3) - \mu_3\alpha_1 - \mu_3\alpha_3 + \mu_3\alpha_3 + \mu_3\alpha_4 \equiv 0 \text{ oder}$$

$$\mu_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \mu_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \mu_3(\alpha_2 + \alpha_4) \equiv 0.$$

Wir haben somit bewiesen, dass unter der gemachten Voraussetzung auch die Punkte

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_4 = 0$$

auf einer geraden Linie liegen müssen. Somit liegen alle vier Punkte auf einer und derselben geraden Linie.

35.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_4 = 0$$

seien die Gleichungen der vier Ecken eines beliebigen Vierecks. Dann sind

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$
$$\alpha_4 + \alpha_1 = 0,$$

wie wir gesehen haben, die Gleichungen der Mittelpunkte der vier Seiten und diese vier Punkte sind die Ecken eines Parallelogremms.

In dem Parallelogramm hat ein Punkt auf der Diagonale $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4)$ die Gleichung

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_1(\alpha_3 + \alpha_4) = 0.$$

Ein Punkt auf der Diagonale $(\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_1)$ hat die Gleichung

$$(\alpha_2 + \alpha_3) + \lambda_2(\alpha_4 + \alpha_1) = 0.$$

Für den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen müssen diese Gleichungen identisch werden, also

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_1(\alpha_3 + \alpha_4) \equiv (\alpha_2 + \alpha_3) + \lambda_2(\alpha_4 + \alpha_1).$$

Diese identische Gleichung verlangt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ist.

Die Gleichung des Durchschnittspunktes der Diagonalen des Parallelogramms, dessen Ecken die Mitten der vier Seiten des Vierecks sind, ist also

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichungen der Halbierungspunkte zweier Gegenseiten des Vierecks sind

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Die Gleichungen der Halbierungspunkte der beiden Diagonalen sind

$$\alpha_2 + \alpha_4 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_1 = 0.$$

Auch diese vier letzten Punkte bilden, wie wir gesehen haben, die Ecken eines Parallelogramms und zwar sind $\alpha_1 + \alpha_2$ und $\alpha_3 + \alpha_4$ resp. $\alpha_2 + \alpha_4$ und $\alpha_3 + \alpha_1$ gegenüberliegende Ecken.

Ein Punkt auf der Diagonale $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4)$ hat daher die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 (\alpha_3 + \alpha_4) = 0.$$

Ein Punkt auf der Diagonale $(\alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_1)$ hat die Gleichung

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \lambda_4 (\alpha_3 + \alpha_1) = 0.$$

Für den Durchschnittspunkt der Diagonalen ist daher

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 (\alpha_3 + \alpha_4) \equiv \alpha_2 + \alpha_4 + \lambda_4 (\alpha_3 + \alpha_1).$$

Diese identische Gleichung verlangt $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Somit wird die Gleichung für den Durchschnittspunkt der Diagonalen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

Dieses ist aber dieselbe Gleichung, welche wir für den Durchschnittspunkt der Diagonalen des ersten Parallelogramms gefunden hatten. Wir haben somit den Satz abgeleitet:

Das Parallelogramm, dessen Ecken die Halbierungspunkte der vier Seiten eines Vierecks sind, und das Parallelogramm, dessen Ecken die zwei Halbierungspunkte zweier Gegenseiten und die zwei Halbierungspunkte der beiden Diagonalen sind, haben denselben Diagonalendurchschnittspunkt.

36.

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_4 = 0$$

seien die Gleichungen der vier Eckpunkte eines Vierecks.

