# Die reine Berührung des zweiten Grades.

Werden zwei auf dasselbe Coordinatensystem bezogene Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für einen bestimmten Werth von $x$ nicht nur selbst gleich, sondern nehmen auch für diesen Werth von $x$ die $n$ ersten Ableitungen der Functionen gleiche Gestalt an, so haben die beiden Curven, welche die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ versinnlichen, bekanntlich in dem Punkte, dessen Ordinaten jenes $x$ und das dadurch bestimmte $y$ sind, eine Berührung des nten Grades. Diese Berührung kann unserer Ansicht nach eine reine oder eine unreine sein. Wir nennen sie eine reine, wenn bei einer der beiden Functionen die nte Ableitung constant ist, eine unreine, wenn dies bei keiner derselben der Fall ist; denn in dem letzteren Falle offenbart keine der den Functionen entsprechenden Curven durch ihre äußere Form etwas über das Bestreben, welches der die andere Curve durch seine Bewegung erzeugende Punkt im Moment der Berührung hat, während die Curve, welche $f(x)$ entspricht und einen constanten nten Differentialquotienten besitzt, von der Berührungsstelle ab in reinster Weise uns darstellt, wie der die Curve $\varphi(x)$ erzeugende Punkt von jener Stelle aus forteilen würde, wenn die Intentionen, die er dort hat, keine Aenderung erlitten.

Auf den Werth der reinen Berührungen für die Lehre der Functionen im Allgemeinen und die Kenntniß der Curven im Besonderen ist schon oft und mit Nachdruck hingewiesen und die reine Berührung des ersten Grades ist auch gründlich studirt, aber von den reinen Berührungen eines höheren Grades kann dies meines Wissens nicht behauptet werden, vielmehr ist schon die des zweiten Grades durch das Problem vom Krümmungskreis vollständig in den Schatten gestellt; mit Unrecht, denn so bedeutsam der Krümmungskreis für die ganze Curvenlehre ist, die Betrachtung der reinen Berührung des zweiten Grades ist nicht minder bedeutsam.

Es giebt nur eine Art von Linien, welche mit anderen eine reine Berührung zweiten Grades haben kann, die der Gleichung $y = a + bx + cx^2$ entsprechende Gruppe, denn sie allein hat, wenn $x$ als Variabele aufgefaßt wird, einen constanten zweiten Differentialquotienten, $2c$. Nun lehrt die analytische Geometrie, daß $y = a + bx + cx^2$ die Gleichung der Parabel ist, deren Achse parallel mit der Y-Achse des rechtwinkligen Coordinatensystems läuft, auf welches die Gleichung bezogen ist, während der Ordinatenursprung ein beliebiger Punkt ist; dabei entspricht der Coefficient $c$ dem reciproken Werthe des Parameters, der wiederum gleich dem 4fachen der Entfernung des Scheitels und Brennpunktes der Parabel ist. Dies gilt von dem absoluten Werthe des $c$; in Bezug auf das Vorzeichen ist noch zu bemerken, daß $c$ negativ wird, wenn die Ordinate des Scheitels größer als die des Brennpunktes ist und positiv, wenn in Bezug auf die Ordinaten das umgekehrte Größenverhältniß stattfindet.

Da die Gleichung $y = a + bx + cx^2$ nur drei Constante enthält und eine im zweiten Grade Berührende drei Bedingungen zu erfüllen hat, nemlich durch einen bestimmten Punkt gehen und für denselben die beiden ersten Ableitungen mit der berührten Curve gleich haben muß, so lassen sich für die Constanten der Berührungsparabel Bestimmungsgleichungen aufstellen. — Ist $Y = \varphi(X)$ die Gleichung der Curve, die in dem Punkte XY berührt werden soll, so ist:

$$Y = a + bX + cX^2$$
$$dY_x = b + 2cX$$
$$d^2Y_x = 2c$$

folglich $c = \frac{1}{2} d^2Y_x, \quad b = dY_x - d^2Y_xX, \quad a = Y - XdY_x + \frac{1}{2} d^2Y_xX^2.$

Es existirt mithin für jeden Punkt irgend welcher auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Curve eine, und so lange x als Veränderliche aufgefaßt wird und die Ausdrücke $dY_x$ und $d^2Y_x$ nicht mehrdeutig werden, auch nur eine Parabel, welche mit der Curve in jenem Punkte eine reine Berührung zweiter Ordnung hat. Wird dieselbe mit der Hauptcurve zugleich gezeichnet, so zeigt sie welche Veränderung die Stärke des Wachsens der abhängigen Veränderlichen im Verhältniß zu der gleichmäßig wachsenden, unabhängigen Veränderlichen im Berührungspunkte erleidet. Um sich über diese Veränderung und ihre Wirkung zu orientiren ist es indeß nicht nothwendig die osculirende Parabel zu zeichnen, es genügt ihren Parameter so wie die Lage des Scheitels und Brennpunktes zu bestimmen oder ihre Gleichung anzugeben. — Das eigentliche Maß für die Größe der Veränderung, welche die Stärke des Wachsens der Ordinate im Berührungspunkte
Y erleidet, ist der Parameter oder $\frac{2}{d^2Y_x}$, der doppelte reciproke Werth der zweiten Ableitung; ist er groß, die Parabel in der Scheitelgegend also wenig gekrümmt, so ist die Veränderung des Wachsens gering, ist er klein, so ist die Veränderung, versinnlicht durch die scharfe Beugung der Parabel am Scheitel, eine kräftige. Für die logarithmische Linie ist der Parameter $\frac{2}{d^2Y_x} = -2x^2$, d. h. 1) die Scheitel sämmtlicher Berührungsparabeln der logarithmischen Curve liegen in der Richtung der positiven y über den zugehörigen Brennpunkten, 2) die Veränderung, welche das Wachsen der Ordinaten erleidet, wird fortwährend schwächer, anfangs unendlich groß wird sie schließlich unendlich klein und die Berührungsparabeln durchlaufen in Bezug auf Krümmung alle Formen, die sie überhaupt haben können, ihre zuerst auf einander fallenden Zweige — es geschieht dies immer, wenn $d^2y_x = \infty$ wird — breiten sich endlich so aus, daß sie von einem gestreckten Winkel nicht mehr zu unterscheiden sind.

Setzt man die oben für die Constanten a, b und c gegebenen Werthe in die allgemeine Parabelgleichung $y = a + bx + cx^2$ ein, so erhält man

$$y = Y - XdY_x + \frac{1}{2} d^2Y_xX^2 + x(dY_x - d^2Y_xX) + \frac{1}{2} d^2Y_xx^2$$

oder $$y - Y = dY_x(x - X) + \frac{1}{2} d^2Y_x(x - X)^2$$

als Gleichung aller Berührungsparabeln. — Für jede einzelne sind natürlich Y, X die Coordinaten des Berührungspunktes sowie die davon abhängigen Ableitungen constant. — Andrerseits folgt: jede bestimmte Curve hat ihre besondere Gruppe von Berührungsparabeln. Die der Gleichung

$Y = X^3$ entsprechende Curve hat z. B. Berührungsparabeln von der Form $y - X^3 = 3Xx(x - X)$ oder $y = x^3 - (x - X)^3$, die logarithmische Curve solche von der Form $y = \ln X - \frac{3}{2} + \frac{2x}{X} - \frac{x^2}{2X^2}$, während die Berührungsparabeln der Sinuslinie nach der Gleichung $y - \sin X = \cos X(x - X) - \frac{1}{2}\sin X(x - X)^2$ entsprechen.

Die Lage, welche die Tangente und Berührungsparabel eines Punktes zu einander und in Bezug auf die berührte Curve in der Nähe des Berührungspunktes einnehmen, ist natürlich von den beiden ersten Ableitungen der Gleichung der Hauptcurve, zum Theil aber auch von der dritten abhängig. Die Tangente der Curve ist zugleich Tangente der Berührungsparabel und beide, Parabel und Hauptcurve, liegen stets auf derselben Seite der Tangente, denn die Veränderung der Stärke des Wachsens während der Berührung ist beiden gleich, die auf die Ordinaten des Berührungspunktes unmittelbar folgenden Ordinaten der Curve und Parabel werden mithin größer als die Ordinaten der Tangente, wenn die Veränderung eine Zunahme und gleichzeitig kleiner, wenn die Veränderung eine Abnahme ist. Man könnte auch sagen: alle drei Linien, Tangente, Parabel und Curve haben zwei Punkte gemeinsam, die beiden letzteren noch einen dritten, während sich also die erstere von den beiden letzteren trennt, bleiben diese noch einen Moment zusammen und in diesem Momente sind sie also nicht auf verschiedenen, sondern auf derselben Seite der Tangente. — Schneidet die Tangente die Hauptcurve bei einer Inflexion, so nimmt die Parabel die Gestalt einer Geraden an und fällt ihrer ganzen Länge nach auf die Tangente, die hier mit der Curve eine reine Berührung zweiten Grades hat. — Ob in der Nähe des Berührungspunktes sich die Parabel oder die Hauptcurve der Tangente näher anschmiegt, entscheidet die dritte Ableitung; hat sie mit der zweiten gleiches Vorzeichen, so verstärkt sie nach der Berührung die durch die zweite Ableitung hervorgerufene Differenz der Ordinaten der Hauptcurve und Tangente, hat sie entgegengesetztes Vorzeichen, so mindert sie dieselbe. Sind also die Vorzeichen der dritten und zweiten Ableitung gleich, so liegt die Berührungsparabel nach der Berührung zwischen der Hauptcurve und der Tangente, während vor der Berührung das Umgekehrte stattfand, sind die Vorzeichen ungleich, so liegt die Hauptcurve nach der Berührung in der Mitte, im Allgemeinen schneiden sich also Parabel und Hauptcurve während der Berührung; nur wenn $d^3y_x$ 0 wird und zugleich $d^4y_x$ einen endlichen Werth behält, bleibt die Parabel vor und nach der Berührung auf derselben Seite der Hauptcurve.

Wir wissen: die Achsen der berührenden Parabeln stehen senkrecht auf der X-Achse des Coordinatensystemes; wird also die X-Achse oder eine Parallele mit ihr in den Punkten r und s von einer der Berührungsparabeln geschnitten, so liegen Scheitel und Brennpunkt dieser Parabel auf der im Halbirungspunkt von rs errichteten Senkrechten und das x des Scheitels so wie des Brennpunktes ist das arithmetische Mittel der Abscissen der Punkte r und s, diese werden aber, wenn wir r und s zunächst auf der X-Achse selbst gelegen denken, gefunden, sobald wir in die Gleichung der Berührungsparabel

$$y - Y = d\,Y_x\,(x - X) + \frac{1}{2}d^2Y_x\,(x - X)^2$$

für y Null einsetzen und sodann x bestimmen.

$$(x-X)^2 + \frac{2\,d\,Y_x}{d^2\,Y_x}(x-X) = \frac{-2\,Y}{d^2\,Y_x}$$

$$x-X+\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x} = \pm\sqrt{\frac{-2\,Y}{d^2\,Y_x}+\left(\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x}\right)^2}$$

