Die Vertheilung der Wärme in der Kugel.

Nach dem Vortrage von B. Riemann bearbeitet von E. Gödecker.

Die folgenden Zeilen verdanken ihre Entstehung dem Vortrage Riemann's, eines früheren Schülers unseres Johanneums.*) Unsere Anstalt darf um so mehr stolz darauf sein, dass ein so bedeutender Mathematiker aus ihr hervorgegangen ist, als feststeht, dass besonders der frühere Mathematik-Lehrer des Johanneums, der kürzlich verstorbene Schulrath Schmalfuss, von Einfluss auf seinen Schüler Riemann gewesen ist. — Ich habe es um so lieber übernommen diese Zeilen zu schreiben, da ich meinen Lehrer Riemann den Schülern des Johanneums als Muster empfehlen möchte, einmal wegen seiner grossen Bescheidenheit und zweitens wegen seines wissenschaftlichen Strebens, das trotz aller körperlichen Leiden und aller Hindernisse nicht eher aufhörte, als bis Gott ihn abrief.

Ich habe im Winter $18^{60}/_{61}$ Riemann's Vorlesungen über partielle Differential-Gleichungen gehört; den Aufzeichnungen, die ich damals gemacht, habe ich die folgende Arbeit entlehnt. Herr Dr. Hattendorff in Aachen, der gleichzeitig mit mir Riemann's Vorlesungen hörte, hat allerdings bereits vor etwa 3 Jahren, mit Benutzung des Nachlasses, Riemann's Vorlesungen über partielle Differential-Gleichungen herausgegeben.**) Diese Ausgabe hat nicht allein sonstige Mängel, sondern sie ist auch unvollständig; denn sie gibt nicht nur Riemann's Vorlesungen vom Winter $18^{60}/_{61}$ unvollständig wieder, sondern sie nimmt auf die jüngsten Riemann'schen Vorlesungen aus dem Jahre 1862 keine Rücksicht, obgleich diese bedeutend von den früheren abweichen. (Siehe Zeitschrift f. Math. und Physik von Schloemilch, Kahl u. Cantor. Jahrgang 1870.)

Statt des obigen Problemes würde ich noch lieber „die Bewegung eines Ringes in einer unendlichen Flüssigkeit“ behandelt haben, wenn sich Herr Hattendorff die Herausgabe jener Riemann'schen Arbeit nicht vorbehalten hätte.

---

*) Bernhard Riemann wurde am 17. Sept. 1826 zu Breselenz im Lüneburgischen geboren. Von Ostern 1842 bis Ostern 1846 besuchte derselbe die beiden obersten Klassen der Gymnasial-Abtheilung unserer Anstalt und ging dann, mit den besten Zeugnissen versehen, nach Göttingen, um Mathematik und Theologie zu studiren. Seine mathematischen Studien setzte Riemann von Ostern 1847—1849 in Berlin fort und kam dann nach Göttingen zurück, wo er sich ausser mit mathematischen, auch mit psychologischen, metaphysischen und pädagogischen Studien beschäftigte. Seit dem Beginn der Universitäts-Studien verfolgte ihn schon eine Krankheit, der Riemann endlich am 20. Juli 1866 in Selasca am Lago maggiore erlag. (Näheres über Riemann's Leben und Wirken findet man in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1867 von Prof. Schering, der auch als Schüler unserem Josanneum angehört hat.)

**) Die partiellen Differential-Gleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen von B. Riemann. Für den Druck bearbeitet und herausgegeben von H. Hattendorff. Braunschweig 1869.

In den folgenden Zeilen halte ich den Gang inne, den Riemann eingeschlagen hat; nur um dem Leser nicht unverständlich zu bleiben, der das Hattendorff'sche Buch nicht zur Hand hat, werde ich aus den früheren Vorlesungen Riemann's einiges hinzufügen müssen. — Zum Schluss lasse ich dann, nach Riemann's Vorgange, Fourier's Untersuchungen über die Temperatur der Erde folgen.

Fourier sieht in seinen Untersuchungen die Wärme als ein Fluidum an, welches der wärmere Körper dem kälteren mittheilt. Obgleich wir heute wissen, dass diese Theorie nicht richtig ist, so können wir sie dennoch zur Erklärung mancher Erscheinungen sehr gut anwenden, wie wir auch heute die Emanations-Theorie noch gebrauchen, um manche Erscheinungen des Lichts auf einfache Weise zu erklären. — Den folgenden Untersuchungen liegt nach Fourier's Vorgange diese Emanations-Theorie zu Grunde.

Zwei Körper haben gleiche Temperatur, wenn weder der eine von dem andern Wärme empfängt, noch an denselben Wärme abgibt. — Die Wärmemenge, welche die Masseneinheit eines Körpers bei der Temperatur des siedenden Wassers mehr enthält, als bei der Temperatur des schmelzenden Eises, nennt man seine specifische Wärme. — Wärmeeinheit ist die Wärmemenge, welche nöthig ist, um die Gewichtseinheit (1 Kilogr.) Wasser von der Temperatur des schmelzenden Eises in siedendes zu verwandeln bei mittlerem Barometerstande ($= 0^m,76$). Hat ein fester Körper, der die Temperatur des schmelzenden Eises hatte, die Wärmemenge $c \cdot \mathfrak{T}$ aufgenommen und ist dessen specifische Wärme $= c$, so ist $\mathfrak{T}$ dessen Temperatur; ist aber die Masse dieses Körpers $= M$, so muss die Wärmemenge

$$M \cdot c \cdot \mathfrak{T}$$

in ihn dringen, damit seine Temperatur von Null bis auf $\mathfrak{T}$ erhöhet wird.

Wir nehmen nun ferner mit Newton an, dass der unmittelbare Wärmeaustausch zwischen zwei Theilchen nur dann stattfindet, wenn ihre Entfernung sehr klein ist im Vergleich zu den Dimensionen des Körpers; ferner, dass der Wärmeaustausch proportional sei dem Temperaturunterschiede beider Körper unter sonst gleichen Verhältnissen.

Denken wir uns einen Körper, dessen Temperatur so beschaffen ist, dass sie in einer beliebigen Ebene parallel der YZ-Ebene überall dieselbe ist, so wird die Temperatur irgend eines Punktes desselben nur von x abhängen. Es möge ferner die Temperatur mit wachsendem x abnehmen und es bestehe zwischen u und x eine lineare Gleichung, so wird man schreiben können

$$u = \delta - \alpha x.$$

Ist x_1 ein Punkt, der sehr nahe an x liegt, so dass ein Wärmeaustausch zwischen den beiden Punkten stattfinden kann, so wird dieser dem Werthe

$$\alpha (x_1 - x)$$

proportional sein. — Es sei ferner $\alpha \cdot k$. die Wärmemenge, welche bei der Temperatur u durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit hindurchgeht, so ist

$$\alpha \cdot k \cdot \omega . dt$$

die Wärmemenge, welche bei der Temperatur u durch das Flächenelement ω in der Zeit dt hindurchgeht.

Setzt man aber voraus, die Temperatur eines Körpers sei von x ganz unabhängig, sie sei also in allen Graden parallel der X-Achse dieselbe; aber sie sei von y und z abhängig, so findet durch eine Ebene abcd parallel der YZ-Ebene kein Ausströmen statt. — Offenbar ist auch in diesem Falle die Temperatur des Körpers eine Function des Ortes, folglich

$$u = f(x, y, z).$$

In einem Punkte $x + x^1$, $y + y^1$, $z + z^1$ ist also die Temperatur u^1 zu derselben Zeit bestimmt durch die Gleichung

$$u^1 = f(x + x^1, y + y^1, z + z^1).$$

Nimmt man x^1, y^1, z^1 klein genug an, so kann man die Function nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickeln und die höheren Potenzen von x^1, y^1 und z^1 vernachlässigen und man erhält daher in Bezug auf x^1, y^1 und z^1 die lineare Gleichung

$$u^1 = u + \frac{du}{dx} \cdot x^1 + \frac{du}{dy} \cdot y^1 + \frac{du}{dz} \cdot z^1.$$

Vorhin ist erwähnt, dass durch ein Flächenstück parallel der YZ-Ebene kein Ausströmen von Wärme stattfindet, wenn u nur von y und z abhängig ist; liegt daher ein unendlich kleines Flächenstück ω parallel der YZ-Ebene, so kann die Wärmemenge, die hindurchgeht, nur von

$$\frac{du}{dx} \cdot x^1$$

abhängig sein. — Nach der früheren Annahme ist die lineare Gleichung für die Temperatur

$$u = \delta - \alpha x,$$

also ist jetzt $\alpha = -\frac{du}{dx}$.

Die Wärmemenge, welche in der Zeit dt durch das vorhin genannte Flächenstück ω hindurchgeht, ist

$$= -k \frac{du}{dx} \cdot \omega \cdot dt.$$

Den Factor von $\omega \cdot dt$, das ist die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchgeht, diese Grösse $-k \frac{du}{dx}$, nennt man den Wärmefluss.

Es sei ein fester, homogener Körper gegeben, welcher den ganzen unendlichen Raum erfülle, und es sei die Temperatur irgend eines Punktes zu irgend einer Zeit zu bestimmen. Ist nun

$$u = \varphi(x, y, z, t),$$

so ergibt sich für ein Parallelepiped, dessen Kanten dx, dy und dz sind und dessen eine Ecke im Punkte x, y, z liegt, dass durch das Rechteck $dy \cdot dz$ die Wärmemenge

$$k \frac{du}{dx} \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

ausströmt, dagegen durch das gegenüberliegende Rechteck $dy \cdot dz$ die Wärmemenge

$$k \left(\frac{du}{dx}\right)_{x = x + dx} \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

einströmt, mithin erhält das Parallelepiped in der Richtung der X-Achse einen Wärmezufluss

$$k \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right)_{x = x + dx} - \frac{du}{dx} \right\} dy \cdot dz \cdot dt$$

in der Zeit dt. Oder die Wärmezunahme beträgt

$$k \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Der ganze Wärmezufluss, den das Parallelepiped in allen drei Richtungen erhält, wird also sein

$$k \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

In den folgenden Zeilen halte ich den Gang inne, den Riemann eingeschlagen hat; nur um dem Leser nicht unverständlich zu bleiben, der das Hattendorff'sche Buch nicht zur Hand hat, werde ich aus den früheren Vorlesungen Riemann's einiges hinzufügen müssen. — Zum Schluss lasse ich dann, nach Riemann's Vorgange, Fourier's Untersuchungen über die Temperatur der Erde folgen.

Fourier sieht in seinen Untersuchungen die Wärme als ein Fluidum an, welches der wärmere Körper dem kälteren mittheilt. Obgleich wir heute wissen, dass diese Theorie nicht richtig ist, so können wir sie dennoch zur Erklärung mancher Erscheinungen sehr gut anwenden, wie wir auch heute die Emanations-Theorie noch gebrauchen, um manche Erscheinungen des Lichts auf einfache Weise zu erklären. — Den folgenden Untersuchungen liegt nach Fourier's Vorgange diese Emanations-Theorie zu Grunde.

Zwei Körper haben gleiche Temperatur, wenn weder der eine von dem andern Wärme empfängt, noch an denselben Wärme abgibt. — Die Wärmemenge, welche die Masseneinheit eines Körpers bei der Temperatur des siedenden Wassers mehr enthält, als bei der Temperatur des schmelzenden Eises, nennt man seine specifische Wärme. — Wärmeeinheit ist die Wärmemenge, welche nöthig ist, um die Gewichtseinheit (1 Kilogr.) Wasser von der Temperatur des schmelzenden Eises in siedendes zu verwandeln bei mittlerem Barometerstande ($= 0^{m},76$). Hat ein fester Körper, der die Temperatur des schmelzenden Eises hatte, die Wärmemenge $c \cdot \mathfrak{T}$ aufgenommen und ist dessen specifische Wärme $= c$, so ist $\mathfrak{T}$ dessen Temperatur; ist aber die Masse dieses Körpers $= M$, so muss die Wärmemenge

$$M \cdot c \cdot \mathfrak{T}$$

in ihn dringen, damit seine Temperatur von Null bis auf $\mathfrak{T}$ erhöhet wird.

Wir nehmen nun ferner mit Newton an, dass der unmittelbare Wärmeaustausch zwischen zwei Theilchen nur dann stattfindet, wenn ihre Entfernung sehr klein ist im Vergleich zu den Dimensionen des Körpers; ferner, dass der Wärmeaustausch proportional sei dem Temperaturunterschiede beider Körper unter sonst gleichen Verhältnissen.

Denken wir uns einen Körper, dessen Temperatur so beschaffen ist, dass sie in einer beliebigen Ebene parallel der YZ-Ebene überall dieselbe ist, so wird die Temperatur irgend eines Punktes desselben nur von x abhängen. Es möge ferner die Temperatur mit wachsendem x abnehmen und es bestehe zwischen u und x eine lineare Gleichung, so wird man schreiben können

$$u = \delta - \alpha x.$$

Ist x_1 ein Punkt, der sehr nahe an x liegt, so dass ein Wärmeaustausch zwischen den beiden Punkten stattfinden kann, so wird dieser dem Werthe

$$\alpha (x_1 - x)$$

proportional sein. — Es sei ferner $\alpha \cdot k$. die Wärmemenge, welche bei der Temperatur u durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit hindurchgeht, so ist

$$\alpha \cdot k \cdot \omega . dt$$

die Wärmemenge, welche bei der Temperatur u durch das Flächenelement ω in der Zeit dt hindurchgeht.

Setzt man aber voraus, die Temperatur eines Körpers sei von x ganz unabhängig, sie sei also in allen Graden parallel der X-Achse dieselbe; aber sie sei von y und z abhängig, so findet durch eine Ebene abcd parallel der YZ-Ebene kein Ausströmen statt. — Offenbar ist auch in diesem Falle die Temperatur des Körpers eine Function des Ortes, folglich

$$u = f\,(x, y, z).$$

In einem Punkte $x + x^1$, $y + y^1$, $z + z^1$ ist also die Temperatur u^1 zu derselben Zeit bestimmt durch die Gleichung

$$u^1 = f\,(x + x^1, y + y^1, z + z^1).$$

Nimmt man x^1, y^1, z^1 klein genug an, so kann man die Function nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickeln und die höheren Potenzen von x^1, y^1 und z^1 vernachlässigen und man erhält daher in Bezug auf x^1, y^1 und z^1 die lineare Gleichung

$$u^1 = u + \frac{du}{dx} . x^1 + \frac{du}{dy} . y^1 + \frac{du}{dz} \cdot z^1.$$

Vorhin ist erwähnt, dass durch ein Flächenstück parallel der YZ-Ebene kein Ausströmen von Wärme stattfindet, wenn u nur von y und z abhängig ist; liegt daher ein unendlich kleines Flächenstück ω parallel der YZ-Ebene, so kann die Wärmemenge, die hindurchgeht, nur von

$$\frac{du}{dx} \cdot x^1$$

abhängig sein. — Nach der früheren Annahme ist die lineare Gleichung für die Temperatur

$$u = \delta - \alpha\, x,$$

also ist jetzt $\alpha = - \frac{du}{dx}$.

Die Wärmemenge, welche in der Zeit dt durch das vorhin genannte Flächenstück ω hindurchgeht, ist

$$= - k\, \frac{du}{dx} \cdot \omega \cdot dt.$$

Den Factor von $\omega \cdot dt$, das ist die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchgeht, diese Grösse $- k\, \frac{du}{dx}$, nennt man den Wärmefluss.

Es sei ein fester, homogener Körper gegeben, welcher den ganzen unendlichen Raum erfülle, und es sei die Temperatur irgend eines Punktes zu irgend einer Zeit zu bestimmen. Ist nun

$$u = \varphi\,(x, y, z, t),$$

so ergibt sich für ein Parallelepiped, dessen Kanten dx, dy und dz sind und dessen eine Ecke im Punkte x, y, z liegt, dass durch das Rechteck $dy \cdot dz$ die Wärmemenge

$$k\, \frac{du}{dx} \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

ausströmt, dagegen durch das gegenüberliegende Rechteck $dy \cdot dz$ die Wärmemenge

$$k\, \left(\frac{du}{dx}\right)_{x = x + dx} \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

einströmt, mithin erhält das Parallelepiped in der Richtung der X-Achse einen Wärmezufluss

$$k \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right)_{x = x + dx} - \frac{du}{dx} \right\} dy \cdot dz \cdot dt$$

in der Zeit dt. Oder die Wärmezunahme beträgt

$$k\, \frac{d^2u}{dx^2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \,.\, dt.$$

Der ganze Wärmezufluss, den das Parallelepiped in allen drei Richtungen erhält, wird also sein

$$k \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right\} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Ist die Dichte des Körpers $= \rho$, c dessen specifische Wärme und u dessen Temperatur zur Zeit t, so ist die Wärmemenge in dem vorhin erwähnten Körper

$$= \rho \cdot c \cdot u \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

folglich ist die Wärmemenge, welche dieser Körper während der Zeit dt aufgenommen hat

$$= \rho \cdot c \left\{ \left(u\right)_{t = t + dt} - u \right\} dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot c \cdot \frac{du}{dt} \cdot dx\, dy\, dz \cdot dt.$$

Aus den obigen Untersuchungen folgt

$$\rho\, c \frac{du}{dt} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = k \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right\} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

oder

$$\frac{du}{dt} = a\,a \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right\}$$

wenn man $\frac{k}{c \cdot \rho} = a\,a$ setzt.

Wir haben eben angenommen, dass $\frac{k}{c \cdot \rho}$ constant ist. Streng genommen ist es nicht der Fall, weil die Dichte eines Körpers sich mit der Temperatur ändert; wollte man aber darauf Rücksicht nehmen, so würde man auch berücksichtigen müssen, dass ein Theil der Wärme sich in Druck, oder Zug umwandelt und dadurch die Volumen-Aenderung hervorbringt. Wollte man diesen Umstand beachten, so würde die Emanations-Theorie nicht mehr ausreichen. — Hieraus folgt, dass die obige Gleichung für die Temperatur im Innern eines Körpers nur so lange gilt, als die Temperatur-Aenderungen nicht bedeutend sind.

Führt man statt der obigen rechtwinkligen Coordinaten Kugel-Coordinaten ein, indem man schreibt

$$x = r \sin\theta \cos\varphi;\; y = r \sin\theta \sin\varphi,\; z = r \cdot \cos\theta$$

so gewinnt man statt der vorigen eine neue Differential-Gleichung. Wir ziehen es jedoch vor, die Gleichung für diese Coordinaten auf's neue abzuleiten. Wächst φ um $d\varphi$, so durchläuft der Endpunkt des Radiusvectors einen Bogen

$$r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi;$$

geht aber θ in $\theta + d\theta$ über, so beschreibt der Radiusvector den Bogen

$$r\, d\theta.$$

Es sind also dr, $r \sin\theta\, d\varphi$ und $r \cdot d\theta$ die drei Kanten eines Parallelepipedes, dessen Inhalt

$$= r^2 \sin\theta \cdot d\varphi \,.\, d\theta\, dr$$

ist. Rechtwinklig zu r liegen 2 Flächen von der Grösse

$$r^2 \sin\theta\, d\theta \cdot d\varphi.$$

Der Wärmefluss in der Richtung r ist

$$= -k \frac{du}{dr},$$

daher ist die Wärmemenge, welche dem Körperchen in dieser Richtung während der Zeit dt zugeführt wird, gleich

$$k \frac{d\left(rr \frac{du}{dr}\right)}{dr} \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dt.$$

In der Richtung des Radiusvectors liegen zwei Seitenflächen von der Grösse

$$r\, d\theta \cdot dr \cdot$$

Aus der ersten strömt

$$k \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{r \cdot \sin\theta\, d\theta} \cdot r\, d\theta \cdot dr \,.\, dt$$

und in die zweite

$$\frac{k}{\sin\theta} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)_{\varphi = \varphi + d\varphi} \cdot d\theta \cdot dr \cdot dt;$$

die Wärmezunahme beträgt daher

$$\frac{k}{\sin\theta} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot dr \cdot dt.$$

Jede Fläche des dritten Paares hat die Grösse

$$r \sin\theta \cdot dr \cdot d\varphi.$$

Durch erste strömt aus

$$k \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{r \cdot d\theta} \cdot r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot dr \cdot dt$$

und durch die zweite ein

$$k \left(\frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta\right)_{\theta = \theta + d\theta} \cdot d\varphi \cdot dr \cdot dt;$$

die Zunahme beträgt daher

$$k \frac{d\left(\frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta\right)}{d\theta} \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot dr \cdot dt \cdot$$

Nun beträgt die im Körperelemente zur Zeit t enthaltende Wärme

$$\rho \cdot c \cdot u \cdot r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr,$$

folglich beträgt die Wärmezunahme während der Zeit dt

$$\rho \cdot c \cdot \frac{du}{dt} \cdot r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr \cdot dt.$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung

$$\text{I)} \qquad \frac{du}{dt} = \frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{d\left(rr \frac{du}{dr}\right)}{dr} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{d\left(\frac{du}{d\theta} \cdot \sin\theta\right)}{\sin\theta \cdot d\theta} \right\}$$

für die Vertheilung der Wärme im Innern der Kugel. Wir wollen nun die Temperatur u in einem beliebigen Punkte bestimmen, wenn die Anfangstemperatur und die Temperatur an der Oberfläche gegeben sind. Die Bedingungs-Gleichungen sind:

1) Wenn $t = o$, $u = F(r, \theta, \varphi)\cdot$
2) Wenn $r = c$, $u = \Psi(t, \theta, \varphi)\cdot$

Um zunächst die Differential-Gleichung zu lösen, schlagen wir den von Euler in seiner Integral-Rechnung vorgeschriebenen Weg ein, die Methode der Zerlegung der Differential-Gleichung. Wir setzen

$$\text{3)} \qquad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \alpha u = o,$$

worin α von φ unabhängig. — Ferner

$$\text{4)} \qquad \frac{d\left(\sin\theta \frac{du}{d\theta}\right)}{\sin\theta \cdot d\theta} - \frac{\alpha u}{\sin^2\theta} = \beta u,$$

worin β von θ unabhängig. — Und

$$\text{5)} \qquad \frac{du}{dt} = \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{d\left(rr \frac{du}{dr}\right)}{dr} + \beta u \right]$$

Ist $u = \Phi$ eine particulare Lösung der Gleichung 3, so ist auch, wenn v von Φ unabhängig ist

$v \cdot \Phi$ eine Lösung.

Ist also ϑ eine Lösung der Gleichung 4), so genügt

$$\Phi \cdot \vartheta$$

den beiden Gleichungen 3 und 4. Ist aber ω eine Lösung der Gleichung 5, so wird

$$u = \omega \cdot \Phi \cdot \vartheta$$

der Gleichung I genügen.

Offenbar wird der Gleichung 3) genügt, wenn man schreibt

$$\Phi = A_m \cdot \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi.$$

Da Φ denselben Werth wieder annehmen muss, wenn φ sich um 2π ändert, so muss m eine ganze Zahl sein, ja man darf hinzusetzen: eine positive; da man die Werthe von Φ, welche einem positiven und einem gleich grossen negativen m angehören, sich vereinigt denken kann in obiger Form oder in der Gleichung

$$\Phi_{(m)} = a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi.$$

Setzt man diesen Werth für u in die Gleichung 3), so erhält man die Beziehung

$$\alpha = m^2.$$

Die Gleichung 4) geht nun über in

$$\frac{d\left(\sin\Theta \frac{du}{d\Theta}\right)}{\sin\Theta \cdot d\Theta} - \frac{m\, m \cdot u}{\sin^2\Theta} = \beta u$$

Da Θ alle Werthe von Null bis π annehmen kann, so muss die gesuchte Function für alle Werthe von Θ, welche zwischen Null und π liegen, endlich bleiben. Da ferner m alle Zahlenwerthe zwischen Null und ∞ annehmen muss, so wird ϑ diese Eigenschaft haben, wenn man unter der Bedingung $n \geqq m$

$$\beta = -n(n+1) \text{ setzt.}$$

Die Gleichung 4 geht nun über in

$$4^a) \qquad \frac{d\left(\sin\Theta \frac{du}{d\Theta}\right)}{\sin\Theta\, d\Theta} - \frac{m\, m\, u}{\sin^2\Theta} = -n(n+1) \cdot u.$$

Ist $\vartheta = P_{(m,n)}$ eine Lösung dieser Gleichung 4^a, so genügt den beiden Gleichungen 3 und 4

$$u = \sum_{m=o}^{m=\infty} \sum_{n=o}^{n=\infty} P_{(m,n)} \left\{ a_{(m,n)} \cos m\varphi + b_{(m,n)} \sin m\varphi \right\}.$$

Oder es ist

$$u = \sum_{n=o}^{n=\infty} X_{(n)}, \text{ wenn}$$

$$\begin{aligned} X_{(n)} = P_{(o,n)} \cdot a_{(o,n)} & \\ & + P_{(1,n)} \cdot \{a_{(1,n)} \cos\varphi + b_{(1,n)} \sin\varphi\} \\ & + P_{(2,n)} \cdot \{a_{(2,n)} \cos 2\varphi + b_{(2,n)} \sin 2\varphi\} \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ & + P_{(n,n)} \{a_{(n,n)} \cos n\varphi + b_{(n,n)} \sin 2\varphi\} \end{aligned}$$

Dieser Werth $X_{(n)}$ heisst eine Kugelfunction n^{ten} Ranges von Θ und φ.

Die in $X_{(n)}$ vorkommenden $2n+1$ willkürlichen Constanten müssen als Functionen von r und t nun so bestimmt werden, dass sie der Gleichung 5 genügen, dann wird der obige Werth u auch die Gleichung I erfüllen. — Gehen die Werthe von

$$P_{(m,n)} \cdot a_{(m,n)} \text{ und } P_{(m,n)} \cdot b_{(m,n)}$$

für $t = o$ über in

$$g_{(m,n)} \text{ und } h_{(m,n)},$$

so gewinnt man als Nebenbedingung die Gleichung

$$F(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=o}^{m=\infty} \sum_{n=o}^{n=\infty} (g_{(m,n)} \cdot \cos m\varphi + h_{(m,n)} \sin m\varphi).$$

Da nun Dirichlet im 17. Bande des Crelle'schen Journals nachgewiesen hat, dass eine Function sich nur auf eine Weise nach Kugelfunctionen entwickeln lässt, so ist also, wenn

$$F(r, \theta, \varphi) = \Sigma Y_{(n)}$$

$$Y_{(n)} = \sum_{m=o}^{m=n} \left\{ g_{(m,n)} \cos m\varphi + h_{(m,n)} \cdot \sin \cdot m\varphi \right\}$$

Genügt mithin $X_{(n)}$ der Differential-Gleichung

$$\frac{dX_n}{dt} = \frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{d\left(r^2 \frac{dX_{(n)}}{dr}\right)}{dr} - n(n+1) X_{(n)} \right\}$$

und geht der Werth von $X_{(n)}$ in $Y_{(n)}$ über, wenn $t = o$, so genügt der vorhin genannte Werth von u der Differential-Gleichung I und ausserdem der Bedingungs-Gleichung 1. u muss nun ausserdem noch der zweiten Bedingungs-Gleichung genügen, es muss

$$u = \Psi(t, \theta, \varphi) \text{ sein, wenn } r = c.$$

Statt dieses allgemeinen Falles wollen wir zunächst den speciellen untersuchen

$$u = o, \text{ wenn } r = c.$$

In diesem speciellen Falle muss also offenbar

$$F(c \,.\, \theta \cdot \varphi) = o \text{ sein.}$$

Um zunächst der Differential-Gleichung zu genügen, setzen wir

$$X_{(n)} = \sum e^{-aa\lambda\lambda t} z$$

mit der Annahme, dass z eine Function von r ist und unabhängig von t. Setzt man diesen Werth für $X_{(n)}$ ein, so erhält man zur Bestimmung von z die Gleichung

$$\frac{d\left(rr\frac{dz}{dr}\right)}{rr\,dr} - n(n+1)\frac{z}{rr} + \lambda\lambda z = o$$

Denkt man sich z nach Potenzen von r entwickelt, so gewinnt man die Gleichung

$$z = \sum q_\nu \cdot r^\nu.$$

Es ist also

$$\frac{dz}{dr} = \sum q_\nu \cdot \nu \cdot r^{\nu - 1}$$

und

$$rr\frac{dz}{dr} = \sum q_\nu \cdot \nu \cdot r^{\nu + 1}$$

und

$$\frac{d\left(rr\frac{dz}{dr}\right)}{rr\,dr} = \sum q_\nu \cdot \nu \cdot (\nu + 1)\, r^{\nu - 2}.$$

Die obige Differential-Gleichung für z geht nun über in

$$6) \qquad \sum q_\nu \cdot \nu(\nu+1)\, r^{\nu-2} - n(n+1) \sum q_\nu \cdot r^{\nu-2} + \lambda\lambda \sum q_\nu r^\nu = o$$

Ist μ der kleinste Werth von ν, so ist $\mu - 2$ der niedrigste Exponent in dieser Gleichung. Damit für jeden Werth von r diese Gleichung gültig ist, ist nothwendig, dass

$$q_{(\mu)} \{ \mu(\mu+1) - n(n+1) \} = o$$

Hieraus folgt einmal $\mu = n$, oder auch, da man statt der obigen Gleichung

$$q_{(\mu)} (\mu - n)(\mu + n + 1) = o$$

schreiben kann

$$\mu = -(n+1).$$

Offenbar kann μ nur den ersten Werth annehmen; denn da n alle Werthe von Null bis unendlich annehmen darf, so würde z für $r = o$ unendlich werden, d. h. die Temperatur im Mittelpunkte der Kugel würde unendlich werden. Dieser Fall ist von unserer Untersuchung offenbar ausgeschlossen durch die Art der Herleitung der Differential-Gleichung. Aus der Gleichung b) folgt ferner, dass die auf einander folgenden Werthe von ν immer um 2 wachsen müssen; da nur die Potenzen $r^{\nu-2}$ und r^{ν} vorhanden sind. Hieraus geht hervor, dass

$$q_{(\nu)} \cdot (\nu - n)(\nu + n + 1) + \lambda\lambda \cdot q_{(\nu-2)} = o;$$

und da der kleinste Werth von ν gleich n ist,

$$q_n \lambda\lambda + q_{(n+2)} \cdot 2(2n+3) = o$$

$$q_{(n+2)} = -\frac{q_{(n)} \lambda\lambda}{2(2n+3)}$$

$$q_{(n+4)} = \frac{q_{(n)} \lambda^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Hieraus ergiebt sich nun der Werth

$$z = q_{(n)} \left\{ r^n - \frac{r^{n+2} \lambda\lambda}{2(2n+3)} + \frac{r^{n+4} \lambda^4}{2 \cdot 4 (2n+3)(2n+5)} - + \cdots \right\} = q_{(n)} f(\lambda, r)$$

Die Grösse q_n bleibt vollständig willkürlich. — Der Werth von z lässt sich auch durch ein Euler'sches Integral ausdrücken. Substituiren wir

$$q_n = b \cdot \lambda^n, \text{ so wird}$$

$$z = b \left\{ \lambda^n r^n - \frac{\lambda^{n+2} r^{n+2}}{2(2n+3)} + \frac{\lambda^{n+4} \cdot r^{n+4}}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} - + \cdots \right\} = b \cdot f(\lambda \cdot r)$$

Dadurch geht der Werth von $X_{(n)}$ über in

$$= b \cdot e^{-\lambda\lambda t} \cdot f(\lambda \cdot r)$$

Ist dieser Werth von $X_{(n)}$ nun so beschaffen, dass derselbe für $r = c$ gleich Null wird, so wird

$$u = \sum X_{(n)}$$

der zweiten Bedingung genügen und der Differential-Gleichung. Da die Werthe von λ willkürlich sind, so kann man die Werthe so wählen, dass $f(\lambda \cdot r)$ gleich Null wird, wenn $r = c$ ist. — Sind $s_1, s_2, s_3 \cdots s_4 \cdots$ die Wurzeln der Gleichung

$$7) \qquad 1 - \frac{s^2}{2(2n+3)} + \frac{s^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} - + \cdots = o$$

und ist

$$\frac{s_{(1)}}{c} = \lambda_{(1)}, \frac{s_{(2)}}{c} = \lambda_{(2)} \cdots \quad \frac{s_{(n)}}{c} = \lambda_{(n)} \cdots$$

so erfüllt

$$X_{(n)} = \sum b_{(n)} \cdot e^{-\lambda_{(n)} \lambda_{(n)} t} f(\lambda_{(n)} \cdot r) = \sum b_{(n)} \cdot e^{-\lambda_{(n)} \lambda_{(n)} \cdot t} f(s_n)$$

die zweite Bedingung.

Damit die erste Bedingungs-Gleichung auch erfüllt wird, ist nothwendig, dass

8) $$Y_{(n)} = b_{(1)} \cdot f(\lambda_{(1)} \cdot r) + \cdot b_{(2)} \cdot f(\lambda_{(2)} \cdot r) + \cdots + b_{(n)} f(\lambda_{(n)} \cdot r) + \cdots$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man nun den Werth der willkürlichen Grössen $b_{(1)}, b_{(2)}, \cdots$ bestimmen, in ähnlicher Weise, wie man die willkürlichen Constanten der Fourier'schen Reihe findet. — Multiplicirt man die Reihe mit $f(\lambda_{(m)} \cdot r) \cdot rr \cdot dr$ und integrirt zwischen o und c, so geht die Gleichung über in

9) $$\int_0^c Y_{(n)} \cdot f(\lambda_{(m)} \cdot r)\, rr\, dr = \sum b_{(n)} \int_0^c f(\lambda_{(n)} \cdot r) \cdot f(\lambda_{(m)} \cdot r)\, rr\, dr.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass alle Glieder der Summe verschwinden bis auf das eine, für welches

$$n = m.$$

Da $f(\lambda \cdot r)$ eine Lösung der Differential-Gleichung

$$\frac{d\left(rr\frac{dz}{dr}\right)}{rr\,dr} - n(n+1)\frac{z}{rr} + \lambda\lambda z = o, \text{ so ist}$$

$$rr\lambda\lambda \cdot f(\lambda \cdot r) = n(n+1) \cdot f(\lambda \cdot r) - \frac{d\left(rr\frac{df(\lambda \cdot r)}{dr}\right)}{dr}.$$

Hieraus folgt

A) $$\lambda\lambda \int_0^c rr \cdot f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r)\, dr = n(n+1) \int_0^c f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot c)\, dr$$
$$- \int_0^c f(\lambda^1 \cdot r) \cdot \frac{d\left(rr\frac{df(\lambda \cdot r)}{dr}\right)}{dr} \cdot dr.$$

Da nun

B) $$\int_0^c f(\lambda^1 \cdot r) \frac{d\left(rr\frac{df(\lambda \cdot r)}{dr}\right)}{dr} \cdot dr = \left[f(\lambda^1 \cdot r) \cdot rr \frac{df(\lambda \cdot r)}{dr} \right]_0^c$$
$$- \int_0^c rr \frac{df(\lambda \cdot r)}{dr} \cdot \frac{df(\lambda^1 \cdot r)}{dr} \cdot \quad r$$

und ferner

C) $$\int_0^c rr \frac{df(\lambda \cdot r)}{dr} \cdot \frac{df(\lambda^1 \cdot r)}{dr} dr = \left[f(\lambda \cdot r) \cdot rr \frac{df(\lambda^1 \cdot r)}{dr} \cdot dr \right]_0^c$$
$$- \int_0^c f(\lambda \cdot r) \frac{d\left(rr\frac{df(\lambda^1 \cdot r)}{dr}\right)}{dr} \cdot dr,$$

so ist

D) $$\lambda\lambda \int_0^c rr\, f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r) \cdot dr = n(n+1) \int_0^c f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r)\, dr$$
$$- \int_0^c f(\lambda \cdot r) \cdot \frac{d\left(rr\frac{df(\lambda^1 \cdot r)}{dr}\right)}{dr} \cdot dr.$$

Weil die eingeklammerten Ausdrücke gleich Null werden, wenn $r = c$, als auch, wenn $r = o$, vorausgesetzt, dass $c\lambda$ und $c\lambda^1$ Wurzeln der Gleichung 7 sind.

Vertauscht man auf der rechten Seite der Gleichung (A) λ mit λ^1, so gewinnt man die rechte Seite der Gleichung D, folglich ist

$$\lambda\lambda \int_o^c f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r) \cdot dr = \lambda^1\lambda^1 \int_o^c f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r)\, dr.$$

So lange λ und λ^1 von einander verschieden sind, muss also

$$\text{E)} \qquad \int_o^c rr \cdot f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r)\, dr = o \text{ sein.}$$

Aus diesen Untersuchungen folgt

$$\text{F)} \qquad \int_o^c Y_{(n)}\, f(\lambda_{(n)} \cdot r)\, rr\, dr = b_{(n)} \int_o^c \{f(\lambda_{(n)} . r)\}^2\, rr\, dr$$

Verbindet man die Gleichungen B und C mit der Gleichung A, so findet man für beliebige Werthe von λ und λ^1 die Gleichung

$$\begin{aligned}
\lambda\lambda \int_o^c rr\, f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r)\, dr &= n(n+1) \int_o^c f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r) \cdot dr \\
&\quad - \int_o^c f(\lambda^1 \cdot r) \cdot \frac{d\left(rr \frac{d\, f(\lambda . r)}{dr}\right)}{dr} \cdot dr \\
&= n(n+1) \int_o^c f(\lambda . r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r)\, dr \\
&\quad - \left[f(\lambda^1 \cdot r) \cdot rr \cdot \frac{d\, f(\lambda \cdot r)}{dr}\right]_o^c \\
&\quad + \int_o^c rr \frac{d\, f(\lambda \cdot r)}{dr} \cdot \frac{d f(\lambda^1 \cdot r)}{dr} \cdot dr
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn man λ mit λ^1 vertauscht und die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt

$$\begin{aligned}
(\lambda\lambda - \lambda^1\lambda^1) \int_o^c rr \cdot f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r)\, dr &= - f(\lambda^1 \cdot c) \cdot cc \left[\frac{d\, f(\lambda \cdot r)}{dr}\right]^{r=c} \\
&\quad + f\lambda \cdot c) \cdot cc \left[\frac{d f(\lambda^1 \cdot r)}{dr}\right]^{r=c}
\end{aligned}$$

Ist λ einer von den Werthen, der der Gleichung 7 genügt, so ist $f(\lambda \cdot c) = o$, folglich ist

$$\int_o^c rr \cdot f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 . r)\, dr = \frac{f(\lambda^1 \cdot c) \cdot cc \cdot \left[\frac{d\, f(\lambda . r)}{dr}\right]^{r=c}}{\lambda^1\lambda^1 - \lambda\lambda}$$

Ist $\lambda^1 = \lambda$, so nimmt das Integral der rechten Seite den Werth $\frac{o}{o}$ an, folglich finden wir den Werth dieses Ausdruckes, wenn wir Zähler und Nenner nach λ^1 differenziren und dann $\lambda = \lambda^1$ setzen. Wir erhalten alsdann

$$\int_0^c rr \cdot f(\lambda \cdot r) \cdot f(\lambda^1 \cdot r)\, dr = \frac{\frac{d f(\lambda^1 \cdot c)}{d \lambda^1} \cdot cc \left[\frac{d f(\lambda \cdot r)}{dr}\right]^{r=c}}{2 \lambda^1}$$

Offenbar ist

$$\frac{d f(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{d\lambda} = \frac{f(\lambda \cdot c)}{d\lambda} = c \cdot f^1(s)$$

ferner

$$\frac{d f(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dr} = \frac{d f(\lambda \cdot r)}{dr} = \lambda \cdot f^1(s)$$

führt man diese Werthe ein, so wird

G) $$\int_0^c \left\{ r \cdot f(\lambda \cdot r) \right\}^2 . dr = \frac{c^3}{2} \left\{ f^1(\lambda . c) \right\}^2$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung F, so wird

H) $$b_{(n)} = \frac{2 \int_0^c Y_{(n)} \cdot f(\lambda_{(n)} \cdot r)\, rr\, dr}{c^3 \left\{ f^1 (\lambda_{(n)} \cdot c) \right\}^2}$$

Da b und λ nun vollständig bestimmt sind, so ist der Werth von

II) $$X_{(n)} = \sum b_{(n)} \cdot e^{-aa\lambda_{(n)}\lambda_{(n)}t} \cdot f(\lambda_{(n)} \cdot r)$$

auch vollständig bestimmt. — Der Werth von u also ebenfalls, da

III) $$u_1 = X_{(o)} + X_{(1)} + \cdots + X_{(n)} + \cdots$$

ist.

Soll die Temperatur in der Oberfläche nicht gleich Null sein, sondern gleich einer Constanten C, so kann man auch die vorige Lösung benutzen, wie folgende Ueberlegung zeigt: Da man den Nullpunkt auf der Skala beliebig wählen kann, so kann man ein Thermometer so wählen, dass dieses die Temperatur Null zeigt, wenn ein anderes die Temperatur C angibt. — Die Bedingungsgleichung, die zu erfüllen ist, ist dann natürlich

$$u_1 = F(r, \theta, \varphi) - C, \text{ wenn } t = o$$

oder $$u_1 = F(r, \theta, \varphi) - F(c, \theta, \varphi) \text{ wenn } t = o$$

Dem Werthe von u_1, den man auf die vorhin angegebene Weise findet, hat man alsdann nur den Werth C hinzuzufügen, wenn man die Temperatur nach dem ersten Thermometer angeben will.

Ist die Temperatur in der Oberfläche aber nicht constant, sondern von θ und φ abhängig, aber unabhängig von t; ist also

$$u_2 = \Psi(\theta, \varphi), \text{ wenn } r = c,$$

so muss

$$\frac{d u_2}{dt} = o \text{ sein.}$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn λ den Werth Null annimmt. Oder

$$X_{(n)} = Z = r^n q_{(n)}$$

ist eine particuliare Lösung der Gleichung I. Ist nun

$$\Psi(\theta, \varphi) = y_c + y_1 + y_2 + \cdots + y_{(n)} + \cdots$$

so ist

$$y_{(n)} = c^n \cdot q_{(n)}$$

$$q_{(n)} = \frac{1}{c^n} \cdot y_{(n)}, \text{ mithin}$$

$$X_{(n)} = \frac{r^n}{c^n} \cdot y_{(n)}$$

Fügen wir diesen Werth unseren früheren für $X_{(n)}$ hinzu, so haben wir

$$X_{(n)} = \frac{r^n}{c^n} \cdot y_{(n)} + \sum b_{(n)} e^{-aa\lambda_{(n)}\lambda_{(n)} \cdot t} \cdot f(\lambda_n \cdot r).$$

Hieraus folgt

$$Y_{(n)} = \frac{r^n}{c^n} \cdot y_{(n)} + \sum b_{(n)} \cdot f(\lambda_{(n)} \cdot r),$$

oder

$$Y_{(n)} - \frac{r^n}{c^n} \cdot y_{(n)} = \sum b_{(n)} \cdot f(\lambda_{(n)} \cdot r).$$

Um den Werth von b_n zu bestimmen, haben wir also in die Gleichung H für $Y_{(n)}$ zu setzen

$$Y_{(n)} - \frac{r^n}{c^n} \cdot y_{(n)}$$

damit

$$u = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots \quad + X_{(n)} + \cdots$$

beiden Bedingungs-Gleichungen genügt.

Soll die Temperatur in der Oberfläche periodisch sein nach der Zeit, so ist

$$\Psi(t, \Theta, \varphi) = k_0 + k_1 \cos\frac{\pi t}{\tau} + k_2 \cos\frac{2\pi t}{\tau} + \cdots\cdot + k_m \cos\frac{m\pi t}{\tau} + \cdots$$
$$+ l_1 \sin\frac{\pi t}{\tau} + l_2 \sin\frac{2\pi t}{\tau} + \cdots\cdot + l_m \sin\frac{m\pi t}{\tau} + \cdots$$

Setzt man

$$k_m = \rho_m \cdot \cos\nu_m \text{ und } l_m = \rho_m \cdot \sin\nu_m,$$

so erhält man, wenn man der Abkürzung wegen

$$\frac{m\pi}{\tau} = \alpha_m \text{ schreibt,}$$

$$\Psi(t, \Theta, \varphi) = \sum_0^\infty \rho_{(m)} \cos(\alpha_{(m)} t - \nu_{(m)})$$

Oder

$$\Psi(t, \Theta, \varphi) = \sum_0^\infty \frac{1}{2} \rho_m \left\{ e^{(\alpha_m t. - \nu_m) i} + e^{-(\alpha_m t - \nu_m) i} \right\}$$
$$= \sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} \rho_m \cdot e^{-\nu_m . i} \cdot e^{\alpha_m . i . t} + \frac{1}{2} \rho_m e^{\nu_m . i} \cdot e^{-\alpha_m . i . t} \right\}$$

Der Werth

$$X_{(n)} = q e^{-aa\lambda\lambda t} \cdot f(\lambda, r)$$

genügt bekanntlich der Differential-Gleichung I, daher wird auch

$$x_{(m)} = q_{(\alpha)} e^{-aa\lambda_{(\alpha)}\lambda_{(\alpha)} \cdot t} \cdot f(\lambda_{(\alpha)}, r) + q_{(\beta)} \cdot e^{-aa\lambda_{(\beta)} \cdot \lambda_{(\beta)} \cdot t} \cdot f(\lambda_{(\beta)}, r)$$

der Differential-Gleichung genügen. — Setzen wir nun

$$\lambda_{(\alpha)} = \frac{\sqrt{-\alpha_{(m)} \cdot i}}{a} \text{ und } \lambda_{(\beta)} = \frac{\sqrt{\alpha_{(m)} i}}{a}, \text{ so ist}$$

für $r = c$

$$y_{(m)} = q_{(\alpha)} \cdot f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(m)} \cdot i}}{a}, c\right) \cdot e^{\alpha_{(m)} i t} + q_{(\beta)} \cdot f\left(\frac{\sqrt{\alpha_{(m)} i}}{a}, c\right) e^{-\alpha_{(m)} i t}$$

Setzen wir also

$$q_{(\alpha)} = \frac{\frac{1}{2} \rho_{(m)} e^{-\nu_m . i}}{f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(m)} i}}{a}, c\right)} \text{ und } q_{(\beta)} = \frac{\frac{1}{2} \rho_m e^{\nu_m i}}{f\left(\frac{\sqrt{\alpha_m i}}{a}, c\right)}$$

so wird

$$\sum_{o}^{\infty} x_{(m)} = \sum_{o}^{\infty} \frac{1}{2} p_{(m)} \cdot e^{-\nu_{(m)} \cdot i} \cdot \frac{f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(m)} \cdot i}}{a}, r\right)}{f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(m)} \cdot i}}{a}, c\right)} e^{-\alpha_{(m)} i \cdot t}$$

$$+ \sum_{o}^{\infty} \frac{1}{2} p_{(m)} \cdot e^{\nu_{(m)} \cdot i} \cdot \frac{f\left(\frac{\sqrt{\alpha_{(m)} i}}{a}, r\right)}{f\left(\frac{\sqrt{\alpha_m \cdot i}}{a}, c\right)} \cdot e^{-\alpha_{(m)} \cdot i t}$$

Dieser Werth genügt der zweiten Bedingungs-Gleichung und der Differential-Gleichung. — Fügen wir nun den Werth $x_{(n)}$ dem früheren Werthe $X_{(n)}$ hinzu und bezeichnen wir diesen neuen Werth mit $X_{(n)}$, so wird

$$X_{(n)} = \frac{1}{2} p_{(n)} \left\{ e^{-\nu_{(n)} \cdot i} \cdot \frac{f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, r\right)}{f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, c\right)} \cdot e^{\alpha_{(n)} \cdot i t} + e^{\nu_{(n)} \cdot i} \frac{f\left(\frac{\sqrt{+\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, r\right)}{f\left(\frac{\sqrt{+\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, c\right)} \cdot e^{-\alpha_{(n)} i t} \right\}$$

$$+ \sum b_{(n)} \cdot e^{-a a \lambda_{(n)} \lambda_{(n)} t} \cdot f(\lambda_{(n)} \cdot r)$$

Wird $t = o$, so geht der Werth von $X_{(n)}$ über in

$$Y_{(n)} = \frac{1}{2} p_{(n)} \left\{ e^{-\nu_{(n)} \cdot i} \cdot \frac{f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, r\right)}{f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, c\right)} + e^{\nu_{(n)} \cdot i} \cdot \frac{f\left(\frac{\sqrt{\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, r\right)}{f\left(\frac{\sqrt{\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, c\right)} \right\}$$

$$+ \sum b_{(n)} \cdot f(\lambda_{(n)} \cdot r)$$

Damit also der ersten Bedingungs-Gleichung genügt wird, braucht man mit Hülfe der Gleichung H den Werth von $b_{(n)}$ nur so zu bestimmen, dass man in derselben $Y_{(n)}$ mit

$$Y_{(n)} - \frac{1}{2} p_{(n)} \left\{ e^{-\nu_{(n)} \cdot i} \cdot \frac{f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, r\right)}{f\left(\frac{\sqrt{-\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, c\right)} + e^{\nu_{(n)} \cdot i} \cdot \frac{f\left(\frac{\sqrt{\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, r\right)}{f\left(\frac{\sqrt{\alpha_{(n)} \cdot i}}{a}, c\right)} \right\}$$

vertauscht.

$$u = X_{(o)} + X_{(1)} + X_{(2)} + \cdots + X_{(n)} + \cdots$$

wird dann der Differential-Gleichung und beiden Bedingungs-Gleichungen genügen.

Man kann drei Ursachen unterscheiden, von denen die Temperatur der Erde herrührt:

1) die innere Erdwärme (ursprüngliche Wärme der Erde);

2) die Wärmeeinwirkung der Sonne

und

3) die Einwirkung des übrigen Weltalls.

Man kann daher u, die Temperatur der Erde betrachten als eine Summe von 3 Functionen

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

wenn u_1 die Temperatur des Weltalls ohne die Sonnenwärme bezeichnet; ferner wenn u_2 die Temperatur bezeichnet, die die Erde allein durch die Sonnenwärme annehmen würde; und wenn $u_{(3)}$ die Temperatur bezeichnet, die die Erde haben würde, wenn weder die Sonne noch das übrige

Weltall vorhanden wäre. — Nehmen wir die Temperatur des Weltalls zum Nullpunkt unserer Skala an, so ist

$$u = u_2 + u_3.$$

Die Temperatur u_2 ist periodisch nach der Zeit, und zwar gibt es hier eine jährliche und eine tägliche Periode (in der Nähe des Aequators eine halbjährliche und eine tägliche). — Da durch Versuche festgestellt ist, dass die jährlichen periodischen Temperaturschwankungen in der Erde nur bis zu einer Tiefe von ungefähr 50′ dringen, so muss u_2 in grösserer Tiefe constant sein. — Die Erfahrung zeigt ferner, dass ungefähr mit 116′ Tiefe die Temperatur der Erde um 1° C. zunimmt. Es lässt sich daher der Werth $\frac{d u_3}{d r}$ annähernd bestimmen. Es ist

$$\frac{d u}{d r} = \frac{d u_2}{d r} + \frac{d u_3}{d r}.$$

Da aber u_2, wie vorhin gesagt, in Tiefen über 50′ constant, so ist dort

$$\frac{d u}{d r} = \frac{d u_3}{d r} = -\frac{0{,}01}{116}.$$

Annähernd ist mithin auch in der Nähe der Oberfläche

$$\frac{d u_3}{d r} = -\frac{1}{11600}.$$

Nun ist

$$k \frac{d u_3}{d r} + H u_3 = o, \text{*)}$$

wenn k den inneren Leitungscoefficienten und H den äusseren Leitungscoefficienten einer Kugel bezeichnet, die Wärme ausströmt. Hieraus folgt, dass

$$u_3 = \frac{k}{H} \cdot \frac{1}{11600}.$$

Setzt man für k den grössten Werth und für H den kleinsten, den die Versuche über die Wärmeleitungsfähigkeit der Erde ergeben, so findet man mit Fourier, da k ungefähr = 4 H,

$$u_3 = \frac{1}{30} \, {}^{0}\,\mathrm{C}.$$

Es ist also heute an der Erdoberfläche die Temperatur, welche von der eigenen Wärme der Erde herrührt, höchstens $\frac{1}{30}$ ° C. — Zu einer Zeit, wo diese Temperatur z. B. 4° C. betrug, musste die Temperatur mit der Tiefe mindestens 120 Mal schneller wachsen als jetzt; mithin musste die Temperatur mit je einem Fuss Tiefe um mindestens je einen Grad zunehmen. Diese Thatsache scheint von Geologen nicht genug beachtet zu werden.

---

*) Befindet sich eine Kugel in einem luftleeren Raume oder in einem Gase, so wird die Wärmemenge, welche dieselbe aussendet, proportional sein dem Werthe

$$u - U,$$

wenn U die Temperatur des Mediums bezeichnet, das die Kugel umgiebt, und u die Temperatur der Kugel ist. Ist die Wärmemenge = H, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit dringt, wenn der Temperaturunterschied $u - U = 1$ (= 100°, C), so ist H (u — U) die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit in der Kugeloberfläche hindurchgeht. — Im Inneren der Kugel dringt durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit in der Richtung des Halbmessers ein Quantum $= -k \frac{du}{dr}$, folglich wird in der Oberfläche

$$k \frac{du}{dr} + H(u - U) = o$$

sein müssen.