Die Halbierungspunkte der Seiten haben die Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$
$$\alpha_4 + \alpha_1 = 0.$$

Die Gleichung des Diagonalendurchschnittspunktes des Parallelogramms, dessen Ecken durch diese vier Gleichungen dargestellt werden, ist nach dem vorigen Artikel

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Die Mitte der Diagonale $(\alpha_2 \alpha_4)$ hat die Gleichung

$$\alpha_2 + \alpha_4 = 0.$$

Die Mitte der Diagonale $(\alpha_1 \alpha_3)$ hat die Gleichung

Ein Punkt auf der Verbindungslinie der Mitten der beiden Diagonalen hat daher die Gleichung

$$(\alpha_2 + \alpha_4) + \lambda_1 (\alpha_1 + \alpha_3) = 0.$$

Ein Punkt auf der Diagonale $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4)$ hat die Gleichung

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_2 (\alpha_3 + \alpha_4) = 0.$$

Daher ist für den Durchschnittspunkt der Verbindungslinien der Mitten der beiden Diagonalen des Vierecks mit einer Diagonale des Parallelogramms

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \lambda_1 (\alpha_1 + \alpha_3) \equiv (\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_2 (\alpha_3 + \alpha_4).$$

Diese identische Gleichung ist erfüllt durch $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Für den genannten Durchschnittspunkt erhalten wir also die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Dieses ist aber auch der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Parallelogramms. Wir haben somit den Satz abgeleitet:

In jedem Viereck haben die drei Geraden, welche die Halbierungspunkte je zweier Gegenseiten und der beiden Diagonalen verbinden, denselben Durchschnittspunkt.

Da ferner die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \text{ sich in den drei Formen}$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = 0$$
$$(\alpha_1 + \alpha_4) + (\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$
$$(\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_2 + \alpha_4) = 0$$

schreiben lässt, so müssen sich die drei Geraden auch in diesem Punkte halbieren. Wir haben also den Satz abgeleitet:

Die im vorigen Satze genannten drei Geraden halbieren sich in ihrem Durchschnittspunkte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Taf. I.