Die Abscissen von r und s sind also:

$$X-\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x}+\sqrt{\frac{-2\,Y}{d^2\,Y_x}+\left(\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x}\right)^2} \text{ und } X-\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x}-\sqrt{\frac{-2\,Y}{d^2\,Y_x}+\left(\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x}\right)^2}$$

und die Abscisse des Scheitels $\mathfrak{x} = X - \frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x}$. Setzt man diesen Werth wiederum für x in die Gleichung der Berührungsparabel, so wird sie:

$$y-Y = d\,Y_x\left(X-\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x}-X\right)+\frac{1}{2}\,d^2\,Y_x\left(X-\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x}-X\right)^2$$

und $y = Y - \frac{(d\,Y_x)^2}{2\,d^2\,Y_x} = \mathfrak{y}$, die Ordinate des Scheitels. Schneidet die Berührungsparabel, was wohl vorkommen kann und sich durch das Imaginairwerden der Wurzelgröße der Rechnung offenbart, die X-Achse nicht, so setze man y nicht $=0$, sondern gleich einer beliebigen Größe, in deren Abstand die Parabel von einer Parallele mit der X-Achse wirklich geschnitten wird, und rechne wie oben, dann wird nur die Wurzelgröße modificirt nicht aber das arithmetische Mittel und wir erhalten mithin für Ordinate und Abscisse des Scheitels dieselben Werthe. Aus der Beschaffenheit dieser Ordinate $\mathfrak{y} = Y - \frac{(d\,Y_x)}{2\,d^2\,Y_x}$ ergiebt sich, daß die osculirende Parabel nur in den Punkten mit ihrem Scheitel berührt, für welche $d\,Y_x = 0$ wird, während $d^2\,Y_x$ entweder einen endlichen Werth behält oder, wenn dies nicht der Fall sein sollte, doch der scheinbar unbestimmte Ausdruck $\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x}$ Null wird, d. h. in Punkten, in welchen die Curve selbst Maxima und Minima erreicht. — Im Allgemeinen haben Scheitel und Berührungspunkt eine endliche Entfernung und diese bestimmt sich nach der Formel

$$e = \sqrt{(Y-y)^2+(X-x)^2} \text{ zu } \sqrt{\frac{(d\,Y_x)^4}{4\,(d^2\,Y_x)^2}+\frac{(d\,Y_x)^2}{(d^2\,Y_x)^2}} \text{ oder } \frac{d\,Y_x}{2\,d^2\,Y_x}\sqrt{(d\,Y_x)^2+4};$$

die Tangente des Winkels aber, welchen diese Linie mit der X-Achse bildet, ist, da bei jeder Parabel der Scheitel die Projection der Tangente auf die Achse halbirt, $= \frac{d\,Y_x}{2}$, woraus als Gleichung der Berührungspunkt und Scheitel irgend welcher Berührungsparabel Verbindenden unmittelbar folgt:

$$y-Y = \frac{d\,Y_x}{2}\,(x-X.).$$

Sucht man jetzt eine Verbindungsgleichung zwischen den Coordinaten des Scheitels

$$\mathfrak{x} = X - \frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x} \text{ und } \mathfrak{y} = Y - \frac{(d\,Y_x)^2}{2\,d^2\,Y_x}$$

herzustellen, indem man in die letztere Gleichung für $\frac{d\,Y_x}{d^2\,Y_x} = X - \mathfrak{x}$ einsetzt, so erhält man als Gleichung der Linie, welche der geometrische Ort aller Scheitel der Berührungsparabeln einer beliebigen Curve $Y=f(X)$ ist, wiederum $\mathfrak{y}-Y=\frac{dY_x}{2}(\mathfrak{x}-X)$. Die Gleichung dieser Linie stimmt also der äußeren Form nach mit der für die Verbindungslinie des Scheitels und Berührungspunktes gefundenen vollkommen überein, ist aber darum keineswegs identisch mit derselben, denn in der Gleichung der Verbindungslinie sind die Größen $X$, $Y$ und $dY_x$ constant, in der Gleichung des geometrischen Ortes der Scheitel, den wir fortan Scheitelcurve nennen werden, sind dagegen dieselben Größen, obwohl sie nicht die laufenden Coordinaten der Curve sind, variabel. Die äußere Conformität der Gleichungen deutet aber auf eine innigere Beziehung der Verbindungslinie des Scheitels und Berührungspunktes mit der Scheitelcurve und diese Beziehung offenbart sich auch, sobald wir mehrere der Verbindungslinien, die von dicht neben einander liegenden Punkten der Hauptcurve ausgehen, betrachten und sehen, wo sie sich schneiden, oder, was dasselbe bedeutet, untersuchen, wie ihre Umhüllungscurve beschaffen sei. Wir nehmen zu dem Ende in der Gleichung der Verbindungslinie $y-Y=\frac{dY_x}{2}(x-X)$ $y$ und $x$ für einen Moment als Constante und lassen den sonst für die Linie constanten Parameter $X$ und die von ihm abhängigen $Y$ und $dY_x$ um ein unendlich Kleines wachsen, dann ergiebt sich $-dY_x=\frac{1}{2}d^2Y_x(x-X)-\frac{1}{2}dY_x$ oder $0=d^2Y_x(x-X)+dY_x$, folglich die Abscisse der Umhüllungscurve $x=X-\frac{dY_x}{d^2Y_x}$ und mit Hülfe der Hauptgleichung der Verbindungslinie die Ordinate $y=Y-\frac{(dY_x)^2}{2d^2Y_x}$. Dieselben Größen hatten wir aber eben als Coordinaten der Scheitelcurve gefunden und erkennen daher: die Scheitelcurve ist die Umhüllungscurve aller der Linien, welche die Berührungspunkte und Scheitel der osculirenden Parabeln verbinden, auf ihr schneiden sich je zwei dieser Linien, wenn sie von unendlich nahe bei einander gelegenen Punkten der Hauptcurve ausgehen, und umgekehrt sind diese Verbindungslinien die Tangenten der Scheitelcurve.

Da die Tangente des Winkels, welchen eine an die Scheitelcurve gezogene Tangente mit der X-Achse bildet, bekannt ist, so lassen sich die Subtangenten, Subnormalen, Tangenten und Normalen der Scheitelcurve leicht bestimmen. Die Subnormale ist gleich der Ordinate $\mathfrak{y}=Y-\frac{(dY_x)^2}{2d^2Y_x}$ dividirt durch $\frac{dY_x}{2}$ oder $\frac{2Y}{dY_x}-\frac{dY_x}{d^2Y_x}$. Für die der Gleichung $y=x^n$ entsprechenden Curven nimmt dieser Ausdruck eine sehr einfache Gestalt an und zeigt, daß die Subtangente eines Punktes der Scheitelcurve direct proportional mit der Abscisse des Punktes der Hauptcurve ist, in welchem die Berührungsparabel, die den ersten Punkt zum Scheitel hat, die Hauptcurve berührt. Es ist nämlich in diesem Falle

$$\text{subt}=\frac{2x^n}{nx^{n-1}}-\frac{nx^{n-1}}{n(n-1)x^{n-2}}=\frac{(n-2)x}{n(n-1)},\ \text{für } y=x^3$$

also $\text{subt}=\frac{x}{6}$. Die Subnormale wird im Allgemeinen $Y.\frac{dY_x}{2}-\frac{(dY_x)^3}{4d^2Y_x}$ und dem gemäß bei der gleichseitigen Hyperbel, $xy=1$, $\frac{-3}{8x^3}$; die Normale $\left[\frac{Y}{2}-\frac{(dY_x)^2}{4d^2Y_x}\right]\sqrt{4+(dY_x)^2}$ und die Tangente $\left[\frac{Y}{dY_x}-\frac{dY_x}{2d^2Y_x}\right]\sqrt{4+(dY_x)^2}$.

Für manche Curven ist die Gleichung der Scheitelcurve ohne Mühe aufzustellen, z. B. bei $y=x^3$. Es ist $dy_x=3x^2$, $d^2y_x=6x$; nennen wir daher die laufenden Coordinaten der Scheitelcurve $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$, so folgt

$$\mathfrak{y}=y-\frac{(dy_x)^2}{2d^2y_x}=x^3-\frac{9x^4}{2.6x}=\frac{x^3}{4}=\frac{y}{4} \text{ und } \mathfrak{x}=x-\frac{dy_x}{d^2y_x}=x-\frac{3x^2}{6x}=\frac{x}{2},$$

mithin $\mathfrak{y}=2\mathfrak{x}^3$ die gesuchte Gleichung der Scheitelcurve. — Dasselbe Resultat gewinnen wir natürlich auch, wenn wir die Scheitelcurve als Umhüllungscurve der Linie $\mathfrak{y}-y=\frac{dy_x}{2}(\mathfrak{x}-x)$ oder $\mathfrak{y}-x^3=\frac{3x^2}{2}(\mathfrak{x}-x)$ suchen, denn differenziren wir diese Gleichung, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ als Constante nehmend, nach $x$, so erhalten wir $-3x^2=3x\mathfrak{x}-\frac{9}{2}x^2$, woraus unmittelbar $x=2\mathfrak{x}$ und dann mit Hülfe der differenzirten Gleichung $\mathfrak{y}=2\mathfrak{x}^3$ entspringt.

Untersuchen wir zweitens die Linie, welche die Gleichung $y=x^{\frac{3}{2}}$ darstellt; $dy_x=\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2}$, $d^2y_x=\frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{4}$, also $\mathfrak{y}=-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}=-\frac{y}{2}$, $\mathfrak{x}=-x$, $\mathfrak{y}=\frac{1}{2}\mathfrak{x}^{\frac{3}{2}}$, die Gleichung der Scheitelcurve. Ist drittens $y=x^{\frac{2}{3}}$, $dy_x=\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{3}$, $d^2y_x=-\frac{2x^{-\frac{4}{3}}}{9}$, $\mathfrak{y}=2y$, $\mathfrak{x}=4x$, so ist $\mathfrak{y}=\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{x}^2}{2}}$.

Besonderes Interesse bietet die logarithmische Linie $y=\ln x$. Für sie ist $dy_x=\frac{1}{x}$, $d^2y_x=\frac{-1}{x^2}$, folglich $\mathfrak{y}=y+\frac{1}{2}$ und $\mathfrak{x}=2x$, also $y=\ln\frac{\mathfrak{x}}{2}$ und $\mathfrak{y}=\ln\mathfrak{x}-\ln 2+\frac{1}{2}$. D i e S c h e i t e l s ä m m t l i c h e r P a r a b e l n, d i e m i t e i n e r l o g a r i t h m i s c h e n C u r v e e i n e r e i n e B e r ü h r u n g z w e i t e r O r d n u n g h a b e n, b i l d e n w i e d e r u m e i n e l o g a r i t h m i s c h e L i n i e.

Etwas mehr Rechnung erfordert die Darstellung der Scheitelcurve der Sinuslinie. $y=\sin x$, $dy_x=\cos x$, $d^2y_x=-\sin x$, $\mathfrak{y}=\sin x+\frac{\cos^2 x}{2\sin x}=\frac{\sin^2 x+1}{2\sin x}=\frac{y^2+1}{2y}$, folglich $y=\mathfrak{y}\pm\sqrt{\mathfrak{y}^2-1}$. Für den ersten Quadranten muß das negative Vorzeichen genommen werden, weil $y$ kleiner als $\mathfrak{y}$ ist.

$$\mathfrak{x}=x+\frac{\cos x}{\sin x}=x+\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},\ x=\text{arc}\,(\sin=y),$$

$$\text{also } \mathfrak{x}=\text{arc}\,(\sin=\mathfrak{y}-\sqrt{\mathfrak{y}^2-1})+\frac{\sqrt{1-(\mathfrak{y}-\sqrt{\mathfrak{y}^2-1})^2}}{\mathfrak{y}-\sqrt{\mathfrak{y}^2-1}}$$

oder, wenn man den letzten Bruch im Zähler und Nenner mit $\mathfrak{y}+\sqrt{\mathfrak{y}^2-1}$ multiplicirt,

$$\mathfrak{x}=\text{arc}\,(\sin=\mathfrak{y}-\sqrt{\mathfrak{y}^2-1})+\sqrt{(\mathfrak{y}+\sqrt{\mathfrak{y}^2-1})^2-1},$$

die Gleichung der Scheitelcurve.

Ein ähnliches Verhältniß wie die Scheitel zeigen auch die Brennpunkte der Berührungsparabeln. Die Ordinaten derselben $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ sind, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Hauptcurve und $x$, $y$ der Berührungspunkt ist,

$$x - \frac{d y_x}{d^2 y_x} \text{ und } y - \frac{(d y_x)^2}{2 d^2 y_x} + \frac{1}{2 d^2 y_x} \text{ oder } y - \frac{(d y_x)^2 - 1}{2 d^2 y_x},$$

denn Scheitel und Brennpunkt jeder Parabel haben gleiche Abscissen und die Ordinate des Brennpunktes ist um ein Viertel des Parameters, das ist um $\frac{1}{2 d^2 y_x}$ größer als die Ordinate des Scheitels. Die Gleichung der Linie, welche irgend einen Berührungspunkt $x$, $y$ mit dem zugehörigen Brennpunkt $\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{y}_1$ verbindet, ist mithin $Y - y = \frac{y - \mathfrak{y}_1}{x - \mathfrak{x}_1}(X - x)$ oder für $\mathfrak{y}_1$ $\mathfrak{x}_1$ ihre Werthe eingesetzt, $Y - y = \frac{(d y_x)^2 - 1}{2 d y_x}(X - x)$. $Y$ $X$ sind natürlich die laufenden Coordinaten, $x$ $y$ und $d y_x$ für jede bestimmte Verbindungslinie constant. Bringt man aber die Gleichung auf die Form:

$$2 d y_x Y - 2 d y_x \,.\, y = (d y_x)^2 X - X - (d y_x)^2 x + x,$$

denkt wieder $Y$ und $X$ für einen Moment constant, den sonst constanten Parameter $x$ und das davon Abhängige variabel und differenzirt nach $x$, so erhält man:

$$2 Y d^2 y_x - 2 (d y_x)^2 - 2 y d^2 y_x = 2 X d y_x d^2 y_x - 2 x d y_x d^2 y_x - (d y_x)^2 + 1$$

oder $$2 d^2 y_x (Y - y) = 2 d y_x d^2 y_x (X - x) + (d y_x)^2 + 1$$

und nehme ich die ursprüngliche Gleichung $2 d y_x (Y - y) = [(d y_x)^2 - 1](X - x)$ zu Hülfe, eliminire $Y - y$ und bestimme $X - x$, so wird dieses $= \frac{-d y_x}{d^2 y_x}$, woraus sich dann

$Y - y = \frac{1 - (d y_x)^2}{2 d^2 y_x}$ ergiebt, mithin $X = x - \frac{d y_x}{d^2 y_x} = \mathfrak{x}_1$ und $Y = y - \frac{(d y_x)^2 - 1}{2 d^2 y_x} = \mathfrak{y}_1$. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier Linien, die in zwei Parabeln, welche die Hauptcurve in zwei unmittelbar auf einander folgenden Punkten berühren, Berührungspunkt und Brennpunkt verbinden, sind zugleich die Coordinaten des Brennpunktes. Der geometrische Ort aller Brennpunkte der Parabeln, welche eine beliebige Curve im zweiten Grade rein berühren, ist also zugleich der geometrische Ort der auf einander folgenden Durchschnitte der Linien, die in diesen Parabeln Berührungspunkt und Brennpunkt verbinden d. h. Umhüllungscurve für diese Linien, die umgekehrt für sie Tangenten sind. Existirt daher von einer Curve die Scheitelcurve und der geometrische Ort der Brennpunkte, während die Hauptcurve selbst verloren gegangen ist, so läßt sich diese mit Leichtigkeit mechanisch wieder herstellen, man braucht nur an beliebige Punkte der Scheitelcurve und der Curve der Brennpunkte, die gleiche Abscissen haben, Tangenten zu ziehen; die Schnittpunkte derselben sind die Punkte der Hauptcurve; auch erhellt, daß aus den Gleichungen der Scheitelcurve und der der Brennpunkte die Gleichung der Hauptcurve abgeleitet werden kann. Ist nämlich $y = f(x)$ die Scheitelcurvengleichung, $y_1 = \varphi(x)$ die der Brennpunkte, so ist $Y - y = f'(x)(X - x)$ die Gleichung der Tangente der ersten und $Y_1 - y_1 = \varphi'(x)(X_1 - x)$ die Tangentengleichung der zweite Curve, für den Durchschnittspunkt der Tangenten sind $Y$ und $Y_1$, $X$ und $X_1$ gleich, also

$$y_1 - y = (f'(x) - \varphi'(x))(X - x),\; X = x + \frac{y_1 - y}{f'(x) - \varphi'(x)},\; Y = y + f'(x)\frac{(y_1 - y)}{f'(x) - \varphi'(x)},$$

die Coordinaten der Hauptcurve. Eliminire ich aber aus den beiden letzten Gleichungen x nebst den von x Abhängigen und stelle dadurch eine Gleichung zwischen Y und X her, so habe ich die Gleichung der Hauptcurve.

Für die auf ihre Asymptoten als Achsen bezogene Hyperbel bestimmt sich der geometrische Ort der Brennpunkte leicht. Es ist hier $y = x^{-1}$, $dy_x = -x^{-2}$, $d^2y_x = 2x^{-3}$, $\mathfrak{y}_1 = y - \frac{(dy_x)^2 - 1}{2d^2y_x} = \frac{3}{4x} + \frac{x^3}{4}$, $\mathfrak{x}_1 = x - \frac{dy_x}{d^2y_x} = \frac{3}{2}x$, $x = \frac{2}{3}\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1 = \frac{9}{8\mathfrak{x}_1} + \frac{2\mathfrak{x}_1^3}{27}$, die Gleichung der Curve der Brennpunkte. — Gehen wir umgekehrt von dieser Gleichung als einer für den geometrischen Ort der Brennpunkte osculirender Parabeln gegebenen aus und sagen: die Scheitel dieser Parabeln entsprechen der Gleichung $8\mathfrak{y}\mathfrak{x} = 9$, die auf dasselbe Coordinatensystem wie die erstere bezogen ist, in Folge dessen der Index bei $\mathfrak{x}_1$ fortgelassen werden kann, so werden die Coordinaten der Hauptcurve nach dem Obigen

$$x = \mathfrak{x} + \frac{\frac{2\mathfrak{x}^3}{27}}{-\frac{2}{9}\mathfrak{x}^2} = \frac{2}{3}\mathfrak{x} \text{ und } y = \frac{9}{8\mathfrak{x}} + \frac{\mathfrak{x}}{3}\cdot\frac{9}{8\mathfrak{x}^2} = \frac{3}{2\mathfrak{x}}, \text{ folglich } x\,.\,y = \frac{2}{3}\mathfrak{x}\,.\,\frac{3}{2\mathfrak{x}} = 1,$$

die Gleichung der Linie, welche von den osculirenden Parabeln berührt wird. — Wir bestimmen noch für einige Linien die Curve der Brennpunkte, zunächst für die Sinuslinie $y = \sin x$. Es ist $dy_x = \cos x$, $d^2y_x = -\sin x$, $\mathfrak{x}_1 = x + \frac{\cos x}{\sin x}$, $\mathfrak{y}_1 = \sin x - \frac{\cos x^2 - 1}{-2\sin x} = \sin x - \frac{\sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$, $\sin x = 2\mathfrak{y}_1$, $\cos x = \sqrt{1 - 4\mathfrak{y}_1^2}$, $x = \operatorname{arc}(\sin = 2\mathfrak{y}_1)$, $\mathfrak{x}_1 = \operatorname{arc}(\sin = 2\mathfrak{y}_1) + \frac{\sqrt{1-4\mathfrak{y}_1^2}}{2\mathfrak{y}_1}$, die gesuchte Curve. Zweitens für den Kreis $y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $dy_x = -x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $d^2y_x = -r^2(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$, $\mathfrak{x}_1 = x - \frac{x(r^2 - x^2)}{r^2} = \frac{x^3}{r^2}$, $x = \sqrt[3]{\mathfrak{x}_1 r^2}$, $\mathfrak{y}_1 = y + \frac{x^2(r^2 - x^2)^{-1} - 1}{2r^2(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}} = y + \frac{(2x^2 - r^2)y}{2r^2} = \frac{y(r^2 + 2x^2)}{2r^2} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}(r^2 + 2x^2)}{2r^2}$ also die Curve der Brennpunkte des Kreises $\mathfrak{y}_1 = \frac{\sqrt{r^2 - \sqrt[3]{\mathfrak{x}_1 r^2}}(r + 2\sqrt[3]{\mathfrak{x}_1^2 r})}{2r}$. Drittens für die logarithmische Linie $\mathfrak{y} = \ln\frac{\mathfrak{x}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{x}^2}{8}$ und endlich für die Cosinuslinie $\mathfrak{x} = \operatorname{arc}(\cos = 2\mathfrak{y}) - \frac{\sqrt{1 - 4\mathfrak{y}^2}}{2\mathfrak{y}}$. — Bei vielen Curven läßt sich die Gleichung des geometrischen Ortes der Brennpunkte nicht angeben, weil es nicht möglich ist aus den Werthen von $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{x}_1$ die Größen x und y zu eliminiren, man muß sich bei ihnen mit einer unentwickelten Gleichung oder der Bestimmung einzelner Punkte der Curve der Brennpunkte begnügen. Dagegen ist die Entfernung des Berührungspunktes und Brennpunktes irgend einer der osculirenden Parabeln stets leicht zu bestimmen, denn es ist

$$E = \sqrt{(x - \mathfrak{x}_1)^2 + (y - \mathfrak{y})^2} \text{ d. h. } = \sqrt{\frac{(dy_x)^2}{(d^2y_x)^2} + \frac{[(dy_x)^2 - 1]^2}{4(d^2y_x)^2}} \text{ oder } = \frac{(dy_x)^2 + 1}{2d^2y_x}.$$

Ein ebenso einfacher Ausdruck ergiebt sich für die Dreiecke, deren Ecken Berührungspunkt, Scheitel und Brennpunkt einer Berührungsparabel sind, denn als Grundlinie läßt sich in denselben die Entfernung des Scheitels und Brennpunktes, als zugehörige Höhe die Differenz der Abscissen des

Berührungspunktes und Scheitels auffassen, erstere ist mithin $\frac{1}{2\,d^2 y_x}$, letztere $\frac{d\,y_x}{d^2 y_x}$ und der Inhalt $= \frac{d\,y_x}{4\,(d^2 y_x)^2}$. Nennen wir die Grundlinie des Dreiecks g und behalten für die beiden anderen Seiten die Benennungen e und E bei, so ist

1) $E - g = \frac{(d\,y_x)^2}{2\,d^2 y_x}$,

2) $e^2 + g^2 - E^2 = \frac{(d\,y_x)^4 + 4\,(d\,y_x)^2}{4\,(d^2 y_x)^2} + \frac{1}{4\,(d^2 y_x)^2} - \frac{(d\,y_x)^4 + 2\,(d\,y_x)^2 + 1}{4\,(d^2 y_x)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\,y_x}{d^2 y_x}\right)^2$,

$\frac{d\,y_x}{d^2 y_x}$ ist aber die Höhe des Dreiecks, wir haben mithin auch $e^2 + g^2 = E^2 + \frac{h^2}{2}$. — Bei der auf ihre Asymptoten als Achsen bezogenen Hyperbel ist die Entfernung des Berührungspunktes und Brennpunktes $= \frac{1 + x^4}{4x}$, und die Größe des Berührungsdreiecks, so möchte ich das eben betrachtete nennen, $\left(\frac{x}{2}\right)^4$, dasselbe wächst also im biquadratischen Verhältniß zur Abscisse des Berührungspunktes. Bei der logarithmischen Linie ist die entsprechende Entfernung $\frac{x^2 + 1}{2}$ und der Inhalt des Dreiecks wächst im cubischen Verhältniß zur Abscisse des Berührungspunktes, denn er ist $\frac{x^3}{4}$. Bei der die Function $y = x^3$ versinnlichenden Curve ist der Inhalt des Berührungsdreiecks constant, bei der Neil'schen Parabel $\frac{2\,x^{\frac{3}{2}}}{3}$, also direct proportional der Ordinate des Berührungspunktes, während er bei $y = e^x$ im umgekehrten Verhältniß zu dieser Ordinate steht. Ferner ist für

$y = \sin x$ das Berührungsdreieck $= \frac{\cos x}{4 \sin x^2}$, $y = \sec$ das Berührungsdreieck $= \frac{\sin x \cos x^4}{4(1 + \sin^2 x)^2}$,

$= \cos x \qquad = \frac{\sin x}{4 \cos x^2}$, $\quad = \mathrm{arc}\,(\sin = x) \qquad = \frac{(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}}{4\,x^2}$,

$= \mathrm{tg}\, x \qquad = \frac{\cos x^2 \,\mathrm{cotg}\, x^2}{16}$, $\quad = \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = x) \qquad = \frac{(1 + x^2)^3}{16\,x^2}$,

$= \mathrm{cotg}\, x \qquad = \frac{\sin x^2 \,\mathrm{tg}\, x^2}{16}$, $\quad$ für die Ellipse $\qquad = \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}\, x}{4\,b\,a^3}$,

$= e^x + e^{-x} \qquad = \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{4\,y^2}$, $\quad$ f. die Tractoria von Huyghens $= \frac{4\,a^4 y^2}{(a^2 - y^2)^4}$.

Es kann vorkommen, daß bei Berechnung des Berührungsdreieckes das Resultat ein negatives wird; forscht man dem Ursprung dieses negativen Zeichens nach, so wird man immer finden, daß es etwas über die Lage des Berührungsdreieckes andeutet, für den Inhalt aber der absolute Werth des gefundenen Resultates genommen werden muß. Dasselbe gilt von dem Parabelsegment, welches in einer beliebigen osculirenden Parabel durch die Sehne abgeschnitten wird, welche vom Berührungspunkte aus und parallel mit der X-Achse des Hauptcoordinatensystemes läuft; die Länge dieser Sehne ist $\frac{2\,d\,y_x}{d^2 y_x}$ und die Höhe des Raumes, der durch diese Sehne und die betreffende

Berührungsparabel begrenzt wird, $\frac{(dy_x)^2}{2d^2y_x}$, der Raum selbst also $=\frac{2(dy_x)^3}{3(d^2y_x)^2}$. Er verhält sich zum Berührungsdreieck wie $8(dy_x)^2$ zu 3 und ist demnach für

$y=e^x$ das Parabelsegment $=\frac{2}{3}e^x$, für $y=\text{cotg}\,x$ das Parabelsegment $=\frac{1}{6\cos x^2}$

$=\ln x$ $=\frac{2}{3}x$, $=\text{arc}(\text{tg}=x)$ $=\frac{1+x^2}{6x^2}$

$=x^3$ $=\frac{1}{2}x^4$, $=\text{arc}(\sin=x)$ $=\frac{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^2}$

$=\text{tg}\,x$ $=\frac{1}{6\sin x^2}$, für die Ellipse $=\frac{3b(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}x^3}{2a^5}$

und für die auf ihre Asymptoten bezogene gleichseitige Hyperbel constant $\frac{1}{6}$.

Geht man von der allgemeinen Gleichung der Berührungsparabel $y-Y=dY_x(x-X)+$ $+\frac{1}{2}dY_x(x-X)^2$ aus und sieht zu, in welchen Punkten sich zwei Parabeln schneiden, die eine beliebige Curve in zwei unmittelbar auf einander folgenden Punkten im zweiten Grade rein berühren, so findet man dies, indem man die allgemeine Gleichung in Bezug auf den sonst constanten Parameter X differenzirt. Man erhält:

$$-dY_x=d^2Y_x(x-X)-dY_x+\frac{1}{2}d^3Y_x(x-X)^2-d^2Y_x(x-X)$$

oder $\quad 0=\frac{1}{2}d^3Y_x(x-X),\ x=X,\ y=Y,$

d. h. die Berührungsparabeln schneiden oder berühren sich nur auf der Hauptcurve, die für sie die gemeinschaftliche Umhüllende ist, haben aber sonst keinen Punkt gemein. Auch mittelst der Berührungsparabeln läßt sich daher die Hauptcurve reconstruiren. Nehmen wir um diese Sache zu verfolgen und zugleich die Bedingung festzustellen, welche zwei Curven erfüllen müssen, wenn sie Scheitelcurve und Curve der Brennpunkte für ein und dieselbe Curve sein wollen, zwei auf dasselbe Coordinatensystem bezogene beliebige Linien und bezeichnen mit y die Ordinaten der einen, auf welcher die Scheitel, mit $y_1$ die Ordinaten der anderen, auf welcher die Brennpunkte liegen, so ist $4(y_1-y)$ der Parameter und $X^2=4(y_1-y)Y$ die Gleichung der Parabel für die der Punkt y, x Scheitel und die Ordinate $y_1$ Achse ist; bezieht man dieselbe aber auf das Hauptcoordinatensystem, so geht sie über in $(X-x)^2=4(y_1-y)(Y-y)$ und durch Differenziren nach x ergiebt sich:

$-2(X-x)=4(Y-y)(dy_{1x}-dy_x)-4dy_x(y_1-y)$; folglich

$$\frac{(X-x)^2}{4(y_1-y)}=\frac{dy_x(y_1-y)}{dy_{1x}-dy_x}-\frac{X-x}{2(dy_{1x}-dy_x)}$$

$$(X-x)^2+2(X-x)\frac{(y_1-y)}{dy_{1x}-dy_x}=\frac{4dy_x(y_1-y)^2}{dy_{1x}-dy_x}$$

$$(X-x)^2+2(X-x)\frac{(y_1-y)}{dy_{1x}-dy_x}+\frac{(y_1-y)^2}{(dy_{1x}-dy_x)^2}=\frac{(y-y_1)^2}{dy_{1x}-dy_x}\left[4dy_x+\frac{1}{dy_{1x}-dy_x}\right]$$

Aus der Gleichung entspringen für X zwei verschiedene Werthe. Zwei Parabeln, deren Scheitel und Brennpunkte auf zwei beliebigen Curven, aber paarweis unendlich nahe und außerdem so liegen, daß je ein Scheitel und zugehöriger Brennpunkt dieselbe Abscisse haben, schneiden sich mithin in zwei verschiedenen Punkten, haben also eine gemeinschaftliche Secante. Die beiden Schnittpunkte kommen einander indeß um so näher, je kleiner die rechte Seite der letzten Gleichung wird und fallen auf einander, d. h. lassen aus der Secante eine Tangente werden, wenn diese Seite gleich 0 wird. Dann existirt aber auch für alle Parabeln, die den beiden betrachteten entsprechen, eine Umhüllungscurve. Da y nach der Voraussetzung nicht $= y_1$ sein kann, so wird für diesen Fall $4\,dy_x + \frac{1}{dy_{1x} - dy_x} = 0$ oder was dasselbe ist $4\,dy_x(dy_x - dy_{1x}) = 1$ und wir haben hiermit die Bedingung, die zwei Curven zu erfüllen haben, wenn sie Scheitel- und Brennpunktscurve für ein und dieselbe Hauptcurve sein sollen. Wird dieser Bedingung aber Genüge geleistet, so ergiebt sich aus der letzten quadratischen Gleichung $X = x + \frac{y - y_1}{dy_{1x} - dy_x}$ und ersetze ich in der Hauptgleichung der Parabel $(X - x)^2$ durch $\left(\frac{y - y_1}{dy_{1x} - dy_x}\right)^2$, so wird dieses zunächst $= 4(y_1 - y)\,(Y - y)$, multiplicirt man dies aber mit der Bedingungsgleichung $4\,dy_x(dy_x - dy_{1x}) = 1$, so erhält man $Y - y = \frac{(y - y_1)\,dy_x}{dy_{1x} - dy_x}$. Die Coordinaten der Umhüllungscurve der eben betrachteten Parabeln stimmen also vollständig mit den Coordinaten der Durchschnittspunkte der Tangenten, welche an Punkte der Scheitel- und Brennpunktscurve gezogen sind, die gleiche Abscissen haben.

Die Bedingungsgleichung $4\,dy_x(dy_x - d\mathfrak{y}_x) = 1$ — wir gebrauchen $\mathfrak{y}$ für $y_1$, d. h. als Zeichen für die Ordinaten den Brennpunkte — zeigt nicht allein die wechselweise Abhängigkeit des geometrischen Orts der Brennpunkte der osculirenden Parabeln von dem der Scheitel, indem aus ihr $d\mathfrak{y}_x = dy_x - \frac{1}{4\,dy_x}$ folgt, sondern führt zu etwas ganz Neuem, sobald wir aus ihr $dy_x$ durch $d\mathfrak{y}_x$ bestimmen. Es ist $(dy_x)^2 - dy_x\,d\mathfrak{y}_x = \frac{1}{4}$, $(dy_x)^2 - dy_x\,d\mathfrak{y}_x + \frac{1}{4}(d\mathfrak{y}_x)^2 = \frac{(d\mathfrak{y}_x)^2 + 1}{4}$, $dy_x = \frac{1}{2}\,d\mathfrak{y}_x + \frac{1}{2}\sqrt{(d\mathfrak{y}_x)^2 + 1}$ und wenn wir beide Seiten integriren $y + c = \frac{\mathfrak{y}}{2} + \frac{1}{2}\int\sqrt{(d\mathfrak{y}_x)^2 + 1}$. Das Integral von $\sqrt{(d\mathfrak{y}_x)^2 + 1}$ ist aber der Bogen der Curve der Brennpunkte; nennen wir diesen B, so folgt: $y + c = \frac{\mathfrak{y} + B}{2}$, ein ebenso leicht erreichtes als schönes Resultat, denn es lehrt uns:

1) schreitet auf einer beliebigen Curve ein Punkt und mit ihm zugleich der Scheitel und Brennpunkt der osculirenden Parabel vorwärts, so ist nach beliebiger Zeit die Ordinate des Scheitels halb so viel gewachsen als das Wachsen der Ordinate des Brennpunktes und der von diesem zurückgelegte Weg zusammen beträgt;

2) die Curve der Brennpunkte ist, gleichgültig welcher Hauptcurve sie angehört, rectificabel, sobald die Gleichung der Hauptcurve bekannt ist.

Unser Resultat läßt sich auch in anderer Weise begründen. Die Ordinaten des geometrischen Ortes der Brennpunkte sind:

$$\mathfrak{x} = x - \frac{d\,y_x}{d^2 y_x} \text{ und } \mathfrak{y} = y - \frac{(d\,y_x)^2 - 1}{2\,d^2 y_x}, \text{ mithin}$$

$$d\,\mathfrak{x}_x = 1 - \frac{[(d^2 y_x)^2 - d\,y_x\,d^3 y_x]}{(d^2 y_x)^2} = \frac{d^3 y_x\,d\,y_x}{(d^2 y_x)^2} \text{ und}$$

$$d\,\mathfrak{y}_x = d\,y_x - \frac{[4\,d\,y_x (d^2 y_x)^2 - 2\,d^3 y_x [(d\,y_x)^2 - 1]]}{4\,(d^2 y_x)^2} = \frac{d^3 y_x [(d\,y_x)^2 - 1]}{2\,(d^2 y_x)^2}$$

das Bogenelement $dS$ ist aber $= \sqrt{d\,\mathfrak{x}^2 + d\,\mathfrak{y}^2}$, folglich

$$d\,S_x = \frac{d^3 y_x}{(d^2 y_x)^2} \sqrt{(d\,y_x)^2 + \frac{[(d\,y_x)^2 - 1]^2}{4}} = \frac{d^3 y_x}{2\,(d^2 y_x)^2} [(d\,y_x)^2 + 1]$$

und $S$ der Bogen $= \int \frac{d^3 y_x}{2\,(d^2 y_x)^2} [(d\,y_x)^2 + 1] = y - \frac{(d\,y_x)^2 + 1}{2\,d^2 y_x} + C.$

Der Bogen der Brennpunktscurve kann also direct aus der Gleichung der Hauptcurve abgeleitet werden und ist selbst dann seiner Länge nach zu bestimmen, wenn die Gleichung der Curve der Brennpunkte nicht darstellbar ist. — Für die Linie der natürlichen Logarithmen ist die Länge des Brennpunktbogens $\ln x + \frac{x^2 + 1}{2} + c$ oder genauer zwischen den Grenzen $x_1$ und $x_2$ gleich $\ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1{}^2 - x_2{}^2}{2}$, und dem entsprechend für die Linie der künstlichen Logarithmen mit der Basis $a = \log \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1{}^2 - x_2{}^2}{2} \ln a$, wo wiederum $x_2$ die untere und $x_1$ die obere Grenze andeutet. — Lassen wir, um ein Zahlenbeispiel zu geben, die Abscisse der Linie der briggischen Logarithmen von 1 bis 10 wachsen, was bekanntlich ein Wachsen der Ordinaten von 0 bis 1 zur Folge hat, so legt der Brennpunkt der osculirenden Parabel inzwischen $1 + \frac{99\,.\,2{,}3025851}{2}$ oder 114,9779625 zurück. Die Ordinate des Scheitels ist $y + \frac{1}{2 \ln a}$, sie wächst in jenem Intervalle um eins, die Ordinate des Brennpunktes $y + \frac{1 - x^2 (\ln 10)^2}{2 \ln 10}$ dagegen um $y_1 - y_2 + \frac{x_2{}^2 - x_1{}^2}{2}\,.\,\ln 10 = 1 - \frac{99 \ln 10}{2} = -112{,}9779625$, die Summe des Zuwachses des Bogens und der Ordinate der Curve der Brennpunkte ist also $114{,}9779625 - 112{,}9779625 = 2$, d. h. gleich dem doppelten Zuwachs der Ordinate des Scheitels. Da endlich die Abscisse des Brennpunktes jeder logarithmischen Linie im Allgemeinen $= 2x$ ist, beim Beginn unserer Bewegung also 2 war und am Schluß 20 wurde, so beträgt die directe Entfernung des Anfangs- und Schlußpunktes $\sqrt{18^2 + 112{,}9779625^2} = 114{,}4$. Der betrachtete Bogen der Brennpunktscurve ist mithin ein sehr gestreckter, von der geraden Linie nur wenig abweichender.

Durch die Beziehung $y = \frac{y_1}{2} + \frac{B}{2} + c$ ist ein Mittel gegeben die Scheitelcurve zu einer beliebigen Brennpunktscurve mechanisch zu construiren, wenn man nur einen Punkt besitzt, der sich zum Anfangspunkt der Construction eignet, für den z. B. der Bogen und die Constante 0 sind, die Ordinate des Scheitels also die Hälfte der Ordinate des Brennpunktes ist. Ein solcher Punkt ist aber gegeben, wenn die Brennpunktscurve eine mit der Y-Achse parallele Tangente hat, denn diese Tangente zeigt nach dem Berührungspunkte und Scheitel der Berührungsparabel zugleich, der Punkt, in welchem diese Tangente die Brennpunktscurve berührt, läßt sich daher auch als

Scheitel der osculirenden Parabel auffassen, deren Zweige, gerade Linien werdend, zusammenfallen. Wickelt man nun von diesem Punkte ausgehend den Bogen der Brennpunktscurve ab und spannt ihn zugleich in der Richtung der Ordinate der Brennpunktscurve aus, so beschreibt das Ende des ausgespannten Fadens eine Curve, deren Ordinaten das Doppelte der Ordinaten der Scheitelcurve sind.

Auch zu der Entfernung des Brennpunktes und Berührungspunktes der osculirenden Parabel hat die Länge des Bogens der Brennpunktscurve eine höchst einfache Beziehung, denn die Größe jener Entfernung ist $\frac{(d y_x)^2 + 1}{2 d^2 y_x}$, Bogen und Entfernung sind mithin — abgesehen von der Constanten — gleich der Ordinate der Hauptcurve für den Punkt, in welchem die Parabel die Hauptcurve osculirt. Die Relation, $E + B = y$, kann man ferner wiederum zur Zeichnung der Hauptcurve benutzen, falls der geometrische Ort der Brennpunkte bekannt, die Scheitelcurve aber noch nicht construirt ist. Sei a ein beliebiger Punkt der Brennpunktscurve, $\alpha$ der Winkel, welchen die Tangente dieser Curve in a mit der positiven Abscissenachse bildet, so wickle man von dem Punkte aus, der für die Construction der Scheitelcurve vorhin als Anfangspunkt characterisirt wurde, die Brennpunktscurve bis a ab und spanne den abgewickelten Bogen auf der durch a gezogenen Tangente aus in der Richtung, in welcher der Punkt a — wenn er als der durch seine Bewegung die Brennpunktscurve beschreibende aufgefaßt wird — weiter zu fliegen das Bestreben hat, lege im Endpunkt des ausgespannten Bogens an die Tangente einen Winkel von $45 - \frac{\alpha}{2}$ Grad, verlängere den zweiten Schenkel des Winkels, bis er die X-Achse schneidet, errichte im Schnittpunkt auf der X-Achse ein Loth, verlängere die Tangente der Berührungscurve rückwärts, dann schneidet sie das eben errichtete Loth in einem Punkte der Hauptcurve. Man könnte daher auch sagen: die Hauptcurve ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Kreise, die die X-Achse berühren, deren Mittelpunkte auf den Tangenten der Brennpunktscurve liegen und die durch Punkte dieser Tangenten gehen, welche um die Länge des abgewickelten Bogens der Brennpunktscurve von dem Berührungspunkte bis zu dem die Abwicklung vorgenommen ist, entfernt sind. — Auch hier ist natürlich vorausgesetzt: ein Anfangspunkt der Abwicklung sei bekannt.

Der Bogen der Scheitelcurve ist im Allgemeinen nicht rectificabel; nennen wir ihn s, so ist $ds = \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$, $d\mathfrak{x}_x$ ist aber wie bei der Brennpunktscurve $= \frac{d^3 y_x \, d y_x}{(d^2 y_x)^2}$ und $d\mathfrak{y}_x$, weil

$$\mathfrak{y} = y - \frac{(d y_x)^2}{2 d^2 y_x}, \; = \frac{d^3 y_x (d y_x)^2}{2 (d^2 y_x)^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{d^3 y_x \, d y_x}{(d^2 y_x)} \sqrt{1 + \left(\frac{d y_x}{2}\right)^2} \text{ und } s = \int \frac{d^3 y_x \, d y_x}{(d^2 y_x)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{d y_x}{2}\right)^2}.$$

Man sieht, der Bogen der Scheitelcurve steht in naher Beziehung zu dem der Hauptcurve. In einzelnen Fällen ist das Integral leicht gefunden, setzt man z. B. $y = x^{\frac{3}{2}}$, so wird

$$s = \int \frac{-\frac{3}{8} x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{9}{16} x^{-1}} \sqrt{1 + \frac{9}{16} x} = -\int \sqrt{1 + \frac{9}{16} x} = -\frac{32}{27} \left(1 + \frac{9}{16} x\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Das Minuszeichen deutet auf die Lage der Scheitelcurve: während die Punkte der Hauptcurve, in denen die osculirenden Parabeln sich berühren, nach rechts gehen, rücken die Scheitel nach links. — Der unter dem Integralzeichen vorkommende Ausdruck $\frac{d^3y_x\, dy_x}{(d^2y_x)^2}$, oder was dasselbe ist: das $d\mathfrak{x}_x$ der Brennpunkts- und Scheitelcurve wird nicht allein bei $y=x^{\frac{3}{2}}$ constant, sondern bei ganzen Gruppen von Curven und deutet dadurch an, daß diese Gruppen vor anderen ein vorzugsweise regelmäßiges Wachsen besitzen. Dieses Constantwerden tritt aber ein bei $y=m\log x$, $y=na^x$ und bei $y=mx^n$ — bei letzterem wird z. B. $d\mathfrak{x}_x=\frac{n-2}{n-1}$ — und wir können daher von allen diesen Curven behaupten: der Zuwachs der Abscissen der Hauptcurve steht mit dem Zuwachs der Abscisse der Scheitel- und Brennpunktscurve in constantem Verhältniß. Außerdem ist leicht zu erkennen, daß bei allen Curven sich das $d\mathfrak{x}$ der Scheitelcurve zu dem $dx$ der Hauptcurve verhält wie $d^3y_x\, dy_x : (d^2y_x)^2$; bei der gewöhnlichen Cycloide ist dies Verhältniß $2r^2\sqrt{x} : 4r-3x$, bei der Cissoide des Diocles $(3r-x)(3x-r) : 3r^2$, bei der Sinuslinie $-\cos^2 x : \sin^2 x$, 2c.

Vergleicht man die Bogenelemente der Scheitel- und Brennpunktscurve, so verhalten sie sich wie $dy_x\sqrt{4+(dy_x)^2} : (dy_x)^2+1$, also auch wie $\frac{dy_x}{2d^2y_x}\sqrt{4+(dy_x)^2} : \frac{(dy_x)^2+1}{2d^2y_x}$, d. h. wie die Längen der Linien, welche vom Berührungspunkt der osculirenden Parabel nach dem Scheitel und Brennpunkt derselben gehen; und dies Verhältniß ist auch ein ganz natürliches, da die Bogenelemente zugleich unendlich kleine Abschnitte dieser geraden Linien sind. Betrachten wir die für diese Linien, die Bogenelemente und deren Verhältniß gegebenen Formeln noch einen Augenblick, so sehen wir auch: die Bogenelemente sind von den drei ersten Ableitungen der Hauptcurve, die bezeichneten Linien von den beiden ersten und das Verhältniß dieser Linien sowie der Bogenelemente nur von der ersten abhängig. Der Winkel, den die verlängerten Bogenelemente oder, was dasselbe sagt, die entsprechenden Tangenten der Scheitel- und Brennpunktscurve bilden, ist gleichfalls nur von der ersten Ableitung der Hauptcurve abhängig, seine Tangente ist $\frac{2}{dy_x(3+(dy_x)^2)}$.

Sind $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ die Ordinaten der Scheitelcurve, so ist der von der X-Achse und der Scheitelcurve begrenzte Raum gleich $\int \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}$ oder für $\mathfrak{y}$ und $d\mathfrak{x}$ die durch die Ordinaten der Hauptcurve bestimmten Werthe gesetzt

$$=\int\frac{y\,dy_x\, d^3y_x}{(d^2y_x)^2}-\int\frac{(dy_x)^3d^3y_x}{2(d^2y)^3}.$$

Wendet man nun auf Minuendus und Subtrahendus die theilweise Integration an, so wird der gesuchte Flächenraum

$$=-\frac{y\,dy_x}{d^2y_x}+\int\frac{(dy_x)^2}{d^2y_x}+\int y+\frac{(dy_x)^3}{4(d^2y_x)^2}-\frac{3}{4}\int\frac{(dy_x)^2}{d^2y_x}$$

$$=\frac{(dy_x)^3-4y\,dy_x\, d^2y_x}{4(d^2y_x)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{(dy_x)^2}{d^2y_x}+\int y.$$

Die Quadratur der Scheitelcurve ist also abhängig von der Quadratur der Hauptcurve und einem in vielen Fällen leicht auffindbaren Integral. — Für die Linie der natürlichen Logarithmen wird der Ausdruck:

$$\frac{x^{-3} + 4 \ln x\ x^{-1} \,.\, x^{-2}}{4x^{-4}} + \frac{1}{4}\int \frac{x^{-2}}{-x^{-2}} + \int \ln x = \frac{x}{4}(1 + 4 \ln x) - \frac{x}{4} + x \ln x - x$$

$= 2x \ln x - x$. Will man die Fläche bestimmen, welche von der logarithmischen Linie, ihrer Scheitelcurve und zwei Ordinaten umschlossen wird, so muß beachtet werden, daß die Abscisse der Scheitelcurve nicht mit der der Hauptcurve identisch, sondern für die vorliegende Curve das Doppelte derselben ist; wenn also das Integral der Scheitelcurve zwischen den Grenzen $x_1$ und $x_2$ genommen wird, so ist das abzuziehende Integral der Hauptcurve zwischen den Grenzen $2x_1$ und $2x_2$ zu nehmen; es ist aber $\int_{2x_2}^{2x_1} \ln x = 2x_1 \ln x_1 - 2x_2 \ln x_2 + (2 \ln 2 - 2)(x_1 - x_2)$ und das entsprechende, von $x_2$ bis $x_1$ genommene Integral der Scheitelcurve $2x_1 \ln x_1 - 2x_2 \ln x_2 - x_1 + x_2$, der Unterschied beider also $(2 \ln 2 - 1)(x_1 - x_2)$, ein Resultat, welches wir allerdings auch ohne alles Integriren hätten erhalten können, wenn wir uns daran erinnert hätten, daß 1) die Scheitelcurve der logarithmischen Linie selbst eine derartige Linie ist, 2) die Ordinate derselben stets $= \ln x + \frac{1}{2}$, 3) die Ordinate der Hauptcurve, welche mit jener gleiche Abscisse hat, $\ln x + \ln 2$, der Unterschied beider also constant $\ln 2 - \frac{1}{2}$ ist, denn multiplicirt man mit dieser constanten Größe die Differenz der Abscissen des Anfangs- und Schlußpunktes $2x_1 - 2x_2$, so hat man die gesuchte Fläche gleichfalls.

