Combinationen und Reihen in den Vielecken.

1) Wie groß ist die Anzahl der Durchschnittspunkte sämmtlicher Diagonalen eines Necks innerhalb der Figur?

Setzen wir voraus, daß nie mehr als zwei Diagonalen sich in ein und demselben Punkte schneiden und daß das Neck keine einspringenden Winkel hat, so können wir sagen: Jeder Durchschnittspunkt liegt auf zwei Diagonalen, jede Diagonale verbindet zwei Ecken, mithin entsteht jeder Durchschnittspunkt durch Verbindung von vier Ecken. Umgekehrt läßt sich dann auch behaupten: Vier beliebige Ecken des Necks geben einen Durchschnittspunkt, aber nur einen. Denn geht man auf dem Umfange des Necks entlang und nennt die vier beliebig ausgewählten Ecken der Reihe nach a, b, c, d, so erhält man einen Durchschnittspunkt, wenn man die Diagonalen ac und bd zieht, während die Linien ab und cd einerseits und ad und cb andrerseits entweder parallel laufen oder sich außerhalb des Necks schneiden. Andere Linien lassen sich zwischen a, b, c, d nicht ziehen. So oft ich also aus den n Ecken der Figur vier beliebige herausgreife und verbinde, erhalte ich einen Schnittpunkt; dies kann ich aber $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}$ mal thun, denn das Herausgreifen von vier Elementen, hier Ecken, aus einer größeren Zahl und Zusammenstellen in einer bestimmten Weise ist gleichbedeutend mit dem Bilden einer Combination der vierten Klasse von n Elementen; deren Anzahl beträgt $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}$ oder n_4 (sprich n Zeiger 4), wenn wir nach dem Vorgange von Wolff unter n_r den Ausdruck $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1.2.3.4\ldots..r}$ verstehen.

Berechnet man nach dieser Formel für die Vielecke mit verschiedener Seitenzahl die Zahl der Diagonalenschnittpunkte, so erhält man für das

4eck,	5eck,	6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck,	11eck,	12eck	. . .
1	5	15	35	70	126	210	330	495	. . .,

eine arithmetische Reihe vierter Ordnung. —

Schneiden sich in einem Vielecke, wie dies besonders bei den regelmäßigen mit grader Seitenzahl der Fall ist, mehr als zwei Diagonalen in einem Punkte, so ist ein solcher Schnittpunkt nicht als ein einzelner, sondern, wenn r Diagonalen durch ihn hindurchgehen, als Ersatz für $\frac{r\,(r-1)}{2}$ Schnittpunkte anzusehen. Die erste ihn durchsetzende Diagonale durchschneidet nemlich in ihm die übrigen $r-1$ Diagonalen, bringt also mit diesen eigentlich ebensoviel einzelne Schnittpunkte hervor; ebenso erzeugt außerdem die zweite mit Hülfe der $r-2$ folgenden eigentlich $r-2$ Schnittpunkte, die dritte $r-3$, die vierte $r-4$ u. s. w., die vorletzte einen und die letzte keinen. Die Summe der Reihe

$$r-1,\ r-2,\ r-3\ \ldots\ldots\ldots\ 2,\ 1$$

beträgt aber $\frac{r\,(r-1)}{1.2}$ oder r_2.

Beispiel. Im regelmäßigen Zwölfeck schneiden sich die sechs großen Diagonalen in einem Punkte, außerdem je 4 in zwölf und je 3 in sechzig Punkten, der erste Punkt ist also als Ersatz für 15, jeder der zweiten Klasse als Ersatz für 6 und jeder der dritten für 3 anzusehen. Die Zahl der Diagonalenschnittpunkte reducirt sich daher von 495 auf $495-14-5.12-2.60$ oder 301.

2) Die Zahl der Diagonalenschnittpunkte eines Necks durch die Zahl der Diagonalen selbst zu bestimmen.

In jedem Neck befinden sich $\frac{n\,(n-3)}{2}$ Diagonalen und n_4 Diagonalenschnittpunkte.

$n_4 = \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = \frac{n.(n-3)}{2} . \frac{(n-1)(n-2)}{2.6}$, und nenne ich die Zahl der Diagonalen z,

$$= \frac{z}{6} . \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{z}{6} \frac{[n^2-3n+2]}{2} = \frac{z}{6}\left[\frac{n\,(n-3)}{2} + 1\right] = \frac{z\,(z+1)}{6}.$$

Beispiel. Im Elfeck ist die Zahl der Diagonalen 44, dieselben schneiden sich mithin in $\frac{44.45}{6}$ oder in 330 Punkten.

3) Wieviel Diagonalenpaare kommen im Neck selbst nicht zum Schnitt?

Aus z Diagonalen lassen sich z_2 Diagonalenpaare oder Combinationen zur zweiten Klasse bilden, im Neck schneiden sich, wie wir eben gesehen, $\frac{z\,(z+1)}{6}$ Paare, denn jeder Schnittpunkt wird von einem Paare hervorgebracht, folglich kommen $\frac{z\,(z-1)}{2} - \frac{z\,(z+1)}{6}$ oder $\frac{z\,(z-2)}{3}$ Paare nicht zum Schnitt. — Das Verhältniß der sich schneidenden Diagonalenpaare zu den sich nicht schneidenden ist mithin $\frac{z+1}{2\,(z-2)}$ oder, statt der Anzahl der Diagonalen die Anzahl der Ecken gesetzt, $\frac{(n-1)(n-4)}{2\,(n+1)(n-2)}$. Ebenso kann ich statt des Ausdrucks $\frac{z\,(z-2)}{3}$ auch den ihm gleichen $\frac{1}{3}(n+1)_2\,(n-3)_2$ benutzen. Thue ich dies, so erhalte ich eine arithmetische Reihe vierter Ordnung, nemlich für das

4eck,	5eck,	6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck,	11eck,	12eck . . .
0	5	21	56	120	225	385	616	936 . . .

sich nicht im Neck schneidende Diagonalenpaare. — Die Verhältnißzahlen der sich im Neck schneidenden und nicht schneidenden Diagonalenpaare sind vom Viereck bis Siebzehneck berechnet:

$$\infty,\ 1,\ \tfrac{5}{7},\ \tfrac{5}{8},\ \tfrac{7}{12},\ \tfrac{14}{25},\ \tfrac{18}{33},\ \tfrac{15}{28},\ \tfrac{55}{104},\ \tfrac{11}{21},\ \tfrac{13}{25},\ \tfrac{91}{176},\ \tfrac{35}{68},\ \tfrac{20}{39},$$

eine Reihe, die gegen $\frac{1}{2}$ convergirt.

4) In wieviel Punkten außerhalb eines Necks schneiden sich die Diagonalen desselben?

Von den $\frac{1}{3}(n+1)_2\,(n-3)_2$ Diagonalenpaaren, welche innerhalb des Vielecks sich nicht schneiden, haben, wenn wir von den parallel laufenden sagen: sie schneiden sich in der Unendlichkeit, alle diejenigen einen Schnittpunkt außerhalb, welche sich nicht in den Ecken des Necks selbst treffen. In jeder Ecke treffen sich aber $n-3$ Diagonalen, schneiden sich also $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Paare und in allen Ecken $\frac{n(n-3)(n-4)}{2}$; subtrahire ich diese von $\frac{1}{3}(n+1)_2 (n-3)_2$ oder $\frac{(n+1) \cdot n}{3 \cdot 2} \frac{(n-3)(n-4)}{2}$, so erhalte ich als Zahl der außerhalb des Necks liegenden Schnittpunkte $\frac{n}{2} \frac{(n-3)}{1} \frac{(n-4)}{2} \frac{(n-5)}{3} = \frac{n}{2}(n-3)_3$. Aus dieser Formel ergiebt sich, daß Viereck und Fünfeck keinen Schnittpunkt außerhalb besitzen, sodann für das

6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck,	11eck,	12eck	die Zahlen
3	14	40	90	175	308	504	

wieder eine Reihe vierter Ordnung. — Die zwölf- und mehrseitigen Necke haben eine größere Zahl äußerer Diagonalenschnittpunkte als innere, bei den übrigen findet das Umgekehrte statt.

5) In wieviel Stücke zerschneiden sich die Diagonalen eines Necks gegenseitig?

Unter einem Stücke verstehe ich hier einen Theil der Diagonale selbst, nicht ihrer Verlängerung, der entweder von zwei neben einander liegenden Schnittpunkten auf ihr oder von einer Ecke und dem ihr zunächstliegenden Schnittpunkt begrenzt wird. — Liegen nun auf einer Diagonale x Schnittpunkte, so wird sie durch dieselben in $x + 1$ Theile getheilt, denn zwischen den Schnittpunkten liegen $x-1$ Stücke und zwischen den beiden äußersten und den Endpunkten der Diagonale noch zwei. Jeder Schnittpunkt liegt aber auf zwei Diagonalen, mithin ist die Zahl der Diagonalenabschnitte gleich der doppelten Zahl der Theilpunkte plus der Anzahl der Diagonalen

$= 2n_4 + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{z(z+4)}{3}$ oder einzeln berechnet im

4eck,	5eck,	6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck . . . .
4	15	39	84	160	279	455 . . . .

Schneiden sich r Diagonalen in einem Punkte, so verschwinden in demselben $r(r-2)$ Diagonalenabschnitte. Denke ich nemlich für einen Moment eine der r Diagonalen durch die übrigen $r-1$ so geschnitten, daß die $r-1$ Schnittpunkte nicht auf einander, sondern dicht neben einander fallen, so liegen auf der Diagonale zwischen den $r-1$ Schnittpunkten $r-2$ unendlich kleine Diagonalenabschnitte, die bei dem gänzlichen Zusammenfallen der Durchschnittspunkte verloren gehen. Gehen aber auf einer Diagonale $r-2$ Abschnitte verloren, so verschwinden auf allen zusammen $r(r-2)$. Im regelmäßigen Zwölfeck gehen z. B. von den 1044 Diagonalenabschnitten grade 300 verloren, denn jeder der 60 Punkte, in welchen sich 3 Diagonalen kreuzen, läßt 3 Abschnitte verschwinden, jeder der 12 Kreuzungspunkte von 4 Diagonalen 8 und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, da ihn 6 Diagonalen gemein haben, 24 und $3 \cdot 60 + 8 \cdot 12 + 24$ macht 300. Durch geschicktes Nachzählen kann man sich in der That leicht überzeugen, daß im regelmäßigen Zwölfeck die Zahl der Diagonalenstücke 1044—300 also 744 beträgt; zeichnet man nemlich ein derartiges Zwölfeck mit seinen 54 Diagonalen, so zerfällt dasselbe in zwölf gleichschenklige Dreiecke, die mit ihren Spitzen in der Mitte zusammenstoßen; in jedem Dreieck liegen gleichviel Stücke, in einem aber, wie man beim Nachzählen finden wird, 55, also in allen 55.12 oder 660, dazu die 84 Abschnitte der zwölf Schenkel, auf jedem zählt man 7, giebt 660 + 84 oder 744.

6) In wieviel Stücke zerschneiden sich die Verlängerungen sämmtlicher Diagonalen?

Befinden sich auf den beiden Verlängerungen einer Diagonale y Schnittpunkte, so zerfallen die Verlängerungen in $y + 2$ Abschnitte, 2 davon sind von den beiden Ecken, welche die Diagonale verbindet, und den nächstliegenden Theilpunkten begrenzt, $y-2$ von je zwei Schnittpunkten und zwei besitzen nur einen Endpunkt, indem sie sich auf der andern Seite bis in die Unendlichkeit erstrecken. Da jeder Schnittpunkt bei der Theilung zweier Diagonalen mitwirkt, so ist die Zahl der Stücke, in welche die Verlängerungen der Diagonalen zerfallen, gleich der doppelten Zahl ihrer Schnittpunkte plus der doppelten Zahl der Diagonalen $= n\,(n-3)_3 + n\,(n-3)$. Dies giebt für das

4eck,	5eck,	6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck die Zahlen
4	10	24	56	120	234	420.

Als Summe einer Reihe vierter und zweiter Ordnung selbst wieder eine Reihe vierter Ordnung. — Kommt eine Diagonale, wie dies z. B. beim Fünfeck der Fall ist, außerhalb des Neck nicht zum Schnitt, so muß, wenn die Formel Gültigkeit behalten soll, jede ihrer Verlängerungen als ein abgeschnittenes Stück angesehen werden; laufen zwei Diagonalen parallel, so sind zwei Stücke in Abrechnung zu bringen; schneiden sich mehrere Verlängerungen in einem Punkte, so kommen wie beim Kreuzen von r Diagonalen im Neck $r\,(r-2)$ Stücke in Abzug, und laufen endlich x Diagonalen parallel, so fällt gleichsam ein in unendlicher Ferne liegender Kreuzpunkt von x Diagonalen aus; dieser läßt erstens $x\,(x-2)$ Abschnitte in sich verschwinden, und indem er selbst verschwindet, verliert jede der parallelen Diagonalen noch einen Abschnitt, folglich gehen im Ganzen $x\,(x-1)$ Diagonalenabschnitte verloren. Im regelmäßigen Sechseck reducirt sich auf diese Weise die Zahl der außenliegenden Diagonalenstücke auf die Hälfte der für das Sechseck überhaupt berechneten, während im regulären Zwölfeck durch das Parallel-Gehen der Diagonalen 192 Abschnitte verschwinden.

7) In wieviel neben einander liegende Figuren wird ein Neck durch das Ziehen sämmtlicher Diagonalen zerlegt?

Durch das Ziehen der Diagonalen zerfällt ein Neck in Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke u. s. f. Seiten derselben werden 1) die Stücke der Diagonalen, 2) die Seiten des Vielecks. Jedes Stück der Diagonalen liegt in zwei Figuren, jede Vielecksseite nur in einer. Die Summe der Seiten sämmtlicher Figuren ist mithin gleich der doppelten Anzahl der Stücke der Diagonalen plus der Anzahl der Seiten des Necks $= 4n_4 + n\,(n-3) + n = 4n_4 + n\,(n-2)$. Bezeichnen nun z, y, x, w, v, u .... die Anzahl der Drei-, Vier-, Fünf-, Sechsecke u. s. w., die in dem Neck durch das Ziehen der Diagonalen entstanden sind, so ist die Summe der Seiten aller dieser Figuren =

$$3z + 4y + 5x + 6w + 7v + 8u + \ldots\ldots, \text{ folglich}$$

$$4n_4 + n\,(n-2) = 3z + 4y + 5x + 6w + 7v + 8u + \ldots\ldots \qquad \text{I.}$$

Die Summe der Winkel in diesen Figuren in Rechten ausgedrückt ist, da die Winkel im Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck .... 2, 4, 6, 8 .... Rechte betragen,

$= 2z + 4y + 6x + 8w + 10v + 12u + \ldots\ldots$ Diese Winkelsumme läßt sich noch in anderer Weise bestimmen. Die Winkel in sämmtlichen Figuren sind nemlich 1) die Winkel des Necks, 2) die Winkel, welche um die Theilpunkte der Diagonalen liegen; die ersteren betragen $2n-4$ Rechte, die letzteren $4n_4$, denn n_4 Schnittpunkte sind vorhanden und um jeden liegen 4 Rechte, folglich

$4n_4 + 2n-4 = 2z + 4y + 6x + 8w + 10v + 12u + \ldots\ldots$ oder dividirt durch 2

$2n_4 + n-2 = z + 2y + 3x + 4w + 5v + 6u + \ldots\ldots$

Subtrahire ich diese Gleichung von I, so ist

$2n_4 + (n-1)(n-2) = 2z + 2y + 2x + 2w + 2v + 2u + \ldots\ldots$ und

$n_4 + (n-1)_2 = z + y + x + w + v + u + \ldots\ldots =$ die Summe der durch das Ziehen sämmtlicher Diagonalen entstehenden Figuren. — Der Ausdruck $n_4 + (n-1)_2$ läßt sich leicht so modificiren, daß n aus demselben heraustritt und durch a, der Zahl der Diagonalen des Necks, ersetzt wird, denn

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\left[\frac{n(n-3)+12}{2.6}\right] = \left[\frac{n^2-3n}{2} + 1\right]\left[\frac{n(n-3)}{2} + 1\right]\frac{1}{6} = \frac{(a+1)(a+6)}{6}$. Diese sowie die erst gegebene Formel liefern für das

3eck,	4eck,	5eck,	6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck die Zahlen
1	4	11	25	50	91	154	246.

Aus denselben, welche abermals eine Reihe vierter Ordnung bilden, ergiebt sich, daß zwei Sechsecke in ebensoviel Figuren zerfallen als ein Siebeneck und daß ein Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck und Siebeneck durch das Ziehen der Diagnoalen zusammen nur in 91, d. h. ebensoviel neben einander liegende Felder zerlegt werden wie ein Achteck allein.

8) Da es dem suchenden Geiste überhaupt eigen ist, sich von jedem gefundenen Resultate zu neuen Forschungen leiten zu lassen, so legte die aufgefundene Summe mir unwillkührlich die Frage nach der Größe ihrer einzelnen Summanden vor. Wie groß ist die Zahl der Dreiecke, die durch das Ziehen der Diagonalen entstehen? Wie groß die der Vierecke, Fünfecke ꝛc.? Dies aufzufinden war mein Bestreben. Allein die Rechnung versagte ihre Dienste. Welche Combinationen ich auch aufstellte, wie ich die gefundenen Reihen verband, nie gelang es mir, Antwort auf meine Frage zu erhalten, und dies führte mich unwillkührlich zu dem Schlusse, daß, wenn auch die Summe der neben einander liegenden Figuren für alle Vielecke mit gleicher Seitenzahl eine gleiche und constante sei, dies doch bei den einzelnen Summanden, d. h. der Zahl der Dreiecke und Vierecke ꝛc., nicht der Fall sei, daß es zwei Necke mit gleicher Eckenzahl geben könne, in denen die Zahl der durch die Diagonalen erzeugten Vierecke oder Xecke eine verschiedene sei, indem diese Zahl nicht allein von der Anzahl der Ecken, sondern auch von der Gestalt des Necks abhange. Und in der That zwei Siebenecke können uns leicht von der Wahrheit des aufgestellten Schlusses überzeugen. Man zeichne ein fast regelmäßiges und eins mit sehr ungleichen Seiten, ziehe in ihnen die Diagonalen und zähle die entstandenen Figuren; in beiden finden sich 50, aber während in der Mitte des einen sich ein kleines Siebeneck zeigt, ist in dem

andern keine derartige Figur zu sehen, und ebenso variirt in ihnen die Zahl der Fünfecke, Vierecke und Dreiecke.

9) Wieviel von den durch das Ziehen der Diagonalen entstehenden Figuren verschwinden, wenn sich r Diagonalen in einem Punkte schneiden?

Sei z, y, x, w, v . . . . wieder die Zahl der im Neck durch das Ziehen aller Diagonalen entstandenen Dreiecke, Vierecke, Fünfecke . . . ., so ist wie in Nr. 7 auch jetzt

$3z + 4y + 5x + 6w + 7v + \ldots$ die Summe der Seiten sämmtlicher Figuren

und $2z + 4y + 6x + 8w + 10v + \ldots$ die Summe der Winkel sämmtlicher Figuren.

Die Summe der Seiten ist aber andrerseits nicht mehr wie dort $4n_4 + n(n-2)$, sondern, da durch das gemeinsame Kreuzen der Diagonalen $r(r-2)$ Abschnitte verloren gehen und jedes dieser Stücke zweimal als Seite in Anrechnung gebracht war, so ist

$$3z + 4y + 5x + 6w + \ldots. = 4n_4 + n(n-2) - 2r(r-2).$$

Ebenso ist die Summe der Winkel in Rechten vermindert; ein Kreuzpunkt von r Diagonalen ist, wie wir oben gesehen, als eine Gruppe von r_2 auf einander liegender Schnittpunkte anzusehen, $r_2 - 1$ Schnittpunkte und $4r_2 - 4$ Rechte gehen also durch das Kreuzen der Diagonalen verloren, folglich

$$2z + 4y + 6x + 8w + \ldots. = 4n_4 + 2n - 4 - 4r_2 + 4$$
$$\text{oder } z + 2y + 3x + 4w + \ldots. = 2n_4 + n - 2 - 2r_2 + 2$$
$$\text{und } 2z + 2y + 2x + 2w + \ldots. = 2n_4 + (n-1)(n-2) - 2r(r-2) + 2r_2 - 2$$
$$z + y + x + w + v + \ldots = n_4 + (n-1)_2 - r(r-2) + r_2 - 1.$$

Subtrahire ich diesen Ausdruck von der in Nr. 7 gefundenen Summe $n_4 + (n-1)_2$, so bleibt als Differenz, d. h. als Zahl der verschwundenen Figuren, denn diese allein machen die Differenz in beiden Fällen aus, $r(r-2) - r_2 + 1$ oder reducirt $\frac{r^2 - 3r + 2}{2} = (r-1)_2$. Im regelmäßigen Zwölfeck verschwinden daher in den 60 Punkten, die je drei Diagonalen angehören, 60 Figuren, in den 12 vierfachen Punkten 36, im Mittelpunkte 10, und die Gesammtzahl der Figuren reducirt sich von 550 auf 444.

10) Wieviel Figuren entstehen durch das Schneiden der Verlängerungen der Diagonalen eines Necks?

r in einem Punkte sich schneidende Diagonalen ließen, wie wir eben gesehen, $(r-1)_2$ Figuren verschwinden, dieselben r Diagonalen würden also, wenn sie sich nicht in einem Punkte getroffen hätten, diese $(r-1)_2$ Figuren wirklich erzeugt haben, oder, statt Diagonalen „Linien" gesagt, r Linien erzeugen, wenn sie sich wechselsweis durchschneiden $(r-1)_2$ Figuren. Hat daher ein Vieleck $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen, so bilden diese, wenn wir von dem Kreuzen mehrerer in einem Punkte absehen, $\left[\frac{n(n-3)}{2} - 1\right]_2$ Dreiecke, Vierecke ꝛc. Von diesen gehen in jeder Ecke, in der sich $n-3$ Diagonalen schneiden, $(n-4)_2$ verloren, in allen also $n(n-4)_2$. Beachten wir dagegen die Seiten, so sehen wir, daß jede derselben eine durch 4 Diagonalabschnitte erzeugte Figur in zwei Dreiecke zerlegt, mithin alle n Seiten gleichsam n neue Figuren entstehen lassen, und erinnern wir uns, daß in Nr. 7 die Zahl der im Neck durch die Diagonalen erzeugten Figuren zu $n_4 + (n-1)_2$ bestimmt war, so ist die Zahl der durch die Verlängerungen der Diagonalen gebildeten offenbar $\left[\frac{n\,(n-3)}{2} - 1\right]_2 + n - n\,(n-4)_2 - n_4 - (n-1)_2$ d. h. = der Zahl sämmtlicher durch die Diagonalen möglicher Weise entstehender Figuren + der durch Hinzutreten der Seiten erzeugten — der in den Ecken des Necks zusammenfallenden — der in das Neck fallenden. Wird der gegebene Ausdruck zusammengezogen, so erhält man $\frac{n^4 - 12n^3 + 47n^2 - 60n}{12} = \frac{n}{2}\,\frac{(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{6} = \frac{n}{2}\,(n-3)_2$. Die Verlängerungen der Diagonalen bringen mithin ebensoviel Figuren als Schnittpunkte hervor.

11) Es giebt 3 Vielecke, in denen die Zahl der Seiten 3 auf einander folgende Glieder der gewöhnlichen Zahlenreihe sind und von denen das eine durch seine Diagonalen in Figuren zerlegt eine mehr aufweist als die beiden übrigen in gleicher Weise behandelt zusammen; wieviel Ecken besitzt jedes der drei Vielecke?

Die Zahl der Ecken in dem Vieleck mit mittler Seitenzahl sei n, dann ist sie in den beiden andern $n-1$ und $n+1$. Die Zahl der durch die Diagonalen erhaltenen Figuren beträgt aber im Neck $n_4 + (n-1)_2$, mithin im $(n+1)$eck $(n+1)_4 + n_2$ und im $(n-1)$eck $(n-1)_4 + (n-2)_2$.

Nach den Forderungen der Aufgabe muß daher folgende Gleichung statthaben:

$$n_4 + (n-1)_2 + (n-1)_4 + (n-2)_2 + 1 = (n+1)_4 + n_2.$$

Durch Anwendung des Gesetzes $(a+1)_n - a_n = a_{n-1}$ geht dieselbe über in

$$(n-1)_4 + (n-2)_2 + 1 = n_3 + n - 1 \text{ oder } (n-1)_4 + (n-2)_2 = n_3 + (n-2)_1.$$

Schreibt man jetzt die Binomialcoefficienten in aufgelöster Form, hebt mit $n-2$ und multiplicirt mit 24, so ist:

$$(n-1)\,(n-3)\,(n-4) + 12\,(n-3) = 4n\,(n-1) + 24$$

$$n^3 - 8n^2 + 19n - 12 + 12n - 36 = 4n^2 - 4n + 24$$

$$n^3 - 12n^2 + 35n - 72 = 0$$

$$(n-9)\,(n^2 - 3n + 8) = 0.$$

Jeder der beiden Factoren = 0 gesetzt macht die ganze Gleichung = 0, folglich geben die beiden Gleichungen $n - 9 = 0$ und $n^2 - 3n + 8 = 0$ die gesuchten Werthe, wir erhalten aber aus ihnen $n = 9$ und $n = \frac{3 \pm \sqrt{-23}}{2}$; ebenso genügt, da wir im Verlauf der Rechnung die ursprüngliche Gleichung durch $n-2$ dividirten, dieser der Werth $n = 2$. Von den 4 erhaltenen Werthen genügt indeß nur der erste $n = 9$ der Aufgabe selbst, da Vielecke mit imaginärer Eckenzahl so wie Zweiecke nicht existiren. Die gesuchten Vielecke sind mithin das Achteck, Neuneck und Zehneck.

12) In wieviel Punkten werden die von einer Ecke ausgehenden Diagonalen eines Necks durch die übrigen geschnitten?

Zeichnet man beim Ziehen aller Diagonalen des Vielecks eine, welche ein Dreieck von der ganzen Figur abschneidet, besonders stark, so zerlegt man dadurch gleichsam das Neck in ein

Dreieck und ein $(n-1)$eck. Da die Ecken des letzteren gleichzeitig Ecken des Necks sind, so sind beim Ziehen der Diagonalen des Necks auch die des $N-1$ecks ohne Ausnahme mit gezogen. Außerdem finden sich in der Figur nur noch die theilende und, wenn wir diese als Grundlinie des abgeschnittenen Dreiecks betrachten, die Diagonalen, die von der Spitze desselben ausgehen. Die gesuchten Durchschnittspunkte, welche sich im Neck auf diesen finden, sind mithin gleich der Differenz aller Diagonalenschnittpunkte im Neck minus aller Diagonalenschnittpunkte im $N-1$eck $= n_4-(n-1)_4$ oder nach der in der vorhergehenden Nummer angezogenen Regel $= (n-1)_3$. — Für das Viereck, Fünfeck, Sechseck 2c. ergeben sich im Speciellen die figurirten Zahlen

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 . . . .

so wie im Allgemeinen der Lehrsatz: Die Zahl der Schnittpunkte, welche auf sämmtlichen von einer Ecke ausgehenden Diagonalen liegen, ist gleich der, welche die von einer anderen Ecke ausgehenden Diagonalen besitzen.

13) In wieviel Punkten schneiden sich die von den Enden ein und derselben Seite eines Vielecks ausgehenden Diagonalen gegenseitig?

Man denke in einem Neck die Diagonalen von einer Ecke a aus gezogen; zieht man nun die Diagonalen von der zweiten Ecke b aus, so schneidet die erste, wenn wir so die a am nächsten kommende nennen, jede der bereits gezogenen, bringt also $n-3$ Schnittpunkte hervor; die zweite schneidet eine Diagonale weniger, erzeugt also auch nur $n-4$ Durchschnittspunkte, die dritte erzeugt abermals einen weniger, d. h. $n-5$, die vierte $n-6$ u. s. f., die letzte endlich nur einen. Im Ganzen sind mithin $n-3 + n-4 + n-5 + n-6 + \ldots\ldots + 2 + 1$ Schnittpunkte entstanden und dies giebt addirt $(n-2)_2$. Die Zahl der gesuchten Punkte beträgt daher im

4eck,	5eck,	6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck
1	3	6	10	15	21	28 . . . .

Eine Reihe zweiter Ordnung und zugleich die Differenzenreihe der in der letzten Nummer gegebenen Reihe. — Aus diesem Verhältnisse entspringt das Gesetz: Addirt man zu den Schnittpunkten der von einer Ecke eines $N-1$ecks ausgehenden Diagonalen die durch das wechselweise Schneiden der von den Endpunkten einer Seite eines Necks ausgehenden Diagonalen entstandenen, so erhält man als Summe die Zahl aller Schnittpunkte, die im Neck auf den von einer Ecke auslaufenden Diagonalen zu finden ist.

Eine andere Lösung der gestellten Frage wäre. — Die zu beobachtenden Diagonalen des Necks mögen wieder von den Enden der Seite ab ausgehen. Denkt man die übrigen Diagonalen gezogen, so sind diese mit Ausnahme derjenigen, welche die beiden a und b nächstliegenden Ecken verbindet, die Diagonalen eines $N-2$ecks und schneiden sich mithin in $(n-2)_4$ Punkten. Ecken dieses $N-2$ecks sind sämmtliche Ecken des Necks mit Ausschluß von a und b. Die im Neck von a auslaufenden Diagonalen werden ferner nach Nr. 12 von den von b kommenden oder sonst im Neck gezogenen in $(n-1)_3$ Punkten gekreuzt, ebensoviel Schnittpunkte werden auf den von b ausgehenden durch die von a und den übrigen Ecken kommenden Diagonalen erzeugt. Die Summe aller drei Schnittpunktsgruppen ist also $(n-2)_4 + 2\,(n-1)_3$, sie ist aber auch gleich der Summe sämmtlicher Diagonalenschnittpunkte plus der Zahl der gesuchten, denn die Summe sämmtlicher Schnittpunkte besteht: 1) aus den Schnittpunkten der nicht von a und b kommenden Diagonalen, 2) den Schnittpunkten der von a und b kommenden und 3) den Schnittpunkten dieser beiden Gruppen. Die Differenz $(n-2)_4 + 2(n-1)_3 - n_4$ ist mithin gleich der Zahl der gesuchten Punkte.

Aber $(n-2)_4 + 2(n-1)_3 - n_4 = (n-2)_4 + (n-1)_3 - [n_4 - (n-1)_3]$
$= (n-2)_4 + (n-1)_3 - (n-1)_4 = (n-1)_3 - (n-2)_3 = (n-2)_2$.

14) In wieviel Punkten schneiden sich die Diagonalen, welche von zwei beliebigen Ecken eines Necks ausgehen?

Ich nenne die Ecken der Reihe nach 1, 2, 3, 4 . . . r—1, r, r + 1 . . . n—1, n und nehme an, die Ecken 1 und r seien die beiden beliebig ausgewählten. Die Diagonale 1r, welche beide verbindet, wird von keiner der übrigen zertheilt, theilt aber das Neck selbst in ein reck und ein (n—r + 2)eck, in denen die von 1 und r ausgehenden Diagonalen zwar wiederum als Diagonalen auftreten, indeß nicht als solche, die von beliebigen Ecken kommen, sondern von den Endpunkten ein und derselben Seite auslaufen. Im reck beträgt aber, wenn wir das in Nr. 13 gewonnene Resultat berücksichtigen, die Zahl ihrer Schnittpunkte $(r-2)_2$, im (n—r + 2)eck $(n-r)_2$ und folglich im Neck $(n-r)_2 + (r-2)_2$. — Beispiel. Im Elfeck schneiden sich die 16 Diagonalen, welche je von den Ecken

1;2	1;3	1;4	1;5	1;6	1;7	1;8	1;9	1;10	1;11	kommen, in
36	28	22	18	16	16	18	22	28	36	Punkten.

Die gegebenen Zahlen bilden zwei Reihen, eine fallende und eine steigende, beide zweiter Ordnung. Dies ist in jedem Neck der Fall, denn der Ausdruck $(n-r)_2 + (r-2)_2$ wird um so kleiner, je gleicher die beiden ihn bildenden Summanden werden, und wächst mit dem Unterschiede derselben; und läßt man in ihm, während n vollkommen unbestimmt bleibt, r drei beliebige, aber auf einander folgende Zahlenwerthe der gewöhnlichen Zahlenreihe, z. B. r—1, r und r + 1, annehmen, und bildet die Differenzen zwischen den so erhaltenen Ausdrücken:

$[n-r+1]_2 + [r-3]_2$, $[n-r]_2 + [r-2]_2$ und $[n-r-1]_2 + (r-1)_2$, so ergiebt sich
$[n-r]_1 - [r-3]_1$ und $[n-r-1]_1 - [r-2]_1$

oder $n-2r+3$ und $n-2r+1$, und die Differenz dieser beiden Glieder der ersten Differenzenreihe ist offenbar constant, denn sie beträgt 2.

15) In einem Vieleck sei irgend eine Diagonale gezogen; in wieviel Punkten kann dieselbe von den übrigen Diagonalen geschnitten werden?

Zählt man in dem Neck, in welchem die Diagonale gezogen ist, die Ecken, welche auf der einen Seite derselben liegen, und findet r, so liegen auf der andern Seite n—r—2. Von jeder der r Ecken können mithin n — r — 2 Diagonalen gezogen werden, welche Schnittpunkte hervorbringen, und im Ganzen werden daher r (n — r — 2) Durchschnittspunkte erzeugt. Diese Zahl wird ein Maximum für ein und dasselbe Neck, wenn $r = \frac{n}{2} - 1$ oder, wo dies nicht geschehen kann, so wenig als möglich von diesem Ausdruck verschieden genommen wird. Denn setze ich in dem Producte $r\,(n-r-2)$ für $r\ \frac{n}{2}-1\pm x$, so erhalte ich $\left[\frac{n}{2}-1\pm x\right]\left[\frac{n}{2}-1\mp x\right]$ und dies giebt multiplicirt $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2-x^2$, wird also um so größer, je kleiner x angenommen wird, und ein Maximum, sobald x verschwindet, d. h. $r=\frac{n}{2}-1$ ist.

Beispiel. Verbindet man im 100eck durch eine Diagonale zwei Ecken, zwischen denen auf der einen Seite respective 10, 30 oder 49 andere Ecken liegen, so werden diese Diagonalen durch die übrigen in 880, 2040, 2499 Punkten geschnitten, und in mehr als 2499 Punkten kann keine Diagonale eines 100ecks geschnitten werden.

16) Von zwei an den Enden ein und derselben Seite liegenden Ecken eines Necks aus sind die Diagonalen gezogen; in wieviel Dreiecke und Vierecke zerschneiden dieselben das ganze Neck?

Nach Nr. 13 schneiden sich die gezogenen Diagonalen in $(n-2)_2$ Punkten und zerlegen sich, da jeder Schnittpunkt auf zwei Diagonalen liegt und jede der $2\,(n-3)$ Diagonalen durch r auf ihr liegende Schnittpunkte in $r+1$ Theile getheilt wird, in $2\,(n-2)_2+2\,(n-3)$ Stücke. Jedes dieser Stücke tritt in den entstehenden Dreiecken und Vierecken — mehrseitige Figuren werden durch das Ziehen der Diagonalen gar nicht gebildet — zweimal als Seite auf, während jede Neckseite immer nur einem der gebildeten Dreiecke als Seite dient. $4\,(n-2)_2+4\,(n-3)+n$ ist mithin die Summe aller Seiten der entstandenen Dreiecke und Vierecke. Ebenso leicht ist die Summe ihrer Winkel in Rechten ausgedrückt zu bestimmen; sie ist die Summe der Neckswinkel und der um die $(n-2)_2$ Diagonalenschnittpunkte liegenden, d. h. $=2n-4+4\,(n-2)_2$. Ist nun x die Zahl aller in Frage kommenden Dreiecke, y die aller Vierecke, so ist auch $3x+4y$ gleich der Summe der Seiten und $2x+4y$ gleich der Summe der Winkel. Es gelten daher die Gleichungen:

$$3x+4y=4\,(n-2)_2+4\,(n-3)+n \text{ und}$$
$$2x+4y=4\,(n-2)_2+2n-4$$
$$x=3n-8$$

und daraus ergiebt sich durch Substitution in eine der beiden Gleichungen $y=\frac{n^2-7n+12}{2}$ $=(n-3)_2$ und $x+y=\frac{n^2-n-4}{2}=n_2-2$. Aus diesen Formeln ergeben sich

im	4eck,	5eck,	6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck,	11eck,	12eck . .
Dreiecke . .	4	7	10	13	16	19	22	25	28 . .
Vierecke . .	0	1	3	6	10	15	21	28	36 . .
Figuren . .	4	8	13	19	26	34	43	53	64 . . .

17) Von zwei beliebigen Ecken eines Vielecks aus seien die Diagonalen gezogen; in wieviel Dreiecke, Vierecke und Figuren überhaupt wird das Vieleck durch dieselben zerlegt?

Die Ecken denke ich mir der Reihe nach durch die Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . . n bezeichnet und von den Ecken 1 und r aus die Diagonalen gezogen; dann theilt die Diagonale, welche diese beiden Ecken selbst verbindet, das Neck in ein r eck und ein $(n-r+2)$ eck, während sie selbst von keiner der übrigen Diagonalen geschnitten wird. Die im Neck erzeugten Figuren sind also mit den in den beiden kleineren Figuren entstandenen identisch. In diesen gehen aber die gezogenen Diagonalen von den Endpunkten ein und derselben Seite, nemlich von der Diagonale 1r, aus, und nehmen wir das in der letzten Nummer erzielte Resultat zu Hülfe, so bestimmt sich die Zahl der Dreiecke, Vierecke und Figuren überhaupt

	Dreiecke	Vierecke	Figuren überhaupt
im $r$eck zu	$3r-8$,	$(r-3)_2$,	r_2-2
im $(n-r+2)$ eck zu	$3n-3r-2$,	$(n-r-1)_2$,	$(n-r+2)_2-2$
im $n$eck zu	$3n-10$,	$(r-3)_2+(n-r-1)_2$,	$r_2+(n-r+2)_2-4$.

Das erste Resultat der letzten Reihe ist besonders beachtenswerth, es lehrt, daß die Zahl der entstandenen Dreiecke von r ganz unabhängig ist, und giebt den Satz: Zieht man in einem Neck von zwei beliebigen Ecken aus, welche indeß nicht die Enden einer Seite sein dürfen, die Diagonalen, so ist, welche Ecken auch gewählt sind, die Zahl der durch das Ziehen der Diagonalen entstandenen Dreiecke eine constante, im 36eck z. B. stets 98. — Die Zahl der Vierecke und Figuren überhaupt ist dagegen für jedes bestimmte Neck keine constante, sondern ändert sich mit der Zahl r, d. h. sobald sich mehr oder weniger Seiten zwischen den beiden Hauptecken finden, und setzt man in die beiden von r abhängigen Formeln für r die Zahlen 3, 4, 5 u. s. w. bis $n-1$, so sieht man leicht, daß man dadurch Ausdrücke erhält, welche die Glieder zweier arithmetischer Reihen zweiter Ordnung sind, z. B.: ist $n = 10$ und

r nach einander	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
so ist die Zahl der Vierecke	15,	10,	7,	6,	7,	10,	15
und die Zahl der Figuren	35,	30,	27,	26,	27,	30,	35.

18) Die von einer Ecke eines Necks ausgehenden Diagonalen seien gezogen; wieviel Figuren, theils neben, theils auf einander liegende, sind durch dieselben im Neck erzeugt?

Durch das Ziehen der $n-3$ Diagonalen wird das Neck in $n-2$ Dreiecke zerlegt; außer diesen neben einander liegenden giebt es kein Dreieck in der Figur. Je zwei neben einander liegende Dreiecke bilden dagegen ein Viereck, folglich beträgt die Anzahl derselben $n-3$. Ebenso bilden je drei neben einander liegende Dreiecke und zwar nur diese ein Fünfeck, je vier ein Sechseck, je fünf ein Siebeneck, je $r-2$ ein Reck. Die Zahl der Fünfecke ist mithin um 1 geringer als die der Vierecke, d. h. $= n-4$, ebenso die Anzahl der Sechsecke $n-5$, der Siebenecke $n-6$, der Recke $n-r+1$ und endlich der $N-1$ecke, d. h. der Figuren mit der größtmöglichen Seitenzahl, 2. Alle Figuren zusammen sind daher gleich der Summe der Reihe

$$n-2+n-3+n-4+\ldots\ldots+3+2 = \frac{n(n-3)}{2}$$

oder mit andern Worten: Die in einer Ecke eines Necks zusammenstoßenden Diagonalen bilden mit den Seiten des Necks allein ebensoviel Figuren, als sich Diagonalen überhaupt im Neck ziehen lassen.

19) In einem Neck sind sämmtliche Diagonalen gezogen; wieviel neben, in oder auf einander liegende Figuren sind in dem Neck entstanden, deren Ecken zugleich Ecken des Necks sind?

Die verlangten Figuren können Dreiecke, Vierecke, Fünfecke ꝛc. sein. Die Zahl der einzelnen Arten ist leicht zu finden. Denkt man je drei Ecken, beliebig welche, verbunden, so erhält man ein Dreieck. So oft sich also aus den n Ecken je 3 zu einer Gruppe zusammenstellen lassen, so oft erhält man ein Dreieck der gewünschten Art; mithin ist die Zahl der Dreiecke gleich der Zahl der Combinationen der dritten Klasse von n Elementen, d. h. $= n_3$. Ebenso die Zahl der möglichen Vierecke gleich der Zahl der möglichen Zusammenstellungen sämmtlicher Ecken des Vielecks zu je 4 oder $= n_4$, die Zahl der Fünfecke analog $= n_5$, die der Sechsecke $= n_6$ u. so fort.

Die Anzahl sämmtlicher Figuren von vorgeschriebener Beschaffenheit beträgt daher:

$$n_3 + n_4 + n_5 + n_6 \ldots\ldots\ldots + n_{n-2} + n_{n-1}.$$

Das letzte Glied dieser Reihe entspricht der Zahl der gewünschten $N-1$ ecke und Figuren mit mehr Seiten, als diese besitzen, können in der in der Aufgabe angedeuteten Weise im Neck nicht gebildet werden. Die so erlangte Reihe wäre nun noch zu addiren. Da sie indeß keine einfache arithmetische oder geometrische Reihe ist, sondern aus zwei verschiedenen, einer aufsteigenden und fallenden, in denen allerdings die meisten Glieder, aber doch nicht alle gleich sind, besteht, so müssen wir auch eine eigene Weise der Summirung anwenden. Wir entwickeln $(1 + 1)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze und erhalten

$$2^n = 1 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + \ldots\ldots + n_{n-2} + n_{n-1} + 1, \text{ folglich}$$

$$2^n - n_2 - n_1 - 2 = n_3 + n_4 + n_5 + \ldots\ldots + n_{n-2} + n_{n-1}$$

= der Zahl der verlangten Figuren, und da $n_1 + n_2 = (n + 1)_2$ ist, so haben wir die Summe der verlangten Figuren $= 2^n - (n + 1)_2 - 2$ zu setzen. Diese Formel giebt ausgerechnet für das

4 eck,	5 eck,	6 eck,	7 eck,	8 eck,	9 eck,	10 eck,	11 eck
4	15	41	98	218	465	967	1980.

Die erhaltenen Zahlen lassen sich, wie schon das allgemeine Glied andeutet, als eine Differenzenreihe zwischen einer geometrischen Progression und einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung auffassen; addirt man nemlich zu den einzelnen Gliedern die entsprechenden der Reihe

12, 17, 23, 30, 38, 47, 57, 68,

so erhält man eine Reihenfolge von Größen, von denen jede die Hälfte der folgenden ist. Die Summe der Hauptreihe beträgt für n beliebige Glieder vom ersten an gerechnet

$$2^{n+4} - \frac{n^3 + 12n^2 + 59n + 96}{6}.$$

20) In einem Neck sind sämmtliche Diagonalen gezogen; wieviel Dreiecke und Vierecke entstehen, deren Seiten ohne Ausnahme Diagonalen sind und deren Ecken in den Ecken des Necks liegen?

Denke die Ecken der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . . $n-1$, n bezeichnet und beachte zuerst die Diagonalen, welche von 1 ausgehen, also 1.3, 1.4, 1.5 u. s. w. fort. Die Linie 1.3 kann in $n-5$ Dreiecken der verlangten Art als Seite auftreten, denn jede der Ecken des Vielecks mit Ausschluß der 5 Ecken 1, 2, 3, 4 und n giebt mit 1 und 3 verbunden ein Dreieck der gewünschten Art. Ebenso erscheint die Diagonale 1.4 in $n-6$ Dreiecken, deren Seiten nur Diagonalen sind, als eine dieser Seiten, denn jetzt kann außer den 5 oben ausgeschlossenen Ecken die Ecke 5 nicht zur Bildung eines Dreiecks benutzt werden. Die Diagonale 1.5 muß wieder in einem Dreieck weniger als Seite auftreten, denn ihre Ecken können mit der bis daher benutzten Ecke 6 nicht verbunden werden und die bei 1.4 ausgeschlossenen Ecken müssen auch jetzt ausgeschlossen bleiben, denn wenn auch 1.5 mit 3 verbunden ein Diagonalendreieck giebt, so giebt es doch kein neues, sondern eins, welches bereits bei Betrachtung der Diagonale 1.3 in Anrechnung gebracht wurde; Diagonale 1.5 erscheint mithin in $n-7$ neuen Dreiecken als Seite, Diagonale 1.6 analog in $n-8$ neuen, 1.7 in $n-9$ u. s. w., bis endlich die Diagonale zwischen den Ecken 1 und $n-3$ nur zur Bildung eines neuen Dreiecks noch beitragen kann. In Summa erscheinen dem zu Folge die von Ecke 1 ausgehenden Diagonalen in

$$n-5+n-6+n-7+n-8+\ldots\ldots+2+1=(n-4)_2$$

Dreiecken der verlangten Art als Seiten und 1 selbst ist in diesen $(n-4)_2$ Dreiecken eine der 3 Ecken. Dasselbe gilt von den Ecken 2, 3, 4 . . . n, alle zusammen sind daher gleichsam $n(n-4)_2$ verschiedene Dreiecksecken oder, da jedes Dreieck 3 Ecken hat, die Ecken von $\frac{n}{3}(n-4)_2$ Diagonalendreiecken, deren Zahl in der Aufgabe gefordert wurde. Nach dieser Formel finden sich keine Diagonalendreiecke im Viereck und Fünfeck, sodann im

6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck,	11eck,	12eck,	13eck	. . .
2	7	16	30	50	77	112	156	. . .

Eine arithmetische Reihe dritter Ordnung.

Die Zahl der nur von ganzen Diagonalen gebildeten Vierecke giebt eine ähnliche Betrachtung der von 1 ausgehenden Diagonalen. Die Linie 1.3 liefert mit 1, 2, 3, 4 oder n verbunden kein Viereck; nimmt man aber von den andern $n-5$ Ecken des Necks irgend zwei, die nicht zugleich Endpunkte ein und derselben Seite sind, verbindet sie sowohl mit einander als mit 1 und 3, so gewinnt man eins der gewünschten Vierecke. Aus $n-5$ Ecken lassen sich aber $(n-5)_2$ Eckenpaare, d. h. Combinationen zur zweiten Klasse n bilden und $n-5$ Ecken sind andererseits die Endpunkte von $n-6$ Seiten im Neck. $(n-5)_2-(n-6)$ ist also die Zahl der Diagonalenvierecke, in denen Diagonale 1.3 eine Seite ist. Eine analoge Behandlung der Linie 1.4, mit der je zwei der Ecken 6, 7, 8 . . . . bis $n-1$, jedoch nicht zwei unmittelbar auf einander folgende, zu einem Viereck vereint werden müssen, giebt $(n-6)_2-(n-7)$ neue Vierecke, in denen sie als Seite erscheint. Ebenso die Diagonale 1.5 $(n-7)_2-(n-8)$ neue Vierecke, 1.6 $(n-8)_2-(n-9)$ u. s. w. Sämmtliche von 1 kommende oder nach 1 gehende Diagonalen tragen also zur Bildung von

$(n-5)_2-(n-6)_1+(n-6)_2-(n-7)_1+(n-7)_2-(n-8)_1+(n-8)_2-(n-9)_1+\ldots+2_2-1$ Vierecken bei, und addirt man die Glieder mit gleichem Index nach der Formel:

$$n_n+(n+1)_n+(n+2)_n\ldots\ldots+a_n=(a+1)_{n+1},$$

so erhält man $(n-4)_3-(n-5)_2=(n-5)_3$ als Summe aller Diagonalenvierecke, in denen Ecke 1 Scheitel eines Winkels ist. Jede der übrigen Ecken des Necks ist natürlich in ebensoviel Vierecken als Ecke gelegen oder mit andern Worten, sämmtliche n Ecken leisten die Dienste von $n(n-5)_3$ Vierecksecken. Je 4 derselben bestimmen ein Diagonalenviereck, deren Zahl dem zu Folge $\frac{n}{4}(n-5)_3$ ist. — In den Vielecken, welche weniger als 8 Seiten haben, können, wie auch die Formel andeutet, keine Diagonalenvierecke gebildet werden, dagegen existiren im

8 eck,	9 eck,	10 eck,	11 eck,	12 eck,	13 eck,	14 eck . . .	
2	9	25	55	105	182	294 . . .	

Eine Reihe vierter Ordnung.

Zweite Lösung. Die Zahl der eben aufgefundenen Diagonalendreiecke und Vierecke kann noch in anderer Weise bestimmt werden. Die Figuren müssen zwei Bedingungen erfüllen: 1) Ihre Ecken müssen Ecken des Vielecks sein, 2) ihre Seiten Diagonalen. Die Zahl der Figuren, welche die erste Bedingung erfüllten, ist uns bekannt, sie beträgt für die Dreiecke n_3, für die Vierecke n_4; strichen wir von dieser Zahl diejenigen, welche die zweite Bedingung nicht erfüllen, d. h. die Dreiecke oder Vierecke, welche zwei unmittelbar auf einander folgende Ecken des Necks als Winkelspitzen besitzen, so würden die verlangten übrig bleiben. Unsere Aufgabe modificirt sich also dahin, von den n_3 oder n_4 Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 . . . n — mit diesen denke ich die Ecken bezeichnet — die auszumerzen, welche zwei auf einander folgende Zahlen zeigen. n und 1 gelten gleichfalls als zwei derartige Zahlen. Unter den Combinationen der dritten Klasse befinden sich aber $n-2$, welche die Elemente x und $x+1$ besitzen, denn jedes der übrigen $n-2$ Elemente kann, um eine der Combinationen zu bilden, x und $x+1$ zugesellt werden; solcher Elementenpaare wie x und $x+1$ giebt es aber in unserm Falle n, nemlich 1.2, 2.3, 3.4 . . . . n.1, wir haben also, könnte man leicht schließen, $n(n-2)$ Combinationen zu streichen um die gewünschten zu behalten. Dies darf indeß nicht geschehen, weil wir mehrere Combinationen so eben doppelt gerechnet haben. Alle Combinationen von der Form $x, x+1, x+2$ erhielten wir nemlich, indem wir erst $x+2$ den Ecken x und $x+1$ und dann x den Ecken $x+1$ und $x+2$ zugesellten. Combinationen wie $x, x+1, x+2$ giebt es aber unter den aufgestellten n, mithin sind nicht $n(n-2)$, sondern nur $n(n-3)$ der n_3 Combinationen zu streichen, um die Zahl der Diagonalendreiecke zu erlangen, und $n_3 - n(n-3) = \frac{n}{6}[n^2 - 9n + 20]$ $= \frac{n}{3}(n-4)_2$.

Unter den n_4 Combinationen der n Elemente zur vierten Klasse giebt es, um zu den Vierecken überzugehen, $(n-2)_2$, welche die Zahlen x und $x+1$ enthalten. Bilde ich nemlich aus den $n-2$ Elementen, die nicht x und $x+1$ heißen, irgend eine Combination zur zweiten Klasse und schreibe sie neben x und $x+1$, so habe ich eine jener $(n-2)_2$ Combinationen. Elementenpaare wie x und $x+1$ giebt es aber, wie wir schon sahen, n, also haben wir $n(n-2)_2$ Combinationen zu streichen, wenn wir nicht wieder bei Zusammenstellung derselben einzelne mehrfach erhalten haben. Dies ist aber der Fall, jede der Combinationen, welche drei Elemente von der Form $x, x+1$, $x+2$ enthält, ist wie oben auf zwiefache Weise entstanden, ihre Zahl beträgt aber jetzt nicht n, sondern $n(n-3)$, denn die bestimmte Gruppe $x, x+1, x+2$ kann allein in $n-3$ derartigen Combinationen auftreten. Kommen diese $n(n-3)$ Verbindunger von den $n(n-2)_2$ in Abrechnung, so können Combinationen wie $x, x+1, x+2, x+3$ nicht noch besonders in Abzug gesetzt werden, denn wenn sie auch beim ersten Combiniren 3 mal erzeugt wurden, so entstanden sie doch bei Bildung der $n(n-3)$ Combinationen gleichfalls auf doppelte Weise und kommen daher in genügender Weise in Rechnung. Verbindungen von der Form x, x + 1, y, y + 1, in denen y nicht = x + 2, müssen dagegen noch besonders beachtet werden. Sie finden sich unter den $n\,(n-2)_2$ Combinationen zweimal, müssen also einmal als nicht zu streichende aufgeführt werden. Ihre Anzahl ist $\frac{n}{2}\,(n-5)$, denn x, x + 1 kann mit n — 5 verschiedenen y, y + 1 zu einer Combination vereint werden und n Elemente liefern n Elementenpaare wie x, x + 1. Der Divisor 2 muß endlich beigefügt werden, weil die Combinationen x, x + 1, y, y + 1 und y, y + 1, x, x + 1 identisch sind. Die Zahl der zu streichenden Combinationen beträgt mithin $n\,(n-2)_2 - n\,(n-3) - \frac{n}{2}\,(n-5)$ oder $n\,(n-3)_2 - \frac{n}{2}\,(n-5)$. Ziehe ich dies Resultat ab von n_4, so erhalte ich

$$n_4 - n\,(n-3)_2 + \frac{n}{2}\,(n-5) = \frac{n}{24}\,[n^3 - 18n^2 + 107n - 210] = \frac{n}{4}\,(n-5)_3.$$

21) Wieviel Figuren von beliebiger, aber bestimmter Seitenzahl lassen sich in ein gegebenes Neck so einzeichnen, daß ihre Ecken in den Ecken des Necks liegen und ihre Seiten Diagonalen sind?

Jeder der in der letzten Nummer eingeschlagenen Wege könnte benutzt werden, um die Zahl der Diagonalenfünfecke, Sechsecke oder überhaupt Recke zu bestimmen, wir überlassen indeß die Verfolgung beider dem Leser und schlagen einen neuen ein. — Die Ecken des Necks heißen wieder 1, 2, 3, 4 .... n und die Diagonale 1.3 ist besonders markirt gezogen. Jetzt denke man sämmtliche Diagonalenvierecke, in denen Diagonale 1.3 Seite ist, gezeichnet, und sobald dies geschehen ist, lasse man Diagonale 1.3 im Gedanken kleiner und kleiner werden, endlich verschwinden. Mit ihr verschwindet Dreieck 1.2.3, während aus dem Neck ein N—2 eck wird und jedes Diagonalenviereck in ein Diagonalendreieck übergeht. Die so erhaltenen Dreiecke sind sämmtliche Diagonalendreiecke des N—2 ecks, die die Ecke 1 selbst als Ecke benutzen, und wir haben daher den Satz: „Die Zahl der Diagonalenvierecke eines Necks, welche eine bestimmte, ein Dreieck von dem Neck abschneidende Diagonale zur Seite haben, ist gleich der Zahl der Diagonalendreiecke eines N—2 ecks, die eine gemeinsame Ecke besitzen.“ Hätten wir beim Beginn der Betrachtung statt der Diagonalenvierecke die Diagonalen-r Ecke mit der Seite 1.3 gezeichnet gedacht und dann jene Linie verschwinden lassen, so würde als Endresultat offenbar ein Satz sich ergeben haben, der sich von dem aufgestellten nur dadurch unterscheiden könnte und müßte, daß in ihm die Worte Diagonalenviereck und Dreieck Diagonalen-r Eck und R—1 eck lauten. Die Zahl der Diagonalenfünfecke, welche im Neck die Diagonale 1.3 als Seite haben, ist mithin $= (n-7)_3$, denn soviel Diagonalenvierecke stoßen, wie wir wissen, in einer Ecke eines N—2 ecks zusammen. Diagonale 1.4 ist in $(n-8)_3$ Diagonalenfünfecken Seite, denn lassen wir im ursprünglich gegebenen Neck die Seiten 1.2 und 2.3 mit der Diagonale 1.3 zusammenfallen, so spielt in dem dadurch entstandenen N—1 eck Diagonale 1.4 dieselbe Rolle, die 1.3 im Necke selbst spielte. Ebenso erscheint Diagonale 1.5 in $(n-9)_3$ Fünfecken als Seite, 1.6 in $(n-10)_3$ u. s. w. Ecke 1 ist also in

$(n-7)_3 + (n-8)_3 + (n-9)_3 + (n-10)_3 + \ldots + 1$ oder $(n-6)_4$ Fünfecken Winkelspitze. Im ganzen Neck finden sich also n $(n-6)_4$ Ecken für Fünfecke oder $\frac{n}{5}$ $(n-6)_4$ Diagonalenfünfecke. —

Ist $(n-6)_4$ die Zahl der eine gemeinsame Ecke besitzenden Diagonalenfünfecke, so ist Diagonale 1.3 in $(n-8)_4$ Diagonalensechsecken Seite, 1.4 in $(n-9)_4$, 1.5 in $(n-10)_4$ und Ecke 1 in $(n-8)_4 + (n-9)_4 + (n-10)_4 + \ldots\ldots + 1$, d. h. in $(n-7)_5$ Diagonalensechsecken eine der 6 Winkelspitzen, $\frac{n}{6}$ $(n-7)_5$ daher die Zahl sämmtlicher Sechsecke im Neck. Auf dieselbe Weise findet man als Zahl der Diagonalensiebenecke $\frac{n}{7}$ $(n-8)_6$, der Achtecke $\frac{n}{8}(n-9)_7$ und kann daher schließen daß $\frac{n}{r}$ $[n-r-1]_{r-1}$ die Zahl sämmtlicher Diagonalen-r Ecke und $(n-r-1)_{r-1}$ die Anzahl derjenigen unter ihnen ist, welche eine gemeinsame Ecke haben. Ist dies aber der Fall, so befindet sich auch die Diagonale 1.3 in $(n-r-3)_{r-1}$ R + 1 ecken, Diagonale 1.4 in $(n-r-4)_{r-1}$, 1.5 in $(n-r-5)_{r-1}$ und Ecke 1 in $(n-r-3)_{r-1} + (n-r-4)_{r-1} + (n-r-5)_{r-1} + \ldots\ldots + 1$ R + 1 ecken als Winkelspitze. Die Summe der Reihe beträgt aber $(n-r-2)_r$, folglich $\frac{n}{r+1}$ $[n-r-2]_r$ die Zahl der Diagonalen-r + 1 ecke, welche überhaupt in ein Neck eingezeichnet werden können, oder, was dasselbe bedeutet, die aus Analogie aufgestellte Formel für die Diagonalen-r Ecke im Necke ist durch den Schluß von n auf n + 1 als wahr erwiesen.

Beispiel. Im 36eck ist die Zahl der Diagonalendreiecke 5952, der Diagonalensechsecke 712530, der Achtecke 3996135, der Achtzehnecke 2, der Zwanzigecke 0, wie es denn überhaupt nicht möglich ist, ein Diagonalenvieleck mit mehr als $\frac{n}{2}$ Ecken in ein Polygon einzuzeichnen. Im Zwölfeck beträgt die Anzahl sämmtlicher Diagonalenfiguren 255.

22) Wieviel Dreiecke entstehen im Innern eines Necks, deren Seiten Diagonalen und deren Ecken Durchschnittspunkte der Diagonalen sind, wenn letztere ohne Ausnahme gezogen werden?

Jedes der bezeichneten Dreiecke wird durch 3 Diagonalen gebildet, die in 6 verschiedenen Ecken endigen. Je 6 Ecken scheinen also geeignet, eins der verlangten Dreiecke hervorzubringen, und sie thun dies auch, wenn man die erste mit der vierten, die zweite mit der fünften und die dritte mit der sechsten verbindet. Eine andere Verbindungsweise der 6 Ecken giebt kein Dreieck mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften. Je 6 Ecken geben also eins, aber auch nur eins der verlangten Dreiecke. Die Anzahl derselben ist mithin gleich der Zahl der Combinationen der sechsten Klasse von n Elementen oder gleich n_6. Daher finden sich im

6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck,	11eck,	12eck,	13eck
1	7	28	84	210	462	924	1716

Eine Reihe sechster Ordnung.

23) Wieviel Dreiecke entstehen überhaupt durch das Durchschneiden der Diagonalen im Neck?

Die durch das Ziehen der Diagonalen entstehenden Dreiecke lassen sich in 4 Klassen theilen, je nachdem nemlich keine, eine, zwei oder alle drei Ecken der Dreiecke zugleich Ecken des Necks sind. Die Anzahl der Dreiecke, welche der ersten Gruppe angehören, haben wir eben zu n_6 bestimmt, ebenso die der letzten schon früher zu n_3, es wären mithin nur noch die entsprechenden

Zahlen für die beiden andern Klassen aufzusuchen. In den Dreiecken, welche zwei Winkelspitzen mit dem Neck gemeinsam haben, ist die dritte Ecke der Durchschnittspunkt zweier Diagonalen. Betrachten wir aber einen solchen, so sehen wir, daß er nicht die Spitze eines Dreiecks allein, sondern die 4 verschiedener ist. Jeder zweite Diagonalenschnittpunkt ist Ecke von 4 neuen Dreiecken, n_4 Diagonalenschnittpunkte existiren im Neck, folglich $4n_4$ die Zahl der Dreiecke der dritten Klasse. Dasselbe Resultat hätte sich ergeben, wenn wir gesagt hätten: n_4 ist die Zahl sämmtlicher Vierecke, in denen alle Ecken zugleich Ecken des Necks sind, jedes dieser Vierecke wird durch seine beiden Diagonalen, die auch Diagonalen des Necks sind, in 4 der verlangten Dreiecke getheilt, also $4n_4$ deren Anzahl. — Um endlich zu erfahren, wieviel Dreiecke nur eine Ecke mit dem Neck gemeinsam haben, denke ich wieder sämmtliche Ecken der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . n bezeichnet und die von 1 ausgehenden Diagonalen 1.3, 1.4 u. s. w. ohne Ausnahme gezogen. Fange ich jetzt an, die von 2 auslaufenden Diagonalen gleichfalls zu zeichnen, und beginne mit 2.n, so schneidet diese die n—3 von 1 kommenden Diagonalen in ebensoviel Punkten, je zwei derselben constituiren mit Ecke 1 zusammen ein verlangtes Dreieck. n — 3 Punkte geben aber $(n-3)_2$ Punktenpaare, folglich giebt es im Neck auch $(n-3)_2$ Dreiecke, die Ecke 1 zur Spitze und ein nicht in einer Ecke endigendes Stück der Diagonale 2.n als Grundlinie haben. Diagonale 2.n — 1 werde nun gezogen, sie schneidet die von 1 ausgehenden in n — 4 Punkten und bringt daher $(n-4)_2$ Dreiecke der verlangten Art mit Ecke 1 zusammen hervor. Ebenso läßt Diagonale 2.n — 2 $(n-5)_2$ Dreiecke mit 1 entstehen, Diagonale 2.n — 3 $(n-6)_2$ u. s. w., endlich Diagonale 2.5, welche nur noch zwei von 1 kommende trifft, 1. Sämmtliche in den Ecken 1 und 2 endigende Diagonalen erzeugen also

$$(n-3)_2 + (n-4)_2 + (n-5)_2 + (n-6)_2 + \ldots + 1 \text{ oder } (n-2)_3$$

Dreiecke der zweiten Klasse. Beachten wir nun die von 3 ausgehenden Diagonalen; die erste 3.n schneidet die von 1 kommenden mit Ausnahme von 1.3 sämmtlich, bringt also n—4 Schnittpunkte und $(n-4)_2$ neue Dreiecke zu den gefundenen hinzu. Diagonale 3.n — 1 läßt analog $(n-5)_2$ Dreiecke mit Ecke 1 entstehen, Diagonale 3.n — 2 $(n-6)_2$, und da $(n-4)_2 + (n-5)_2 + (n-6)_2 + \ldots + 1 = (n-3)_3$ ist, so ist auch dies die Zahl der Dreiecke der zweiten Klasse, deren Spitze 1 ist und deren Seiten Abschnitte der von 1 und 3 kommenden Diagonalen sind. Ebenso geben die Diagonalen, deren einer Endpunkt 4, 5, 6 . . . r ist, mit den von 1 kommenden $(n-4)_3$, $(n-5)_3$, $(n-6)_3$, $(n-r)_3$ Dreiecke derselben Art. Addirt man aber die Reihe

$$(n-2)_3 + (n-3)_3 + (n-4)_3 + (n-5)_3 \ldots + (n-r)_3 \ldots + 1,$$

so ist $(n-1)_4$ die Summe aller der Dreiecke der zweiten Klasse, die in Ecke 1 zusammentreffen. Ebensoviel stoßen in jeder anderen Ecke des Necks zusammen, folglich $n\,(n-1)_4$ oder, was dasselbe bedeutet, $5n_5$ die Zahl der gewünschten Dreiecke.

Schneller ließe sich dasselbe Resultat in folgender Weise finden. Zieht man in einem Fünfeck 3 Diagonalen, so entsteht ein Dreieck mit den Eigenthümlichkeiten der im Neck gesuchten; zieht man alle 5 Diagonalen, so entstehen 5 derartige Dreiecke. Umgekehrt, betrachtet man eins der

Dreiecke im Neck, so endigen seine Seiten in 5 Ecken des Necks; diese sind durch Seiten oder Diagonalen zu einem Fünfeck verbunden und jedes der verlangten Dreiecke läßt sich also als ein durch drei Diagonalen eines jener Fünfecke erzeugtes ansehen. Die Zahl der Fünfecke beträgt aber, wie wir wissen, n_5, in jedem sind 5 verlangte Dreiecke, also in allen oder im Neck $5n_5$. — Addiren wir schließlich die für die vierte Klasse von Dreiecken gewonnenen Größen, so ergiebt sich die Zahl sämmtlicher im Neck durch das Ziehen der Diagonalen entstehender Dreiecke $= n_3 + 4n_4 + 5n_5 + n_6$. Mithin finden sich im

4eck,	5eck,	6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck,	11eck	
0,	5,	30,	105,	280,	630,	1260,	2310	Dreiecke zweiter Klasse,
8,	35,	111,	287,	644,	1302,	2430,	4257	Dreiecke überhaupt.

Zwei arithmetische Reihen fünfter und sechster Ordnung.

24) Wieviel Ecken hat ein Vieleck, in dem sich 210 Dreiecke finden, deren Ecken ohne Ausnahme Schnittpunkte von Diagonalen sind?

Die Zahl der Dreiecke, in denen keine Ecke zugleich Ecke des Necks ist, beträgt n_6, folglich $\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6} = 210$. Multiplicire ich die beiden äußern, die beiden mittleren und die beiden anderen Factoren des Ausdrucks mit einander und die ganze Gleichung mit 90, so wird

$$\frac{(n^2-5n)}{2}\,\frac{(n^2-5n+4)}{2}\,\frac{(n^2-5n+6)}{2} = 18900.$$

$\frac{n^2-5n}{2} = z$ gesetzt, giebt $z(z+2)(z+3) = 18900$

$$z^3 + 5z^2 + 6z = 18900$$

$$z^3 - 25z^2 + 30z^2 - 750z + 756z - 18900 = 0$$

$$(z-25)(z^2 + 30z + 756) = 0.$$

Jeder der beiden Factoren $= 0$ gesetzt, läßt die Hauptgleichung 0 werden, also

$$z = 25 \text{ oder } z = -15 \pm \sqrt{-431}$$

und n mit Berücksichtigung der Hülfsgleichung $n^2 - 5n = 2z$

$$= 10 = -5 = \frac{5 \pm \sqrt{-35 \pm \sqrt{1724}}}{2}.$$

Von diesen 6 verschiedenen der aufgestellten Gleichung genügenden Werthen entspricht unserer Aufgabe nur der erste $n = 10$. Das Zehneck ist also das gesuchte Vieleck.

25) Wie groß ist im Neck die Anzahl der Vierecke, welche drei unmittelbar auf einander folgende Ecken des Necks und einen Diagonalenschnittpunkt als Ecken haben?

Heißen die Ecken des Necks 1, 2, 3, 4 . . . n und bestimmen wir zuerst die Zahl der Vierecke, welche die Seiten 1.2 und 2.3 besitzen. Außer 1.2 und 2.3 haben diese Vierecke offenbar noch 2 von 1 und 3 ausgehende Diagonalen zu Seiten, und so oft sich 2 dieser Diagonalen schneiden, so oft entsteht ein Viereck der verlangten Art. Diagonale 1.3 kommt nicht zum Schnitt, dagegen wird 1.4 von allen übrigen in 3 endigenden Diagonalen geschnitten und bildet daher mit 1.2 und 2.3 $n-4$ Vierecke. 1.5 erhält durch die von 3 kommenden Diagonalen $n-5$ Schnittpunkte, 1.6 $n-6$, 1.7 $n-7$, . . . 1.n$-$1 einen. Es finden sich also im Neck

$n-4+n-5+n-6+n-7+\ldots+1$ oder $(n-3)_2$ Vierecke, die die Ecken 1.2.3 und einen Diagonalenschnittpunkt als Winkelspitzen haben. Eckengruppen von der Form $r, r+1, r+2$, deren eine 1.2.3 war, giebt es aber im Neck n, folglich $n\,(n-3)_2$ die Zahl der verlangten Vierecke.

26) Wie groß ist im Neck die Zahl der Figuren überhaupt, welche r auf einander folgende Ecken des Necks und einen Diagonalenschnittpunkt zu Ecken haben?

Wir forschen zuerst nach der Anzahl der $R+1$ ecke, die die Ecken $1, 2, 3 \ldots r$ des Necks mitbesitzen. Die fehlende Ecke wird durch zwei von 1 und r auslaufende Diagonalen erzeugt. Aber nicht jedes dieser Diagonalenpaare erzeugt eine derartige Ecke. Diagonale $1.r$ theilt nemlich das Neck in ein Reck und ein $(n-r+2)$ eck, und zieht man zwei der genannten Diagonalen, die zugleich im r eck Diagonalen sind, so durchschneiden sich dieselben zwar möglicher Weise, geben dann auch ein $R+1$ eck, aber eins mit einem einspringenden Winkel, und diese haben wir, um Verwirrungen zu vermeiden, ein- für allemal aus unsern Betrachtungen ausgeschlossen. Die im $N-r+2$ eck von den Endpunkten der Seite 1r auslaufenden und sich schneidenden Diagonalenpaare allein geben uns also mit jedem Schnittpunkte eins der verlangten $R+1$ ecke. Der Schnittpunkte sind aber nach Nummer 13 und 14 $(n-r)_2$, also $n\,(n-r)_2$ die Anzahl der verlangten $R+1$ ecke, denn Eckengruppen wie $1, 2, 3 \ldots r$ giebt es im Neck n verschiedene; jede Ecke kann ja die erste einer solchen Gruppe sein. Aus diesem allgemeinen Resultate folgt, daß in jedem Neck $n\,(n-2)_2$ Dreiecke, $n\,(n-4)_2$ Fünfecke, $n\,(n-5)_2$ Sechsecke u. s. w. der verlangten Art existiren. Figuren von der gewünschten Beschaffenheit mit mehr als $n-2$ Seiten kommen nicht vor, die Zahl der letzteren beträgt gerade n und die sämmtlicher Figuren:

$$n\,(n-2)_2 + n\,(n-3)_2 + n\,(n-4)_2 + \ldots + n = n\,(n-1)_3 = 4n_4,$$

ist also gleich der Zahl der Dreiecke die zwei beliebige Ecken des Necks und einen Diagonalenschnittpunkt zu Ecken haben. Hätten wir dieses Uebereinstimmen, welches sich auch aus der Betrachtung jedes Vielecks ergiebt, benutzt, so hätten wir unsere Frage natürlich schneller gelöst, aber die Anzahl der Dreiecke, Fünfecke, Sechsecke u. s. f., welche den gestellten Bedingungen genügen, nicht kennen gelernt.

27) Von den n Ecken eines Vielecks seien drei beliebige a, b, c besonders bezeichnet. Wieviel Vierecke entstehen, wenn sämmtliche Diagonalen gezogen sind, von denen je drei Ecken in a, b und c fallen, während die vierte ein Diagonalenschnittpunkt ist?

Die vierte Ecke jedes dieser Vierecke entsteht, indem zwei von den Ecken a, b, c ausgehende Diagonalen sich schneiden. Wie oft ist dies möglich? Giebt jeder Schnittpunkt ein Viereck? — Zwischen a und b mögen α, zwischen b und c β und zwischen c und a γ Ecken im Neck liegen. Denke ab und bc gezogen und es entsteht ein $\gamma+3$ eck; seine Ecken sind abc und die γ zwischen c und a liegenden Ecken des Necks. Jedes in diesem $\gamma+3$ eck durch das Zeichnen der Diagonalen entstehende Viereck, welches die in ihm unmittelbar auf einander folgenden Ecken a, b, c als Winkelspitzen benutzt, und deren es nach Nummer 25 γ_2 giebt, genügt auch unserer

Aufgabe. Zieht man ferner die Linien bc und ca, so erhält man ein $(\alpha + 3)$ eck und mit ihm α_2 neue Vierecke, während das durch ca und ab bestimmte $(\beta + 3)$ eck noch β_2 Vierecke liefert. Andere den gestellten Bedingungen genügende Vierecke giebt es nicht, denn die noch nicht benutzten, von a, b, c ausgehenden Diagonalen schneiden sich entweder nicht im Neck oder bringen Vierecke mit überstumpfen Winkeln hervor; die Summe der verlangten Vierecke beträgt also $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$.

Beispiel. Frage ich, wieviel Vierecke es in einem 36eck giebt, deren Ecken zugleich die 1ste, 9te und 27ste Ecke des 36ecks sind, so ist die Antwort $7_2 + 17_2 + 9_2$, denn zwischen der 1sten und 9ten Ecke liegen 7, zwischen der 9ten und 27sten 17 und zwischen der 27sten und 1sten 9. $7_2 + 17_2 + 9_2$ aber $= 193$.

28) Welche r Ecken eines Vielecks müssen gewählt werden, damit die Zahl der R + 1ecke, die einen beliebigen Diagonalenschnittpunkt und jene r Ecken als Winkelspitzen benutzen, ein Maximum oder ein Minimum werde?

Die Zahl der Ecken, welche zwischen den anfangs beliebig ausgewählten r Ecken a, b, c, d ... liegen mögen, sei der Reihe nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$. Denkt man nun sämmtliche r Ecken in der Weise, in der sie im Neck auf einander folgen, verbunden, schließt indeß beim Verbinden die beiden Ecken aus, zwischen welchen sich α Ecken finden, so entsteht ein $(\alpha + \mathrm{r})$ eck und in diesem ist die Zahl der R + 1ecke, welche die r gewählten Punkte als Ecken besitzen und sonst den Bedingungen unserer Aufgabe genügen, nach Nummer 26 α_2. Auf ähnliche Weise können wir nach einander ein $(\beta + \mathrm{r})$ eck, ein $(\gamma + \mathrm{r})$ eck, ein $(\delta + \mathrm{r})$ eck ꝛc. vor unsern Augen sich bilden lassen, und jedes dieser Polygone giebt uns dann auch resp. $\beta_2, \gamma_2, \delta_2 \ldots$ neue R + 1ecke der verlangten Art. Die Summe aller unserer Frage entsprechenden Figuren ist also

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 + \ldots + \varrho_2.$$

Wann ist diese Größe ein Maximum? Wann ein Minimum? — Die einzige Bedingungsgleichung, welche zwischen den r Größen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ existirt, ist

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \pi + \varrho = \mathrm{n} - \mathrm{r}.$$

Setze $\mathrm{n} - \mathrm{r} = \mathrm{m}$, dann ist

$$\varrho = \mathrm{m} - \alpha - \beta - \gamma - \delta \ldots - \pi$$

und entwickelt man in dem Ausdruck $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \ldots + \pi_2 + (\mathrm{m} - \alpha - \beta - \gamma \ldots - \pi)_2$ die einzelnen Glieder, so müßte entschieden werden, wann

$$\tfrac{1}{2}\,[\alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta + \gamma^2 - \gamma + \ldots + \pi^2 - \pi + \mathrm{m}^2 - 2\alpha\mathrm{m} + \alpha^2 - 2\mathrm{m}\beta + 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$- 2\mathrm{m}\gamma + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 \ldots - 2\mathrm{m}\pi + 2\alpha\pi \ldots + \pi^2 - \mathrm{m} + \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \pi]$$

ein Maximum oder Minimum sei. Jener Ausdruck reducirt sich aber auf

$$\frac{\mathrm{m}^2 - \mathrm{m}}{2} + \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots - \alpha\mathrm{m} + \beta^2 + \beta\gamma + \beta\delta + \ldots - \beta\mathrm{m} + \gamma^2 + \gamma\delta + \ldots$$
$$- \mathrm{m}\gamma + \ldots + \pi^2 - \mathrm{m}\pi$$
$$= \mathrm{m}_2 - \alpha(\mathrm{m} - \alpha - \beta - \gamma \ldots - \pi) - \beta(\mathrm{m} - \beta - \gamma - \delta \ldots) - \gamma(\gamma - \delta \ldots) \ldots - \pi(\mathrm{m} - \pi).$$

Beachten wir, daß m stets größer als $\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots + \pi$ ist, also alle in den Parenthesen auftretenden Größen positiv sind, so ist klar, daß der Ausdruck ein Maximum wird, sobald α,

$\beta, \gamma, \delta \ldots . \pi$ insgesammt gleich 0 werden; oder: Die Zahl der R + 1ecke wird so groß als möglich, wenn die r ausgewählten Ecken unmittelbar auf einander folgende sind.

Um auszumitteln, wann der zuletzt aufgestellte Ausdruck ein Minimum werde, nehme man $\beta, \gamma, \delta \ldots . \pi$ einstweilen beliebig bestimmt an und untersuche nur, wie α und ϱ sich in die übrig bleibenden Ecken theilen müssen, damit so wenig R + 1ecke wie möglich sich bilden lassen, oder, was dasselbe sagt, wann der Ausdruck in Bezug auf α allein ein Minimum werde. Dies hängt aber einzig von dem Gliede $\alpha\,(m-\alpha-\beta-\gamma \ldots\ldots -\pi)$ ab, denn in den übrigen kommt α gar nicht vor. Ist indeß dieses Glied ein Maximum, so ist der ganze Ausdruck in Bezug auf α ein Minimum. $\alpha\,(m-\alpha-\beta-\gamma \ldots . -\pi)$ wird aber so groß wie möglich, wenn ich $\alpha = \frac{m-\beta-\gamma-\ldots.-\pi}{2}$ setze, denn dann geht das ganze Glied über in $\frac{[m-\beta-\gamma \ldots.-\pi]^2}{4}$, während, wenn $\alpha = \frac{m-\beta-\gamma \ldots -\pi}{2} \pm x$ gesetzt wird es die Gestalt $\frac{[m-\beta-\gamma \ldots.-\pi]^2}{4} - x^2$ annimmt. Ist $\alpha = \frac{m-\beta-\gamma \ldots.-\pi}{2}$, so ist auch $\varrho = \alpha$, denn beide sind ja zusammen $= m-\beta-\gamma \ldots -\pi$. Hat man also r — 1 Ecken in einem Polygon beliebig ausgewählt und nur noch über die rte Ecke zu disponiren, so muß man, um die Zahl der in unserer Aufgabe characterisirten R + 1ecke so klein als möglich zu machen, die rte Ecke so legen, daß die zwischen der letzten und ersten beliebig ausgewählten Ecke liegenden Winkelspitzen in zwei gleiche oder, wenn dies nicht möglich ist, in zwei möglichst gleiche Gruppen getheilt werden; thut man dies nicht, so wächst mit der Differenz der Gruppen die Zahl der R + 1ecke. Und nun, da man dies weiß, kehre man noch einmal zu den anfangs beliebig ausgewählten r Ecken a, b, c . . . zurück und setze, wo irgend eine Ecke nicht in der Mitte zwischen den beiden Nachbarecken steht, sie dort hin. Durch jede dieser Versetzungen wird die Zahl der R + 1ecke vermindert, und kann man endlich keine Versetzung in dem angedeuteten Sinne mehr ausführen, finden sich also zwischen den ausgewählten Winkelspitzen die andern in möglichst gleicher Weise vertheilt, so ist das Minimum erreicht, denn jede neue Versetzung würde entweder die Zahl der R + 1ecke ungeändert lassen oder vergrößern.

Im 36eck wird daher für die Vierecke ein Minimum eintreten, wenn zwischen den ausgewählten Ecken a, b, c je 11 andere liegen. Es beträgt $3 . 11_2$ oder 165, während das Maximum 33_2 oder 528 ist. Im 33eck ist für die Sechsecke Minimum, wenn zwischen drei Paar der 6 ausgewählten Ecken je 5, zwischen den übrigen je 4 liegen. Zwischen welchen Paaren je 5 oder je 4 liegen, ist gleichgültig, die Zahl derselben beläuft sich immer auf 48.

29) Zieht man in einem Vielecke die Diagonalen, so entstehen neben andern Figuren auch vollständige Vierecke, deren 4 gewöhnliche Ecken Diagonalenschnittpunkte und deren beide außerordentliche zugleich Ecken des Vielecks sind; wieviel solcher Vierecke giebt es?

Jedes dieser vollständigen Vierecke besitzt als Seiten 4 Diagonalen des Necks. Je zwei derselben enden in e i n e r Ecke, während sie von zwei verschiedenen ausgegangen sind. 6 Ecken sind also nöthig, um ein vollständiges Viereck entstehen zu lassen. Aber 6 Ecken genügen auch, um nicht nur ein derartiges Viereck, sondern um 6 hervorzubringen. Fasse nur von 6 beliebig gewählten Ecken je 2 unmittelbar auf einander folgende als die auf, in denen sich die Seiten des vollständigen Vierecks kreuzen, und du wirst dich von der Behauptung überzeugen. Liefert aber jede Combination der sechsten Klasse der n Ecken 6 vollständige Vierecke, so ist die Gesammtzahl derselben $6n_6$, z. B. im Elfeck 2772.

30) Wieviel Figuren, in denen zwei, aber auch nur zwei Diagonalenschnittpunkte als Ecken auftreten, finden sich in jedem Polygon, sobald in demselben sämmtliche Diagonalen gezogen sind?

Beim Betrachten einer der bezeichneten Figuren bemerkt man sofort, daß die beiden Diagonalenschnittpunkte, welche sie als Ecken besitzen muß, auf ein und derselben Diagonale liegen, und nimmt man irgend zwei auf einer Diagonale gelegenen Schnittpunkte und geht von ihnen aus auf den Diagonalen, welche sie hervorbringen helfen, bis zu den 4 Ecken, in welchen diese münden, so erhält man zwei der verlangten Figuren, wenn nicht etwa die als Weg benutzten Diagonalen sich kreuzen, ehe sie die Ecken erreichen. In diesem Falle erhält man nur eine der gewünschten Figuren, während statt der anderen sich ein Dreieck bildet, dessen Ecken ohne Ausnahme Diagonalenschnittpunkte sind. Ja wo ein solches Dreieck sich im Innern eines Necks findet, da vernichtet es gleichsam drei der gesuchten Figuren, weil drei Paar Diagonalen, von denen jedes eine dritte Diagonale so eben in zwei verschiedenen Punkten gekreuzt hat, seine Ecken bilden. Beherzigt man dies und die Andeutung, daß man jede der in der Aufgabe gesuchten Figuren auf dem eben gezeigten Wege entstehen lassen kann, so merkt man sogleich, daß die Summe aller dieser Figuren gleich ist der doppelten Anzahl aller Diagonalenabschnitte, die nicht in Ecken endigen, minus der dreifachen Zahl der Dreiecke, deren Ecken nur Diagonalenschnittpunkte sind. Der Subtrahend dieser Differenz ist bereits bekannt $3n_6$, der Minuend aber noch aufzufinden. Versuchen wir dies.

Auf Diagonale 1r befinden sich, wie wir wissen, $(r-2)\ (n-r)$ Schnittpunkte und, da je zwei derselben einen der gesuchten Diagonalenabschnitte begränzen, $[(r-2)\ (n-r)]_2$ derartige Abschnitte. Also speciell auf $1.3\ (n-3)_2$, auf $1.4\ (2n-8)_2$, auf $1.5\ (3n-15)_2$, auf $1.6\ (4n-24)_2$, auf $1.7\ (5n-35)_2$, auf $1.8\ (6n-48)_2$ u. s. w. Um diese den $n-3$ von 1 ausgehenden Diagonalen entsprechenden Größen zu addiren, entwickle ich dieselben und suche, um den fortwährend auftretenden Divisor 2 vernachlässigen zu können, sofort die doppelte Summe:

$$n^2-7n+12,\ 4n^2-34n+72,\ 9n^2-93n+240,\ 16n^2-196n+600,$$
$$25n^2-355n+1260,\ 36n^2-582n+2352,\ \ldots$$

Bilde die Differenzenreihen.

$$3n^2-27n+60,\ 5n^2-59n+168,\ 7n^2-103n+360,\ 9n^2-159n+660,$$
$$11n^2-227n+1092$$
$$2n^2-32n+108,\ 2n^2-44n+192,\ 2n^2-56n+300,\ 2n^2-68n+432$$
$$-12n+84,\qquad -12n+108,\qquad -12n+132$$
$$+24\qquad\qquad +24$$

Eine Reihe vierter Ordnung.

Also die Summe der ersten $n-3$ Glieder:

$$(n-3)_1\,(n^2-7n+12)+(n-3)_2\,(3n^2-27n+60)+(n-3)_3\,(2n^2-32n+108)$$
$$+\,(n-3)_4\,(-12n+84)+(n-3)_5\,.\,24.$$

Sondere $(n-3)_2$ ab, entwickle das Uebrige nach Potenzen von n und addire, dann ergiebt sich die Reihe $= (n-3)_2 \left(\frac{n^3-3n^2+2n}{15}\right) = \frac{n.(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{3.5.1.2} = 4n_5$. Auf den von 1 ausgehenden Diagonalen befinden sich mithin $2n_5$ Abschnitte, die nicht bis zu den Ecken gehen, und im ganzen Vieleck $n.n_5$ derartige Abschnitte. Figuren, wie sie die Aufgabe bestimmt, existiren also $2n.n_5 - 3.n_6$ oder $n_5\,\frac{(3n+5)}{2}$, das ist im

4eck,	5eck,	6eck,	7eck,	8eck,	9eck,	10eck,	11eck,	12eck . . .
0	10	69	273	812	2016	4410	8778	16236 . . .

Eine arithmetische Reihe sechster Ordnung. — Unter den betrachteten Figuren befinden sich $5n_5$ Dreiecke, folglich $n_5\,\left(\frac{3n-5}{2}\right)$ mit mehr als drei Seiten.

31) In einem Neck werden sämmtliche Diagonalen gezogen; wieviel Vierecke, Sechsecke, Achtecke, Zehnecke 2c. werden dabei gebildet, in denen die Seiten abwechselnd Diagonalen und Necksseiten sind?

Um zu erfahren, wieviel Vierecke, in denen ein Paar gegenüberstehender Seiten zugleich Seiten des Necks, das andere Paar Diagonalen sind, in einem Polygon existiren, nenne ich die Seiten desselben der Reihe nach 1, 2, 3, 4 . . . n und frage mich: in wieviel der bezeichneten Vierecke kann Seite 1 auftreten? Die Antwort ist leicht. Jede der n Seiten mit Ausschluß von 1 selbst und der 4 nächstliegenden 2, 3, n und $n-1$ kann ein derartiges Viereck mit 1 zusammen hervorbringen. Seite 1 erscheint also in $n-5$ Vierecken. Was aber Seite 1 thut, thut jede andere Necksseite auch. Alle erscheinen also in $n\,(n-5)$ Vierecken, und da jedes dieser Vierecke zwei Necksseiten besitzt, mithin bei unserer Bildungsweise doppelt gerechnet wurde, so ist die Zahl der Vierecke überhaupt $\frac{n}{2}\,(n-5)$. — Auf ähnliche Weise läßt sich erforschen, wieviel Sechsecke mit den in der Aufgabe angedeuteten Eigenschaften in jedem Vieleck vorhanden sind. Soll 1 Seite in einem dieser Sechsecke sein, so ist, wenn wir die einzelnen Seiten der Reihe nach durchgehen, 4 die erste, die mit ihr zusammen in einer der verlangten Figuren als Seite auftritt; neben diesen beiden kann 5 und 6 nicht als Seite dienen, wohl aber jede der folgenden 7, 8, 9 . . . ., bis wir endlich zu $n-1$ und n kommen, die wiederum nicht dritte Seite zu 1 und 4 sein können. 1 und 4 erscheinen also in $n-8$ Sechsecken zusammen als Seiten. Die Linien 1 und 5 können mit sich selbst und mit 2, 3, 4, 6, 7, $n-1$, n kein Sechseck bilden, folglich nur $n-9$ neue hervorbringen helfen; 1 und 6 ebenso $n-10$, 1 und 7 $n-11$ 2c. — Das Sechseck mit den drei Seiten 1, 4, 7 ist bei der letzten Art nicht mitgezählt, da es schon früher in Rechnung gesetzt wurde. Ebenso sind unter den $n-12$ Sechsecken, welche mit Hülfe der Seiten 1 und 8 gebildet werden, die durch die Seiten 1, 4, 8 oder 1, 5, 8 bestimmten nicht zu suchen. Kein Sechseck wird bei unserer Zusammenstellung also mehrfach aufgeführt und Seite 1 muß daher in $(n-8)+(n-9)+(n-10)+(n-11)+\ldots.+1$ oder in