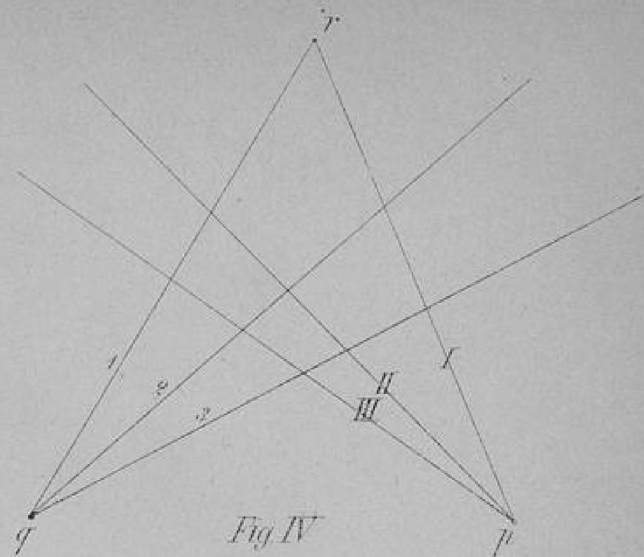


Fig. IV

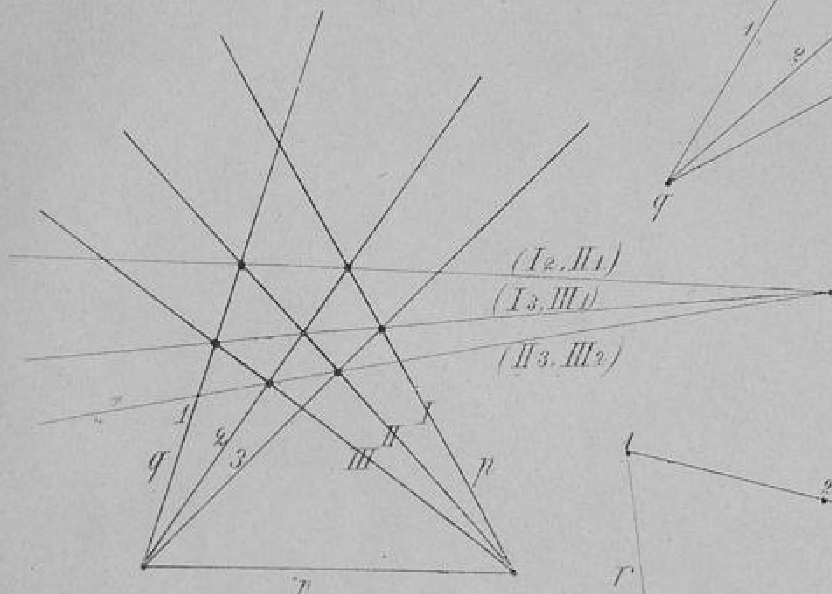


Fig. I.