Da die Ordinate des Brennpunktes um $\frac{1}{2\,d^2 y_x}$ größer ist als die des Scheitels, so ist die Quadratur der Brennpunktscurve gefunden, sobald zu dem für die Scheitelcurve berechneten Ausdrucke noch

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{2\,d^2 y_x} \text{ oder } \int \frac{d^3 y_x\ d y_x}{2\,(d^2 y_x)^3}$$

addirt wird, und wendet man wieder die theilweise Integration an, so geht dies über in

$$\frac{-d y_x}{4\,(d^2 y_x)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{d^2 y_x}.$$

Die von dem geometrischen Orte der Brennpunkte, zwei Ordinaten und der X-Achse umschlossene Ebene ist also gleich dem zwischen bestimmten Grenzen zu nehmenden Ausdrucke

$$\frac{(d y_x)^3 - 4y\ d y_x\ d^2 y_x - d y_x}{4\,(d^2 y_x)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{(d y_x)^2 + 1}{d^2 y_x} + \int y,$$

den man auch

$$= -\mathfrak{y}_1\, d y_x + \frac{1}{2}\int e + \int y$$

setzen kann, wenn $\mathfrak{y}_1$ die Ordinate der Brennpunktscurve und e die Entfernung des Berührungspunktes und Brennpunktes einer osculirenden Parabel bedeutet. — Liegen Scheitel- und Brennpunktscurve für eine bestimmte Abscissenstrecke auf derselben Seite der X-Achse, so ist das in Bezug auf diese Strecke bestimmte Integral

$$\frac{-d y_x}{4\,(d^2 y_x)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{d^2 y_x}$$

der Werth der zwischen den beiden Curven und den beiden im Anfang und Schlußpunkt der Abscissenstrecke senkrecht stehenden Ordinaten liegenden Ebene.

---

Wir haben bis jetzt in der Gleichung der Hauptcurve $y = \varphi(x)$ stets $x$ als die willkührlich Veränderliche betrachtet, es stand uns aber beim Beginn der Rechnung offenbar auch frei $y$ als die willkührlich Veränderliche und $x$ als die davon Abhängige anzusehen und bei der Discussion der Curve von der Gleichung $x = f(y)$ auszugehen. Holen wir dies jetzt nach, so bekommen wir nicht wie bei der reinen Berührung des ersten Grades dieselben Berührungslinien, sondern eine neue Parabelgruppe, deren Achsen mit der X-Achse des Coordinatensystemes, auf welches die Hauptcurve bezogen ist, parallel laufen, also auf den Achsen der bisher betrachteten osculirenden Parabeln senkrecht stehen. Für jeden Punkt der Hauptcurve existiren mithin 2 Parabeln, die mit ihr eine reine Berührung zweiten Grades haben, die eine deutet die Veränderung, welche das Wachsen der Ordinate der Hauptcurve in jenem Punkte erleidet, an, während die Abscisse gleichmäßig wächst, die andere die Veränderung des Wachsens der Abscisse, wenn die Ordinate gleichmäßig zunimmt; wir nennen von jetzt ab diese Parabeln zwei entsprechende Parabeln oder die Parabeln desselben Punktes, außerdem die früher betrachtete Parabelgruppe: die X-Parabeln oder die der ersten Gruppe, im Gegensatz zu den jetzt in die Betrachtung hineingezogenen, welche Y-Parabeln oder Parabeln der zweiten Gruppe genannt werden sollen. — Da wir gesehen haben, daß Hauptcurve und osculirende Parabel stets auf derselben Seite der beiden gemeinsamen Tangente liegen, so ist auch klar, daß die osculirenden Parabeln desselben Punktes nicht auf verschiedenen Seiten der Tangente zu suchen sind, ja sie können selbst auf derselben Seite der Hauptcurve liegen und brauchen diese keineswegs zwischen sich zu nehmen. Wir zeigten z. B. früher: die osculirende Parabel liegt nach der Berührung zwischen der Tangente und der Hauptcurve, wenn die zweite und dritte Ableitung der letzteren gleiche Vorzeichen haben, sind aber $d^2y_x$ und $d^3y_x$ negativ während $dy_x$ positiv ist, so sind $d^2x_y$ und $d^3x_y$ gleichzeitig positiv, in diesem Falle befinden sich also nach der Berührung die beiden entsprechenden Parabeln auf derselben Seite der Hauptcurve.

Die Formeln und Bestimmungen für die Parabeln der zweiten Gruppe folgen unmittelbar aus den für die erste Gruppe gegebenen. Ihre allgemeine Gleichung ist $x - X = dX_y(y - Y) + \frac{1}{2} d^2X_y (y - Y)^2$, die Coordinaten des Scheitels $\mathfrak{y}_2 = Y - \frac{dX_y}{d^2X_y}$, $\mathfrak{x}_2 = X - \frac{(dX_y)^2}{2d^2X_y}$, die Länge der Linie, welche Scheitel und Berührungspunkt verbindet $\frac{dX_y}{2d^2X_y}\sqrt{(dX_y)^2 + 4}$, die Entfernung des Brennpunktes und Berührungspunktes $\frac{(dX_y)^2 + 1}{2d^2X_y}$, der Parameter $\frac{2}{d^2X_y}$, ꝛc. Will man diese Bestimmungen mit den entsprechenden der ersten Gruppe in Beziehung treten lassen, so setze man in ihnen, — in den Ableitungen die Veränderlichen vertauschend —

$$dx_y = \frac{1}{dy_x},\ d^2x_x = \frac{-d^2y_x}{(dy_x)^3},\ d^3x_y = \frac{3(d^2y_x)^2 - dy_x\ d^3y_x}{(dy_x)^5}.$$

Der Parameter der Y-Parabeln wird dann z. B. $\frac{-2(dy_x)^3}{d^2y_x}$, verhält sich mithin in absoluter Beziehung zu dem Parameter der Parabeln der ersten Gruppe wie $(dy_x)^3 : 1$. Die beiden Parabeln eines Punktes werden also congruent, wenn die Tangente der Hauptcurve mit der X-Achse einen Winkel von 45° bildet, denn dann ist $dy_x = 1$. — Die Coordinaten des Scheitels werden durch die angedeutete Substitution $= y + \frac{(dy_x)^2}{d^2y_x}$ und $x + \frac{dy_x}{2d^2y_x}$, die Coordinaten des Scheitels der entsprechenden osculirenden X-Parabel waren aber $y - \frac{(dy_x)^2}{2d^2y_x}$ und $x - \frac{dy_x}{d^2y_x}$, wir finden daher mit Hülfe der Formel $Y - \mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1}(X - \mathfrak{x})$ für die Linie, welche durch die Scheitel der beiden Parabeln eines Punktes geht, zunächst die Gleichung

$$Y - y + \frac{(dy_x)^2}{2d^2y_x^2} = \frac{y - \frac{(dy_x)^2}{2d^2y_x} - y - \frac{(dy_x)^2}{d^2y_x}}{x - \frac{dy_x}{d^2y_x} - x - \frac{dy_x}{2d^2y_x}}\left(X - x + \frac{dy_x}{d^2y_x}\right).$$

Der Coefficient vor X zieht sich aber sofort in $dy_x$ zusammen und es erhellt: die Linie, welche die Scheitel zweier entsprechender Parabeln verbindet, ist der Tangente des Berührungspunktes parallel. — Die Gleichung der Linie, welche vom Scheitel einer Y-Parabel nach dem Berührungspunkte geht, ist zunächst $\mathfrak{x} - x = \frac{dx_y}{2}(\mathfrak{y} - y)$, verwandelt sich in $\mathfrak{y} - y = 2dy_x(\mathfrak{x} - x)$ und lehrt: zieht man von einem beliebigen Punkte irgend welcher Curve Linien nach den Scheiteln der beiden Berührungsparabeln dieses Punktes, so ist das Product der Tangenten der Winkel, welche diese Linien mit der positiven X-Achse bilden, gleich dem Quadrat der Tangente des Winkels, welchen die Tangente der Curve in entsprechender Weise bildet, oder genauer, die 3 trigonometrischen Tangenten stehen im Verhältniß von $1:2:4$. — Aus dem Vorstehenden ist gleichfalls leicht zu ersehen, daß die Differenz der Ordinaten der Scheitel der entsprechenden Parabeln $\frac{3(dy_x)^2}{2d^2y_x}$ und die der Abscissen $\frac{3dy_x}{2d^2y_x}$ beträgt. Aus diesen Differenzen folgt mit Anwendung der Formel $e = \sqrt{(y-y_1)^2 + (x-x_1)^2}$: die Entfernung der Scheitel ist $\frac{3dy_x}{2d^2y_x}\sqrt{1+(dy_x)^2}$. Nimmt man hinzu, daß nach derselben Formel die Entfernung des Scheitels der Y-Parabeln von ihrem Berührungspunkte sich zu $\frac{dy_x}{2d^2y_x}\sqrt{4(dy_x)^2+1}$ bestimmt und die entsprechende Entfernung für die erste Gruppe der osculirenden Parabeln zu $\frac{dy_x}{2d^2y_x}\sqrt{(dy_x)^2+4}$ bestimmt war, so zeigt sich: 1) die Seiten des Dreiecks, dessen Ecken ein beliebiger Curvenpunkt und die Scheitel der beiden Berühungsparabeln eben dieses Punktes sind, haben das Verhältniß von $3\sqrt{1+(dy_x)^2} : \sqrt{4(dy_x)^2+1} : \sqrt{(dy_x)^2+4}$, 2) dieses Verhältniß ist nur von der ersten Ableitung der Hauptcurve abhängig, 3) in diesem Dreieck ist die Summe der Quadrate der beiden kleinern Seiten $\frac{5}{9}$ vom Quadrat der größern und das Dreieck daher stets stumpfwinkelig. Der Cosinus des stumpfen Winkels bestimmt sich mit Hülfe der Formel

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ zu } \frac{-2(1+(dy_x)^2)}{\sqrt{4(dy_x)^2+1}\,.\sqrt{(dy_x)^2+4}},$$

folglich $$\sin\alpha = \frac{3dy_x}{\sqrt{4(dy_x)^2+1}\,.\sqrt{(dy_x)^2+4}} \text{ und } \frac{b\,.\,c\,.\sin\alpha}{2}$$

oder der Inhalt des Dreiecks $\frac{3(dy_x)^3}{8(d^2y_x)^2}$, d. i. $\frac{3}{32}$ vom Product der Parameter der entsprechenden

Parabeln. Der Inhalt des Dreiecks hätte sich natürlich noch schneller mit Hülfe der Höhe auf die größte Seite, die zugleich der Abstand zwischen der Tangente der Hauptcurve und der Verbindungslinie der Scheitel ist, berechnen lassen, ihre Länge beträgt $\frac{(d\,y_x)^2}{2\,d^2\,y_x\sqrt{1+(d\,y_x)^2}}$, während die Mittellinie, welche von dem Scheitelpunkt des stumpfen Winkels ausgeht, $=\frac{d\,y_x}{4\,d^2\,y_x}\sqrt{1+(d\,y_x)^2}$, d. h. genau ein Sechstel von der Entfernung der beiden Scheitel ist.

Das betrachtete Dreieck zeigte nicht wenig merkwürdige Eigenschaften, wir wenden uns — indem wir noch hervorheben, daß die Scheitel entsprechender Parabeln nur in Ausnahmefällen zusammenfallen, nämlich wenn $d\,y_x$ Null oder $d^2\,y_x\,\infty$ wird — zu dem Dreieck, dessen Spitze wiederum der Berührungspunkt, dessen Grundlinie aber die Verbindungslinie der Brennpunkte zweier entsprechender Parabeln ist. Die Ordinaten des Brennpunktes einer Y-Parabel sind

$$\mathfrak{y}_3 = y + \frac{(d\,y_x)^2}{d^2\,y_x} \text{ und } \mathfrak{x}_3 = x + \frac{d\,y_x}{2\,d^2\,y_x} - \frac{(d\,y_x)^3}{2\,d^2\,y_x} = x + \frac{d\,y_x}{2\,d^2\,y_x}[1-(d\,y_x)^2]$$

und die einer X-Parabel waren früher gleich

$$x - \frac{d\,y_x}{d^2\,y_x} \text{ und } y - \frac{[(d\,y_x)^2-1]}{2\,d^2\,y_x}$$

aufgefunden; nennen wir die letzeren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, so folgt

$$\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_3 = \frac{-3\,(d\,y_x)^2+1}{2\,d^2\,y_x},\ \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3 = \frac{-3\,d\,y_x + (d\,y_x)^3}{2\,d^2\,y_x}$$

und $e_2$, die Entfernung der beiden Brennpunkte,

$$= \frac{1}{2\,d^2\,y_x}\sqrt{9\,(d\,y_x)^4 - 6\,(d\,y_x)^2 + 1 + 9\,(d\,y_x)^2 - 6\,(d\,y_x)^4 + (d\,y_x)^6} = \frac{[(d\,y_x)^2+1]^{\frac{3}{2}}}{2\,d^2\,y_x}$$

gleich der Hälfte des Krümmungshalbmessers der Hauptcurve, andererseits ist die Entfernung des Berührungspunktes von dem Brennpunkte einer Parabel der zweiten Gruppe $\frac{d\,y_x\,[(d\,y_x)^2+1]}{2\,d^2\,y_x}$ und die Entfernung des Berührungspunktes von dem Brennpunkte einer X-Parabel, wie wir wissen, $\frac{(d\,y_x)^2+1}{2\,d^2\,y_x}$, die drei Seiten des Dreiecks, dessen Ecken die Brennpunkte zweier entsprechender Parabeln und der gemeinschaftliche Berührungspunkt sind, stehen daher in dem merkwürdig einfachen Verhältniß $1 : d\,y_x : \sqrt{1+(d\,y_x)^2}$ zu einander, d. h. sie haben dasselbe Verhältniß wie das Increment der Abscisse, der Ordinate und des Bogens der Hauptcurve im Berührungspunkte, das Dreieck selbst aber ist rechtwinkelig. — Die letztere Eigenschaft ist keine unserem Dreieck besonders eigenthümliche, denn hat man überhaupt zwei Parabeln, die von einer Tangente in demselben Punkte berührt werden und deren Achsen senkrecht auf einander stehen, so bilden die von den Brennpunkten nach dem gemeinsamen Berührungspunkte gehenden Graden stets einen Rechten. — Der Inhalt des Dreiecks beträgt $\frac{d\,y_x\,[(d\,y_x)^2+1]^2}{8\,(d^2\,y_x)^2}$, der Inhalt des Berührungsdreiecks der Y-Parabel, dessen Ecken Berührungspunkt, Scheitel und Brennpunkt dieser Parabel sind, ist $\frac{(d\,y_x)^5}{4\,(d^2\,y_x)^2}$, denn der Inhalt des entsprechenden Dreiecks der X-Parabel war $\frac{d y_x}{4(d^2 y_x)^2}$. Addirt man jetzt die Hälften dieser beiden Berührungsdreiecke und fügt zu der gewonnenen Summe das Rechteck aus den Entfernungen, welche Scheitel und Brennpunkt sowohl in der X-Parabel als in der zugehörigen Y-Parabel haben, — sie sind $\frac{1}{2 d^2 y_x}$ und $\frac{(d y_x)^3}{2 d^2 y_x}$ — so erhält man wiederum den Inhalt des Dreiecks, welches den Berührungspunkt und die Brennpunkte zu Ecken hat und erkennt zugleich, dieses Dreieck ist auch stets gleich $\frac{2}{3}$ von dem Triangel, dessen Ecken derselbe Berührungspunkt und die beiden Scheitel sind, plus der halben Summe der beiden Berührungsdreiecke.

Denkt man ferner durch den Berührungspunkt parallel mit der Y-Achse in einer Y-Parabel eine Sehne gezogen, so ist das Segment, welches von der Y-Parabel und jener Sehne umschlossen wird, gleich dem entsprechenden Segmente der X-Parabel desselben Punktes, denn dieses war früher zu $\frac{2(d y_x)^3}{3(d^2 y_x)^2}$ bestimmt, mithin ist das Segment der Y-Parabel

$$\frac{2(d x_y)^3}{3(d^2 x_y)^2} = \frac{2}{(d y_x)^3} : \frac{3(d^2 y_x)^2}{(d y_x)^6} = \frac{2(d y_x)^3}{(3 d^2 y_x)^2}.$$

Das negative Vorzeichen ist bei der Berechnung absichtlich vernachlässigt, da es wohl Einfluß auf die Lage nicht aber auf die Größe des Segmentes hat. — Auch das Produkt der die Segmente abschneidenden Sehnen ist bemerkenswerth, es stimmt an Größe mit dem Rechteck der Parameter überein.

Die Größe der Tangente des Winkels, welchen die die Brennpunkte entsprechender Parabeln Verbindende mit der positiven X-Achse bildet, ist $\frac{\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_3}{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3}$ oder $\frac{1 - 3(d y_x)^2}{(d y_x)^3 - 3 d y_x}$ und hieraus berechnet sich der Cosinus des Winkels, unter welchem dieselbe Linie die Verbindungslinie der Scheitel schneidet zu $\frac{2 d y_x}{1 + (d y_x)^2}$.

Da die allgemeine Gleichung einer X-Parabel $y - Y = d Y_x (x - X) + \frac{1}{2} d^2 Y_x (x - X)^2$ lautet, so wird die der entsprechenden Y-Parabel

$$x_1 - X = \frac{1}{d Y_x}(y_1 - Y) - \frac{d^2 Y_x}{2(d Y_x)^3}(y_1 - Y)^2$$

und die Schnittpunkte beider werden gefunden, so bald man $x_1$ und $y_1$ gleich $x$ und $y$ setzt, beide Gleichungen als coexistirende betrachtet und durch sie $x$ und $y$ als Coordinaten der Schnittpunkte bestimmt. Zwei Parabeln mit senkrecht auf einander stehenden Achsen haben im Allgemeinen 4 Schnittpunkte und bestimmt man aus der zweiten Gleichung

$$y - Y \text{ zu } \frac{(d Y_x)^2}{d^2 Y_x} \pm \sqrt{\frac{(d Y_x)^4}{(d^2 Y_x)^2} - \frac{2(d Y_x)^3}{d^2 Y_x}(x - X)},$$

combinirt diesen mit dem durch die erste Gleichung gegebenen Werthe von $y - Y$, so erhält man auch im vorliegenden Falle für $x - X$ eine Gleichung vom vierten Grade, aber dieselbe gewinnt durch einfaches Reduciren sofort die Form

$$\frac{(x-X)^4 (d^2 Y_x)^2}{4} + (x-X)^3 \,.\, d^2 Y_x \,.\, d Y_x = 0,$$

ist also durch $d^2 Y_x$ und $(x-X)^3$ ohne Rest theilbar und deutet dadurch erstens an, daß bei einer Inflexion vom Schneiden der entsprechenden Parabeln des Inflexionspunktes eigentlich nicht die Rede sein kann und daß zweitens drei von den 4 Schnittpunkten — wie allerdings nicht anders zu erwarten war, da jede der Parabeln mit der Hauptcurve 3 unendlich nahe bei einander liegende Punkte gemein hat — in dem Berührungspunkte zusammenfallen. Für den 4ten Schnittpunkt bestimmt sich das $x-X$ zu $\frac{-4 d Y_x}{d^2 Y_x}$, in Folge dessen $y-Y = \frac{4 (d Y_x)^2}{d^2 Y_x}$ wird, woraus wiederum für die Länge der Linie, welche diesen Schnittpunkt mit dem Berührungspunkt verbindet sich $\frac{4 d Y_x}{d^2 Y_x} \sqrt{(d Y_x)^2 + 1}$ ergiebt, *sie ist also* $\frac{8}{3}$ *der Graden, welche die Scheitel derselben beiden entsprechenden Parabeln verbindet und das Sechszehnfache der Linie, welche vom Halbirungspunkt dieser Graden nach dem Berührungspunkte führt.* Auch der Winkel, welchen unsere Schnitt- und Berührungspunkt Verbindende mit der positiven X-Achse bildet, ist ein uns bekannter, denn seine Tangente bestimmt sich zu $-d y_x$ und wir können sagen: *Die Tangente der Hauptcurve, die vom Berührungspunkte nach dem anderen Scheitelpunkt der beiden Berührungsparabeln Gehende und die X-Achse des Coordinatensystemes bilden, wie die Hauptcurve auch beschaffen sei, stets ein gleichschenkeliges Dreieck.* Ohne Schwierigkeit sind ferner die vier Verbindungslinien des Schnittpunktes mit den Scheitel- und Brennpunkten aufzufinden. Um sie und anderes kurz bezeichnen zu können, nenne ich den *Schnittpunkt* t, die *Scheitel* s und S, die *Brennpunkte* b, B, den *Berührungspunkt* n und betrachte S und B als der *X-Parabel*, s und b als der entsprechenden *Y-Parabel* angehörig. Es ist

$$ts = \frac{3 d y_x}{2 d^2 y_x} \sqrt{9 + 4 (d y_x)^2},\ tS = \frac{3 d y_x}{2 d^2 y_x} \sqrt{4 + 9 (d y_x)^2},$$

$$tb = \frac{9 d y_x + (d y_x)^3}{2 d^2 y_x} \text{ und } tB = \frac{9 (d y_x)^2 + 1}{2 d^2 y_x}.$$

Sämmtliche 4 Größen haben den Divisor $d^2 y_x$ und ihr Verhältniß zu einander ist daher nur von der ersten Ableitung der Hauptcurve abhängig, diese Eigenthümlichkeit kommt ihnen indeß nicht allein zu, sondern überhaupt den 15 Linien, welche die Scheitel, die Brennpunkte, den Berührungspunkt und den Schnittpunkt zweier entsprechender Parabeln, d. h. die Punkte b, B, s, S, n, t, verbinden.

Wir haben von diesen Linien nur zwei sB und bS noch nicht berechnet, die Werthe für dieselben ergeben sich indeß sofort zu

$$\frac{d y_x}{2 d^2 y_x} \sqrt{(d y_x)^4 + 3 (d y_x)^2 + 9} = Sb \text{ und } \frac{1}{2 d^2 y_x} \sqrt{9 (d y_x)^4 + 3 (d y_x)^2 + 1} = Bs.$$

Bildet man die Quadrate beider Linien und vergleicht dieselben mit den Quadraten von bB und sS, so ergiebt sich der Satz: $Sb^2 + Bs^2 = bB^2 + sS^2$, oder mit Worten: *verbindet man in zwei entsprechenden Parabeln erst Scheitel mit Scheitel, Brennpunkt mit Brennpunkt und dann den Scheitel der einen je mit dem Brennpunkt der anderen, so sind die Summen der Quadrate dieser Verbindungslinien gleich.*

Von den 4 Linien sB, Sb, bB und sS sind 2 Seiten und die beiden andern Diagonalen des Vierecks sSBb, dessen beide noch nicht erwähnte Seiten Viertel der Parameter der entsprechenden Parabeln sind; wendet man auf dieses Viereck den Satz an: die Summe der Quadrate der Seiten eines Vierecks ist gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen plus 4mal dem Quadrat der Verbindungslinie der Halbirungspunkte der Diagonalen, so erkennt man leicht, daß das Achtfache dieser Verbindungslinie Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks ist, für welches die Parameter der entsprechenden Parabeln Katheten sind.

Um das Vorstehende in klareres Licht zu setzen und weil es uns überhaupt von Interesse scheint, auch zu neuen Folgerungen führt, stellen wir die Quadrate der 15 Verbindungslinien der 6 Punkte t, s, S, b, B, n zusammen, schreiben aber der Kürze halber $\alpha$ für $dy_x$ und $\beta$ statt $d^2 y_x$, es ist dann

$$tn^2 = \frac{16\alpha^4 + 16\alpha^2}{\beta^2},\ ts^2 = \frac{81\alpha^2 + 36\alpha^4}{4\beta^2},\ tS^2 = \frac{36\alpha^2 + 81\alpha^4}{4\beta^2},$$

$$tb^2 = \frac{\alpha^6 + 18\alpha^4 + 81\alpha^2}{4\beta^2},\ tB^2 = \frac{81\alpha^4 + 18\alpha^2 + 1}{4\beta^2},\ Sb^2 = \frac{\alpha^6 + 3\alpha^4 + 9\alpha^2}{4\beta^2},$$

$$sB^2 = \frac{9\alpha^4 + 3\alpha^2 + 1}{4\beta^2},\ sS^2 = \frac{9\alpha^4 + 9\alpha^2}{4\beta^2},\ bB^2 = \frac{\alpha^6 + 3\alpha^4 + 3\alpha^2 + 1}{4\beta^2},$$

$$ns^2 = \frac{4\alpha^4 + \alpha^2}{4\beta^2},\ nS^2 = \frac{\alpha^4 + 4\alpha^2}{4\beta^2},\ nB^2 = \frac{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1}{4\beta^2},$$

$$nb^2 = \frac{\alpha^6 + 2\alpha^4 + \alpha^2}{4\beta^2},\ BS^2 = \frac{1}{4\beta^2},\ bs^2 = \frac{\alpha^6}{4\beta^2}.$$

Daß sich aus den gegebenen Werthen und andern, die wir, sobald noch neue Punkte wie der Schnittpunkt der Parabelachsen, die Durchschnitte dieser Achsen und der Parabeln ꝛc. in die Betrachtung gezogen würden, leicht erhalten könnten, eine Menge von Gleichungen ableiten läßt, liegt auf der Hand, wir heben von denselben nur zwei hervor: $ts^2 + tS^2 + bs^2 + BS^2 = tb^2 + tB^2 + 2sS^2$ und $ts^2 + tS^2 + tb^2 + tB^2 + tn^2 + Sb^2 + Bs^2 + sS^2 + bB^2 + 2nb^2 + 2nB^2 + 2nS^2 + 2ns^2 = 5tn^2 + 5sb^2 + 5SB^2$; die letzte Gleichung enthält sämmtliche 15 Quadrate, sie läßt sich, wenn man auf beiden Seiten noch $tn^2 + sb^2 + SB^2$ addirt folgender Maaßen aussprechen: die doppelte Summe der Quadrate der Verbindungslinien des Berührungspunktes mit den beiden Scheiteln, Brennpunkten und dem Schnittpunkte vermehrt um die Summe der Quadrate der 10 Linien, welche die letzten 5 Punkte verbinden, ist sechsmal so groß wie das um die Quadrate der vierten Theile der Parameter vermehrte Quadrat der Schnittpunkt und Berührungspunkt Verbindenden.

Die Gleichung der Linie tn ist $\mathfrak{y} - y = -dy_x(\mathfrak{x} - x)$. Laufen die verschiedenen ein und derselben Curve angehörigen tn parallel mit einander oder schneiden sie sich und besitzen sie eine Umhüllungscurve? Ich differenzire nach x, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ als Constante betrachtend. Es ist

$$-dy_x = -d^2 y_x(\mathfrak{x} - x) + dy_x,\ \text{folglich}\ \mathfrak{x} = x + \frac{2dy_x}{d^2 y_x}\ \text{und}\ \mathfrak{y} = y - \frac{2(dy_x)^2}{d^2 y_x}.$$

Die Linien tn haben also eine Umhüllungscurve, aber dieselbe ist nicht der geometrische der Schnittpunkte der entsprechenden Parabeln, vielmehr divergiren die Linien, die von zwei dicht neben einander liegenden Punkten der Hauptcurve nach den Schnittpunkten der ihnen zugehörigen osculirenden Parabelpaare gehen; ihren Durchschnitt und damit zugleich einen Punkt der Umhüllungscurve findet man erst, wenn man sie über den Berührungspunkt verlängert; die Durchschnitte liegen halb so weit von den Berührungspunkten als die Schnittpunkte der Parabeln von diesen Punkten entfernt sind, denn

$$\sqrt{\frac{4(d\,y_x)^4}{(d^2\,y_x)^2}+\frac{4(d\,y_x)^2}{(d^2\,y_x)^2}}=\frac{2\,d\,y_x}{d^2\,y_x}\sqrt{1+(d\,y_x)^2}\,.$$

In jedem Curvenpunkte schneiden sich demnach, wenn wir die Normale mitzählen, die Tangenten sechs verschiedener Umhüllungscurven. — Die neu gefundene Umhüllungscurve hat Tangenten, welche mit der negativen X-Achse dieselben Winkel bilden, die die von entsprechenden Punkten der Hauptcurve ausgehenden mit der positiven machen, trotzdem sind beide Curven nicht congruent, sondern werden es nur dann, wenn ihre Abscissen gleichmäßig wachsen. Das ist aber im Allgemeinen nicht der Fall, während das x der Hauptcurve um $d\,x$ wächst, nimmt das $\mathfrak{x}$ der Umhüllungscurve um $\left[3-\frac{2\,d^3 y_x\;d\,y_x}{(d^2\,y_x)^2}\right]d\,x$ zu, ist ihm also nur gleich, wenn $\frac{d^3 y_x\;d\,y_x}{d^2\,y_x}$, wie bei $\mathfrak{y}=e^x$ oder $\ln x$, 1 oder 2 und in Folge dessen die Parenthese $\pm 1$ wird. Nur in diesen wenigen Fällen ist die Umhüllungscurve ein Abbild der Hauptcurve, in allen übrigen ist sie ein Zerrbild derselben, ähnlich dem, welches man zu sehen bekäme, wenn man die Hauptcurve in einem nicht plan geschliffenen Spiegel betrachtete. Die Richtigkeit dieser Behauptung tritt klar zu Tage, sobald wir das Bogenelement der Umhüllungscurve beachten; ihr $\mathfrak{y}$ war $=y-\frac{2(d\,y_x)^2}{d^2\,y_x}$

$d\,\mathfrak{y}$ also $=-d\,y\left(3-\frac{2\,d\,y_x\,.\,d^3 y_x}{(d^2\,y_x)^2}\right)$ und das Element

$$=\left(3-\frac{2\,d^3 y_x\,.\,d\,y_x}{(d^2\,y_x)^2}\right)\sqrt{1+(d\,y_x)^2}\,.\,d\,x.$$

Nun ist $\sqrt{1+(d\,y_x)^2}\,d\,x$ das Bogenelement der Hauptcurve und für $y=x^3$ die Parenthese 2, der Bogen der Umhüllungscurve dieser Linie ist also das Doppelte des entsprechenden Bogens der Linie selbst und haben wir einen passenden Anfangspunkt, so können wir die Umhüllungscurve sehr wohl durch Abwicklung erhalten, wir brauchen nur im Momente der Abwicklung den Faden so zu dehnen, daß er nach der Abwicklung doppelt so lang wird als er vor der Abwicklung war. Aehnliches läßt sich von den Seite 14 aufgeführten Liniengruppen, für welche $\frac{d^3 y_x\;d\,y_x}{(d^2\,y_x)^2}$ constant ist, aussagen; ist jener Bruch aber, wie bei $\sin x$, variabel, so ist die Dehnung, welche der die Umhüllungscurve erzeugende Faden im Moment der Abwicklung zu erleiden hat, allerdings veränderlich, jedoch immer einem bestimmten Gesetze unterworfen. — Bemerkenswerth ist gleichfalls für die Umhüllungscurve, daß die Ordinaten derselben $x+\frac{2\,d\,y_x}{d^2\,y_x}$ und $y-\frac{2(d\,y_x)^2}{d^2\,y_x}$ sich wechselweis wieder erzeugen, sobald wir in ihnen die Variabeln vertauschen; es ist dies eine natürliche Folge der Entstehungsweise der Umhüllungscurve, die Lage der von ihr umhüllten Graden hängt in gleichmäßiger Weise von je einer X- und einer Y-Parabel ab. — Aus derselben Quelle entspringt das außerordentlich symmetrische Verhalten der umhüllten Linie tn zu ihren beiden Parabeln: die Lothe von S und s, den Scheiteln der X- und Y-Parabel, auf sie sind gleich — sie bestimmen sich mit Hülfe der bekannten Formel

$$L=\frac{y'-a\,x'+b}{\sqrt{1+a^2}}\text{ leicht zu }\frac{3(d\,y_x)^2}{2\,d^2\,y_x\sqrt{1+(d\,y_x)^2}};$$

ferner sind gleich die Segmente, welche die Bogen und Sehnen ns und nS umschließen, gleich die Segmente, welche von den Sehnen und Bogen ts und tS umschlossen werden, gleich die Dreiecke nst und nSt, die Linie tn also Halbirungslinie der von den Parabeln des Punktes n umgebenen Ebene. Die erstgenannten Segmente sind je $=\frac{(d y_x)^3}{12(d^2 y_x)^2}$, die zweiten $\frac{9(d y_x)^3}{4(d^2 y_x)^2}$, die Dreiecke $\frac{3(d y_x)^3}{(d^2 y_x)^2}$, die ganze von den Parabeln umfaßte Ebene $\frac{32(d y_x)^3}{3(d^2 y_x)^2}$, die beiden Segmente, das Dreieck und die Hälfte der letzten Ebene verhalten sich mithin wie $1:3^3:6^2:2^0$, und ziehe ich noch das oben erwähnte Segment herbei, welches in der X- oder Y-Parabel durch eine vom Berührungspunkt ausgehende und die Achse der Parabel senkrecht treffende Sehne abgeschnitten wird, so kann ich sagen: die von ns, der eben genannten Sehne, st und nt gebildeten Segmente irgend einer Berührungsparabel verhalten sich wie die Cuben der Zahlen 1, 2, 3 und 4. Auch der Durchschnittspunkt der Achsen der entsprechenden Parabeln liegt auf der Linie tn und theilt sie im Verhältniß von 1 : 3, ist also der Mittelpunkt der Tangente der Umhüllungscurve, wenn diese von t bis zu ihrem Berührungspunkte gerechnet wird. Durch diesen Mittelpunkt geht außerdem die Linie, welche die Endpunkte der durch den Berührungspunkt mit den Achsen parallel gezogenen Sehnen verbindet, auch sie, die gleich ein Halb tn ist, wird von tn halbirt; verbindet man daher t mit den Endpunkten der von der Berührungsstelle der Hauptcurve ausgehenden Sehnen und diese Endpunkte wiederum mit dem Punkte, in welchem die verlängerte tn die Umhüllungscurve berührt, so entsteht ein Parallelogramm.

Da die Coordinaten der Umhüllungscurve $=x+\frac{2 d y_x}{d^2 y_x}$ und $y-\frac{2(d y_x)^2}{d^2 y_x}$ sind, so ist die Quadratur dieser Linie gegeben durch

$$\int\left(y-\frac{2(d y_x)^2}{d^2 y_x}\right)\left(3-\frac{2 d^3 y_x\, d y_x}{(d^2 y_x)^2}\right),$$

mithin

$$=3\int y-6\int\frac{(d y_x)^2}{d^2 y_x}-\int\frac{2 y\, d^3 y_x\, d y_x}{(d^2 y_x)^2}+\int\frac{4 d^3 y_x\,(d y_x)^3}{(d^2 y_x)^3}$$

und wenn man auf die beiden letzten Ausdrücke die theilweise Integration anwendet und zusammenzieht

$$=\int y-2\int\frac{(d y_x)^2}{d^2 y_x}+\frac{2 y\, d y_x}{d^2 y_x}-\frac{2(d y_x)^3}{(d^2 y_x)^2}.$$

Das zwischen bestimmten Grenzen zu nehmende Integral hat große Aehnlichkeit mit dem früher für die Quadratur der Scheitelcurve der X-Parabeln gegebene, es hieß:

$$\frac{(d y_x)^3-4 y\,.\,d y_x\,.\,d^2 y_x}{4(d^2 y_x)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{(d y_x)^2}{d^2 y_x}+\int y,$$

multipliciren wir dasselbe mit 8 und addiren das Product zu dem der Quadratur der Umhüllungscurve entsprechenden Ausdrucke, so erhalten wir als Summe $9\int y-\frac{6 y\, d y_x}{d^2 y_x}$, ein Resultat, welches uns den innigen Zusammenhang der Quadraturen der Haupt-, der Scheitel- und Umhüllungscurve der Linien tn offenbart, es sagt: schreitet auf einer beliebigen Curve ein Punkt von a nach b und geht indeß der Scheitel seiner X-Parabel von c nach d, der die Umhüllungscurve erzeugende Punkt von e nach f und berechnet man die Räume, die von den Bogen ab, cd, ef, den Ordinaten ihrer Anfangs- und Schlußpunkte und der X-Achse begrenzt sind, so ist das 9fache des Raumes, welcher die Hauptcurve als Grenze hat, vermindert um den entsprechenden Raum der Umhüllungscurve und das 8fache des von der Scheitelcurve mitbegrenzten Raumes gleich der Differenz zweier Rechtecke, von denen das eine die Ordinate des Schlußpunktes der Hauptcurve und das 6fache Verhältniß der ersten und zweiten Ableitung dieser Ordinate zu Seiten hat und das andere in entsprechender Weise durch die Ordinate des Anfangspunktes bestimmt wird.

Der Gegenstand ist nicht erschöpft, aber das Gesagte zeigt, wie wir glauben, bereits: daß die eine beliebige Curve im zweiten Grade in reiner Weise osculirenden Parabeln eine seltene Fülle von Beziehungen zu einander sowie zu ihrer Hauptcurve aufweisen.