ruhen wird.[1]) Einiges in der Mythologie ist historisch, aber es ist kein Zweifel, dass was überhaupt mit einiger Sicherheit als historisch aus ihr entnommen werden kann, nur das Ethnographische und Geographische im grossen ist; wenn man nur keine chronologischen, am allerwenigsten synchronistische Bestimmungen verlangt.[2]) Umgekehrt ist ein grosser Teil angeblicher Geschichte, der ein ganz historisches Gepräge trägt, rein mythisch; bis zum Heraklidenzuge giebt es nicht Eine deutlich historische Person, die Erzählung vom Heraklidenzuge selbst ist epischen Ursprungs, Fabelsage, wie alles, was über Agis und Eurypon hinaufreicht. Zwischen der Rückkehr der Herakliden und Pisistratus treffen wir einige historische Gestalten, die in den halb mythischen Anfängen der eigentlichen Geschichte hin und her schwanken.[3]) Die ganze ältere griechische Geschichte bis gegen die Zeiten des Pisistratus ist nur ein wissenschaftliches Produkt, gezogen aus wenig Monumenten und viel Sagen und Epopoeen, mit einer Kritik, die wir nicht mehr zu revidieren vermögen.[4])

Heyne, Voss und Buttmann berichtigen und ergänzen sich gegenseitig so, dass aus dem Gewirr der Meinungen eine gesunde Ansicht der Mythologie sich abklären konnte, wäre nicht durch den Aufschwung der ägyptischen und indischen Studien neuer, trübender Gährungsstoff zugesetzt worden.

[1]) Mythologus II 35. — [2]) Ebd. II 259. — [3]) Ebd. II 260—267. — [4]) Ebd. II 210. —

Zum Euler'schen Theorem der Polyedrometrie.[1])

Von **Max Raschig.**

Spätere Untersuchungen des nach Euler benannten Theorems der Polyedrometrie haben gezeigt, dass man unter Polyedern, auf welche jenes Theorem sich bezieht, kurz sogenannten Euler'schen Polyedern, solche durchaus ebenflächig begrenzte Körper verstehen darf, deren einfach zusammenhängende Oberfläche durch Schnitte entlang sämtlicher Kanten in einer Reihe von Vielecken zerfällt, welche selbst einfach zusammenhängende Flächenstücke[2]) sind. Bezeichnet bei einem so definierten Euler'schen Polyeder f die Anzahl der Flächen, k die Anzahl der Kanten und e die Anzahl der Ecken, so besteht nach Euler zwischen diesen Zahlen die Relation:

$$e + f = k + 2.$$

Von einer Erörterung der zahlreichen Beweise dieses Satzes[3]), wie sie unter andern von Cauchy[4]) Gergonne und M. L'huilier,[5]) in den weiterhin erwähnten Abhandlungen geliefert worden sind, soll hier abgesehen, dagegen zu den gleichzeitig von den genannten und späteren Autoren gelieferten Erweiterungen des Satzes d. i. Untersuchungen von solchen Polyedern, welche ausserhalb des Bereichs der Euler'schen Polyeder stehen würden, einige Anmerkungen gemacht werden, die vor allem den Zweck haben bemerkenswerte Erweiterungen des Satzes durch Gergonne und L'huilier teils gegen spätere Einwürfe zu vertheidigen, teils die Berechtigung solcher Erweiterungen zu prüfen.