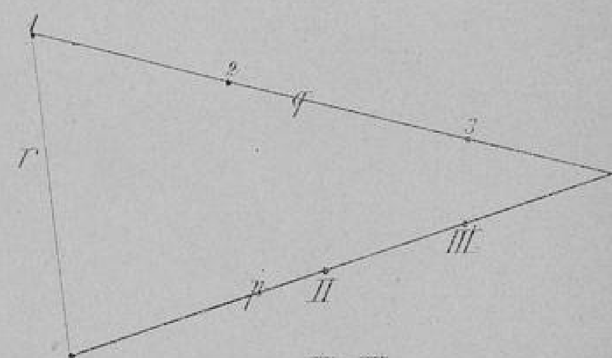


Fig. III

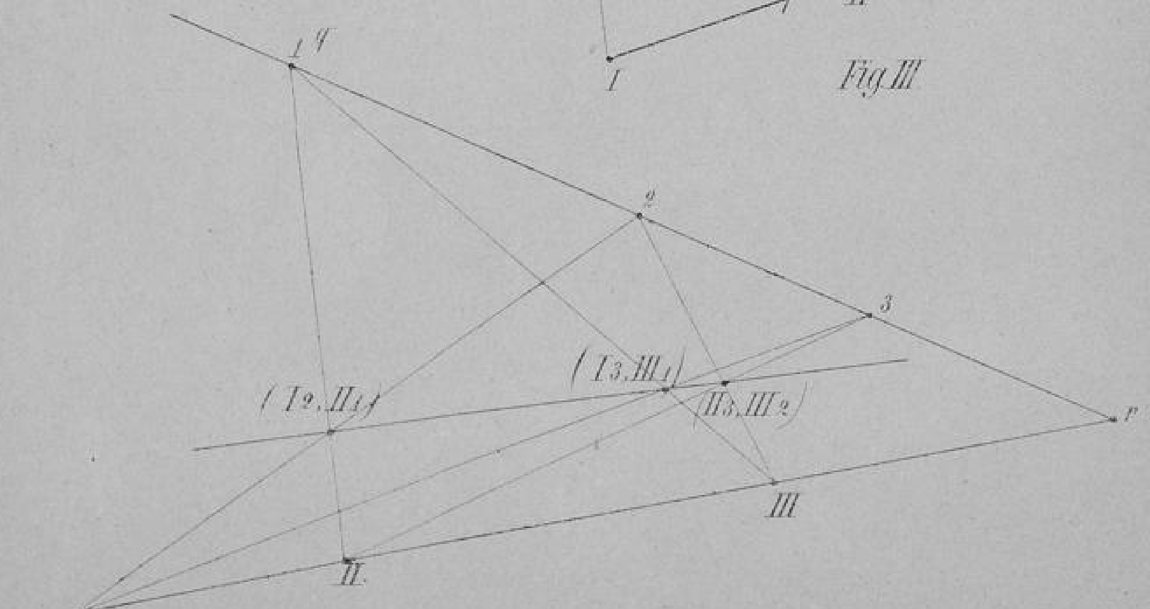
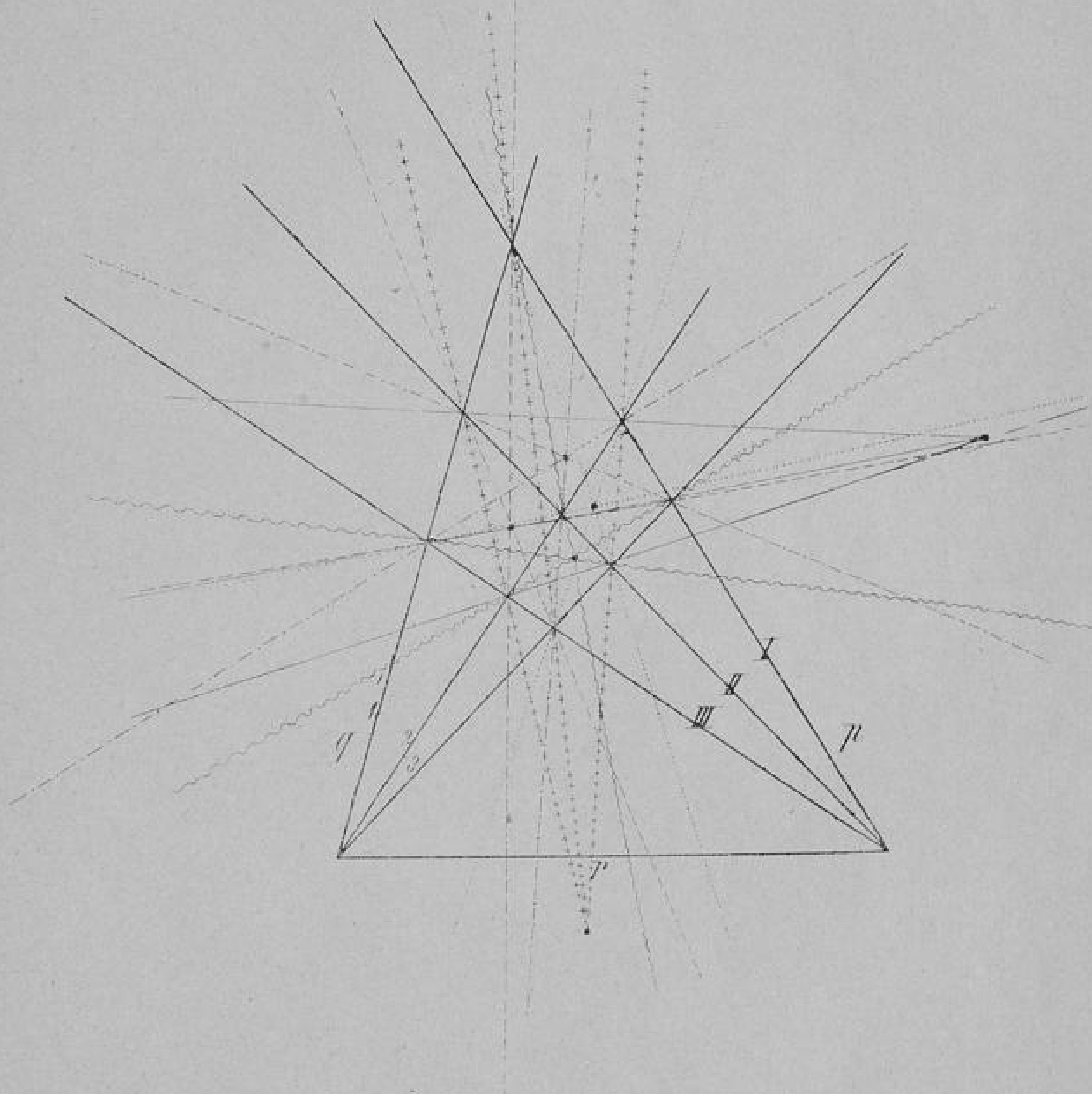