$(n-7)_2$ verschiedenen Sechsecken die Dienste einer Seite thun. Alle n Seiten des Polygons entsprechen mithin $n\,(n-7)_2$ Sechseckseiten. In jedem der verlangten Sechsecke finden sich 3 von diesen, folglich die Zahl der Sechsecke $\frac{n}{3}\,(n-7)_2$. — Suchen wir die Zahl der Achtecke. 1, 4 und 7 können in $n-11$ verschiedenen Achtecken zu gleicher Zeit Seiten sein, 1, 4 und 8 in $n-12$, 1, 4 und 9 in $n-13$ u. s. w., 1 und 4 also in $(n-11)+(n-12)+(n-13)+(n-14)+\ldots+1=(n-10)_2$. 1 und 5 finden wir dem entsprechend in $(n-11)_2$ Achtecken gleichzeitig als Seiten, 1 und 6 in $(n-12)_2$ neuen, 1 und 7 in $(n-13)_2$ ꝛc. Die Seite 1 allein dient daher

$$(n-10)_2+(n-11)_2+(n-12)_2+(n-13)_2+\ldots+2_2 \text{ oder } (n-9)_3$$

mal als Achteckseite. Folglich $\frac{n}{4}\,(n-9)_3$ die Zahl der Achtecke. — Jetzt zu den Zehnecken. 1, 4, 7, 10 sind gleichzeitig in $n-14$ Zehnecken zu finden; 1, 4, 7, 11 in $n-15$; 1, 4, 7, 12 in $n-16$ .... 1, 4, 7 also in

$$(n-14)+(n-15)+(n-16)+\ldots+1=(n-13)_2.$$

Dem entsprechend 1, 4, 8 in $(n-14)_2$; 1, 4, 9 in $(n-15)_2$; 1, 4, 10 in $(n-16)_2$, und 1 und 4 überhaupt in $(n-13)_2+(n-14)_2+(n-15)_2+(n-16)_2+\ldots+2_2=(n-12)_3$. Folglich treffen wir 1 und 5 zusammen in $(n-13)_3$ Zehnecken, 1 und 6 in $(n-14)_3$; 1 und 7 in $(n-15)_3$; 1 und 8 in $(n-16)_3$ u. s. f. 1 dient dem zu Folge

$$(n-12)_3+(n-13)_3+(n-14)_3+(n-15)_3+(n-16)_3+\ldots+3_3=(n-11)_4$$

Zehnecken als Seite. In jedem Polygon finden sich also $\frac{n}{5}\,(n-11)_4$ Zehnecke von verlangter Beschaffenheit. — Dieselbe Additionsweise zeigt, daß $\frac{n}{6}\,(n-13)_5$ Zwölfecke und $\frac{n}{7}\,(n-15)_6$ Vierzehnecke dieser Art in einem Vieleck existiren. — Forschen wir endlich nach der Zahl der $2r$ ecke, die abwechselnd Neckseiten und Diagonalen als Seiten haben. Die $r-1$ Seiten 1, 4, 7, 10, 13 ..... $3r-8$, $3r-5$ können zugleich mit einer der zwischen ihnen liegenden Neckseiten oder einer der 4 Linien $3r-4$, $3r-3$, n und $n-1$ kein $2r$eck bilden, wohl aber mit jeder andern Neckseite, sie kommen also in $(n-3r+1)$ $2r$ecken zusammen vor. Dem analog 1, 4, 7 .... $3r-8$ und $3r-4$ in $(n-3r)2r$ecken, 1, 4, 7 .... $3r-8$ und $3r-3$ in $n-3r-1$; 1, 4, 7 ... $3r-8$ und $3r-2$ in $n-3r-2$ u. s. f., 1, 4, 7 ... $3r-11$ und $3r-8$ überhaupt also in

$$(n-3r+1)+(n-3r)+(n-3r-1)+(n-3r-2)+\ldots+1=(n-3r+2)_2.$$

Finden sich aber 1, 4, 7 ... $3r-11$ und $3r-8$ in $(n-3r+2)_2$ $2r$ecken, so müssen 1, 4, 7 .... $3r-11$ und $3r-7$ in $(n-3r+1)_2$ vorhanden sein, 1, 4, 7 ... $3r-11$ und $3r-6$ in $(n-3r)_2$ u. s. f., 1, 4, 7 ... $3r-11$ mithin in $(n-3r+3)_3$; denn $(n-3r+2)_2+(n-3r+1)_2+(n-3r)_2+(n-3r-1)_2+\ldots+2_2=(n-3r+3)_2$. Daraus ergiebt sich, wenn man ähnlich folgert und addirt, daß die Seiten 1, 4, 7 ... $3r-14$ in $(n-3r+4)_3$, die Seiten 1, 4, 7 .... $3r-17$ in $(n-3r+4)_4$ $2r$ecken zusammen auftreten, und so oft man von den Zahlen 1, 4, 7, 10 .... die letzte fortläßt und fragt: in wieviel $2r$ecken erscheinen die übrigen gemeinschaftlich als Seiten? erhält man als Antwort einen Binomialcoefficienten, der in Zeiger und Zahl seinen Vorgänger um 1 übertrifft. Will ich also wissen, in wieviel 2r ecken Seite 1 sich sehen lassen kann, so muß ich in dem Ausdruck $(n-3r+1)$, der der Anzahl der 2r ecke mit den $r-1$ Seiten 1, 4, 7, 10 ...... $3r-5$ entsprach, Zahl und Zeiger um $r-2$ erhöhen, thue ich dies aber; so erhalte ich $(n-2r-1)_{r-1}$. Es entspricht also jede Vielecksseite $(n-2r-1)_{r-1}$ 2r ecksseiten, folglich alle n Seiten des Necks $n\,(n-2r-1)_{r-1}$ 2r ecksseiten, und da je r derselben ein 2r eck bilden, so zählt man in jedem Polygon, sobald seine Diagonalen gezogen sind, $\frac{n}{r}\,(n-2r-1)_{r-1}$ 2r ecke, in denen abwechselnd Vielecksseiten und Diagonalen Seiten sind. — Den gegebenen Formeln gemäß finden sich im

	6 eck,	7 eck,	8 eck,	9 eck,	10 eck,	11 eck,	12 eck,	13 eck,	14 eck ..
Vierecke	3	7	12	18	25	33	42	52	63 ...
Sechsecke	—	—	—	3	10	22	40	65	98 ...
Achtecke	—	—	—	—	—	—	3	13	35 ...
⋮					⋮				
2r ecke	$\frac{6}{r}\,[5-2r]_{r-1}$,	$\frac{7}{r}\,[6-2r]_{r-1}$,	$\frac{8}{r}\,[7-2r]_{r-1}$,	$\frac{9}{r}\,[8-2r]_{r-1}$,	....				

Die erhaltenen Reihen sind zweiter, dritter, vierter und r ter Ordnung. Jede derselben läßt sich als erste Differenzenreihe der folgenden auffassen. In jeder, auch der letzten, heißt das erste Glied 3. In jeder ist das zweite Glied gleich der Zahl der Ecken des ihm entsprechenden Vielecks.

Die beiden ersten dieser vier Behauptungen sind an sich klar oder durch das Bilden der Differenzenreihen wenigstens sofort klar zu machen, die beiden letzten erweisen sich folgendermaßen. Setzt man in dem Ausdruck $\frac{n}{r}\,(n-2r-1)_{r-1}$, der das allgemeine Glied jeder der aufgestellten Reihen ist, $n = 3r - x$, so wird er $= 0$, er geht nemlich über in $\frac{3r-x}{r}\,(r-x-1)_{r-1}$ und $(r-x-1)_{r-1}$ ist ein Binomialcoefficient, in dem die Zahl kleiner als der Zeiger ist, der also, da r und x nur ganze Zahlen sein dürfen, in aufgelöster Form geschrieben dem Betrachter im Zähler den Factor 0 zeigt. Die aufgestellten Reihen enthalten also kein Glied, in dem $n < 3r$ wäre; z. B. die den Zwölfecken correspondirende Reihe würde, weil in ihr $r = \frac{12}{2} = 6$ ist, für das 17 eck noch kein entsprechendes Glied aufweisen. Wird dagegen $n = 3r$ gesetzt, so erhält man aus dem Ausdrucke $\frac{n}{r}\,(n-2r-1)_{r-1}$ ein Glied und, da es kein früheres giebt, das erste. $\frac{n}{r}\,(n-2r-1)_{r-1}$ wird aber für $n = 3r$, $\frac{3r}{r}\,(3r-2r-1)_{r-1} = 3\,(r-1)_{r-1} = 3$, denn $(r-1)_{r-1}$ ist gleich 1. Das zweite Glied entspringt aus dem allgemeinen Gliede, wenn man $n = 3r+1$ setzt; dasselbe verwandelt sich dann in $\frac{3r+1}{r}.r_{r-1} = \frac{3r+1}{r}.r = 3r+1 = n$.

Wirft man auf die aufgestellten r Reihen noch einen Blick zurück, so bemerkt man leicht, daß die Gesammtsumme der gesuchten Vierecke, Sechsecke, Achtecke 2c., die sich in einem Neck finden, gleich ist der entsprechenden Gesammtsumme für ein $N-1$ eck + der für ein $(n-3)$ eck $+\,n-3$. Dieser Lehrsatz erlaubt uns, die Gesammtsummen für die einzelnen Necke aufzufinden, ohne die Summanden zu bilden. Er giebt an, daß Figuren, in denen abwechselnd Necksseiten und Diagonalen Seiten sind, sich finden im:

6 eck:	3	14 eck:	130 + 55 + 11 = 196
7 eck:	3 + 4 = 7	15 eck:	196 + 85 + 12 = 293
8 eck:	7 + 5 = 12	16 eck:	293 + 130 + 13 = 436
9 eck:	12 + 3 + 6 = 21	17 eck:	436 + 196 + 14 = 646
10 eck:	21 + 7 + 7 = 35	18 eck:	646 + 293 + 15 = 954
11 eck:	35 + 12 + 8 = 55	19 eck:	954 + 436 + 16 = 1406
12 eck:	55 + 21 + 9 = 85	20 eck:	1406 + 646 + 17 = 2069
13 eck:	85 + 35 + 10 = 130		

Um endlich auch die Zahlen für die Vierecke, Sechsecke, Achtecke ꝛc., die sich in ein und demselben Vieleck zu gleicher Zeit finden, an einem Beispiel zu übersehen, geben wir dieselben für das 30 eck; in demselben finden sich:

4 ecke,	6 ecke,	8 ecke,	10 ecke,	12 ecke,	14 ecke,	16 ecke,	18 ecke,	20 ecke
375	2530	9975	20456	30940	21450	715	550	3.

Eine erst stark ansteigende und dann ebenso schnell wieder abfallende Reihe, die uns noch die Frage vorlegt: wie groß muß r gewählt werden, damit in einem bestimmten Neck die Zahl der 2r ecke ein Maximum werde? Die Antwort darauf giebt der Bruch $\frac{(n-3r+3)(n-3r+2)(n-3r+1)}{(n-2r+1)(n-2r)r}$; mit demselben muß man, wie aus einer Betrachtung des allgemeinen Gliedes sofort hervorgeht, die Zahl der (2r—2) ecke multipliciren, um die der 2r ecke zu erhalten. In obiger Reihe z. B. ist die Zahl der Vierecke 375, die der Sechsecke 2530 und $375 . \frac{24.23.22}{25.24.3}$ giebt auch 2530. So lange jener Bruch für dasselbe n und ein allmählig wachsendes r größer als 1 ist, wächst auch die Zahl der 2r ecke in dem Neck, hat aber ihr Maximum erreicht, sobald jener Bruch für ein abermals um 1 wachsendes r gleich oder kleiner als 1 wird.

Zur Uebung noch einige leichte Aufgaben.

a. Beweise mit Hülfe der Combinationen, wie groß die Zahl der Diagonalen im Neck sei.

$$n_2 - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

b. In wieviel Punkten außerhalb des Necks wird *eine* Seite von den Diagonalen getroffen, wenn keine mit ihr parallel läuft?

In $(n-3)_2$ Punkten.

c. Im Neck sind sämmtliche Diagonalen gezogen. Wie groß ist die Zahl der Diagonalenabschnitte, die in einer bestimmten Ecke endigen?

$$(n-1)_3.$$

d. Wie groß ist die Zahl der Diagonalenabschnitte, die überhaupt in Ecken endigen?

$$4n_4.$$

e. Wieviel Ecken hat eine durch das Ziehen der Diagonalen im Neck entstehende Figur ohne einspringenden Winkel höchstens?

n, denn 2 ihrer Seiten können wohl verlängert sich in einer Ecke des Necks schneiden, nie aber mehr.

f. Zieht man in einem Neck die n Diagonalen, welche dasselbe in N—1ecke und Dreiecke zerlegen, so bilden dieselben ein neues Neck. Der Raum zwischen dem Umfange des neuen und alten Polygons soll der äußerste Ring des Necks heißen. Wieviel neben einander liegende Dreiecke lassen sich in demselben zählen, sobald alle Diagonalen gezogen sind?

$n\,(n-3)$ oder $2z$; $z =$ Zahl der Diagonalen.

g. Wieviel Dreiecke überhaupt finden sich in dem äußersten Ringe?

$\frac{n^2\,(n-3)}{2}$ oder nz.

h. Wieviele dieser Dreiecke besitzen eine Ecke des alten oder des neuen Polygons gemeinschaftlich als Ecke?

$2n-5$.

i. In wievielen der unter g bestimmten Dreiecke ist keine der Ecken zugleich Ecke des kleineren Polygons?

$n\,(n-3)_2$.

k. Wieviel neue Necke können höchstens durch das Ziehen der Diagonalen in einem gegebenen Neck entstehen?

$\frac{n-3}{2}$, wenn n ungrade; $\frac{n-4}{2}$, wenn n grade ist.

l. Wieviel Vierecke, deren Ecken ohne Ausnahme Diagonalenschnittpunkte sind und deren gegenüberstehende Seiten parallel laufen oder sich außerhalb des Necks schneiden, giebt es in einem Neck, in dem sämmtliche Diagonalen gezogen sind?

$2n_8$.

m. Als ich in einem Zwölfeck einst sämmtliche Diagonalen gezogen und die Ecken der Reihe nach mit Zahlen bezeichnet, zählte ich die Schnittpunkte auf einer von Ecke 3 ausgehenden Diagonale und fand auf ihr 25; nach welcher Ecke ging diese Diagonale?

Antwort, ohne ein Zwölfeck zu zeichnen: Nach Ecke 9.

n. Auf einer von Ecke 1 ausgehenden Diagonale eines Vielecks, in dem sämmtliche Diagonalen gezogen sind, finden sich 100 Schnittpunkte; wieviel Ecken hat das Vieleck und nach welcher war die Diagonale gezogen?

Das Vieleck war ein 54eck, oder ein 31eck, oder ein 27eck, oder ein 22eck. Im ersten konnte die Diagonale nach 4 und 52 gehen, im zweiten nach 6 und 27, im dritten nach 7 und 22, im vierten nur nach 12.