[1]) Euler, Mémoires de Petersbourg pour 1752 et 1753, imprimés en 1758. — [2]) Riemann. Inauguraldiss. Göttingen 1851. S. 9—12. — [3]) Von den vielen Beweisen des Satzes haben die synthetisch vom Vierflächner, Zerlegung in Pyramiden u. s. w. ausgehenden vielleicht den Vorzug grösserer Anschaulichkeit, während der obigen Definition am besten entsprechend eine Form des Beweises wie die von Baltzer (Elem. 2. Bd. § 7. 1) gewählte bleiben dürfte, sofern sie allein auf die Zerlegung der polyedrischen Oberfläche Bezug nimmt. — [4]) Cauchy, Journal de l'école polytechn. Tome IX (1813) Ire Mémoire en 1811. Cauchy leidet hier im zweiten Teil das Euler'sche Theorem aus allgemeineren Sätzen durch Specialisierung ab. — [5]) M. L'huilier. Ann. d. math. pures et appliquées par J. D. Gergonne. Tome III 1812/13. „Mémoire sur la polyedrometrie contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres et un examen des diverses exceptions, auxquelles ce théorème est assujetti." Extrait. par M. Gergonne. Der erste Teil des hier erwähnten Berichts Gergonne's über L'huilier's Arbeit erörtert den Euler'schen Satz selbst, bez. solche Beweise desselben, welche zeigen, dass er nicht nur für konvexe Polyeder, sondern auch für solche Polyeder gilt, die in eine Summe von Pyramiden mit gemeinsamer Spitze zerlegbar sind, d. i. einen Punkt im Innern besitzen, von dem aus Strahlen nach den Ecken die Oberfläche nur einmal treffen. Er meint dann auch den M. Legeudre'schen Beweis an elementarem Gange zu übertreffen, indem er, während Legeudre entsprechende sphärische Polygone heranzieht, ein transparentes Polyeder zunächst in seiner Ansicht in der Ebene untersucht. Dieser Beweis hat die engste Verwandschaft mit einem der erwähnten Cauchy'schen Beweise, auf den er schliesslich selbst verweist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die im obigen Sinne erweiterte Definition eines Euler'schen Polyeders schliesst vor allem auch die sogenannten nichtkonvexen Polyeder ein. In der That überzeugt man sich leicht, dass für jede Kombination konvexer Polyeder das Euler'sche Theorem seine Giltigkeit behält, sobald nur folgende Punkte beachtet werden[1].

1. Ausgeschlossen ist ein blos punktueller Zusammenhang eines folgenden Polyeders mit der schon vorhandenen Kombination, weil dann für die neue Kombination gelten würde:

$$e + f = k + 3$$

Beweis: Sind e_0 f_0 k_0 die betreffenden Zahlen für die schon vorhandene Kombination, e_1 f_1 k_1 diejenigen für das anzusetzende Polyeder und e, f, k diejenigen für die neue Kombination so gilt unter der obigen Voraussetzung:

$$e_0 + e_1 + f_0 + f_1 = k_0 + k_1 + 4$$
$$e = e_0 + e_1 - 1 \quad f = f_0 + f_1 \quad k = k_0 + k_1$$
$$\text{somit ist: } e + 1 + f = k + 4$$

2. Ausgeschlossen ist ein blos linearer Zusammenhang eines folgenden Polyeders mit der schon vorhandenen Kombination, weil dann für die neue Kombination ebenso gelten würde:

$$e + f = k + 3$$

Beweis: Unter Annahme derselben Bezeichnungen gilt:

$$e_0 + e_1 + f_0 + f_1 = k_0 + k_1 + 4$$
$$e = e_0 + e_1 - 2 \quad f = f_0 + f_1 \quad k = k_0 + k_1 - 1$$
$$\text{somit ist: } e + 2 + f = k + 1 + 4$$

3. Ausgeschlossen ist eine Ansetzung weiterer Polyeder an die schon vorhandene Kombination in der Weise, dass irgend welche Begrenzungsflächen der letzteren mehrfach zusammenhängende Flächenstücke bilden, weil dann im einfachsten Falle ebenso gelten würde:

$$e + f = k + 3$$

und im Falle, dass $q_1$mal Begrenzungsflächen von $(p_1 + 1)$fachem Zusammenhange, $q_2$mal von $(p_2 + 1)$fachem u. s. w. bis q_n mal von $(p_n + 1)$fachem entstehen würden zunächst unter ausdrücklichem Ausschluss sonstiger Zusammenhänge der angesetzten Polyeder gelten würde:

$$e + f = k + 2 + \Sigma\, p\, q$$

Beweis: In der That wird unter Annahme der obigen Bezeichungen, wenn durch Ansetzung eines folgenden Polyeders an die schon vorhandene Kombination eine kranzförmige Begrenzungsfläche d. i. eine solche von zweifachem Zusammenhang entsteht:

$$e_0 + e_1 + f_0 + f_1 = k_0 + k_1 + 4$$
$$e = e_0 + e_1 \quad f = f_0 + f_1 - 1 \quad k = k_0 + k_1$$
$$\text{somit: } e + f + 1 = k + 4$$