Fig. II

Taf. II.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Taf. III

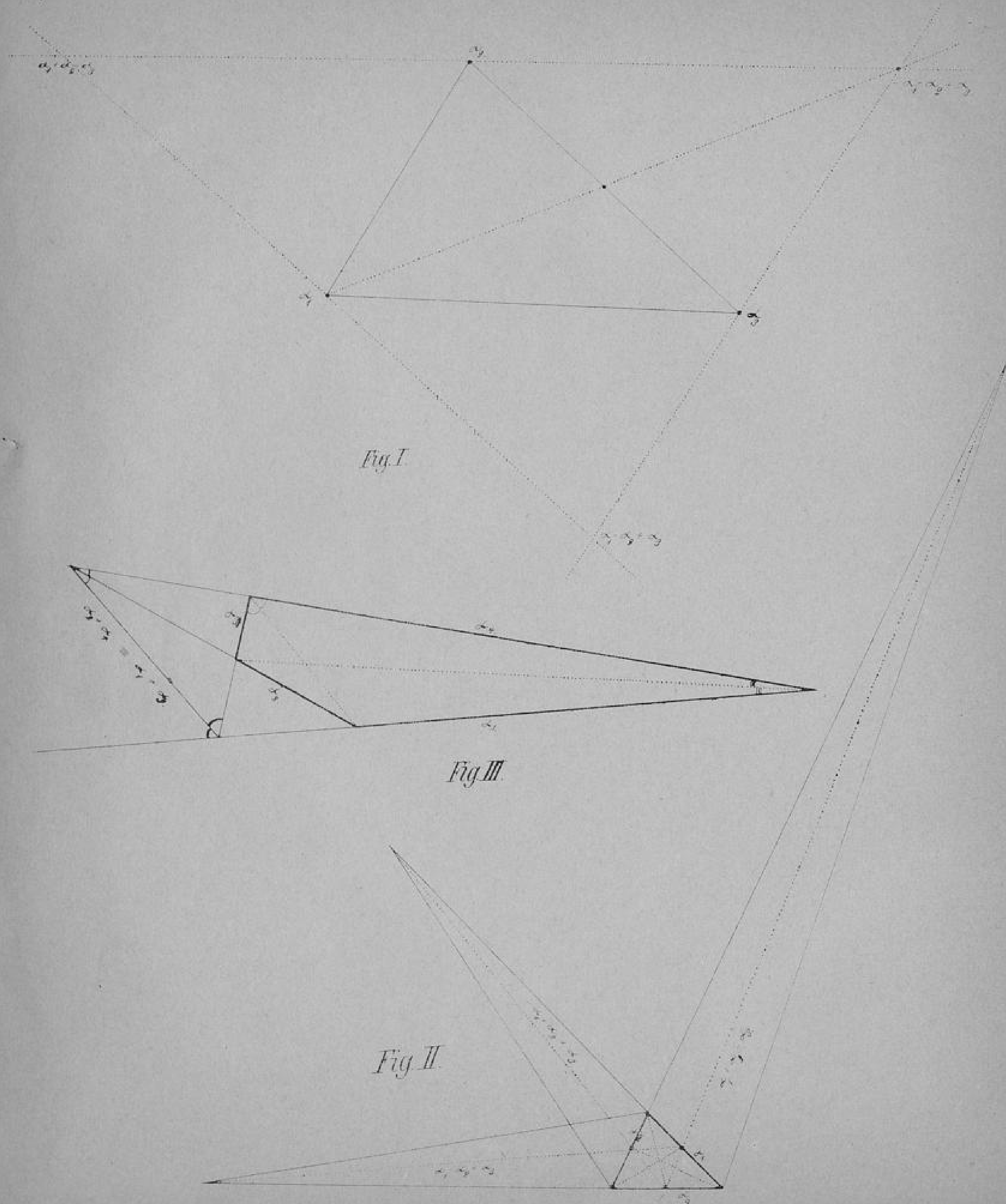


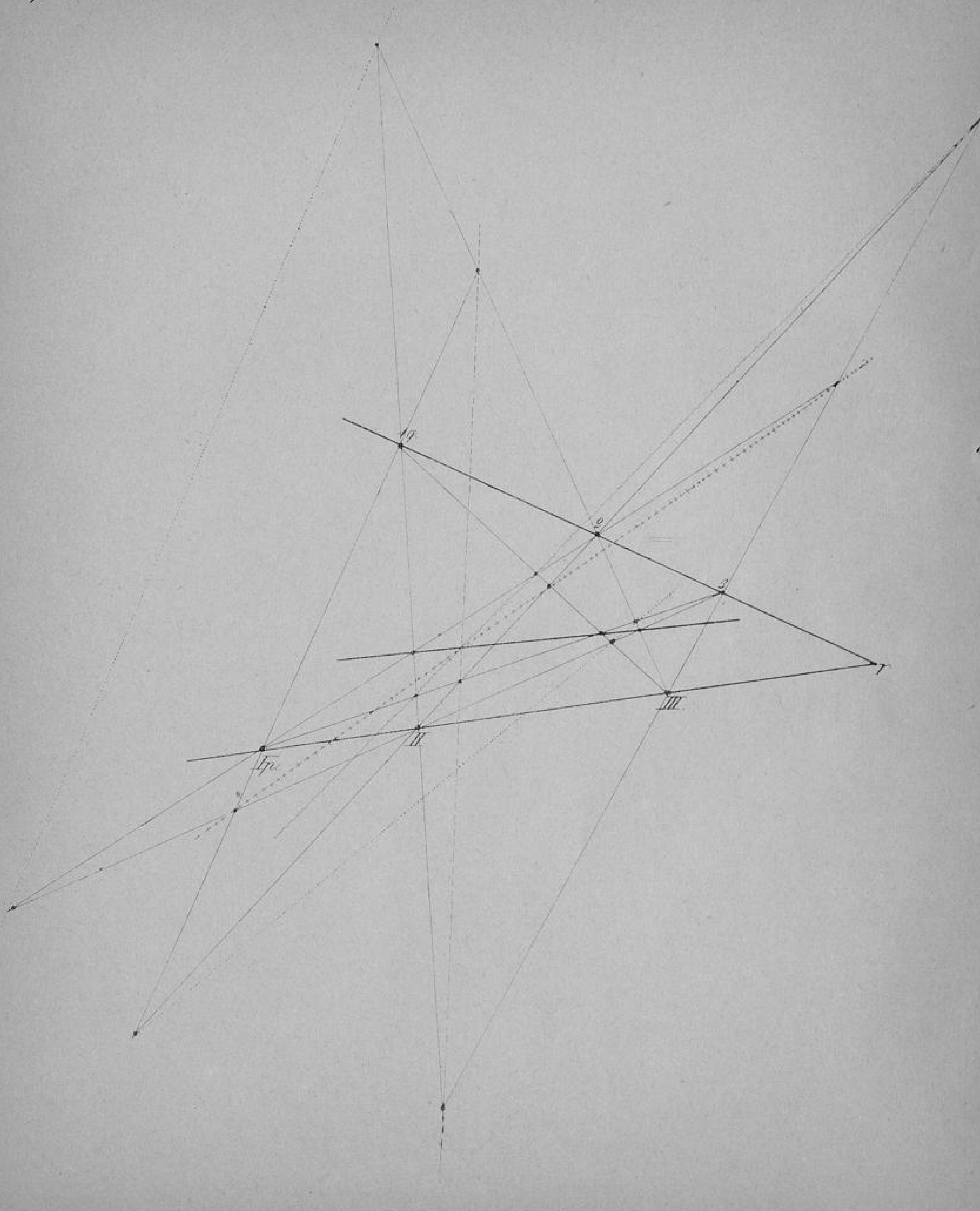
Fig. I.

Fig. III.

Fig. II.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Taf. IV.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf