Das Deltoid.

Unter den Vierecken ist von den Mathematikern bisher keins stiefmütterlicher behandelt als das Deltoid. In den meisten mathematischen Lehrbüchern, Sammlungen von Lehrsätzen und Aufgaben wird es kaum erwähnt und selbst in dem neuen mathematischen Wörterbuch von Hoffmann sucht man vergeblich nach einem Artikel über dasselbe. Trotzdem verdient es diese Zurücksetzung keineswegs. Zeigt es doch nicht weniger Eigenthümlichkeiten wie das Parallelogramm, als dessen Pendant unter den Vierecken wir es überhaupt bezeichnen möchten. Läßt sich doch eine reiche Fülle von Lehrsätzen, leichten und schweren Aufgaben und Rechnungen an dasselbe anknüpfen, so daß Schüler aller Klassen Scharfsinn und Vorstellungsgabe an demselben üben können. Tritt es doch in vielen einfachen und complicirten geometrischen Figuren gleichsam von selbst auf und endlich zeigen die Krystalle nicht selten das Viereck auf ihrer spiegelnden Oberfläche, welches der Knabe, als er seinen Papierdrachen fertigte, zum ersten Mal construirte.

Dem Zurückgesetzten muß Gerechtigkeit widerfahren; dies der Grund der folgenden Zeilen.

§. 1. Das Deltoid ist ein Viereck, in dem je zwei anstoßende Seiten gleich sind. Figur I. — Werden in demselben die Diagonalen gezogen, so theilt die eine das Deltoid in zwei congruente, die andere dasselbe in zwei gleichschenklige Dreiecke. — Beide Diagonalen stehen senkrecht aufeinander. — Die Diagonale, welche die beiden gleichschenkligen Dreiecke erzeugt, wird durch die andere halbirt. Wir nennen daher kurz die letztere die halbirende und erstere die halbirte Diagonale.

Die halbirende Diagonale theilt die beiden Winkel des Deltoides, durch welche sie geht, in gleiche Theile. — Die beiden andern Winkel sind gleich. — Zu jedem Punkte, der nicht auf der halbirenden Diagonale liegt, findet sich im Deltoid ein zweiter entsprechender, der zu den Seiten, Ecken und Diagonalen genau dieselbe Lage wie der erste hat. Er wird gefunden, indem man von dem zuerst gegebenen auf die halbirende Diagonale ein Perpendikel fällt und dies um seine eigene Länge verlängert; der Endpunkt der Verlängerung ist der entsprechende Punkt. Die halbirende Diagonale zerlegt das Deltoid mithin in zwei symmetrische Theile, weshalb man dasselbe auch das symmetrische Viereck genannt hat. Wollte man eine deutsche Benennung haben, so würde sich der Ausdruck „gleichschenkliges Viereck" empfehlen.

Rhombus und Quadrat lassen sich als Deltoidarten auffassen.

§. 2. Je zwei symmetrisch gelegene Punkte haben a) gleiche Entfernung von jedem einzelnen Punkte der halbirenden Diagonale, b) gleiche Entfernung von jedem andern symmetrischen Punktenpaare. Sind z. B. in Figur II. n und m, r und o symmetrische Punkte, so ist $nh = mh$, $nr = mo$ und $no = mr$. Die beiden letzten Linien schneiden sich auf der halbirenden Diagonale. Auch sieht man leicht, je zwei Paar entsprechend gelegener Punkte sind die Ecken eines Antiparallelogrammes, das, wenn alle 4 Punkte gleichen Abstand von der halbirenden Diagonale haben, in ein Rechteck übergeht.

Die gleichen Verbindungslinien entsprechender Punktenpaare, z. B. nr und mo, bilden genügend verlängert mit beiden Diagonalen, mit je zwei entsprechenden Seiten und mit jedem andern durch Verbindung entsprechender Punkte entstandenen Linienpaare gleiche Winkel, sie sind mithin nicht nur gleiche, sondern auch in Bezug auf die halbirende Diagonale symmetrisch gelegene Linien.

Von jedem Punkte der halbirenden Diagonale kann man sagen: er fällt mit dem ihm entsprechenden Punkt zusammen.

§. 3. In jedes Deltoid läßt sich, da die Summen der gegenüberstehenden Seiten gleich sind, ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt desselben liegt auf der halbirenden Diagonale und theilt diese im Verhältniß der Seiten des Deltoides; am schnellsten wird er durch Halbiren eines der gleichen Deltoidwinkel gefunden. — Je zwei der Berührungspunkte sind entsprechende Punkte, die Verbindung aller 4 ergiebt mithin ein Antiparallelogramm mit seinen Diagonalen. Die beiden parallelen Seiten des Antiparallelogrammes stehen auf der halbirenden Diagonale senkrecht, während sie mit der halbirten parallel laufen.

Durch die Diagonalen des Antiparallelogrammes wird das Deltoid in vier Vierecke zerlegt, von denen zwei (Figur III.), nämlich ogha und oedc wiederum Deltoide sind, während die beiden andern sich als Sehnenvierecke erkennen lassen. Beweis: Winkel $gah = gca$, Winkel $oag = oce$, mithin $oah = eca$, ebenso $dco = cag$. Nun ist $eca + cag = 2$ R, folglich $oah + dco = 2$ R und die Summe ihrer Nebenwinkel $oab + ocb$ ebenso groß, also ocba ein Sehnenviereck.

Die Winkel dieses Sehnenvierecks sind die arithmetischen Mittel zwischen den Winkeln des ursprünglichen Deltoides; denn Wink. $cba = \frac{1}{2}(dbh + dfh)$, $bao = \frac{1}{2}(dbh + bhf)$, $bco = \frac{1}{2}(dfh + fdb)$ und $coa = \frac{1}{2}(fdb + fhb)$.

Denkt man um ocba den möglichen Kreis wirklich geschlagen, so ergiebt sich $cob = boa$ als Peripheriewinkel auf gleichem Bogen. Mithin halbirt die Diagonale des Sehnenvierecks ob den Winkel coa, dasselbe würde aber auch eine durch o mit ga gezogene Parallele thun, also mit ob zusammenfallen und daraus erhellt: **Der Schnittpunkt der Diagonalen des ursprünglichen Deltoides ist zugleich Schnittpunkt der Diagonalen des Antiparallelogrammes, dessen Ecken die Berührungspunkte des dem Deltoide eingeschriebenen Kreises sind.**

Der um ocba im Gedanken beschriebene Kreis geht auch durch den Mittelpunkt m des einbeschriebenen Kreises. Sein Durchmesser ist mb.

§. 4. Verbindet man den Mittelpunkt des dem Deltoide eingezeichneten Kreises mit den Berührungspunkten, so entstehen vier kleine Deltoide, die zugleich Sehnenvierecke sind. Für diese sind die Seiten des im vorigen Paragraph betrachteten Antiparallelogramms die halbirten Diagonalen und man kann daher den Satz aufstellen: die Linien, welche den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises mit den vier Ecken des Deltoides verbinden, halbiren die vier Linien, durch welche die Berührungspunkte des Kreises ohne Kreuzung verbunden werden. — Schneidet man auf der halbirenden Diagonale von den Ecken aus die anstoßenden Seiten ab, so zerfällt die Diagonale in 3 Abschnitte, von denen der mittlere durch den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises im Verhältniß der Seiten getheilt wird. Werden aber die Endpunkte des mittleren Abschnittes mit einer

Ecke des Deltoides verbunden, so bilden die Verbindungslinien einen Winkel, der $\frac{1}{4}$ der Summe der beiden ungleichen Deltoidwinkel ist.

§. 5. (Figur IV.) Die Halbirungspunkte der Seiten des Deltoides sind die Ecken eines Rechtecks, dessen Umfang gleich der Summe der Diagonalen des Deltoides ist. Jede Rechtecksseite ist gleich der Hälfte der ihr parallelen Diagonale. Das Quadrat der Diagonale des Rechtecks, d. h. der Linie, welche die Halbirungspunkte zweier gegenüberstehender Seiten des Deltoides verbindet, ist gleich einem Viertel der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen des Deltoides. Die Größe dieser Linie ist also durchaus unabhängig von der Größe der Seiten des Deltoides, und Deltoide, in denen die entsprechenden Diagonalen gleich, andere entsprechende Stücke aber ungleich sind, haben trotzdem Verbindungslinien der Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seiten von gleicher Länge. Und in der That denkt man sich die Diagonale ek auf hr so verschiebbar, daß der Halbirungspunkt o stets auf rh und hoe ein Rechter bleibt, so bleiben, während he und er ihre Gestalt ändern, die Halbirungspunkte g und m stets auf der Linie uv, und während ke parallel mit sich fortbewegt wird, thut dies auch gi; der Winkel, den sie mit der halbirenden Diagonale macht, ist also auch für Deltoide mit gleichen Diagonalen constant, man erhält ihn, wenn man die beiden Diagonalen unter einem rechten Winkel zusammenlegt und die Endpunkte der Schenkel des so erhaltenen Rechten verbindet.

Die Verbindungslinie ig der Halbirungspunkte zweier gegenüberstehender Seiten des Deltoides halbirt auch das Stück der halbirenden Diagonale, welches zwischen den Halbirungspunkten beider Diagonalen o und t liegt. Zieht man nämlich it und og, so ist jede dieser Linien als Verbindung der Halbirungspunkte zweier Dreiecksseiten parallel kh und gleich der Hälfte dieser Linie, folglich iogt ein Parallelogramm, und in diesem muß die eine Diagonale ig die andere ot halbiren. — Nebenbei ergiebt sich noch $tc = \frac{1}{2} oh$ und der Satz: Die Summen der 4 Linien, welche den Halbirungspunkt der einen und der andern Diagonale mit den Halbirungspunkten der Deltoidseiten verbinden, sind gleich.

§. 6. Der Inhalt eines Deltoides ist a) gleich dem halben Producte beider Diagonalen, b) gleich der Summe zweier ungleicher Seiten mal dem Radius des eingeschriebenen Kreises, c) gleich dem Product aus zwei ungleichen Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, d) gleich dem Product aus einer Seite und dem vom Endpunkt der halbirenden Diagonale aus auf sie gefällten Perpendikel. e) Errichtet man in dem einen Endpunkt der halbirenden Diagonale ein Perpendikel und verlängert es bis zum Schnitt mit einer Deltoidseite, so ist der Inhalt gleich diesem Perpendikel mal dem entfernteren Abschnitt der halbirenden Diagonale.

§. 7. Zwei Deltoide sind congruent, a) wenn in ihnen gleich sind: a) zwei Paar ungleicher Seiten und ein Paar entsprechend liegender Winkel, b) die Seiten und ein Paar entsprechender Diagonalen, c) beide Paar Diagonalen und ein Paar Seiten, d) beide Paar Diagonalen und ein Paar entsprechender Winkel, e) zwei Paar Winkel und ein Paar entsprechender Seiten, f) zwei Paar Winkel und ein Paar entsprechender Diagonalen.

§. 8. Zwei Deltoide sind ähnlich, wenn in ihnen

a) die Winkel gleich sind (zwei ungleiche Paare),

b) die Seiten in gleichem Verhältniß stehen und ein Paar entsprechender Winkel gleich sind,

c) die entsprechenden Diagonalen in gleichem Verhältniß stehen und ein Paar entsprechender Winkel gleich sind,

d) beide Diagonalenpaare und ein Paar Seiten gleiches Verhältniß haben,

e) die ungleichen Seitenpaare und ein entsprechendes Diagonalenpaar gleiches Verhältniß haben.

§. 9. In jedem Deltoide lassen sich von den Ecken auf die gegenüberstehenden Seiten 8 Lothe fällen; wir nennen sie die Höhen des Deltoides. Je zwei dieser Höhen sind gleich, je zwei derselben haben Schnittpunkte, die auf den Diagonalen liegen, und von den 16 Endpunkten der 8 Höhen haben je 4 gleiche Entfernung von dem Halbirungspunkte der einen oder der andern Diagonale. Fällt man z. B. von den Endpunkten der halbirten Diagonale die 4 möglichen Höhen, so liegen deren Fußpunkte auf der Peripherie des Kreises, welcher sich mit der halben halbirten Diagonale um deren Halbirungspunkt beschreiben läßt. — Die Differenzen der ungleichen Höhen, von welchen je zwei die Differenz bildende auf derselben Deltoidseite senkrecht stehen, verhalten sich umgekehrt wie die Seiten, auf denen sie stehen. — Fällt man von irgend einem Punkte der halbirten Diagonale Perpendikel auf sämmtliche Deltoidseiten, so ist die Summe der 4 Perpendikel eine constante Größe, nämlich gleich der Summe der beiden Höhen, die von demselben Ende der halbirten Diagonale ausgehen. Zum Beweise ziehe man durch den beliebig ausgewählten Punkt Parallelen mit den Seiten.

§. 10. Verbindet man den Schnittpunkt der Diagonalen mit den Halbirungspunkten der Seiten, so laufen die Verbindungslinien mit den Seiten parallel und sind halb so groß wie dieselben. — Verbindet man den einen Endpunkt der halbirten Diagonale mit den Halbirungspunkten der beiden gegenüberstehenden Seiten, so liegt zwischen den Punkten, in welchen diese Verbindungslinien die halbirende Diagonale schneiden, der dritte Theil dieser Diagonale. — Die Summe der Quadrate der Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate der 6 Linien, welche die Halbirungspunkte der Seiten des Deltoides verbinden. — Betrachtet man die 8 Linien, welche die Ecken des Deltoides mit den Halbirungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, als Mittellinien der Dreiecke, welche durch das Ziehen der Diagonalen im Deltoid gebildet werden, so ergiebt sich durch eine leichte Addition der Satz: Die Summe der Quadrate jener 8 Linien ist gleich der doppelten Summe der Quadrate der Diagonalen plus der Summe der Quadrate zweier ungleicher Seiten. Ferner: Die Summe der Quadrate der 16 Linien, welche die 4 Halbirungspunkte mit den 4 Ecken verbinden (die halben Seiten sind mitgerechnet), ist gleich der Summe der Quadrate der 12 Linien, von denen 6 die Halbirungspunkte unter einander verbinden, während die anderen 6 zur Verbindung der Ecken dienen.

§. 11. Im Deltoid kann einer der ungleichen Winkel ein Rechter werden, das Deltoid zeigt dann keine hervorstechenden Eigenthümlichkeiten, denn wird auch der eine Theil desselben ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, so wird doch der andere Theil durch das Uebergehen des Winkels in einen Rechten nicht modificirt. Anders ist es, wenn die beiden gleichen Winkel Rechte werden, dann zeigt die Figur so viel Eigenthümlichkeiten, die die übrigen Deltoide nicht besitzen, daß es sich rechtfertigt, wenn wir ihr einen besonderen Namen geben; sie heiße das rechtwinklige Deltoid. — Der Inhalt des rechtwinkligen Deltoides ist gleich dem Product der ungleichen Seiten. — Nennt man, und wir wollen das in der Folge bei allen Deltoiden thun, a die größere, b die kleinere Seite, c die halbirende, d die halbirte Diagonale und r den Radius des einbeschriebenen Kreises (vergl. Figur I.), so ist also $2a.b = d.c$, das Product der Diagonalen gleich dem doppelten Product zweier ungleicher Seiten, ferner $r.(a+b) = a.b$; also $\frac{a+b}{a.b} = \frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, d. h. im rechtwinkligen Deltoid ist der reciproke Werth des Radius des einbeschriebenen Kreises gleich der Summe der reciproken Werthe der Seiten und der Durchmesser das harmonische Mittel zwischen den gegenüberstehenden Seiten. — Geht man wieder zu der Gleichung $(a + b) r = a b$ zurück, so ist $a b - ra - rb = 0$, ferner $a b - ra - rb + r^2 = r^2$; $r(r-a) - b(r-a) = (r-b)(r-a) = r^2$, mithin $a-r : r = r : b-r$, d. h. der Radius des eingeschriebenen Kreises ist die mittlere Proportionale zwischen den um eben diesen Radius verminderten Seiten. — Halbirt man im rechtwinkligen Deltoid die Winkel, welche mit den Diagonalen die Seiten bilden, so liegen die Schnittpunkte der von den Endpunkten der halbirten Diagonale ausgehenden Winkelhalbirenden natürlich auf der halbirenden Diagonale; verbindet man diese Schnittpunkte aber mit den Schnittpunkten der von den Endpunkten der halbirenden Diagonale ausgehenden Winkelhalbirenden, so entsteht ein Quadrat. — Dieser Satz läßt sich auch anders aussprechen: Schneidet man auf der halbirenden Diagonale von den Ecken aus die anstoßenden Seiten ab und verbindet die so erhaltenen Punkte mit den Mittelpunkten der Kreise, die sich in die Dreiecke einschreiben lassen, in welche die halbirende Diagonale das Deltoid zerlegt, so entsteht ein Quadrat. Der Beweis wird leicht gefunden, wenn man die beiden gegebenen Ausdrucksweisen vergleicht. Der Inhalt des Quadrates ist $\frac{1}{2}(a + b - c)^2$. — Um jedes rechtwinklige Deltoid läßt sich ein Kreis beschreiben, die halbirende Diagonale ist Durchmesser desselben. — Das Quadrat der halbirten Diagonale ist das Vierfache vom Rechteck der Segmente der halbirenden. — Das Quadrat über dem halben Umfang ist gleich dem Rechteck aus der Summe beider Diagonalen und der halbirenden. — Die Differenz zweier Seiten ist die mittlere Proportionale zwischen der Differenz der Diagonalen und der halbirenden. — Fällt man vom Endpunkt der halbirten Diagonale ein Perpendikel auf eine der gegenüberstehenden Deltoidseiten, so ist der Fußpunkt desselben vom Schnittpunkt der Diagonalen um die halbe halbirte Diagonale entfernt. — Heißt wie oben r der Radius des dem Deltoid einbeschriebenen Kreises, ϱ die Radien der Kreise, die den Dreiecken, in welche die halbirende Diagonale das Deltoid zerlegt, eingezeichnet sind, so ist $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} = \frac{2}{d}$. Der Satz ergiebt sich, sobald man den Inhalt der betreffenden Figuren darstellt und dann ϱ und r bestimmt. — Sind im rechtwinkligen Deltoid beide Diagonalen gezogen, so befinden sich in der Figur 6 rechtwinklige Dreiecke; die Summe der Radien der Kreise, welche sich diesen Dreiecken einzeichnen lassen, ist stets die halbirte Diagonale.

§. 12. Wird (Figur V.) dem rechtwinkligen Deltoid ein Kreis eingezeichnet, so entsteht, wie wir wissen durch Verbindung der Berührungspunkte ein Antiparallelogramm efgv. Verbindet man dagegen den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte, so bilden die 4 Radien mit den Deltoidseiten 2 Quadrate ofhg und oekv und zwei rechtwinklige Deltoide vogl und oeif; die Seiten des Antiparallelogrammes sind Diagonalen für die Quadrate und Deltoide und werden daher von den Linien, welche den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises mit den Ecken des Deltoides verbinden, halbirt. Sind aber m und n die Halbirungspunkte von oh und ok, so ist $mn = \frac{1}{2} kh$; sind außerdem m und n die Halbirungspunkte von fg und eh, so ist $nm = \frac{ef + vg}{2}$, folglich $ef + vg = kh$, d. h. die Summe der parallelen Seiten des Antiparallelogrammes ist gleich der halbirten Diagonale. Ferner ersieht man leicht, daß $np \parallel oh$, $pm \parallel ko$ und npmo ein Rhombus ist. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Deltoides, der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises und die Halbirungspunkte der gleichen Seiten des eingezeichneten Antiparallelogrammes sind also stets die Ecken eines Rhombus, und die Verbindungslinie der Halbirungspunkte der gleichen Seiten des Antiparallelogrammes halbirt das zwischen dem Mittelpunkt und Diagonalenschnittpunkt gelegene Stück der halbirenden Diagonale. — Suchen wir jetzt qs, die Höhe des Antiparallelogrammes, zu bestimmen und nennen dabei ih kurz b, lh a, den Radius r und li d, so ist

$$qp : pi = r : b,\; qp = \frac{pi.r}{b}$$

$$ip : b = b : d,\; ip = \frac{b^2}{d},\; gp = \frac{b.r}{d}.$$

Dem entsprechend bestimmt sich $ps = \frac{a.r}{d}$, folglich

$$qs = \frac{r(a+b)}{d}.\, r(a+b) \text{ ist aber als Inhalt} = \frac{cd}{2},$$

mithin $qs = \frac{cd}{2d} = \frac{c}{2}$. Wir finden also das interessante Resultat: *Die Höhe des Antiparallelogrammes ist gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den parallelen Seiten*, denn diese waren ja zusammen gleich der halbirten Diagonale. Multipliciren wir endlich noch die Höhe mit der halben Summe der parallelen Seiten, so finden wir den Inhalt des Antiparallelogrammes *gleich dem Quadrat der halben halbirten Diagonale*. — Die Halbirungspunkte der Seiten des Antiparallelogrammes sind die Ecken eines Quadrates. — $qp = os$, mithin $op = ps - pq = \frac{(a-b).r}{d}$ oder die Differenz der Deltoidseiten verhält sich zur halbirenden Diagonale wie das zwischen Diagonalenschnittpunkt und Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises gelegene Stück dieser Diagonale zum Radius des eben erwähnten Kreises. Auch ergiebt sich leicht: Die Summe zweier ungleicher Deltoidseiten verhält sich zu ihrer Differenz wie die Höhe des Antiparallelogrammes zu op. — Zieht man jetzt in Figur V. $ft \perp vg$, so ist $tg = \frac{vg - ef}{2}$, $ft = \frac{d}{2}$, $fg^2 = 2r^2$ also, wenn man den Pythagoreer auf Dreieck ftg anwendet,

$$\frac{vg^2}{4} - \frac{vg.ef}{2} + \frac{ef^2}{4} = 2r^2 - \frac{d^2}{4};\; vg^2 - 2vg.ef + ef^2 = 8r^2 - d^2,$$

nun ist aber $hg + ef = c$, also $\frac{vg^2 + 2vg.ef + ef^2 = d^2}{2vg^2 + 2ef^2 = 8r^2;\; vg^2 + ef^2 = (2r)^2.}$

Der Durchmesser des einbeschriebenen Kreises und die beiden parallelen Seiten des Antiparallelogrammes sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks oder auch die Summe der Quadrate der beiden parallelen Seiten des Antiparallelogrammes ist gleich der Summe der Quadrate der gleichen Seiten.

Die Berührungspunkte des dem rechtwinkligen Deltoid einbeschriebenen Kreises kann man auch, ohne den Mittelpunkt zu benutzen, leicht bestimmen, indem man die rechten Winkel, welche die Diagonalen bilden, halbirt. Die Winkelhalbirenden treffen die Deltoidseiten in den Berührungspunkten. Daraus folgt aber unmittelbar, daß die Diagonalen des Antiparallelogrammes senkrecht aufeinander stehen, der Inhalt des Antiparallelogrammes gleich dem halben Quadrat seiner Diagonale ist und diese sich zur halbirten Diagonale des Deltoides verhält wie $1 : \sqrt{2}$. Ferner wird leicht ersichtlich, daß hg und hf mittlere Proportionalen zwischen if und gl sind und daß die vier Abschnitte der halbirenden Diagonale iq, qp, ps und sl eine Proportion bilden, also die Producte qp . ps und iq . sl gleich sind. Endlich geben sich die Dreiecke fpg und ihl als ähnliche zu erkennen, die Abschnitte der Antiparallelogrammdiagonale fp und ph verhalten sich mithin, wie es auch die parallelen Seiten des Antiparallelogrammes thun, wie die Seiten des Deltoides. Der Inhalt des Dreiecks fpg verhält sich zum Quadrat des Radius des einbeschriebenen Kreises wie die halbe halbirte Diagonale zur halbirenden.

Ein zweites eigenthümliches Antiparallelogramm entsteht im rechtwinkligen Deltoid, wenn die Auftrittspunkte der 4 Lothe, welche sich vom Diagonalenschnittpunkt auf die Seiten fällen lassen, verbunden werden. Der Umfang dieses Antiparallelogrammes ist das Doppelte der halbirten Diagonale. Die beiden parallelen Seiten sind zusammen gleich jener Diagonale und die beiden gleichen auch. In das Antiparallelogramm läßt sich mithin ein Kreis zeichnen; Mittelpunkt für denselben ist der Diagonalenschnittpunkt, und die von diesem Punkte gefällten Lothe halbiren demnach die Winkel des Antiparallelogrammes.

Errichtet man noch in den Endpunkten der halbirenden Diagonale nach derselben Seite zu Lothe von der Größe der anstoßenden Seiten und verbindet die Endpunkte der Lothe mit den Scheiteln der rechten Winkel des Deltoides, so bilden die Verbindungslinien an der einen Deltoidecke einen halben, an der andern einen Winkel von anderthalb Rechten.

§. 13. Wird in einem rechtwinkligen Deltoide die halbirte Diagonale zufälliger Weise gleich der größern Seite, so wird auch 1) von den ungleichen Winkeln der eine die Hälfte des andern, 2) die kleinere Seite gleich der halben halbirenden Diagonale, 3) die halbirende Diagonale von der halbirten im Verhältniß von 1 : 3 getheilt, 4) verhalten sich die Quadrate der Diagonalen wie 3 : 4 und 5) die Quadrate der Seiten wie 1 : 3. — Die gegebenen Sätze können mannichfach umgekehrt und combinirt werden, z. B.: wird in einem rechtwinkligen Deltoid die halbirende Diagonale von der halbirten im Verhältniß von 1 : 3 getheilt, so ist der spitze Winkel die Hälfte des stumpfen.

§. 14. Zeichnet man über zwei gegenüberstehenden Seiten eines rechtwinkligen Deltoides nach außen zu Quadrate, so lassen sich die 4 Ecken des einen Quadrates durch 16 Linien, zu denen allerdings die Seiten und Diagonalen des Deltoides gehören, mit den Ecken des andern Quadrates verbinden. Die Quadrate dieser 16 Linien sind in einfacher Weise durch die Seiten und Diagonalen der Hauptfigur auszudrücken. — Im Dreieck kem (Figur VI.) ist $km^2 = (a+b)^2 + 2b^2 - 2b\sqrt{2}(b+a) . \cos(45 + 2\alpha)$, wenn man $gei = 2\alpha$ setzt. $\cos(45+2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{}}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha)$, mithin $km^2 = (a+b)^2 + 2b^2 - 2b(b+a)\left[\frac{b^2 - a^2 - 2ab}{c^2}\right] = a^2 + 4ab + b^2 + \frac{8a^2b^2}{a^2+b^2} = c^2 + 2cd + 2d^2 = (c+d)^2 + d^2$.

In ähnlicher Weise bestimmt sich ln^2 aus Dreieck lgn Winkel $lgn. = \mathfrak{R} + \alpha$, lg, wie eine leichte Berechnung mit Hülfe des Dreiecks leg zeigt, $= \frac{b\sqrt{2}(a+b)}{c}$, folglich $ln^2 = \frac{2b^2(a+b)^2}{a^2+b^2} + 2a^2 - \frac{2b\sqrt{2}(a+b)}{c} . a\sqrt{2}\cos(\mathfrak{R}+\alpha)$. Das letzte Glied ist aber =

$\frac{4a^2b(a+b)}{c^2}$, mithin ln^2 selbst $= (c+d)^2 + c^2$. Die Linien, welche die äußersten Ecken der Quadrate kreuzweis verbinden, sind also die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke, die sich aus der Summe der beiden Diagonalen als einer Kathete und je einer der Diagonalen als zweiten Kathete bilden lassen. Auch verhält sich die Summe jener Linien zu der Summe der Diagonalen wie die Differenz der letzteren zur Differenz der ersteren.

lm^2 und kn^2 lassen sich einzeln nicht in einfacher Weise durch die Diagonalen ausdrücken, wohl aber ihre Summe, denn es ist $lm^2 = \frac{a^4 + 2a^3b + 7a^2b^2 + 6ab^3 + 2b^4}{c^2}$

und $kn^2 = \frac{2a^4 + 6a^3b + 7a^2b^2 + 2ab^3 + b^4}{c^2}$,

also $lm^2 + kn^2 = 2(c+d)^2 + c^2$. — Beachtet man, daß nach dem Vorgehenden $ln^2 + km^2 = 2(c+d)^2 + c^2 + d^2$ ist, so ergiebt sich: Die Summe der Quadrate der Linien, welche die entfernteren Ecken der über den Deltoidseiten gezeichneten Quadrate kreuzweis verbinden, ist immer größer als die entsprechende Summe der Linien, welche dieselben Ecken, ohne sich zu kreuzen, verbinden, und zwar ist die Differenz stets gleich dem Quadrat der halbirten Diagonale.

Außerdem ist, wie wir schon gesehen haben:

$$lg^2 = \frac{2b^2(a+b)^2}{a^2+b^2}, \text{ ferner } kg^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(b+a)\frac{(a^2-b^2)}{c^2}$$

$$lh^2 = b^2 + (a+b)^2 \qquad im^2 = (a+b)^2 + b^2 - 2b(b+a)\frac{(b^2-a^2)}{c^2}$$

$$kh^2 = me^2 = (a+b)^2 \qquad in^2 = \frac{2a^2(a+b)^2}{a^2+b^2}$$

$$en^2 = (a+b)^2 + a^2 \qquad gi^2 = d^2,\ eh^2 = c^2,\ eg^2 = b^2,\ ih^2 = a^2.$$

Folglich auch $lg^2 + in^2 = 2(a+b)^2$, ferner $kg^2 + im^2 = km^2$, d. h. verlängert man im rechtwinkligen Deltoid den kleineren Schenkel des einen rechten Winkels über den Scheitel hinaus um den größern und den größern Schenkel des andern Rechten um den kleinern, verbindet die Endpunkte der Verlängerungen unter einander und mit den Scheiteln der rechten Winkel, so lassen sich die 3 Verbindungslinien als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ansehen.

Addiren wir endlich die Quadrate der sämmtlichen 16 Linien, welche die Ecken des einen Quadrates in Figur VI. mit den Ecken des andern verbinden, so ergiebt sich ihre Summe gleich dem achtfachen Quadrate über der Summe der Diagonalen plus dem achtfachen Quadrat der halbirenden Diagonale oder auch gleich $8 ln^2$, d. h. gleich dem 8fachen Quadrate der größten von diesen Verbindungslinien.

Denke ich jetzt die Quadrate über sämmtlichen Deltoidseiten construirt und berechne die Summe der Quadrate der 16 Linien, welche die Ecken der Quadrate zweier ungleicher zusammenstoßender Seiten verbinden (eine der Verbindungslinien ist Null), so erhalte ich $16c^2 + 8c.d$; die Summe ist also sechszehnmal so groß wie das Deltoid und das Quadrat der halbirenden Diagonale zusammengenommen sind. Die 16 Verbindungslinien, welche die Ecken der über den größeren Deltoidseiten verzeichneten Quadrate verbinden, geben in Bezug auf ihre Quadrate nicht ein so einfaches Resultat wie das eben angeführte, nimmt man aber die Verbindungslinien der Ecken der kleinen

Quadrate zu Hülfe, so erhält man für die Summe der Quadrate der 32 Linien, welche einerseits die Ecken der beiden großen Quadrate, andererseits die der beiden kleinen Quadrate verbinden, $32c^2 + 16cd$ und dadurch noch den schönen Satz: Sind über den Seiten eines rechtwinkligen Deltoides Quadrate construirt und verbindet man einerseits die Ecken der gleichen Quadrate durch die 32, resp. 30 (denn zwei werden Null) möglichen Linien, andererseits die Ecken der ungleichen zusammenstoßenden Quadrate durch die entsprechenden Linien, so ist die Summe der Quadrate der ersten 32 Linien gleich der Summe der Quadrate der anderen 32.

Sucht man zum Schluß noch durch einfache Addition die Summe der Quadrate der 96 Linien, welche die Ecken der 4 Quadrate überhaupt verbinden, ohne sich daran zu stoßen, daß 4 von diesen Linien 0 werden, jede Deltoidseite zweimal und jede Diagonale viermal als Verbindungslinie gezählt ist, so erhält man $96c^2 + 64cd + 16d^2$. Die Summe der Quadrate jener 96 Linien ist also größer als das 96fache vom Quadrat der halbirenden Diagonale und zwar um das 16fache Quadrat der halbirten Diagonale plus 128mal dem Inhalt des Deltoides selbst.

§. 15. Wird beim rechtwinkligen Deltoid über der halbirenden Diagonale ein Quadrat gezeichnet und verbindet man von den beiden Ecken dieses Quadrates, welche nicht Endpunkte der halbirenden Diagonale sind, die eine mit dem einen Ende der halbirten Diagonale, die andere mit dem anderen Ende, so ist die Summe der Quadrate der beiden Verbindungslinien gleich dem dreifachen Quadrate der halbirenden Diagonale. Der Beweis ist mit Hülfe des Satzes zu führen: In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern plus oder minus dem doppelten Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf sie. — Das arithmetische Mittel zwischen den Quadraten der 8 Linien, welche die Endpunkte der halbirten Diagonale mit den Ecken des über der halbirenden Diagonale construirten Quadrates verbinden, ist dieses Quadrat selbst. — Wird der Schwerpunkt desselben Quadrates mit den Endpunkten der halbirten Diagonale verbunden, so erhält man zwei Linien, deren Quadrate wieder zusammen gleich dem Quadrate selbst sind. Zum Beweis benutze den Satz vom Quadrat der Mittellinie. — Die halbe Diagonale des betrachteten Quadrates, die Hälfte der halbirten Diagonale des Deltoides und die Linie, welche die Schnittpunkte der Diagonalen beider Figuren verbindet, lassen sich als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ansehen.

Werden im rechtwinkligen Deltoid zu beiden Seiten der halbirten Diagonale an dieselbe Quadrate gelegt und in dem dadurch entstehenden Rechtecke zwei gegenüberstehende Ecken mit den Endpunkten der halbirenden Diagonale verbunden, so entsteht ein Viereck, in dem die Summe der Quadrate sämmtlicher Seiten gleich wird der Summe der Quadrate der Diagonalen, sobald man die erstere Summe um das Quadrat der halbirten und die letztere Summe um das Quadrat der halbirenden Diagonale der Hauptfigur vermehrt.

Zeichnet man über den Seiten eines rechtwinkligen Deltoides nach außen zu Quadrate und verbindet die nächstliegenden Ecken so, daß ein Achteck entsteht, so ist dieses Achteck, vermehrt um das ursprüngliche Deltoid, gleich dem halben Quadrat des Umfanges des Urdeltoides. Von den Seiten des Achtecks sind natürlich 4 gleich den Deltoidseiten und 2 gleich der halbirenden Diagonale, zwischen den beiden letzten aber ist die halbirte Diagonale geometrisches Mittel.

§. 16. Bezeichnen wir im rechtwinkligen Deltoid den von den beiden gleichen Seiten a eingeschlossenen Winkel mit α, so ist $\sin\alpha = \frac{d}{c}$, $\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$, $2\cot g\alpha = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$, $\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \frac{a+b}{a-b}$, $\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{a-b}{a+b}$ etc.

§. 17. Errichtet man im Endpunkt der halbirenden Diagonale ein Loth, welches der Diagonale selbst gleich ist, und verbindet dessen Endpunkt mit dem entfernteren Endpunkt der halbirten Diagonale, so ist der Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit der Deltoidseite die Ecke des Quadrates, welches sich dem Deltoid einzeichnen läßt. Die Seite dieses Quadrates ist die vierte Proportionale zu den beiden Diagonalen und der Summe derselben. Figur 7 ist

$$\alpha : a = x : c \text{ und } a - \alpha : a = x : d, \text{ folglich } x = \frac{dc}{d+c}$$

oder $d + c : d = c : x$. Die Größe des eingezeichneten Quadrates ist mithin unabhängig von den Seiten des Deltoides. — Aus der Gleichung $x = \frac{dc}{d+c}$ folgt unmittelbar $\frac{1}{x} = \frac{1}{d} + \frac{1}{c}$, d. h. der Satz: Der reciproke Werth der Seite des Quadrates, welches einem Deltoide eingezeichnet ist, ist gleich der Summe der reciproken Werthe der Diagonalen. — Die Ecken des eingeschriebenen Quadrates theilen die Seiten des Deltoides im Verhältniß der Diagonalen. Diese Behauptung erhellt aus der Betrachtung der ähnlichen Dreiecke, welche Figur 7 zeigt. — Die halbirende Diagonale wird durch die Seiten des Quadrates und die andere Diagonale in die 4 Abschnitte w, z, v, y getheilt. Da sich nun

$w : w + z = x : d$ und $y : y + v = x : d$ verhält, so ist auch

$w : w + z = y : y + v$, $z : v = w : y$ und $zy = vw$, also das Product des ersten und dritten Abschnittes gleich dem Producte der beiden andern; da ferner $z + v = \frac{dc}{d+c}$ ist, so folgt noch $w + y = \frac{c^2}{d+c}$ und $z + v : w + y = d : c$, die Summen der äußern und innern Abschnitte verhalten sich wie die Diagonalen.

Sind im Deltoid zufälligerweise die beiden Diagonalen gleich, so ist 1) die Summe der beiden inneren Abschnitte gleich der Summe der beiden äußeren, 2) die Summe der reciproken Werthe der äußern Abschnitte gleich der Summe der reciproken Werthe der inneren, 3) die Quadrate des ersten und dritten Abschnittes zusammen gleich den Quadraten des zweiten und vierten, 4) das eingezeichnete Quadrat selbst der vierte Theil des Deltoides.

Zieht man von jeder der Diagonalen eines Deltoides den Werth der Seite des eingezeichneten Quadrates, d. i. $\frac{dc}{d+c}$ ab, so bleiben für die Reste $\frac{c^2}{d+c}$ und $\frac{d^2}{d+c}$, die Theile der Diagonalen, welches nicht in dem eingezeichneten Quadrate liegen, verhalten sich also zu einander wie die Quadrate der Diagonalen, deren Rest sie sind.

Beschreibt man endlich in das eingezeichnete Quadrat einen Kreis, so ist das Stück der halbirten Diagonale, welche Sehne wird, gleich den außerhalb des Quadrates liegenden Abschnitten derselben Diagonale, wenn das Deltoid ein rechtwinkliges ist. Zum Beweis fasse man die halbe Sehne als mittlere Proportionale der inneren Abschnitte der halbirenden Diagonale auf.

§. 18. Das eingezeichnete Quadrat führt auf die Einzeichnung und Untersuchung des Rechtecks, dessen Seiten sich wie 1 : n verhalten und dessen Ecken auf den Seiten eines Deltoides liegen. Man erhält die beiden möglichen Rechtecke, wenn man das im Endpunkt der halbirenden Diagonale zu errichtende Loth gleich dem nfachen oder dem nten Theile dieser Diagonale macht und sonst wie bei der Construction des Quadrates verfährt. Ist $n > 1$ und läuft die kleinere Rechtecksseite x parallel der Diagonale c, so ist $\frac{1}{x} = \frac{n}{d} + \frac{1}{c}$, während wir für die größere Seite y die Gleichung $\frac{1}{y} = \frac{1}{d} + \frac{1}{nc}$ erhalten, und heißen die Seiten des zweiten Rechtecks x_1 und y_1, so ist $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{d} + \frac{n}{c}$ und $\frac{1}{y_1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{nd}$. Die Ecken beider Rechtecke theilen die Seiten des Deltoides im Verhältniß von $nc : d$ und $nd : c$.

Inhalt und Umfang dieser eingezeichneten Figuren sind im Allgemeinen nicht gleich, sie werden es indeß, sobald die Diagonalen des Deltoides gleiche Länge erhalten. Für den Umfang giebt in diesem Falle eine leichte Rechnung oder geometrische Betrachtung den hübschen Satz: Wird einem Deltoid, dessen Diagonalen gleich sind, irgend ein Rechteck eingezeichnet, so ist der Umfang des letzteren gleich der Summe der Diagonalen des ersteren. — Der Inhalt des eingezeichneten Rechtecks wird bei Gleichheit der Diagonalen $= \frac{nc^2}{(n+1)^2}$, ein Ausdruck, der für $n=1$ ein Maximum wird. Der Beweis für diese Behauptung läßt sich ohne Mühe elementar führen. Setzt man für n $1 \pm x$, indem man unter x irgend eine rationale positive Größe versteht, so geht $\frac{n}{(n+1)^2}$ über in $\frac{1 \pm x}{(2 \pm x)^2} = \frac{1 \pm x}{4 \pm 4x + x^2}$, dividirt man aber, so ergiebt sich dies gleich $\frac{1}{4} - \frac{x^2}{(2 \pm x)^2}$. Der Subtrahend der eben erlangten Differenz ist als Quadrat positiv, folglich das Maximum, welches die ganze Differenz erhalten kann, $\frac{1}{4}$ und dies wird nur erreicht, wenn x gleich 0 und n dadurch gleich 1 wird. Von allen in ein Deltoid mit gleichen Diagonalen eingezeichneten Rechtecken ist mithin das Quadrat das größte. Noch leichter wäre der Beweis geworden, wenn man ihn auf die Bestimmung gestützt hätte: der Umfang der eingezeichneten Vierecke ist ein constanter. — Sind dagegen die Diagonalen des Deltoides ungleich, so ist von den eingezeichneten Rechtecken nicht das Quadrat das größte, sondern die beiden, deren Seiten sich verhalten wie die Diagonalen. Der Inhalt des Rechtecks $\frac{nc^2d^2}{(nc+d)^2}$ wird nemlich für $n = \frac{d}{c}$ gleich $\frac{cd}{4}$, dagegen für $n = \frac{d}{c} + x$ wird er $\frac{d^3c + cdx}{4d^2 + 4dcx + c^2x^2} = \frac{dc}{4} - \frac{dc^2x^2}{4(2d + cx)^2}$, der Subtrahend ist aber für jeden Werth von x, sei er ein positiver oder negativer, positiv, mithin die Differenz für $x=0$ ein Maximum.