Entsteht aber durch Ansetzung von p neuen Polyedern an die schon vorhandene Kombination unter anderem eine $(p + 1)$fach zusammenhängende Begrenzungsfläche durch p getrennte Ansetzungsflächen innerhalb ihres Perimeters, so wird bei leicht ersichtlicher Erweiterung der obigen Bezeichnungsweise gelten:

$$e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_p + f_0 + f_1 + f_2 \ldots + f_p = k_0 + k_1 + k_2 + \ldots k_p + 2 + 2p$$
$$e = e_0 + e_1 + \ldots + e_p \quad f = f_0 + f_1 + \ldots + f_p - p \quad k = k_0 + k_1 + \ldots + k_p$$
$$\text{somit: } e + f + p = k + 2 + 2p$$

und bei genügender Erweiterung desselben Beweises:

$$e + f + p_1 + p_2 + \ldots + p_n = k + 2 + 2\,(p_1 + p_2 \ldots + p_n)$$
$$\text{ebenso auch: } e + f + \Sigma\, p\, q = k + 2 + 2\, \Sigma\, p\, q$$

entsprechend der oben behaupteten allgemeinsten Gleichung.

[1] Insbesondere sei zur Ergänzung der obigen Ausnahmepunkte bemerkt, dass ein nur teilweises Zusammenfallen der Ansetzungsflächen mit gegenseitiger Kreuzung ihrer Perimeter nicht ausgeschlossen zu werden braucht, sobald nur das zwischen zwei Ecken enthaltene Stück einer geradlinigen Kante als einzelne Kante gezählt wird, soweit es einzeln gezählte zwei Flächen trennt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Ausgeschlossen ist ein mehrfacher Zusammenhang der durchaus zweiseitigen Gesamtoberfläche der schliesslich erhaltenen Polyederkombination, was übereinkommt mit dem Ausschluss der von Gergonne zuerst berücksichtigten kanalartigen Öffnungen oder Durchbrechungen des Polyeders. Die für eine mehrfach zusammenhängende Oberfläche sich ergebenden Folgerungen sind weiter unten zu prüfen.

Gergonne und M. L'huilier haben zuerst unternommen, die unter 3. und 4. erwähnten einschränkenden Bedingungen zu beseitigen und womöglich eine Erweiterung des Euler'schen Theorems für ganz beliebige ebenflächig begrenzte Polyeder aufzufinden. Insbesondere meint M. L'huilier die allgemeinste Form eines Polyeders erreicht zu haben, wenn er, augenscheinlich unter Beibehaltung der oben unter 1. und 2. ausgesprochenen einschränkenden Bedingungen, nicht nur eine Anzahl i polyedrischer Hohlräume, in dem betrachteten polyedrischen Körper überdies eine Anzahl o durchgehender polyedrischer Öffnungen zulässt, sondern auch noch, ausserdem — und in diesem Punkte über Gergonne[1]) hinausgehend — annimmt, dass in einer beliebigen Begrenzungsfläche $p_1$mal, in einer andern $p_2$mal u. s. w. in einer n^{ten} $p_n$mal der Fall eintritt, dass ein anderes Polygon von dem Perimeter des ersten vollständig, d. i. ohne Berührung der beiderseitigen Perimeter eingeschlossen ist. Unter Berücksichtigung aller der hier definierten möglicher Fälle d. i. Ausnahmefälle in Rücksicht auf die oben definierten eigentlichen Euler'schen Polyeder findet nun M. L'huilier für ein solches Polyeder von allgemeinerer Form:

$$e + f = k + 2\,(i - o + 1) + p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

Listing deutet nun bereits in der Einleitung zu seinem »Census räumlicher Komplexe«[2]) einige Bedenken gegen dieses Theorem L'huilier's als Verallgemeinerung des Euler'schen an und führt dieselben in einer späteren Abhandlung[3]) weiter aus. Dass die Einbeziehung von Begrenzungsflächen mit p_1 oder p_2 u. s. w. oder p_n Öffnungen als Einbeziehung von $(p_1 + 1)$fach, $(p_2 + 1)$fach . . . . . . $(p_n + 1)$fach zusammenhängenden Flächenstücken anzusehen ist, wurde bereits oben unter 3. bemerkt und die entsprechend abgeänderte Form der Grundgleichung daraus abgeleitet. Listing wendet nun hier mit Recht ein, dass das betreffende Kriterium nicht mit der erforderlichen Allgemeinheit ausgestattet sei, was sofort einleuchte, wenn man solche Fälle berücksichtige, in welchem z. B. zwei einer Begrenzungsfläche eingeschriebene Polygone eine Seite, oder zwei und mehr solcher eine Ecke gemeinsam haben; hier sei zweifelhaft, ob dann $p = 1$ oder $p = 2$ u. s. w. zu setzen sei. Da nun M. L'huilier an der betreffenden Stelle sagt: »*Supposons que l'une des faces du polyèdre soit comprise entre p polygones extérieurs les uns aux autres et un polygone qui les renferme tous*« so folgert Listing, dass unter p in solchem Falle nicht die Zahl der Polygone, sondern der isolierten Polygongruppen innerhalb einer Begrenzungsfläche zu verstehen sei. Da nun diese Auslegung der betreffenden Stelle der Definition mehrfach zusammenhängender Flächenstücke durchaus entspricht, so ist thatsächlich bei dieser allein möglichen Zählungsweise der Öffnungen oder des ihnen entsprechenden Flächenzusammenhangs der Einwand Listings gegen die L'huilier'sche und damit auch gegen die unter 3. gefolgerte Relation als beseitigt anzusehen. Denn etwaige Einwände, welche von besonderen Lagenbeziehungen der von solchen Polygonen oder Polygongruppen ausgehenden Fortsetzungen des Gesamtkörpers hergenommen werden könnten, finden auf andere Weise ihre Erledigung im Folgenden.

Zwar würden sich die von Listing weiterhin gegen die Zählung der polyedrischen Hohlräume erhobenen Einwände durch einige einschränkende Bedingungen ähnlich den oben unter 1. und 2. angenommenen nicht unschwer beseitigen lassen, was L'huilier allerdings unterlassen hat; aber richtiger erscheint es uns und der ursprünglichen Tendenz der Untersuchung entsprechender die Zählung der Ecken, Flächen und Kanten eines polyedrischen Körpers auf Zählung der äusseren, ohne Schnitte des Körpers zugänglichen Ecken, Flächen und Kanten überhaupt zu beschränken, und dies um so mehr, als eine solche Einschränkung von den unter 1. und 2. gemachten Einschränkungen als eine Konsequenz erscheint und mit der Gesamtheit solcher Bedingungen der Begriff eines wenigstens durchaus räumlichen Kontinuums oder eines durchweg soliden Körpers mit ebenflächiger Begrenzung festgehalten wird, der auf

---

[1]) Der Referent Gergonne hebt in der oben erwähnten Abhandlung noch hervor, dass er selbst die Ausnahmefälle von vorhandenen polyedrischen Hohlräumen und Öffnungen schon früher bemerkt habe; neu sei jedoch der von M. L'huilier hinzugefügte Fall der kranzförmigen Seitenflächen mit bezw. $p_1\ p_2 \ldots p_n$ polygonalen Öffnungen; es komme deshalb M. L'huilier das Verdienst zu, den allgemeinsten Satz entdeckt zu haben, (Dies nur als historische Bemerkung. In der That sind gegenwärtig die allgemeinsten Sätze in dieser Richtung in einer weiter erwähnten Abhandlung Listing's enthalten.) — [2]) Listing, Abh. d. math. kl. d. K. G. d. W. zu Göttingen, X. Bd. von 1861/62. — [3]) Listing, Nachrichten v. d. K. G. d. W. a. d. Georg. Aug. Univ. a. d. J. 1867. No. 22. Über einige Anwendungen des Censustheorems.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der einen Seite sich dem Euler'schen Polyeder am direktesten anschliesst, auf der andern Seite eine genügende Erweiterung des Gebiets der Euler'schen Polyeder mit Rücksicht auf die auch von L'huilier im Auge behaltene Anwendung auf krystallographische Gebilde darstellt. Wir gehen hiernach zu dem am meisten beachtenswerten Einwand Listing's gegen die L'huilier'sche Relation über, wenn er sagt: »Sodann wird in der L'huilier'schen Relation durch o die Anzahl der durchgehenden Öffnungen bezeichnet »oder der kanalähnlichen Durchbrechungen, welche das Polyeder durchsetzen. In vielen Fällen ist bei »einer solchen Gestaltung der polyedrische Raum und der umgebende amplexe Raum gleichviel cyklodisch, »so dass dann $2o$ mit der in der dritten Kurie stattfindenden Anzahl der Cyklosen k« übereinkommt. (Über die hier gebrauchten von Listing eingeführten Bezeichnungen vergl. die oben erwähnte 1. Abh. dess.). »In andern Fällen aber würde nach L'huilier's Feststellung zweifelhaft bleiben, wie man zur Kenntnis »der Anzahl der hier zu zählenden Durchbrechungen gelangen soll. Wie viel Durchbrechungen zählen wir »an einem polyedrischen Körper, den wir erhalten, wenn wir z. B. die Kanten eines Würfels oder eines »Oktaëders durch eben begrenzte Stäbe (allgemeiner durch polyedrische Gebilde von einfach zusammenhängender Oberfläche D. V.) »gleichsam verkörpern?«

Um zu einer zuverlässigen Zählung der von M. L'huilier so bezeichneten Öffnungen zu gelangen gehen wir aus von der Einführung solcher Polyeder, welche bei vorläufig noch einfach zusammenhängender Begrenzungsflächen und einfach zusammenhängender Oberfläche durch eine gegenseitige Verschiebung ihrer Begrenzungsflächen so umgebildet werden können, dass weder die Zahl der Ecken, noch die Zahl der Flächen und Kanten, sondern nur deren Ausdehnung variiert; die so definierte Umbildung soll eine stetige Umbildung eines Polyeders heissen.

Ein cylinderartig gebildetes Polyeder von genügender Zahl und geeigneter Anordnung seiner Begrenzungsflächen, unter denen zwei genügend getrennt liegende von gleicher Eckenzahl sich befinden, kann dann durch stetige Umbildung und unter Zusammenfallen der vorher symetrisch kongruent gemachten beiden Begrenzungsflächen gleicher Eckenzahl in ein ringförmiges Polyeder von dreifach zusammenhängender Oberfläche übergeführt werden. Für dieses ringförmige Polyeder gilt dann, da die Anzahl der Ecken und Kanten gegen diejenige des ursprünglichen Körpers je um gleichviel die Anzahl der Begrenzungsflächen hingegen für sich allein um 2 abgenommen hat, die Relation:

$$e + f = k.$$

Da nun jedes gegebene ringförmige Polyeder, für welches, um auch hier den oben unter 1. und 2. eingeführten Beschränkungen zu entsprechen, jeder blos punktuelle oder lineare Zusammenhang ausgeschlossen ist, auf solche Weise aus einem Polyeder von der oben definierten Art durch stetige Umbildung entstanden gedacht werden kann, so gilt die obige Gleichung für jedes ringförmige Polyeder entsprechender Art.

Wir müssen hier den Gang der Untersuchung noch einmal kurz unterbrechen um auch mit Hülfe der stetigen Umbildung zu zeigen, dass ein blos punktueller oder linearer Zusammenhang nicht blos für Aneinanderreihung von Polyedern, wie oben, oder Ringbildung mit solchen, wie eben gezeigt, sondern auch für die Oberfläche des einzelnen Polyeders selbst auszuschliessen ist, wie solcher Zusammenhang andrerseits schon mit dem Begriff der einfach zusammenhängenden Oberfläche unvereinbar ist. Man kann sich nämlich die polyedrische Oberfläche durch stetige Umbildung auch mit sich selbst in getrennt liegenden Ecken oder Kanten in Berührung denken und findet dann sofort, dass im ersteren Falle e, im anderen k, beide aber von einander unabhängig Änderungen erleiden, welche die Gleichung $e+f=k+2$ nicht mehr bestehen lassen, sondern weitere Einführung von zu zählenden Ausnahmefällen bedingen würden. Eine solche Notwendigkeit entfällt dagegen in jedem Falle bei Einschränkung der Untersuchung auf den oben definierten durchaus dreifach ausgedehnten Körper, der ein räumliches Kontinuum bildet.