Bleiben die Diagonalen des Deltoides ungleich und heißen die Seiten der beiden eingezeichneten Rechtecke, die sich wie 1 : n verhalten, x, y, x_1 und y_1, so ist immer $xy_1 = yx_1$, während die Diagonalen der Rechtecke sich verhalten wie $nd + c : nc + d$.

§. 19. Werden um die Endpunkte der halbirenden Diagonale mit den Deltoidseiten Kreise beschrieben, so wird die halbirte Diagonale für diese Kreise Chordale und aus diesem Verhältniß lassen sich leicht Sätze für das Deltoid entwickeln, z. B.: Die beiden Kreisen gemeinsamen Tangenten werden durch die verlängerte halbirte Diagonale halbirt. Denkt man ferner Figur 8 durch p mit eg eine Parallele gezogen, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Tangente pn sowie die Differenz der Deltoidseiten Katheten sind und die halbirende Diagonale Hypotenuse. Es ist mithin $pn^2 = c^2 - (a-b)^2$, folglich, sobald das Deltoid rechtwinklig wird, $pn^2 = 2ab$, d. h. für das rechtwinklige Deltoid ist das Quadrat der gemeinsamen Tangente doppelt so groß als das Deltoid. Nun ist der Inhalt des Deltoides, wie wir wissen, aber auch $= \frac{c.d}{2}$, also die gemeinsame Tangente mittlere Proportionale zwischen den beiden Diagonalen des rechtwinkligen Deltoides. — Wird eg bis zu den Peripherien der Kreise verlängert, so ist die dadurch entstehende ganze Linie $= a + b + c$, während das beiden Kreisen gemeinsame Stück der halbirenden Diagonale $xw = a + b - c$ ist, das Product beider Linien $= (a + b)^2 - c^2 = 2ab = pn^2$, das zwischen den Berührungspunkten liegende Stück der gemeinsamen Tangente ist also auch mittlere Proportionale zwischen dem Umfang des halben Deltoides efg und der kleinen Linie xw. — Verbindet man die auf der verlängerten eg gelegenen 4 Endpunkte der Durchmesser mit dem einen Endpunkt der halbirten Diagonale, so ergiebt sich als Summe der Quadrate der vier Verbindungslinien das vierfache Quadrat der halbirenden Diagonale. — Ferner ist $yw = c + (a-b)$ und $xz = c - (a-b)$, mithin $yw.xz$ wiederum $= c^2 - (a-b)^2 = 2ab = pn^2$, also einerseits pn auch mittlere Proportionale zwischen yw und xz und andererseits $zy.xw = zx.yw$ oder, was dasselbe sagt, z, x, w, y sind harmonische Punkte; wir können daher den Satz aufstellen: Wird die halbirende Diagonale eines rechtwinkligen Deltoides bis zu den Peripherien der mit den Seiten um ihre Endpunkte geschlagenen Kreise verlängert, so sind die 4 auf den Kreisen liegenden Punkte der verlängerten Linie harmonische. Werden die Glieder der harmonischen Proportion $zx : xw = zy : wy$, mit einander multiplicirt und das Product radicirt, so erhält man den doppelten Inhalt des Deltoides. Hört das Deltoid auf, ein rechtwinkliges zu sein, so bilden die Linien zx, xw ꝛc. allerdings keine Proportion mehr, aber ihr radicirtes Product bleibt dennoch dem doppelten Inhalt gleich.

Betrachten wir Figur 8 weiter, so ist $on^2 = of.oh$ und auch $= \frac{fh.eg}{4}$, mithin $4of^2 + 4of.fh = fh.eg$; addire auf beiden Seiten fh^2, dann erhältst du $fh(fh + eg) = (2of + fh)^2 = or^2$ und das heißt: D i e b i s z u d e n g e m e i n s a m e n T a n g e n t e n v e r l ä n g e r t e h a l b i r t e D i a g o n a l e i s t m i t t l e r e P r o p o r t i o n a l e z w i s c h e n d e r S u m m e b e i d e r D i a g o n a l e n u n d d e r h a l b i r t e n. Woraus wiederum folgt: Das Quadrat der halbirten Diagonale plus dem Quadrat der gemeinsamen Tangente ist gleich dem Quadrat der bis zu den gemeinsamen Tangenten verlängerten halbirten Diagonale oder $or^2 = fh^2 + pn^2$. Nennt man pn kurz t und beachtet, daß $t^2 = 2ab$, $c^2 = a^2 + b^2$, so hat man $t^2 + c^2 = (a + b)^2$, d a s Q u a d r a t d e r h a l b i r e n d e n D i a g o n a l e, v e r m e h r t u m d a s Q u a d r a t d e r g e m e i n s a m e n T a n g e n t e, i s t g l e i c h d e m v i e r t e n T h e i l e d e s Q u a d r a t e s d e s D e l t o i d u m f a n g e s. Ebenso groß ist auch die Summe der Quadrate der beiden Linien, welche einen der 4 Berührungspunkte mit den Endpunkten der halbirenden Diagonale verbinden. — Werden dagegen die 4 Berührungspunkte der gemeinsamen Tangente mit dem Durchschnittspunkt der Diagonalen verbunden und die Quadratsumme dieser Linien noch um das Quadrat der halbirenden Diagonale vermehrt, so ist die Gesammtsumme gleich dem Quadrat über der Summe beider Diagonalen. Beweis mit Hülfe von uo und ur als Mittellinien. Ein ähnliches einfaches Resultat wird gefunden, wenn die Quadrate der 4 Linien addirt werden, welche einen der Endpunkte der halbirten Diagonale mit den 4 Berührungspunkten verbinden; die Summe ist gleich dem doppelten Quadrat der Linie or; auch zeigt sich leicht, daß von diesen Quadraten $qh^2 + hn^2 = hs^2 + hp^2$, mithin jede Gruppe gleich or^2 ist. Werden endlich die 4 Berührungspunkte noch mit dem Halbirungspunkte der halbirenden Diagonale verbunden, so sind sämmtliche Verbindungslinien gleich.

Zeichnet man in den Punkten, wo die Kreise die halbirende Diagonale schneiden, Tangenten an die Kreise, hier ik und ml, so ist $a - \frac{ml}{2} : a = ml : d$, also $ml = \frac{2a.d}{2a+d}$ und entsprechend $ik = \frac{2b.d}{2b+d}$ und daraus folgen die drei nicht unintereſſanten Gleichungen: $\frac{1}{ml} = \frac{1}{d} + \frac{1}{2a}$, $\frac{1}{ik} = \frac{1}{d} + \frac{1}{2b}$ und $\frac{1}{ml} - \frac{1}{ik} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b}$. Werden aber ml und ik so weit verlängert, daß sie als Sehnen in den Kreisen auftreten, so ist das Quadrat der einen Sehne $= 8b(c-b)$ und das der andern gleich $8a\,(c-a)$, mithin die Summe beider gleich dem 8fachen Rechteck aus der halbirenden Diagonale und dem Stücke derselben, welches zwischen den Kreisperipherien liegt.

Beachtet man, daß wf den Winkel gfu, xf Winkel efu halbirt und daß daher $xfw = 45^0$ ist, so ergiebt sich 1) $a.uw.xe = b.xu.wg$, 2) dieselbe Gleichung für den Fall, daß u nicht der Halbirungspunkt, sondern irgend ein Punkt der Diagonale fh und x und w die Punkte sind, in denen die Verbindungslinien von u mit g und e die Kreise schneiden; 3) $xu.c = ex.a$; 4) $uw.c = wg.b$; 5) $2c.xu.uw = d.ex.wg$; 6) $fw^2 : fx^2 = c + a : c + b$; 7) die vierte Proportionale zu den Seiten des Dreiecks xfw wird gefunden, wenn man fu von u aus auf ug abschneidet und den auf diese Weise erhaltenen Endpunkt mit f verbindet. Nr. 5 ist entweder durch die vorhergehenden Gleichungen, oder indem man die halbirte Diagonale als Polare zu den Punkten e und g auffaßt, zu erweisen. Nr. 6 ergiebt sich, wenn man den Satz: die Seiten jedes Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel, auf Dreieck xfw anwendet, und Nr. 7, sobald man den Inhalt desselben Dreiecks sowohl durch Höhe und Grundlinie als auch durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmt.

Ziehen wir endlich von den Endpunkten der halbirenden Diagonale g und e aus nach einem beliebigen Punkte y der halbirten Diagonale Grade, die verlängert in den Punkten γ und ε aus den Kreisen heraustreten (wir bitten, die Figur selbst zu entwerfen), so ist $e\varepsilon.y\gamma.a = g\gamma.y\varepsilon.b$; diese Gleichung, welche mit Hülfe der Polare und den bekannten Proportionen zweier sich schneidender Secanten und Sehnen zu erweisen ist, giebt mit Nr. 2 verbunden noch eine neue Gleichung in der die Deltoidseiten a und b nicht mehr auftreten.

§. 20. Im Deltoid läßt sich auch der Punkt bestimmen, dessen Verbindungslinien mit den Ecken so beschaffen sind, daß die Summe ihrer Quadrate kleiner ist als die Summe der Quadrate der vier Linien, die irgend einen andern Punkt mit den Ecken des Deltoides verbinden.

Verbindet man den beliebigen Punkt o (Figur 9) mit den Ecken a, b, c, d und fällt, nachdem man noch oi gezogen, or senkrecht auf bd, zieht ar und rc, so ist

$$od^2 = or^2 + rd^2,$$
$$ob^2 = or^2 + rb^2,$$
$$ao^2 + oc^2 = 2oi^2 + \frac{ac^2}{2}$$
$$ar^2 + rc^2 = 2ri^2 + \frac{ac^2}{2},$$
$$oi^2 = or^2 + ri^2,$$

mithin $od^2 + ob^2 + oa^2 + oc^2 = rd^2 + rb^2 + ar^2 + rc^2 + 4or^2$ oder mit Worten: Die Summe der Quadrate der von o nach den Ecken gehenden Linien ist um $4or^2$ größer als die Summe der Quadrate der von r ausgehenden Linien; der zu bestimmende Punkt liegt mithin auf der das Deltoid halbirenden Diagonale db. Um denselben näher zu bestimmen, mache man $dn = \frac{3}{4}db - \frac{ib}{2}$, bezeichne bd kurz mit α, ac mit β und ib mit γ, dann ist $dn^2 = \left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\gamma}{2}\right)^2$, $nb^2 = \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma}{2}\right)^2$, $na^2 = \frac{\beta^2}{4} + \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)^2$ und ebenso groß nc^2: folglich $dn^2 + nb^2 + na^2 + nc^2 = \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{4}\alpha^2 - \alpha\gamma + \gamma^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{2} + \left[\frac{\alpha}{2} - \gamma\right]^2$.

Wählt man dagegen irgend einen andern Punkt z auf der Diagonale bd, setzt $zn = x$, so ist, je nachdem z zwischen n und d oder zwischen n und b liegt, $zd = \frac{3}{4}\alpha - \frac{\gamma}{2} - x$ oder $= \frac{3}{4}\alpha - \frac{\gamma}{2} + x$, mithin $zd^2 = \left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\gamma}{2} \mp x\right)^2$, $zb^2 = \left[\frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma}{2} \pm x\right]^2$, $za^2 = \frac{\beta^2}{4} + \left[\frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{2} \pm x\right] = zc^2$, also

$zd^2 + zb^2 + za^2 + zc^2 = \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{4}\alpha^2 - \alpha\gamma + \gamma^2 + 4x^2$, denn die Glieder, welche x in der ersten Potenz als Factor haben, heben sich, sowohl wenn man die oberen Vorzeichen als wenn man die unteren gelten läßt, gegenseitig. n ist also der gesuchte Punkt, das Minimum der 4 Quadrate aber gleich $\frac{\beta^2 + \alpha^2}{2} + \left[\frac{\alpha}{2} - \gamma\right]^2$ und nennt man die Verbindungslinie irgend eines in der Deltoidebene gelegenen Punktes mit ny, so ist die Summe der Quadrate der von ihr aus nach den Ecken gehenden Linien um $4y^2$ größer als die entsprechende Summe für n; es folgt dies aus der oben gefundenen Differenz $4or^2$, die mit der jetzt gefundenen $4x^2$ sich mit Hülfe des Pythagoreers zu $4y^2$ addirt. Schlägt man also um n Kreise, so haben alle Punkte ein und derselben Peripherie Verbindungslinien mit den Ecken, deren Quadratsummen gleich sind.

Aehnlich verhält es sich mit den beiden Punkten, für welche die Summe der Linien, die nach den Halbirungspunkten der Deltoidseiten führen oder die Summe der Quadrate dieser Linien ein Minimum wird. Sie fallen beide in den Durchschnittspunkt der Verbindungslinien der Halbirungspunkte der Deltoidseiten.

§. 21. Besondere Eigenthümlichkeiten zeigen die Deltoide, in denen von den 8 Linien, welche die Halbirungspunkte der Seiten mit den gegenüberstehenden Ecken verbinden, zwei parallel mit entsprechenden Seiten des Deltoides laufen. Wir wollen diese Eigenthümlichkeiten mit Hülfe der

Figur X., in der $ad // dc$ und $mc // ab$ geht, studiren. Es fällt sofort in die Augen, daß $abcf$ ein Rhombus und f der Halbirungspunkt der Diagonale be ist; ebenso erkennt man sofort in h den Halbirungspunkt von bf, in i den Schwerpunkt des Dreiecks abc und in g den Schwerpunkt des ganzen Deltoides, mithin ist $gf = ih$, und da dieses $= \frac{bh}{3}$ ist, so kommen auf bi und hg je 2, auf ih und gf je 1 und auf fe 6 Zwölftel der ganzen Diagonale be. Die andere Diagonale ac ist gleichfalls in bestimmter Weise in r, s, h, t und o getheilt. Wie, läßt sich leicht zeigen. $gl = \frac{hc}{3}$, denn $fl = \frac{fc}{3}$, gl ist aber auch $= \frac{7}{9}\,ho$, weil $eg : eh = 7 : 9$, folglich ist $ho = \frac{3}{7}\,hc$ und $oc = \frac{4}{7}\,hc$, ferner ist, weil $bh : bg = 3 : 5$, $gl = \frac{5}{3}\,ht$, also $ht = \frac{hc}{5}$ und $to = \frac{8}{35}\,hc$; denkt man sich also ac in 70 gleiche Theile getheilt, so kommen davon auf ar und oc je 20, auf rs und to je 8 und auf sh und ht je 7.

Betrachten wir nun noch die Linien cm, ev, ak und bd, so ergiebt sich $mq = \frac{1}{6}$, $qf = \frac{1}{6}$, $fl = \frac{2}{9}$ und $le = \frac{4}{9}$ der Linie cm; ferner $qe = \frac{1}{2}$, $pq = \frac{1}{6}$, $rp = \frac{4}{21}$, $ru = \frac{4}{77}$ und $vu = \frac{1}{11}\,ve$; $au = \frac{4}{11}$, $ux = \frac{16}{77}$, $ix = \frac{2}{21}$, $iz = \frac{1}{12}$ und $zk = \frac{1}{4}\,ak$ und endlich $ld = \frac{1}{3}$, $lt = \frac{4}{15}$, $yt = \frac{4}{35}$, $yz = \frac{1}{28}$, $bz = \frac{1}{4}$ von bd. Erwiesen werden die zuletzt angeführten Thatsachen mit Hülfe des Satzes vom Schwerpunkt und verschiedener Proportionen; um die Größe der in u und y endenden Stücke zu bestimmen, denke man ak und fc einerseits und cv und fa andererseits zum Schnitt gebracht; es entstehen dann ähnliche Dreiecke, deren Benutzung leicht erhellt.

Die Regelmäßigkeit, mit der sich die Diagonalen und Verbindungslinien der Halbirungspunkte der Seiten und gegenüberliegenden Ecken in unserm Deltoide, über dessen Winkel keinerlei Bestimmungen getroffen sind, zerschneiden, führt auf den Versuch, die Größe der einzelnen im Deltoid entstandenen Figuren zu bestimmen, und in der That lassen sich sämmtliche 34 in unserer Zeichnung enthaltenen und nebeneinander liegenden Figuren als Bruchtheile des ganzen Deltoides bestimmen. Da die Diagonale be die ganze Zeichnung in zwei vollkommen congruente Theile zerlegt, so können wir uns mit der Bestimmung der 17 im Dreieck abe belegenen Figuren begnügen. $abe = \frac{1}{2}\,D$, wenn D den Inhalt des Deltoides bezeichnet, $afe = \frac{1}{4}\,D$, $fme = \frac{1}{8}\,D$ und mqe und qfe je $= \frac{1}{16}$. (Wir lassen der Bequemlichkeit halber hinter den Brüchen von jetzt ab bisweilen den Buchstaben D fort.) Vom Dreieck afm, einem Achtel des Ganzen, kommen $^2/_3$ auf apm und je $^1/_6$ auf pqm und pqf, mithin ist $apm = \frac{1}{12}\,D$, $pqm = \frac{1}{48}\,D$ und ebenso groß pqf. Der Inhalt der Dreiecke pgf, arp und rps findet sich auf andere Weise, ihre Grundlinien sind Theile der einen Diagonale und die dazu gehörigen Höhen laufen mit der anderen //, das ganze Deltoid ist aber gleich dem halben Product der Diagonalen, folglich $pgf = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} D = \frac{1}{72} D$, $arp = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$, $rps = \frac{4}{35} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{105}$. Das Paralleltrapez $shgp$ wird dem entsprechend $= \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6}\right) \frac{1}{6} D = \frac{2}{45} D$. Denkt man sich im Dreieck aur von u eine Senkrechte auf ar gefällt und mit h_1 bezeichnet, so verhält sich $au : ai = h_1 : ih$ oder $\frac{4}{11} : \frac{2}{3} = h_1 : \frac{be}{12}$, folglich $h_1 = \frac{be}{22}$ und $aur = \frac{1}{22} \cdot \frac{2}{7} D = \frac{1}{77} D$. Desgleichen denke man von x eine Senkrechte auf ac gefällt und mit h_2 bezeichnet, dann ist $ax : ai = h_2 : ih$ oder $\frac{12}{21} : \frac{2}{3} = h_2 : \frac{be}{12}$, folglich $h_2 = \frac{be}{14}$, $axs = \frac{1}{14} \cdot \frac{14}{35} D = \frac{1}{35} D$ und $uxsr = \left(\frac{1}{35} - \frac{1}{77}\right) D = \frac{6}{385} D$, $ahi = \frac{1}{24} D$, folglich $xihs = \frac{11}{840} D$. Um den Inhalt des Dreiecks auv zu bestimmen, ziehe ich von dem des Dreiecks $ave = \frac{1}{4} D$ den des Dreiecks aue, dessen Bestandtheile bereits berechnet sind, ab und erhalte $auv = \frac{1}{44} D$. $vwb : vbp = bw : bp$, also $vwb : \frac{D}{12} = \frac{1}{4} : \frac{2}{3}$, folglich $vwb = \frac{1}{32} D$. $vbi = \frac{1}{24}$, folglich $bwi = \frac{1}{96}$. Zieht man bwi und $xihs$ von bsh, d. h. $\frac{1}{96} + \frac{11}{840}$ von $\frac{1}{40}$ ab, so erhält man $wxi = \frac{1}{672}$. Endlich bleibt noch $vwxu$ zu bestimmen. Es ist $= bvp - vbw - uxsr - rsp = \frac{1}{12} - \frac{1}{32} - \frac{6}{385} - \frac{2}{105} = \frac{43}{2464}$.

Aus den nebeneinander liegenden Figuren ließen sich überhaupt alle in der Zeichnung vorkommenden berechnen, wir führen indeß hier nur noch eine Reihe von Dreiecken auf, die gleich Bruchtheilen des Deltoides sind, deren Zähler 1 ist.

$abe = \frac{1}{2}$	$mqe = \frac{1}{16}$	$bsh = \frac{1}{40}$
$abm = \frac{1}{4}$	$sbt = \frac{1}{20}$	$auv = \frac{1}{44}$
$abp = \frac{1}{6}$	$arp = \frac{1}{21}$	$pqm = \frac{1}{48}$
$abh = \frac{1}{8}$	$vbi = \frac{1}{24}$	$pfg = \frac{1}{72}$
$abs = \frac{1}{10}$	$avr = \frac{1}{28}$	$aur = \frac{1}{77}$
$apm = \frac{1}{12}$	$axs = \frac{1}{35}$	$bxi = \frac{1}{84}$
$aps = \frac{1}{15}$	$pfl = \frac{1}{36}$	$bwi = \frac{1}{96}$
		$wxi = \frac{1}{672}$

Das vollständige Deltoid.

§. 22. Jedes gewöhnliche Deltoid läßt sich durch Verlängerung der gegenüberstehenden Seiten zu einem vollständigen Viereck ergänzen. Da es nun vollständige Parallelogramme und Antiparallelogramme nicht giebt, so leuchtet ein, daß von allen vollständigen Vierecken das vollständige Deltoid das regelmäßigste ist, andererseits wird aber auch klar, daß um jener Eigenschaft willen sich an das Deltoid Sätze und Gedanken knüpfen lassen, für die die übrigen regelmäßigen Vierecke nichts Entsprechendes bieten.

Vollständige Deltoide sind in der Planimetrie häufig vorkommende Figuren. Werden in einem Antiparallelogramm die beiden Diagonalen gezogen und die gleichen Seiten bis zum Schnitt verlängert, so entsteht ein vollständiges Deltoid; fällt man im gleichschenkligen Dreieck die Höhen, so zeigt sich ein neues, desgleichen wenn man die Mittellinien oder die Winkelhalbirenden zieht. Auch in Kreisfiguren sind die vollständigen Deltoide nicht selten; du erhältst z. B. eins, sobald du die Schnittpunkte zweier gleicher Secanten kreuzweis verbindest.

Jedes vollständige Deltoid (in Figur XI agfbce) ist, wie das, aus dem es entstanden, eine symmetrische Figur, je zwei seiner Seiten ac und ae, gc und be sind gleich, desgleichen die Winkel, die sie unter einander und mit der dritten Diagonale ec bilden. Diese dritte Diagonale läuft parallel mit der halbirten und steht in Folge dessen senkrecht auf der Verlängerung der halbirenden, von der sie auch halbirt wird. — Der Winkel, welcher von zwei gegenüberstehenden Seiten des ursprünglichen Deltoides gebildet wird, ist die halbe Differenz der ungleichen Deltoidwinkel, Winkel $gca = \frac{gfb - gab}{2}$.

Der Inhalt des vollständigen Deltoides ist gleich dem halben Producte der halbirenden Diagonale und der neuen dritten und verhält sich daher zum Inhalt des ursprünglichen Deltoides wie die neue Diagonale zur halbirten. — Das rechtwinklige vollständige Deltoid ist gleich der kleinern Seite des ursprünglichen mal der verlängerten größern fb . ca. Es ist aber auch $ab : ac = gb : ce$ und $fb : fc = gb : ce$, folglich $ab : ac = fb : fc$ und $fb . ac = ab . fc$, der Inhalt des vollständigen rechtwinkligen Deltoides ist also auch gleich der größeren Kathete des ursprünglichen Deltoides mal der Verlängerung der kleineren.

§. 23. Für die nachstehenden Betrachtungen ist es vortheilhaft, die Stücke des vollständigen Deltoides mit Einzelbuchstaben zu bezeichnen; ich nenne daher im Anschluß an die §. 11. hervorgehobene Bezeichnung die Verlängerung der größern Seite (a) α, die der kleinern (b) β und die dritte Diagonale e.

Es verhält sich $d : e = b : \beta$ und $d : e = a : a + \alpha$, folglich $b : \beta = a : a + \alpha$, $ab = a\beta - \alpha b$ und $\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a} = 1$. Im vollständigen Deltoid ist also 1) das Rechteck aus den Seiten des ursprünglichen gleich der Differenz der Rechtecke aus je einer dieser Seiten und der Verlängerung der andern; 2) die Differenz der Quotienten, welche man erhält, wenn man die Verlängerungen der Seiten durch diese selbst dividirt, ist gleich der Einheit. — Da sich ähnliche Dreiecke wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, so verhält sich $d^2 : e^2$ einerseits wie die Dreiecke, deren Seiten d, b, b und e, β, β sind, andererseits wie die Dreiecke aus a, a, d und $a + \alpha$, $a + \alpha$, e; durch das Ziehen der beiden parallelen Diagonalen entstehen mithin im vollständigen Deltoid 4 gleichschenklige Dreiecke, die die Glieder einer Proportion sind. Aus dieser Thatsache läßt sich die harmonische Theilung der Diagonale c leicht folgern; doch lassen wir dies und betrachten zunächst die Seiten des vollständigen Deltoides noch weiter, wenn dies rechtwinklig ist; es verhält sich dann $\alpha : \beta + b = b : a$, folglich $a\alpha - b\beta = b^2$, die Differenz der Producte aus den Seiten und ihren Verlängerungen ist also gleich dem Quadrate der kleinern Seite des ursprünglichen Deltoides. — Benutzt man die Gleichungen $a\alpha - b\beta = b^2$ und $a\beta - \alpha b = ab$ zur Bestimmung von α und β, so ergiebt sich $\alpha = \frac{2ab^2}{a^2 - b^2}$ und $\beta = \frac{b(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}$ und hieraus $\alpha : \beta = 2ab : a^2 + b^2$, nun ist aber $a.b = \frac{c.d}{2}$, dem Inhalte des Deltoides, und $a^2 + b^2$ nach dem Pythagoreer $= c^2$, folglich $\alpha : \beta = d : c$, d. h. die Verlängerungen der Seiten des rechtwinkligen Deltoides verhalten sich wie die Diagonalen desselben. Aus $\alpha : \beta = 2ab : a^2 + b^2$ folgt noch unmittelbar $\beta + \alpha : \beta - \alpha = (a + b)^2 : (a - b)^2$, Summe und Differenz der Verlängerungen verhalten sich wie die Quadrate aus der Summe und Differenz der Seiten des ursprünglichen Deltoides. Ferner geben noch leichte Rechnungen die Proportionen

$$a - b : a + b = b : \alpha + \beta$$
$$\beta + \alpha : b = b : \beta - \alpha$$
$$(\alpha + a) + (\beta + b) : a = a : (\alpha + a) - (\beta + b) \text{ und}$$
$$d : e = a^2 - b^2 : a^2 + b^2;$$

aus der letzten aber folgt wiederum $e = \frac{d.c^2}{a^2 - b^2}$, $\frac{e}{2c} = \frac{ab}{a^2 - b^2}$, $\frac{2c}{e} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$, die Differenz der beiden Quotienten, welche sich aus den Seiten des ursprünglichen Deltoides bilden lassen, ist gleich dem doppelten Quotienten zwischen der halbirenden Diagonale und der dritten.

§. 24. Werden die Winkel, welche zwei gegenüberstehende Seiten im Deltoid verlängert bilden, halbirt, so gehen die Winkelhalbirenden durch den Mittelpunkt des dem Deltoid einbeschriebenen Kreises, schneiden sich also auf der halbirenden Diagonale und theilen diese im Verhältniß der Seiten des ursprünglichen Deltoides; war dieses rechtwinklig, so wurde auch die halbirte Diagonale nach d e m s e l b e n, beide also nach gleichem Verhältniß getheilt. Das Stück u w (Figur XI.), welches beide Winkelhalbirende aus der halbirten Diagonale ausschneiden, verhält sich zu dieser wie die Differenz der Seiten des ursprünglichen Deltoides zu ihrer Summe. Zum Beweise beachte man, daß das Dreieck u v w rechtwinklig-gleichschenklig ist, wobei sich nebenbei die interessante Notiz ergiebt: im rechtwinkligen Deltoid schneidet jede unserer Winkelhalbirenden jede der drei Diagonalen unter Winkeln von 45°, sie selbst aber schneiden sich unter einem Rechten; im nicht-rechtwinkligen Deltoid ist dieser Winkel der Winkelhalbirenden auch keine unbestimmte Größe, sondern stets das arithmetische Mittel zwischen den ungleichen Winkeln des ursprünglichen Deltoides.

Wird bei einem vollständigen rechtwinkligen Deltoid um das ursprüngliche ein Kreis beschrieben und von einer der durch die Verlängerungen entstandenen Ecken eine Tangente an denselben gezogen, so hat die Länge derselben, bis zum Berührungspunkt gerechnet, gleichfalls eine überraschend einfache Beziehung zu den Winkelhalbirenden cv und ev und zu der dritten Diagonale e. Zum Beweis nenne ich die Tangente t und benutze die Bezeichnungsweise des letzten Paragraphen, dann ist $t^2 = \alpha(a+\alpha) = \frac{2a^2b^2[a^2+b^2]}{[a^2-b^2]^2}$, außerdem verhält sich, wie wir früher gesehen, $e : d = a^2 + b^2 : a^2 - b^2$, mithin $e^2 = \frac{d^2(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)}$ und $\frac{e^2}{d^2c^2} = \frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}$, folglich $t^2 = \frac{2a^2b^2e^2}{d^2c^2}$ und da $2ab = cd$, so ergiebt sich $t^2 = \frac{e^2}{2}$. Die Tangente ist also gleich der Kathete eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, in dem die dritte Diagonale Hypotenuse ist; als eine derartige Kathete haben wir aber soeben die Winkelhalbirende cv kennen gelernt, also sind Tangente und Winkelhalbirende gleich. Wird diese Winkelhalbirende einmal verlängert, bis sie den Kreis zum zweitenmal schneidet, so kann man sagen, sie werde von dem Kreise und der halbirenden Diagonale stetig getheilt; nenne ich nämlich die Schnittpunkte der cv mit dem um agfb zu denkenden Kreis v_{I} und v_{II}, so ist $cv_{\text{I}} : cv = cv : cv_{\text{II}}$.

Combinire ich endlich noch die Gleichungen $t^2 = \alpha(a+\alpha) = \beta(b+\beta)$ und $t^2 = \frac{e^2}{2}$, so ergiebt sich $e^2 = \alpha(a+\alpha) + \beta(b+\beta)$, im vollständigen rechtwinkligen Deltoid ist demnach das Quadrat der dritten Diagonale gleich der Summe der Rechtecke aus je einer verlängerten Seite und ihrer Verlängerung.

§. 25. Denken wir uns in die Dreiecke, deren Seiten α, β, b und $a+\alpha$, $b+\beta$, a sind, Kreise construirt, so verhalten sich deren Radien wie b : a, während ihre Summe gleich der kleineren Deltoidseite b ist. Der Beweis für letztere Behauptung findet sich sofort, wenn man beachtet, daß der Durchmesser jedes Kreises, der einem rechtwinkligen Dreieck einbeschrieben ist, die Differenz zwischen der Summe der Katheten und der Hypotenuse ist. Die Centrale beider Kreise wird von der kleineren Deltoidseite im Verhältniß der Radien der einbeschriebenen Kreise, also auch im Verhältniß der Seiten des Deltoides getheilt. Der dem größern Dreieck eingezeichnete Kreis ist natürlich identisch mit dem, der sich dem Deltoide einschreiben läßt, also sein Radius $= \frac{ab}{a+b}$ und der Radius des kleineren Kreises $= \frac{b^2}{a+b}$. — Werden jetzt die gegenüberstehenden Deltoidseiten a und b auch nach der andern Seite zu, nach der sie divergiren, verlängert und ein dritter Kreis gezeichnet, der diese Verlängerungen und die Seite a berührt, so ist sein Radius plus dem Halbmesser des Kreises, welcher dem Deltoid eingezeichnet ist, a, während sich beide wiederum wie b : a verhalten, und hieraus entspringt der Satz: Werden zwei gegenüberstehende Seiten des Deltoides über sämmtliche 4 Endpunkte hinaus verlängert, so bilden die Radien der drei Kreise, welche mindestens drei Seiten des Deltoides, resp. deren Verlängerungen berühren, eine stetige Proportion. Nenne ich die drei eben betrachteten Radien der Größe nach ϱ, ϱ_{I}, ϱ_{II}, so ergiebt sich noch: $\varrho_{\text{II}} = \frac{a^2}{a+b}$, $\varrho + \varrho_{\text{II}} = \frac{c^2}{a+b}$, $\varrho : \varrho_{\text{II}} = b^2 : a^2$, $\varrho_{\text{II}} - \varrho = a - b$, $2\varrho + 4\varrho_{\text{I}} + 2\varrho_{\text{II}} =$ dem Umfang des ursprünglichen Deltoides und $\varrho_{\text{I}}{}^2 + \varrho_{\text{I}}(\varrho + \varrho_{\text{I}} + \varrho_{\text{II}})$, d. i. das Quadrat des Radius des Kreises, welcher dem Deltoid selbst eingezeichnet ist, plus dem Rechteck aus eben diesem Radius und der Summe aller drei ist = dem Inhalt des Deltoides.

Die Mittelpunkte unserer drei Kreise liegen natürlich auf der im vorigen Paragraphen be-

3*

trachteten Winkelhalbirenden und ihre Entfernungen vom Scheitel des halbirten Winkels bilden gleichfalls eine stetige Proportion.

§. 26. In ein beliebiges Viereck lassen sich 4 Kreise einzeichnen, von den jeder 3 Seiten berührt, zu jedem dieser 4 Kreise aber wiederum je ein correspondirender, der die mittlere der drei berührten Seiten gleichfalls berührt, statt der beiden anderen aber deren Verlängerungen; construirt man diese 8 Kreise in ein rechtwinkliges Deltoid, so ist die Summe der 8 Radien gleich dem Umfang des Deltoides selbst. (Man lasse sich nicht dadurch beirren, daß 4 dieser Kreise auf einander fallen.)

Da sich für jedes Dreieck, wie bekannt, 4 Berührungskreise construiren lassen, so lassen sich für jedes Trapezoid, dessen Seiten ausreichend verlängert 4 Dreiecke erzeugen, 16 Kreise darstellen, die mindestens drei Trapezoidseiten, resp. deren Verlängerungen berühren; die Summe der 16 Radien dieser Kreise ist beim rechtwinkligen Deltoid $= 4(a + b + \alpha + \beta)$, d. h. gleich der Doppelsumme der Seiten des vollständigen Deltoides. Den Beweis findet man leicht, wenn man vom vollständigen Deltoid ausgeht und beachtet, daß die Durchmesser der 4 Berührungskreise eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten x, y, z, den 4 Größen $x + y + z$, $x + y - z$, $x + z - y$ und $y + z - x$ gleich sind. — Das Product der Radien der 16 Berührungskreise drückt sich sehr einfach durch die Diagonalen des vollständigen Deltoides aus, es ist $= \frac{c^8[e^2 - d^2]^4}{2^{16}}$. Gefunden wird es mit Hülfe des Satzes: Das Product der Radien der 4 Berührungskreise eines Dreiecks ist gleich dem Quadrat vom Inhalt des Dreiecks selbst, und der Thatsache: im vollständigen Deltoid sind die Dreiecke mit den Seiten b, α, β, und a, $a + \alpha$, $b + \beta$, gleich $\frac{c.e - d.c}{4}$ und $\frac{c.e + d.c}{4}$. — Die Summe der reciproken Werthe der betrachteten 16 Radien läßt sich dagegen bequem durch die Seiten des Urdeltoides ausdrücken, sie ist $= \frac{4}{a} + \frac{8}{b} + \frac{4a}{b^2}$ und wird erlangt durch Benutzung des Gedankens: Beim Dreieck ist der reciproke Werth des Radius des einbeschriebenen Kreises gleich der Summe der reciproken Werthe der Radien der drei äußeren Berührungskreise. Der Satz selbst ist auf das rechtwinklige Deltoid beschränkt, während der vorhergehende Satz vom Product der 16 Radien von jedem Deltoide gilt.

Will man endlich noch um das ganze vollständige Deltoid einen Kreis beschreiben, so kann man darunter nur den Kreis verstehen, welcher durch die Schnittpunkte der Verlängerungen und den Schnittpunkt der beiden größten Seiten des Deltoides geht. Wir wollen seinen Durchmesser δ nennen, annehmen, das Deltoid sei rechtwinklig, und bei der folgenden Berechnung ausgehen von dem Satze: In jedem Dreieck ist das Product zweier Seiten gleich dem Product aus der Höhe au fdie dritte und dem Durchmesser des umschriebenen Kreises. $(a + \alpha)e = (b + \beta)\delta$, $\left(a + \frac{2ab^2}{a^2 - b^2}\right). e = \left(b + \frac{b(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}\right) \delta$, $(a^3 + ab^2)e = 2a^2b\delta$, $(a^2 + b^2)e = 2ab\delta$, $c^2e = cd\delta$, $ce = d\delta$, $d : c = e : \delta$, d. h. der Durchmesser des Kreises, welcher dem vollständigen rechtwinkligen Deltoid umschrieben ist, ist die vierte Proportionale zu den drei Diagonalen des Deltoides.

§. 27. Ist in einem vollständigen Deltoid die halbirte Diagonale zufälliger Weise gleich der

Hälfte der dritten mit ihr parallellaufenden, so ist 1) die Verlängerung der größeren Deltoidseite dieser selbst gleich (ab = bc in Figur XI.); 2) die Verlängerung der kleineren Deltoidseite doppelt so groß als diese (fc = 2 fg); 3) die Verlängerung der halbirenden Diagonale bis zur dritten die Hälfte der halbirenden $\left(\mathrm{fd} = \frac{\mathrm{fa}}{2}\right)$; 4) das im Endpunkt der halbirenden Diagonale errichtete und bis zu den verlängerten Seiten verlängerte Loth das harmonische Mittel zwischen den parallelen Diagonalen (die drei Linien stehen im Verhältniß von 3 : 4 : 6); 5) der Inhalt des vollständigen Deltoides doppelt so groß als der des ursprünglichen; 6) das von den Verlängerungen der beiden kürzeren Deltoidseiten und der dritten Diagonale gebildete Dreieck gleich dem ursprünglichen Deltoid; 7) wird die halbirende Diagonale von der halbirten im Verhältniß von 3 : 1 getheilt; 8) verhalten sich die Seiten der Quadrate, in die sich das ursprüngliche Deltoid und das von den parallelen Diagonalen und den Verlängerungen der größeren Seiten gebildete Antiparallelogramm verwandeln lassen, wie 2 : 3; 9) ist sb gleich dem Stück, welches ein in f auf fa errichtetes Perpendikel auf bc abschneiden würde.

§. 28. Im vollständigen Viereck wird jede Diagonale durch ihre eigenen Endpunkte und die Schnittpunkte der anderen Diagonalen harmonisch getheilt; das Deltoid zeigt dies nur für die halbirende Diagonale, während der vierte harmonische Punkt auf den beiden parallelen Diagonalen in der Unendlichkeit liegt. Trotzdem zeigt Figur XI. nicht wenig harmonische Punkte und Strahlen, denn da d, f, o, a harmonische Punkte sind, so sind cd, cf, co, ca einerseits und andererseits ed, ef, eo und ea harmonische Strahlen, folglich e, f, m, b; e, r, o, s; e, q, k, p; e, g, t, a; c, f, r, g; c, m, o, n; c, h, i, t, und c, b, s, a harmonische Punkte. Von den letzten 4 Punkten gehen Verbindungslinien nach o, also oa, os, ob, oc harmonische Strahlen und auch v, i, w, c, sowie v, k, u, e harmonische Punkte.

Es liegt auf der Hand, daß sich die Lehrsätze von den harmonischen Linien leicht auf das vollständige Deltoid übertragen lassen; der Lehrsatz VII. des berühmten Werkes von Adams über die harmonischen Verhältnisse giebt z. B. den Satz: Im vollständigen rechtwinkligen Deltoid ist das Quadrat des Radius des Kreises, der dem Deltoid selbst umschrieben ist, gleich dem Rechteck aus den Entfernungen des Mittelpunkts jenes Kreises von den Schnittpunkten der Diagonalen. Meine Absicht ist es indeß nicht, diesen Gedanken zu verfolgen, ich wende mich vielmehr zur Figur XII., weil diese auf einzelnen Linien eine eigenthümliche doppelte harmonische Theilung zeigt, die wiederum zu Sätzen führt, welche vielleicht eine Stelle unter den Lehrsätzen über harmonische Verhältnisse überhaupt verdienen. Im Endpunkt der halbirenden Diagonale kg ist das Perpendikel ki errichtet, Winkel $\gamma k \mu = \mu k l$, $\mu k g$ ein Rechter, mithin $k\gamma$, $k\mu$, kl und kg harmonische Strahlen; nun wissen wir aber aus dem Vorstehenden, daß γ, l, m, g harmonische Punkte sind, wir haben mithin auf der Linie γg zwei Punkte m und μ, von denen jeder zu den drei Punkten γ, l, g vierter harmonischer Punkt ist. Hieraus folgt:

$$\text{A)}\quad \begin{array}{l} \mathrm{gl} \cdot \mathrm{m}\gamma = 2\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{l}\gamma \\ \mathrm{g}\mu \cdot \mathrm{l}\gamma = 2\,\mathrm{gl} \cdot \mu\gamma \\ \hline \mathrm{g}\mu \cdot \gamma\mathrm{m} = 4\,\mathrm{mg} \cdot \mu\gamma \end{array}$$

und das heißt, wenn man es so allgemein wie möglich fassen will: Sind auf irgend einer Linie drei Punkte gegeben und sowohl zwischen dem ersten und zweiten als zwischen dem zweiten und dritten zwei neue Punkte bestimmt, die mit den gegebenen zusammen die Linie harmonisch theilen, so ist das 4fache Product der beiden äußeren Abschnitte gleich dem Product der Reste, welche bleiben, wenn man je einen dieser Abschnitte von der ganzen Linie fortnimmt.

$$\begin{aligned}
\text{B)}\quad & \mathrm{mg.l}\gamma = \mathrm{ml.g}\gamma \\
& \mathrm{g}\gamma\,.\mathrm{l}\mu = \gamma\mu.\mathrm{lg} \\
& \mathrm{mg.l}\mu\,.\,\mathrm{l}\gamma = \mathrm{ml}.\gamma\mu.\mathrm{lg} \\
& \mathrm{mg.l}\mu : \mathrm{ml}.\gamma\mu = \mathrm{lg} : \mathrm{l}\gamma \\
& \mathrm{mg.l}\mu : \mathrm{ml}.\gamma\mu = \mathrm{gm} + \mathrm{ml} : \mathrm{l}\mu + \mu\gamma
\end{aligned}$$

Die Producte je zweier nicht zusammenstoßender Abschnitte verhalten sich wie die Summen je zwei zusammenstoßender.

$$\begin{aligned}
\text{C).}\quad & \frac{1}{\mathrm{lm}} - \frac{1}{\mathrm{l}\gamma} = \frac{2}{\mathrm{lg}} \\
& \frac{1}{\mathrm{l}\mu} - \frac{1}{\mathrm{lg}} = \frac{2}{\mathrm{l}\gamma} \\
\hline
& \frac{1}{\mathrm{lm}} + \frac{1}{\mathrm{l}\mu} = \frac{3}{\mathrm{lg}} + \frac{3}{\mathrm{l}\gamma}
\end{aligned}$$

Die Summe der reciproken Werthe der beiden mittlern Abschnitte ist gleich der dreifachen Summe der beiden Abschnitte, in welche die ganze Linie durch den mittelsten Theilpunkt zerfällt.

D) Durch Subtraction der eben benutzten Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{1}{\mathrm{lm}} - \frac{1}{\mathrm{l}\mu} = \frac{1}{\mathrm{lg}} - \frac{1}{\mathrm{l}\gamma}.$$

Die Differenz der reciproken Werthe der beiden mittleren Abschnitte ist gleich der Differenz der reciproken Werthe der beiden Abschnitte, in welche die ganze Linie durch den mittelsten Theilpunkt zerfällt.

$$\begin{aligned}
\text{E)}\quad & \frac{1}{\gamma\mathrm{g}} + \frac{1}{\gamma\mathrm{l}} = \frac{2}{\gamma\mathrm{m}} & \qquad & \frac{1}{\mathrm{g}\gamma} + \frac{1}{\mathrm{gm}} = \frac{2}{\mathrm{gl}} \\
& \frac{1}{\gamma\mathrm{g}} + \frac{1}{\gamma\mu} = \frac{2}{\gamma\mathrm{l}} & & \frac{1}{\mathrm{g}\gamma} + \frac{1}{\mathrm{gl}} = \frac{2}{\mathrm{g}\mu} \\
\hline
& \frac{3}{\gamma\mathrm{l}} = \frac{2}{\gamma\mathrm{m}} + \frac{1}{\gamma\mu} & & \frac{1}{\mathrm{gm}} + \frac{2}{\mathrm{g}\mu} = \frac{3}{\mathrm{gl}}.
\end{aligned}$$

Der reciproke Werth der Entfernung des ersten und zweiten Punktes vermehrt um den doppelten reciproken Werth der Ertfernung des ersten und vierten ist gleich dem dreifachen reciproken Werth der Entfernung des ersten und dritten.

F) Eine Addition der 6 unter E. vorkommenden Gleichungen ergiebt:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\gamma\mathrm{g}} + \frac{2}{\gamma\mu} + \frac{2}{\mathrm{gm}} &= \frac{4}{\gamma\mathrm{l}} + \frac{4}{\mathrm{gl}} \\
\frac{2}{\gamma\mathrm{g}} + \frac{1}{\gamma\mu} + \frac{1}{\mathrm{gm}} &= \frac{2}{\gamma\mathrm{l}} + \frac{2}{\mathrm{gl}}.
\end{aligned}$$

Die Summe der reciproken Werthe der beiden äußern Abschnitte vermehrt um das Doppelte des reciproken Werthes der ganzen Linie ist gleich der doppelten Summe der reciproken Werthe der Abschnitte, in welche der mittelste Punkt die ganze Linie theilt.

G) Addirt man die Resultate unter F. und C., so findet sich:

$$\frac{1}{\gamma\mu} + \frac{1}{\mu l} + \frac{1}{lm} + \frac{1}{mg} = \frac{5}{\gamma l} + \frac{5}{lg} - \frac{2}{\gamma g}.$$

Die Summe der reciproken Werthe aller 4 Abschnitte ist gleich der 5fachen Summe der reciproken Werthe der beiden Abschnitte, in welche der mittelste Punkt die ganze Linie zerlegt, vermindert um den doppelten reciproken Werth der ganzen Linie.

$$\text{H)}\ \gamma m . lg = 2 lm . \gamma g$$
$$\gamma l . \mu g = 2 l\mu . \gamma g$$
$$\gamma m . lg + \gamma l . \mu g = 2 m\mu . g\gamma$$

I) Aus $\frac{1}{lm} + \frac{1}{l\mu} = \frac{3}{lg} + \frac{3}{l\gamma}$ folgt, wenn man mit dem Nenner multiplicirt und dann zusammenzieht, $\mu m . lg . l\gamma = 3\gamma g . lm . l\mu$. Dividirt man diese Gleichung nach einander mit $lg . \mu\gamma = \gamma g . \mu l$ und $l\gamma . mg = g\gamma . ml$, so erhält man die beiden einfachen Resultate: $\mu m . l\gamma = 3 lm . \gamma\mu$ und $\mu m . lg = 3 mg . \mu l$, folglich $\mu m . \gamma g = 3\gamma\mu . lm + 3 mg . \mu l$. Das Rechteck aus der ganzen Linie und der Summe der beiden mittlern Abschnitte ist gleich der dreifachen Summe aus den Rechtecken, welche sich aus dem ersten und dritten, zweiten und vierten Abschnitte bilden lassen.

Aufgaben über das Deltoid.

A. Für Quartaner.

1) Drei gerade Linien sind der Größe nach gegeben, wieviel der Gestalt nach verschiedene Deltoide lassen sich zeichnen, in denen 2 der gegebenen Linien Seiten und die dritte Diagonale wird? (6; wann weniger?)

2) Ein Deltoid zu construiren aus zwei ungleichen Seiten und einem Winkel. (Unterscheide 2 Fälle.)

3) Aus den beiden Diagonalen und einer Seite zwei der Gestalt nach verschiedene Deltoide zu construiren. (Wann läßt sich aus den gegebenen Stücken nur ein Deltoid construiren?)

4) Ein rechtwinkliges Deltoid so zu zeichnen, daß sein Umfang einen halben Fuß und die eine Seite $1\frac{3}{4}$ Zoll betrage.

5) Ein rechtwinkliges Deltoid zu construiren, wenn von demselben der stumpfe Winkel und die Diagonale, die ihn halbirt, gegeben sind.

6) Ein rechtwinkliges Deltoid aus seinem spitzen Winkel und der Diagonale, die ihn nicht halbirt, zu construiren.

7) Ein Kreis ist gegeben und eine der Größe nach bestimmte Linie, ein Deltoid zu zeichnen, dessen Ecken auf der Kreisperipherie liegen und in dem eine Diagonale gleich der gegebenen Linie wird.

8) Aus seinem Umfange ein rechtwinkliges Deltoid so zu construiren, daß der spitze Winkel desselben 40° betrage. (Ist die Aufgabe gelöst, so nimm statt 40 α Grad.)

9) Aus der Summe zweier ungleicher Seiten und der halbirenden Diagonale ein rechtwinkliges Deltoid zu construiren.

10) Ein Deltoid aus einem der ungleichen Winkel und dem Schenkel desselben so zu construiren, daß die Diagonalen gleich werden.

11) Ein rechtwinkliges Deltoid aus einer Seite und der Differenz der ungleichen Winkel zu construiren. (2 Fälle.)

12) Die Außenwinkel eines Deltoides sind gegeben und eine Diagonale, das Deltoid zu construiren. (Unterscheide 2 Hauptfälle.)

13) Ein Deltoid, in dem ein Winkel die Hälfte eines andern und das Doppelte eines dritten ist, so zu zeichnen, daß eine Seite eine vorgeschriebene Länge hat. (4 Fälle, scheinbar 6.)

14) Die Summe zweier anstoßender und die Differenz zweier gegenüberstehender Seiten ist gegeben, aus dem Gegebenen ein Deltoid zu zeichnen, in dem mindestens ein Winkel 50° ist. (Es giebt 9 verschiedene Deltoide, die der Aufgabe entsprechen; wer alle zeichnen will, nehme als Summe 2 Zoll, als Differenz ¼ Zoll.)

15) Aus der halbirenden Diagonale ein Deltoid zu zeichnen, in dem die Summe der gleichen Winkel 200°, die Differenz der ungleichen 30° betragen.

16) Ein Deltoid zu construiren aus einem der ungleichen Winkel, einer Seite, die ihm anliegt, und der Summe beider Diagonalen.

17) Von einem Deltoid sind gegeben eine Seite und die halbirende Diagonale, das Deltoid so zu construiren, daß die nicht gegebene Diagonale der nicht gegebenen Seite gleich werde.

18) Die Summe dreier Seiten, die Differenz zweier gegenüberstehender und ein Winkel sind gegeben, das Deltoid zu construiren. (Der Aufgabe entsprechen 6 Deltoide.)

19) Ein Deltoid aus der halbirten Diagonale und den beiden ungleichen Winkeln zu construiren.

20) Nenne die 15 Paar gleichwinkliger Dreiecke, die entstehen, wenn in einem rechtwinkligen Deltoid die Diagonalen gezogen werden.

B. Für Tertianer.

21) Ein Deltoid zu construiren, wenn gegeben sind beide Diagonalen und ein Winkel. (4 Fälle.)

22) Aus einer Seite und dem Radius des umschriebenen Kreises ein rechtwinkliges Deltoid zu construiren.

23) Desgleichen, wenn der Radius des eingezeichneten Kreises und der kleinste der vier Deltoidwinkel gegeben sind.

24) Aus einer Seite, der halbirten Diagonale und dem Radius des einbeschriebenen Kreises ein Deltoid zu zeichnen.

25) Um einen gegebenen Kreis ein rechtwinkliges Deltoid zu zeichnen, dessen halbirte Diagonale eine vorgeschriebene Länge hat. (In der für die Analysis gezeichneten Figur bringe ein Quadrat und über der Diagonale desselben ein rechtwinkliges Dreieck an, dessen eine Kathete die halbe gegebene Diagonale ist.)

26) Die halbirende Diagonale ist der Größe und Lage nach gegeben, auf ihr der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, über der Diagonale ein rechtwinkliges Deltoid zu zeichnen. (Benutze einen Bogen, der ½ R. faßt.)

27) Ein Deltoid zu construiren aus einer Seite, der halbirten Diagonale und der Linie, welche den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises mit einer Ecke verbindet, in der zwei ungleiche Seiten zusammenstoßen. (2 Fälle.)

28) Aus der Differenz zweier ungleicher Seiten und dem stumpfen Winkel ein rechtwinkliges Deltoid zu construiren.

29) Die beiden ungleichen Winkel und die Summe der halbirten Diagonale und zweier gleicher Seiten sind gegeben, aus dem Gegebenen ein Deltoid zu construiren. (2 Fälle.)

30) Ein Deltoid zu construiren, wenn gegeben ist die Summe der halbirten Diagonale und einer Seite, der Winkel, welcher diese Seite und die ihr gleiche zum Schenkel hat, und die halbirende Diagonale.

31) Ein Deltoid zu construiren aus einer Seite und den beiden Linien, welche den Halbirungspunkt dieser Seite mit den Halbirungspunkten der anstoßenden verbinden. (2 Fälle.)

32) Die Perpendikel, welche sich vom Schnittpunkt der Diagonalen im Deltoid auf die Seiten fällen lassen, sind der Größe nach bekannt, desgleichen eine Seite, das Deltoid zu construiren. (2 Fälle.)

33) Dieselben Perpendikel sind gegeben und ein Winkel, das Deltoid zu construiren. (Drei Deltoide.)

34) In ein gegebenes ungleichseitiges Dreieck 12 Deltoide einzuzeichnen, die eine Linie von bestimmter Länge als Diagonale haben und deren Ecken insgesammt auf dem Umfange des Dreiecks liegen.

35) Um ein gegebenes Rechteck ein Deltoid so zu zeichnen, daß die Ecken des Rechtecks zugleich Halbirungspunkte der Seiten des Deltoides werden und dieses eine Seite von vorgeschriebener Länge erhalte.

36) Der Winkel, welchen die größeren Seiten bilden, und die Unterschiede zwischen der halbirten Diagonale und jeder der Seiten sind gegeben, das Deltoid zu construiren. (4 Fälle.)

37) Die Seiten eines Deltoides sind ihrer Größe nach und 3 Punkte ihrer Lage nach gegeben, ein Deltoid so zu zeichnen, daß einer der Punkte Halbirungspunkt einer Seite werde, während die Diagonalen durch die beiden anderen Punkte gehen. (Schlägt man über der Verbindungslinie der beiden letzten Punkte einen Halbkreis, so ist derselbe der geometrische Ort für den Schnittpunkt der Diagonalen.)

38) Auf den Seiten eines gegebenen Deltoides 3 Punkte so zu bestimmen, daß dieselben unter einander verbunden die Ecken eines Dreiecks bilden, welches seinem Inhalt nach $^5/_{24}$ des Deltoides ist.

39) Ein Deltoid zu construiren aus einer Seite und den beiden Linien, welche den einen Endpunkt derselben mit den Halbirungspunkten der gegenüberstehenden und der gleich großen verbinden. (Denke an den Schwerpunkt.)

40) Ein Deltoid aus einer Seite und den beiden Linien zu construiren, welche den Halbirungspunkt dieser Seite mit den Endpunkten der ihr gegenüberliegenden verbinden.

41) Ein Deltoid zu construiren aus einer Diagonale und den Linien, welche die Endpunkte der halbirten Diagonale mit den Halbirungspunkten der Seiten verbinden. (2 Fälle.)

42) Aus einer Seite und den Linien, welche die Endpunkte derselben mit dem Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seite verbinden, ein Deltoid zu construiren.

43) Ein Deltoid aus der Summe dreier Seiten, dem Winkel, welchen die beiden gleichen Summanden einschließen, und der halbirten Diagonale zu construiren.

44) Ein Deltoid zu construiren aus der Summe der halbirenden Diagonale und größern Seite, der Differenz der halbirten Diagonale und kleinern Seite und dem Winkel, welchen die beiden kleineren Seiten einschließen.

45) Ein Deltoid zu construiren aus einem der ungleichen Winkel, seinem Schenkel und der Differenz beider Diagonalen.

46) Ein vollständiges Deltoid aus der dritten Diagonale und den Verlängerungen der Seiten zu construiren.

47) Vom Halbirungspunkte einer Seite aus eine Gerade zu ziehen, welche das Deltoid in zwei gleiche Hälften theilt.

48) Ein Deltoid in ein Parallelogramm zu verwandeln, dessen Seiten gleich den Diagonalen des Deltoides sind.

49) Ein vollständiges rechtwinkliges Deltoid aus den beiden parallelen Diagonalen zu construiren. (Schlage über der größeren einen Halbkreis.)

50) Ein vollständiges Deltoid aus der größeren Seite, deren Verlängerung und der halbirten Diagonale zu construiren.

51) Den geometrischen Ort der dritten und vierten Ecken aller Deltoide zu bestimmen, die eine der Größe und Lage nach gegebene Linie als halbirte Diagonale gemeinsam haben.

52) Den geometrischen Ort der dritten und vierten Ecken aller Deltoide anzugeben, die ein und dieselbe halbirende Diagonale gemeinsam haben und in denen die gleichen Winkel 120° sind.

53) Den geometrischen Ort der dritten und vierten Ecken aller Deltoide anzugeben, die die Endpunkte der halbirenden Diagonale gemeinsam und eine Seite von bestimmter Größe haben.

54) Den geometrischen Ort der Hablirungspunkte der Seiten aller Deltoide anzugeben, welche 3 gegebene Punkte als Ecken gemeinsam haben.

55) Den geometrischen Ort der Ecken aller Deltoide anzugeben, die die Ecken eines gegebenen Rechtecks als Halbirungspunkte der Seiten gemeinsam haben und ohne einspringende Winkel sind. (4 begränzte, auf 3 Parallelen liegende Stücke.)

C. Für Secundaner und Primaner.

56) Ein Deltoid aus einer Seite und den ihr nicht anliegenden Winkeln so zu construiren, daß die beiden Diagonalen gleich werden. (Zeichne zuerst ein dem verlangten ähnliches Viereck.)

57) Ein Deltoid zu construiren aus seinen Winkeln und der Summe dreier Seiten. (Zeichne ein Deltoid mit den Winkeln und dann das verlangte als ähnlich liegendes zu diesem, oder bestimme die Seiten. 2 Fälle.)

58) Ein Deltoid zu zeichnen aus den Diagonalen und der Summe der Quadrate sämmtlicher Seiten. (Eine Mittellinie ist aufzusuchen.)

59) Ein Deltoid zu zeichnen, welches $\frac{11}{25}$ eines gegebenen und demselben gleichwinklig ist. (Beachte $36-25=11$ und ähnliche Figuren verhalten sich wie?)

60) Ein Deltoid zu zeichnen, welches 140mal so groß wie ein gegebenes und diesem ähnlich

ist. ($140 = 144 - 4 = 4 \cdot [36 - 1] = 100 + 36 + 4 = \frac{17^2 - 3^2}{2} = 7 \cdot 5 \cdot 4$ u. s. w.)

61) Fünf verschiedene Wege anzugeben, auf denen sich ein gegebenes Deltoid in ein Quadrat verwandeln läßt.

62) Der einem rechtwinkligen Deltoid einbeschriebene Kreis, sowie das Verhältniß zweier ungleicher Seiten sind gegeben, das Deltoid zu construiren. (Zeichne zuerst ein Quadrat.)

63) Ein Deltoid aus zwei gegenüberstehenden Seiten und dem Radius des einbeschriebenen Kreises zu construiren. (Verwandlung von Figuren, denn der Inhalt ist bekannt.)

64) Ein rechtwinkliges Deltoid aus einer Seite und dem Segment der halbirenden Diagonale, welches keinen Endpunkt mit der Seite gemein hat, zu construiren. (Die einfache Analysis führt auf den Satz: Legt man die gegebene Seite und das halbe Segment als Katheten zusammen, so ist in dem dadurch bestimmten Dreieck die Summe der Hypotenuse und kleineren Kathete gleich der halbirenden Diagonale des Deltoides.)

65) Ein rechtwinkliges Deltoid, dessen halbirende Diagonale gegeben ist, so zu construiren, daß der eine durch den Diagonalenschnittpunkt erzeugte Abschnitt dieser Diagonale einer Seite des Deltoides gleich werde. (Goldener Schnitt.)

66) Ein Deltoid aus einer Seite, der Linie, welche den Halbirungspunkt derselben mit dem Halbirungspunkte der gegenüberstehenden verbindet, und einer der Diagonalen zu construiren. (Mit Hülfe des Pythagoreers läßt sich die zweite Diagonale darstellen.)

67) Ein Deltoid zu construiren aus einem der ungleichen Winkel und den Summen, die man erhält, wenn man je eine Seite und eine Diagonale addirt.

68) Ein Deltoid zu construiren aus einem der ungleichen Winkel und den Differenzen zwischen je einer Seite und einer Diagonale. (Welcher der ungleichen Winkel muß in den beiden vorstehenden Aufgaben benutzt werden?)

69) Ein Deltoid zu construiren aus einem der ungleichen Winkel, der Seite, welche ihm nicht anliegt, und der Summe der Diagonalen. (Analysis: Verlängere die halbirende Diagonale, aber nicht über den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels hinaus, um die halbirte, construire über dieser Verlängerung mit der gegebenen Seite als Schenkel ein gleichschenkliges Dreieck, dann entsteht ein rechter Winkel, mit diesem beginne und benutze die Aufgabe: Durch den Schnittpunkt zweier sich schneidender Kreise eine Linie von gegebener Länge so einzutragen, daß ihre Endpunkte in der Peripherie liegen.)

70) Ein Deltoid aus einem der gleichen Winkel, der halbirenden Diagonale und der Summe dreier Seiten zu construiren. (Verlängert man über den Scheitel des gegebenen Winkels die eine Seite um die Summe der beiden andern gleichen und verbindet den Endpunkt der Verlängerung mit der nächsten Deltoidecke, so entsteht ein Dreieck, in dem man einen Winkel und das Verhältniß zweier Seiten, d. h. alle Winkel, kennt.)

71) Ein Deltoid aus einem der ungleichen Winkel, der Seite, welcher er nicht anliegt, und der Differenz der Diagonalen zu construiren. (Analysis und Construction entsprechend Nr. 69.)

72) Die Seiten eines Deltoides sind bekannt und ein Quadrat, welches gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen ist, das Deltoid zu construiren. (Beginn der Construction: zeichne ein Dreieck aus den Seiten des Deltoides und der Seite des Quadrates.)

73) Gegeben sind einer der ungleichen Winkel, einer seiner Schenkel und das Verhältniß der Diagonalen, das Deltoid zu construiren.

74) Gegeben sind einer der ungleichen Winkel, die Seite, welche ihm gegenüberliegt, und das Verhältniß der Diagonalen, das Deltoid zu construiren. (Erst ein ähnliches Deltoid.)

75) Eine Seite, einer der gleichen Winkel und das Verhältniß der Diagonalen ist gegeben, das Deltoid zu construiren. (Um ein dem verlangten ähnliches Deltoid zu bekommen, zeichne ein beliebiges Dreieck mit dem gegebenen Winkel, an der Spitze auf der Grundlinie errichte ein Perpendikel, welches sich zur Grundlinie verhält wie die Hälfte der halbirten Diagonale zur halbirenden u. s. w.)

76) Aus einem Winkel, einer Diagonale und dem Verhältniß der Seiten sechs verschiedene Deltoide zu zeichnen.

77) Aus dem Umfang, dem Verhältniß zweier gegenüberstehender Seiten und einem Winkel 3 verschiedene Deltoide zu zeichnen.

78) Ein Deltoid zu zeichnen, dessen eine Seite einen Zoll Länge hat, dessen Inhalt $\frac{1}{2}$ Quadratzoll beträgt und in dem sich die Diagonalen wie 9 : 16 verhalten. (Berechne die Diagonalen. — Verallgemeinere die Aufgabe. — 2 Fälle.)

79) Ein rechtwinkliges Deltoid aus der halbirten Diagonale und dem Umfange zu construiren. (Analysis algebraisch-geometrisch.)

80) Ein Deltoid aus beiden Seiten so zu zeichnen, daß die Diagonalen gleiche Länge erhalten. (Zeichne zuerst ein Deltoid mit gleichen Diagonalen und dem Verhältniß der Seiten, indem du geometrische Oerter und die harmonische Theilung benutzest.)

81) Ein Deltoid aus einem der Winkel, der Summe beider Diagonalen und dem Inhalt zu construiren. (Aus der Summe [s] und dem Inhalt [i^2] sind die Diagonalen zu berechnen — $\frac{s + \sqrt{s^2 - 8i^2}}{2}$ —, die gefundenen Ausdrücke zu construiren und zu beachten, daß 4 Deltoide der Aufgabe entsprechen.)

82) Ein Deltoid aus einer Seite, der Differenz beider Diagonalen und dem Inhalt zu construiren. (Wie 81, es sind aber nur 2 verschiedene Deltoide möglich.)

83) Ein Deltoid zu construiren aus den beiden Diagonalen und dem Verhältniß zweier gegenüberstehender Seiten. (Beachte die Bemerkung zu 80.)

84) Die Größe der einem rechtwinkligen Deltoid um- und einbeschriebenen Kreise ist bekannt, das Deltoid zu construiren. (Der halbe Umfang ist durch Rechnung aufzusuchen, das Resultat führt auf den Gedanken: Wird aus dem Durchmesser des umschriebenen und dem Radius des einbeschriebenen Kreises als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet, so ist die Summe der Hypotenuse und kleineren Kathete gleich der Summe zweier ungleicher Deltoidseiten.)

85) Ein vollständiges Deltoid aus seinen drei Diagonalen zu construiren. (Denke an die harmonische Theilung.)

86) Die halbirende Diagonale ist der Größe und Lage nach gegeben, auf ihr der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises und der Schnittpunkt mit der andern Diagonale, das Deltoid zu construiren. (Das Verhältniß der Seiten ist bekannt.)

87) Ein Deltoid aus einem Winkel, dem Inhalt und der Linie, welche die Halbirungspunkte zweier gegenüberstehender Seiten verbindet, zu construiren. (Suche die Diagonalen.)

88) Ein rechtwinkliges Deltoid aus der Summe beider Diagonalen und der Differenz zweier gegenüberstehender Seiten zu construiren. (Die algebraisch-geometrische Analysis führt mit Hülfe der 4 Gleichungen $a - b = \delta$ [Differenz], $c + d = s$, $c . d = 2 . a . b$ und $a^2 + b^2 = c^2$ zur Bestimmung und Construction von c.)

89) Ein vollständiges Deltoid aus der kleinern Seite, deren Verlängerung und der halbirenden Diagonale zu zeichnen. (Suche den vierten harmonischen Punkt.)

90) Ein Deltoid zu zeichnen, wenn gegeben sind die beiden Diagonalen und der Umfang.

91) Die halbirte Diagonale ist gegeben, ohne Hülfe des Transporteurs um dieselbe ein Deltoid zu zeichnen, in dem die beiden ungleichen Winkel 108° und 60° betragen. (Denke an das reguläre Fünfeck.)

92) Ist in einem rechtwinkligen Deltoid der stumpfe Winkel 108° und die kleinere Seite gleich 1, so sind die übrigen Stücke wie groß?

$$\left(d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, c = \sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{5})}{5}}, I = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}.}{5}} = a\right).$$

93) Auf der begränzten Geraden ad sind zwei Punkte b und c gegeben, einen Punkt x zwischen b und c zu bestimmen, der ad und bc nach demselben Verhältniß theilt. (Siehe §. 4.)

94) Die Summe beider Diagonalen und einer der ungleichen Winkel sind gegeben, aus dem Gegebenen ein Deltoid so zu construiren, daß der Inhalt desselben ein Maximum werde. (Halbire die Summe.)

95) Dieselbe Aufgabe, nur nimm statt der Summe der Diagonalen die Linie, welche die Halbirungspunkte zweier gegenüberstehender Seiten verbindet, als gegeben an.

96) Aus der Differenz zweier ungleicher Seiten und den beiden Diagonalen ein Deltoid zu zeichnen. [Aus der Inhaltsformel $dc = \sqrt{(c + a + b)(c + a - b)(c - a + b)(b + a + c)}$ läßt sich die Summe zweier Seiten leicht bestimmen.]

97) Aus der Differenz der Quadrate zweier gegenüberstehender Seiten und den beiden Diagonalen ein Deltoid zu construiren. (Chordale.) — Statt beider Diagonalen kann in der Aufgabe auch gesagt werden: Summe der Diagonalen und Inhalt, Differenz der Diagonalen und Inhalt, Summe der Diagonalen und Differenz ihrer Quadrate, Verbindungslinie der Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seiten und Inhalt u. s. w.

98) In einem rechtwinkligen Deltoid sind die Diagonalen gezogen und die Halbirungspunkte der Seiten unter einander verbunden, wie viel Paar ähnlicher Dreiecke sind in der Figur? — 219.

99) Wenn in einem Deltoid die Seiten gleich 3 und 4, die Summe der Diagonalen aber 9,8 ist, so sind die Diagonalen einzeln wie groß? [$x(9{,}8 - x) = \sqrt{(7 + x)(7 - x)(x + 1)(x - 1)}$ führt auf eine Gleichung vom vierten Grade; bringt man in dieser sämmtliche Glieder auf eine Seite, so läßt sich $x - 5$ absondern.]

100) Den Schwerpunkt des Deltoides zu bestimmen. (Am leichtesten löst sich die Aufgabe, wenn man die Schwerpunkte der beiden congruenten Hälften des Deltoides aufsucht, man kommt aber auch zum Ziel, wenn man die Schwerpunkte der beiden gleichschenkligen Dreiecke, in die die halbirte Diagonale das Deltoid theilt, als ungleich belastete Enden eines Hebels auffaßt; dabei ergiebt sich der Satz: Der Schwerpunkt des kleinern gleichschenkligen Dreiecks liegt ebenso weit vom Schnittpunkt der Diagonalen wie der Schwerpunkt des größern vom Schwerpunkt des Deltoides entfernt.)