Vereinigt man mit dem vorigen ringförmigen Polyeder ein zweites cylinderartig gebildetes wiederum unter den obigen Voraussetzungen, so dass zunächst mit einer Fläche des ersteren eine symetrisch kongruente des zweiten zusammenfällt und hiernach durch stetige Umbildung einer oder beider Körper eine genügend getrennt liegende zweite Begrenzungsfläche des angesetzten Körpers mit einer symetrisch kongruenten Begrenzungsfläche der ganzen Kombination zusammenfällt, so gilt, wenn $e_0\ f_0\ k_0$ die die betreffenden Zahlen des ringförmigen Polyeders $e_1\ f_1\ k_1$ diejenigen des mit ihm vereinigten Polyeders und $e\ f\ k$ diejenigen der neuen Kombination sind:

$$e_0 + f_0 + e_1 + f_1 = k_0 + k_1 + 2$$

$$e = e_0 + e_1 \quad f = f_0 + f_1 - 4 \quad k = k_0 + k_1$$

$$\text{somit: } e + f = k - 2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hierbei kann der Anschluss in der zweiten Fläche so wohl unter einfacher Ringbildung mit dem ersten Teil als auch mit einer genügend getrennten Fläche des zweiten Teiles selbst, und in beiden Fällen wieder bei genügender Umbildungsfähigkeit nach mehrfachen Umwickelungen des ersten Rings durch den hinzugefügten zweiten Körper bewirkt werden, sofern solche Windungen nur weder unter sich noch mit dem ursprünglichen Körper weitere Berührungen haben. Wir würden dieser Entstehungsweise einer verwickelteren Oberfläche der neuen Kombination, die hierbei immer nur von 5fachem Zusammenhange nach Riemann bleibt, nicht Erwähnung thun, wenn nicht hierdurch gewisse von Listing angeführte und in einer zu der ersten Abhandlung gehörigen Figurentafel besonders abgebildete Beispiele ziemlich verwickelter räumlicher Komplexe in das von uns zu definierende Polyedergebiet mit einbezogen würden.

Aus dem vorstehend erörterten Verfahren ist die Möglichkeit einer Erweiterung des Beweises für eine Polyederkombination ersichtlich deren Oberfläche eine $(2o+1)$fach zusammenhängende nach Riemann ist, wobei o die Anzahl der zur Bildung von Ringen verwandten Polyeder vom einfachen Zusammenhang und zugleich die Anzahl der zu zählenden Öffnungen ist. Für ein solches Polyeder findet sich auf diesem Wege in der That,

$$e + f = k - 2\,(o-1)$$

vollständig entsprechend der obigen Gleichung M. L'huilier's für $i = 0$ und $\Sigma\,\mathrm{p} = 0$.

Für ein gegebenes Polyeder von beliebigem Zusammenhang seiner durchaus zweiseitigen Oberfläche ist es nun aber leichter und übersichtlicher die der Zahl der oben verwandten Polyeder von einfachem Zusammenhang und damit die ihr genau entsprechende Zahl derjenigen Rückkehrschnitte zu bestimmen, durch welche dasselbe in ein Polyeder vom einfachem Zusammenhang übergeht.

Als die Zahl solcher Rückkehrschnitte erscheint die oben mit o bezeichnete Zahl bei Camille Jordan[1]) in der Einleitung seiner Untersuchungen symetrischer Polyeder von mehrfachem Zusammenhang und sowohl hier als in den weitergehenden Untersuchungen symetrischer Polyeder Godt's[2]) d. h. in der hier eingangs auf anderem Wege und unter allgemeineren Voraussetzungen abgeleiteten Relation:

$$f - k + e = 3 - \mathrm{p},$$

wo p der Grad des Zusammenhangs der Polyederoberfläche und dem Obigen entsprechend $\mathrm{p} = 2o + 1$ zu setzen wäre, ist eine Bestätigung der obigen Relation enthalten. Es kann nun die zur Vereinfachung der vorstehenden Untersuchungen eingeführte Beschränkung auf durchaus einfach zusammenhängende Begrenzungsflächen sowohl am einzelnen Polyeder als an der beliebigen Kombination solcher wieder fallen gelassen werden, sofern hierfür nur die oben unter 3. gegebene Ableitung auf eine Polyederkombination der obigen Art von mehrfach zusammenhängender Oberfläche angewandt und die dadurch bedingte Erweiterung der Gleichung wieder eingefügt wird. Dann lässt sich das Resultat in folgendem Satze aussprechen:

Bei einem beliebigen soliden durchaus dreidimensionalen Polyeder von durchaus zweiseitiger $(2o+1)$-fach zusammenhängender Oberfläche und von ebenen Begrenzungsflächen, unter welchem q_1 (p_1+1)fach, q_2 (p_2+1)fach .... bis q_n (p_n+1)fach zusammenhängende Flächenstücke vorkommen, besteht zwischen der Anzahl e seiner Ecken, der Anzahl f seiner Flächen und der Anzahl k seiner Kanten die Gleichung

$$e + f = k - 2\,(o-1) + \Sigma\,\mathrm{p}\,\mathrm{q}. \text{ —}$$

Ist die Erörterung an Beispielen misslich wegen der ausserordentlichen Mannigfaltigkeit der hier einbezogenen Formen, so kann doch zunächst auf die der ersten Listing'schen Abhandlung beigegebene Figurentafel bezüglich einiger interessanter Fälle solcher polyedrischer Formen verwiesen werden. Insbesondere sind die bereits oben erwähnten Verkörperungen der Kantensysteme regulärer Polyeder nach den nunmehrigen Festsetzungen als Körper von beziehungsweise 3, 5, 7, 11, 19 Durchbrechungen, d. h. ihre Oberflächen als solche anzusehen, welche durch ebensoviele Rückkehrschnitte in einfach zusammenhängende Flächen übergehen.

Dass die Bestätigung des allgemeinen Satzes schon in einfacheren Fällen zu verhältnismässig grossen Zahlen für e, f, k führt zeigt etwa folgendes Beispiel, in welchem durchbrochene Begrenzungsflächen noch ausgeschlossen sind. Ein achteckiger vierseitig-prismatischer Rahmen werde auf beiden Seiten durch je einen weiteren solchen Rahmen mit fehlendem vierten Verbindungsstück henkelartig ver-

---

[1]) Jordan, Recherches sur les polyèdres. Crelle's Journ. Bd. 66 u. Recherches sur les polyèdres Second mémoire, ibd. Bd. 68 — [2]) Godt, Untersuchungen über Polyedres von mehrfachem Zusammenhang. Progr. des Katharineum. Lübeck 1881.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bunden, so dass an derselben Ebene auf einander senkrecht stehende Rechtecke zu einer neuen Begrenzungsfläche verschmelzen. Hier ist die Anzahl der erforderlichen Rückkehrschnitte $\varrho = 3$ während $e = 48$ $f = 20$ $k = 72$ wird, so dass in der That

$$e + f = k - 2(\varrho - 1).$$

Als ein einfaches Beispiel mit gleichzeitigem Vorkommen von mehrfachem Zusammenhange der Oberfläche und der Begrenzungsflächen diene folgendes in Listing's Tafeln in speciellerer Form vertretenes. Ein parallelepipedischer Körper ist von einem parallelepipedischem Kreuz in Parallellage zu den Begrenzungsflächen so durchdrungen, dass eine kreuzförmige Aushöhlung entsteht, im Ganzen ein Körper bestehend aus zwei Paralellepipedas in Parallelage verbunden durch 4 parallelepipeische Ecksäulen. Hier sind ebenfalls 3 Rückkehrschnitte erforderlich, während gleichzeitig 4mal eine 1fache Durchbrechung von Begrenzungsflächen vorliegt. Für diesen Körper, bei welchen also $\varrho = 3$ $p_1 = 1$ $q_1 = 4$, findet man $e = 32$, $f = 16$, $k = 48$, so dass in der That:

$$e + f = k - 2(\varrho - 1) + \Sigma\, p\, q$$

da hier $-2(\varrho - 1) + \Sigma\, p\, q = -4 + 4 = 0$ wird. Diese Beispiele mögen mit Rücksicht auf das oben Bemerkte genügen.

Die Berechtigung dieser Prüfung und ergänzenden Begründung des M. L'huilier'schen Theorems von etwas allgemeineren Gesichtspunkten aus erblickte Verfasser in der schon anderwärts vertretenen Anschauung, dass der Grad der Abstraktion geometrischer Sätze in umgekehrtem Verhältnis zu ihrer Anschaulichkeit und mühelosen Anwendung auf Specialfälle steht. Das hier nochmals behandelte und genauer eingeschränkte Theorem L'huilier's durfte in dieser Beziehung noch immer ein gewisses Interesse beanspruchen. Seine Anwendung auf ein thatsächlich sehr erweitertes Gebiet von polyedrischen Körpern aber dürfte bei der S. 23 nach den vorausgehenden Untersuchungen festgestellten Formulierung von den mehrerwähnten Einwänden frei sein. —

Kritische und exegetische Bemerkungen zu Ovids Tristien.

Von **Dr. Paul Vogel.**

Die Textkritik der Tristien ist durch Tank[1]) in völlig neue Bahnen geleitet worden: dass nicht der Palatinus I Merkels und die ihm verwandten Handschriften, sondern der ältere Teil des Laurentianus (L), ferner der Guelpherbytanus (G) Palatinus II (P) Vaticanus (V) Politianus I (A) die zuverlässigsten Lesarten bieten, (wenn sie auch nicht ganz frei von Interpolationen sind cf. Ehwald Bursian Bd. 43. S. 269. 273. und unten zu II. 507. III. 11. 3.), ist seitdem allgemein anerkannt, und die neueren Herausgeber (Güthling, Ehwald, Owen) haben ihren Text im wesentlichen demgemäss gestaltet. Da der Verfasser bei der vorliegenden Abhandlung den praktischen Zweck verfolgt, sich als Grundlage für weitere Arbeiten

---

[1]) Folgende Ausgaben und Abhandlungen haben dem Verfasser zur Verfügung gestanden: 1. Ausgaben: ad modum Sinceri, Augsburg 1743; Platz, Hannover 1825; Klein, Koblenz 1826; Boysen, 2. Aufl. Leipzig 1829; Lörs, Trier 1839; Riese, Leipzig 1874; Güthling, Leipzig 1884; Merkel-Ehwald, Leipzig 1884; Owen, Oxford 1889. 2. Merkel, quaest. Ovid. crit. Halle 1835; Lörs, Prolegomena in Ovid. Trist. Trier 1836; Binsfeld, quaest. Ovid. crit. I. Bonn 1853; Dinter, de Ovid. ex Ponto libr. comm. I. Grimma 1858; II. 1861; Algermissen, quaest. Ovid. crit. Münster 1879; Tank, de Trist. Ovid. recensendis, Greifswald 1879; Ehwald, ad historiam carminum Ovid. recensionemque symbolae, Gotha 1889; ausserdem Bursian, Jahresberichte, Band 1: Recensionen von Riese über Madvig, adv. crit. II. Bährens (Jahrb. f. Phil. 1873 p. 59) Mähly (Zeitsch. für österr. Gymn. 1873 p. 99) Haupt (Hermes VII. 11.); Band 14: Riese über Tank (s. o.); Band 50: Ehwald über Kraffert (Progr. Aurich 1883) Brandt (Jahrb. f. Phil. 1883) Schulz, quaest. Ovid. Greifswald 1883, Sedlmayer, Ov. carmina selecta, Prag-Leipzig 1883; Band 43: Ehwald über Schenkl (Archiv f. lat. Lexikogr. I. 266) Th. Bergk (Opuscula I. 655) Wilamovitz Möllendorf (index. lect. Götting. 1884) Maehly (Progr. Basel 1886) Polle (Jahrb. f. Phil. 1885) Güthling (s. o.) Merkel-Ehwald, ed. II. Teubner, Schulze, röm. Elegiker, Berlin 1884.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf