VIII.

JAHRESBERICHT

DES

KÖNIGLICHEN GYMNASIUMS

ZU

SCHNEEBERG

DURCH WELCHEN ZUGLEICH

ZU DER FEIERLICHEN ENTLASSUNG DER ABITURIENTEN AM 13. MÄRZ 10 UHR

UND

ZU DEN MÜNDLICHEN PRÜFUNGEN AM 23. MÄRZ

IM NAMEN DES LEHRERKOLLEGIUMS

ERGEBENST EINLADET

PROF. DR. WALTHER GILBERT, REKTOR.

A. WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNG

DES OBERLEHRERS PAUL HERMANN FREITAG:

UNTERSUCHUNG I. DER KURVE $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, II. DER FLÄCHE $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

SCHNEEBERG, 1896.

DRUCK VON C. M. GÄRTNER.

Untersuchung

I. der Kurve $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$

II. der Fläche $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$ [1]

I.

Lage und Gestalt der Kurve. [2]

Bei der Untersuchung der auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Kurve

$$1)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

kann man sich auf positive Werte der Konstanten beschränken, da die Ausdrücke $a^{\frac{2}{3}}$ und $b^{\frac{2}{3}}$ unabhängig vom Vorzeichen der Grössen a und b sind. Für reelle Werte der Unbekannten haben die Glieder der linken Seite der Gleichung stets positives Zeichen; da nun zufolge der Kurvengleichung keines der Glieder den Wert $+1$ überschreiten kann, so unterliegen die Koordinaten aller Kurvenpunkte den Ungleichungen

$$a \geqq x \geqq -a,$$
$$b \geqq y \geqq -b.$$

Jedem Werte der einen Unbekannten entsprechen entgegengesetzt gleiche Werte der anderen. Sonach liegt die Kurve symmetrisch zu den Koordinatenachsen, besteht also aus vier kongruenten Quadranten und besitzt einen mit dem Koordinatenanfang zusammenfallenden Mittelpunkt. Durch Substitution der Werte $y = o$, $x = o$ in die Gleichung 1) ergeben sich als Achsenabschnitte $x = \pm a$, $y = \pm b$, die zugleich Maximal- und Minimalwerte der Kurvenkoordinaten darstellen. Ihrer geometrischen Bedeutung entsprechend können die Konstanten a und b als Halbachsen der Kurve bezeichnet werden.

Differenziert man die Gleichung 1) nach x, so erhält man bei Weglassung konstanter Faktoren

$$\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}} y' = o$$

und bei Auflösung nach y'

$$y' = -\frac{b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{3}}}.$$

---

[1] Wesentliche Förderung hat Verfasser der Abhandlung erfahren durch das bekannte Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis von Dr. O. Schlömilch, das für die wichtigsten Einzelprobleme den Lösungsgang teils kurz andeutet, teils ausführlicher skizziert.

[2] Diskussion der Kurve für den Spezialfall $a = b$: Übungsbuch, Teil I, Seite 98.

Differenziert man nochmals nach x, so ergiebt sich

$$-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3b^2}\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{4}{3}} y'^2 + \frac{1}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}} y'' = 0$$

und bei der Auflösung nach y''

$$y'' = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{3a^{\frac{4}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}\, x^{\frac{4}{3}}} \left(b^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}\right)$$

oder bei Ausheben des Faktors $a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{2}{3}}$ unter Berücksichtigung der Kurvengleichung

$$y'' = \frac{b^{\frac{4}{3}}}{3a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{4}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}}.$$

Da allen Kurvenpunkten innerhalb des von den positiven Seiten der Koordinatenachsen eingeschlossenen 1. Quadranten positive Werte der Koordinaten zukommen, so ist für diesen Quadranten $y' < 0$, $y'' > 0$, woraus folgt, dass die Kurve im 1. Quadranten mit konvexer Krümmung fällt. Für die auf den Achsen gelegenen Grenzpunkte $\begin{matrix} x = a \\ y = 0 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} x = 0 \\ y = b \end{matrix}$ wird $y' = 0$ bez. $-\infty$; die Kurve berührt daher die Achsen in den genannten Punkten. Unter Berücksichtigung der symmetrischen Lage der Kurvenpunkte zu den Achsen ergiebt sich dann, dass die Kurve 1) in allen Quadranten ihre konvexe Seite der x-Achse zukehrt und in den Achsenschnittpunkten Spitzen bildet.

Behufs Konstruktion der Kurve ersetze man die Kurvengleichung unter Einführung einer neuen unabhängigen Variablen φ durch die Gleichungen

$$2)\qquad \begin{aligned} x &= a \cos^3 \varphi, \\ y &= b \sin^3 \varphi, \end{aligned}$$

wobei φ der Winkel eines vom Koordinatenanfang ausgehenden Strahles mit der positiven Seite der x-Achse sei, der zur Erzeugung der geschlossenen Kurve von 0 bis 2π zu variieren ist.

Schneidet der Strahl die um den Koordinatenanfang O mit a und b gelegten Kreise in A und B, so projiziere man OA dreimal nacheinander auf OX, OA und OX, ebenso OB dreimal auf OY, OB, OY; die letzterhaltenen Projektionen OC und OD sind dann $a \cos^3 \varphi$ und $b \sin^3 \varphi$, der Schnittpunkt P der letzten Projizierenden ist daher ein Punkt der Kurve. (Figur siehe nebenstehend.)

Tangenten.

Bezeichnen ξ und η die laufenden Koordinaten der Tangente im Kurvenpunkt $x\,y$, so hat man als Gleichung der Tangente:

$$3a)\qquad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) = -\frac{b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{3}}}(\xi - x).$$

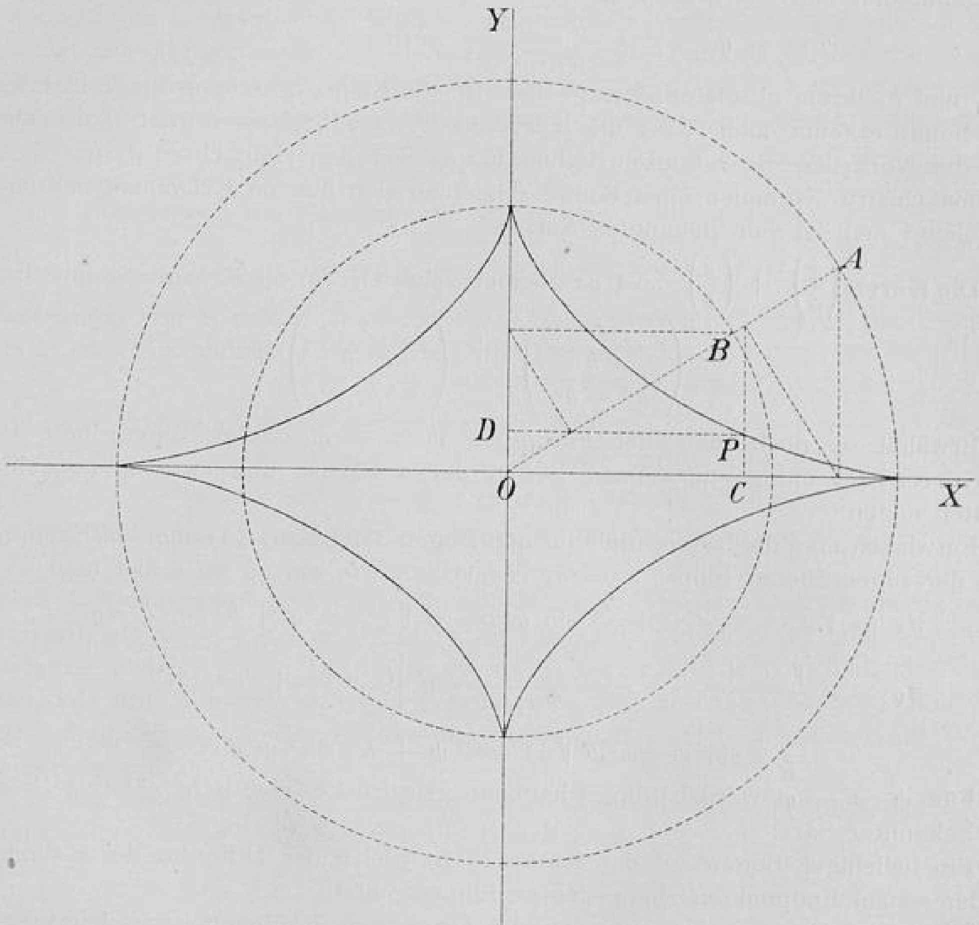
Bei Einführung von φ wird hieraus

$$3b)\qquad \frac{\xi}{a \cos \varphi} + \frac{\eta}{b \sin \varphi} = 1.$$

Die Tangente schneidet sonach auf den Koordinatenachsen die Abschnitte $a \cos \varphi$ und $b \sin \varphi$ ab, woraus mit Rücksicht auf die zur Auffindung der Kurvenpunkte benutzte Konstruktion folgt, dass die Verbindungslinie der durch einmalige Projektion der Kreisschnittpunkte A und B auf die x- bez. y-Achse erhaltenen Punkte Tangente im Kurvenpunkt φ ist. Diese Eigenschaft der Tangente ermöglicht eine bequeme Konstruktion derselben. Beachtet man weiter, dass

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

die Gleichungen einer konzentrischen Ellipse mit den Halbachsen a und b sind, so ergiebt sich noch, dass die Kurve 1) Einhüllende derjenigen Geraden ist, die durch die Projektionen der Punkte dieser Ellipse auf die Koordinatenachsen hindurchgehen.



Zu Fundamentalbeziehungen zwischen der Kurve, die durch 1) bestimmt ist, und konzentrischen Ellipsen führt eine vergleichende Betrachtung über Tangenten dieser Kurve und Ellipsennormalen. Die Normale einer Kurve wird dargestellt unter der Form

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}\,(\xi - x).$$

Sind $x = a_1 \cos \psi$ und $y = b_1 \sin \psi$ die Gleichungen einer mit der Kurve 1) auf dasselbe System bezogenen Ellipse, so erhält man als Normalengleichung der Ellipse

$$\frac{\xi}{\dfrac{a_1{}^2 - b_1{}^2}{a_1} \cos \psi} - \frac{\eta}{\dfrac{a_1{}^2 - b_1{}^2}{b_1} \sin \psi} = 1.$$

Die Achsenabschnitte der Ellipsennormalen werden identisch mit den Achsenabschnitten der Tangenten der Kurve 1), wenn die Bedingungen erfüllt sind

$$a \cos \varphi = \frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1} \cos \psi,$$

$$b \sin \varphi = -\frac{a_1^2 - b_1^2}{b_1} \sin \psi.$$

Damit dies eintrete, muss sein

$$\psi = -\varphi, \quad a_1 = -\frac{a\,b^2}{a^2 - b^2}, \quad b_1 = -\frac{a^2\,b}{a^2 - b^2},$$

wobei a_1 und b_1 ihrem absoluten Betrage nach in die Ellipsengleichung eingesetzt werden dürfen. Somit erkennt man, dass die Kurve 1) auch aufgefasst werden kann als Einhüllende der Normalen einer konzentrischen Ellipse mit den Halbachsen a_1 und b_1. Unendlich benachbarte Normalen einer Kurve schneiden sich nun im Krümmungsmittelpunkt. Damit gelangt man zu dem bekannten Satze:

Die Kurve $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ ist geometrischer Ort für die Krümmungsmittelpunkte der Ellipse

$$\left(\frac{x}{\frac{a\,b^2}{a^2 - b^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{a^2\,b}{a^2 - b^2}}\right)^2 = 1.$$

Erwähnt sei noch, dass der Forderung $\psi = -\varphi$ zufolge zugeordnete Punkte beider Kurven auf entgegengesetzten Seiten der x-Achse und zwar in benachbarten Quadranten liegen.

Entwickelt man die Differentiale für den Bogen s der Kurve 1) und den Krümmungsradius ϱ der zugeordneten Ellipse $x = a_1 \cos \psi$, $y = b_1 \sin \psi$, so erhält man

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 3 \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\; d\varphi,$$

$$d\varrho = d\,\frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''} = -\frac{1}{a_1^4\, b_1^4}\, d\left[\left(a_1^4\, y^2 + b_1^4\, x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 3 \sin \psi \cos \psi \sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}\; d\psi.$$

Für $\psi = -\varphi$ werden die erhaltenen Ausdrücke identisch. Daraus folgt ein zweiter bekannter Satz:

Ein beliebiger Bogen auf der Kurve 1) ist gleich der Differenz der Krümmungsradien der seinen Endpunkten zugeordneten Ellipsenpunkte.

Dieser — überdies für geometrische Örter von Krümmungsmittelpunkten ganz allgemein geltende — Satz ermöglicht, die zugeordnete Ellipse durch die Bewegung des Endpunktes eines Fadens zu erzeugen, der gespannt von der Kurve 1) abgewickelt wird, und rechtfertigt die Bezeichnungen „Ellipsenevolute" für die Kurve 1), „Evolvente" für die erzeugte Ellipse.

Zur Prüfung der Tangentengleichung der Kurve 1) folge noch die Lösung der Aufgabe, von einem im Inneren der Kurve auf der x-Achse gelegenen Punkt $\xi = m$ die Tangenten an die Kurve zu legen. Geht man, um keine Werte der zu bestimmenden Unbekannten zu verlieren, von der auf die Form $a\,\eta \cos \varphi + b\,\xi \sin \varphi = a\,b \sin \varphi \cos \varphi$ gebrachten Tangentengleichung aus, so ergiebt sich beim Einsetzen von $\xi = m$, $\eta = o$

$$\sin \varphi\,(m - a \cos \varphi) = o.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch die Werte

$$\sin \varphi_1 = o, \quad \varphi_1 = o \text{ und } \pi;$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{m}{a}, \; \varphi_2 = \operatorname{arc} \cos \frac{m}{a},$$

wobei zu beachten ist, dass die Wurzel φ_2 im Variationsbereich o bis 2π doppeldeutig ist. Es lassen sich mithin, wie vorauszusehen war, von jedem auf der x-Achse im Inneren der Kurve gewählten Punkt 4 Tangenten an die Kurve legen, von denen 2 in die x-Achse fallen, die anderen unter gleichen Winkeln gegen die x-Achse geneigt sind.

Für alle übrigen auf der x-Achse gelegenen Punkte würden die Tangenten letzter Art in Wegfall kommen, da die Gleichung $m - a \cos \varphi_2 = o$ für $m = \pm a$ andere Wurzeln als die aus der Gleichung $\sin \varphi_1 = o$ folgenden nicht liefert, während ihr für alle Werte $m \genfrac{}{}{0pt}{}{> a}{< - a}$ durch reelle Werte von φ_2 überhaupt nicht mehr entsprochen wird.

Zur Bestimmung der Subtangente St hat man

$$St = \frac{y}{y'} = - a \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

also unabhängig von b, mithin ist die Subtangente negativ im 1. und 4., positiv im 2. und 3. Quadranten. Für Maximal- und Minimalwerte muss sein

$$St' = a \sin \varphi \, (3 \sin^2 \varphi - 2) = o.$$

Dieser Bedingung kann genügt werden durch

$$\sin \varphi = o, \qquad \varphi_1 = o \text{ und } \pi$$

$$\text{und} \quad \sin \varphi = \pm \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arc} \sin \pm \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Den Werten φ_1 entsprechen die Maximal- und Minimalwerte o. Da weiter für φ_2

$$St'' = a \cos \varphi \, (9 \sin^2 \varphi - 2)$$

im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ ist, so sind hierdurch angezeigt Minimalwerte gleich $- \frac{2}{3} a \cos 54^0 \, 44' \, 8'',02$ für $\varphi_2 = 54^0 \, 44' \, 8'',02$ und $305^0 \, 15' \, 51'',98$, Maximalwerte gleich $\frac{2}{3} a \cos 54^0 \, 44' \, 8'',02$ für $\varphi_2 = 125^0 \, 15' \, 51'',98$ und $234^0 \, 44' \, 8'',02$. Die Maximal- und Minimalwerte der Subtangente der zu untersuchenden Kurve treten also ganz unabhängig von der Grösse der Kurvenachsen stets für konstante Werte des Argumentes φ auf.

Weiter bestimmt sich T, die Länge der Tangente vom Berührungspunkte bis zum Schnittpunkte mit der x-Achse, durch die Gleichung

$$T = \frac{y \sqrt{1 + y'^2}}{y'} = \sin^2 \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Um den Abstand e einer Kurventangente vom Koordinatenanfang als Funktion von φ darzustellen, ermittle man zunächst die Koordinaten u und v für den Fusspunkt des Lotes. Sie genügen der Tangentengleichung $v = - \dfrac{b \sin \varphi}{a \cos \varphi} u + b \sin \varphi$

und der Gleichung der Normalen $v = \dfrac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi}$,

woraus sich ergiebt

$$u = \frac{a b^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

$$v = \frac{a^2 b \sin \varphi \cos^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Wegen $e = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist dann

$$e = \frac{a\,b \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}.$$

Da
$$\frac{d\,e}{d\,\varphi} = \frac{a\,b\,(a^2 \cos^4\varphi - b^2 \sin^4\varphi)}{\sqrt{(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)^3}}$$
mit $a^2 \cos^4\varphi - b^2 \sin^4\varphi$ gleichzeitig zu Null wird, so erreicht für

$$\tan\varphi_1 = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$$

e seinen Maximalwert:
$$\frac{a\,b}{a+b}.$$

Der Winkel φ_1 des 1. Quadranten kann als Winkel am Hypotenusenabschnitt b eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen anderer Hypotenusenabschnitt a ist, aufgefasst und der Kurvenzeichnung in folgender Weise eingefügt werden. Man konstruiere den Halbkreis über der x-Achse, der diese in den Punkten M $(x = b)$ und N $(x = -a)$ schneidet, verbinde seinen Schnittpunkt mit der y-Achse: R mit M und schneide die Verbindungsgerade durch die Mittelsenkrechte von OM in S, so ist $\sphericalangle\, SOM = \varphi_1$.

Bezeichnet man die Winkel zwischen der x-Achse und den Radiivektoren für den Kurvenpunkt φ_1 und den zugeordneten Tangentenpunkt $u\,v$ mit Θ und Θ_1, so gilt

$$\tan\Theta = \frac{b \sin^3\varphi_1}{a \cos^3\varphi_1} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}},$$

$$\tan\Theta_1 = \frac{v}{u} = \frac{a \cos\varphi_1}{b \sin\varphi_1} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Für $\tan\varphi_1 = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ fallen somit der Radiusvektor des Kurvenpunktes φ_1 und die aus dem Koordinatenanfang auf die Tangente herabgelassene Senkrechte in Richtung des Strahles OA, der für die Konstruktion der Kurve benutzt wird. Da weiter

$$\frac{d\,r}{d\,\varphi} = \frac{3 \sin\varphi \cos\varphi\,(b^2 \sin^4\varphi - a^2 \cos^4\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^6\varphi + b^2 \sin^6\varphi}}$$

für $\varphi = \varphi_1$ zu Null wird und hierdurch ein Minimalwert des Radiusvektor angezeigt wird, so erkennt man noch, dass der um den Koordinatenanfang mit dem Radius $\frac{a\,b}{a+b}$ gelegte Kreis ein beschriebener Kreis der Kurve 1) ist.

Normalen.

Die Normalengleichung der Kurve 1)

$$\text{4a)} \quad \eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x) = \frac{a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}}(\xi - x)$$

lässt sich unter Einführung von φ auf die Form bringen

$$\text{4b)} \quad \frac{\xi}{\dfrac{a^2 \cos^4\varphi - b^2 \sin^4\varphi}{a \cos\varphi}} - \frac{\eta}{\dfrac{a^2 \cos^4\varphi - b^2 \sin^4\varphi}{b \sin\varphi}} = 1.$$

Die Konstruktion der Normale aus ihren Achsenabschnitten bietet keine Schwierigkeit, doch kommt man mit Benutzung der Tangente rascher zum Ziele. Aus der für den Winkel ω der Normale mit der x-Achse geltenden Gleichung

$$\tan \omega = \frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi}$$

erkennt man, dass die Normalen durch die Rückkehrpunkte der Kurve, wie auch aus der Lage der Tangenten erschlossen werden kann, den Koordinatenachsen parallel laufen.

Die Gleichung der durch den Koordinatenanfang gehenden Normale

$$\eta = \frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi} \xi$$

wird erfüllt für $\eta = b \sin^3 \varphi$, $\xi = a \cos^3 \varphi$; hieraus ergiebt sich

$$\tan \varphi = \pm \sqrt{\frac{a}{b}} = \tan \omega,$$

ein bereits bei anderer Gelegenheit abgeleitetes Resultat, welches unter anderem aussagt, dass vom Koordinatenanfang 4 auf 2 Gerade fallende Normalen auf die Kurve herabgelassen werden können. Hieran anschliessend sei bemerkt, dass die Bestimmung der Normalen aus einem Punkte auf die Kurve 1) nur für solche Punkte gelingen wird, für die die Bestimmungsgleichung, die im allgemeinen vom 8. Grade für $\sin \varphi$ ist, in ihrem Grade hinreichend erniedrigt werden kann. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn als Ausgangspunkt der Normalen der Rückkehrpunkt auf der positiven Seite der y-Achse gewählt wird. Die Gleichung der Normale geht unter dieser Voraussetzung über in

$$b = \frac{b^2 \sin^4 \varphi - a^2 \cos^4 \varphi}{b \sin \varphi}.$$

Ihr wird zunächst genügt durch $\sin \varphi = 1$, wodurch angezeigt ist, dass eine der gesuchten Normalen parallel zur x-Achse läuft. Führt man zur Abkürzung ein $z = \sin \varphi$, so kann die umgeformte Bestimmungsgleichung

$$(a^2 - b^2) z^4 - 2 a^2 z^2 + b^2 z + a^2 = o$$

durch Division mit $z - 1$ in ihrem Grad erniedrigt werden. Man erhält bei Ausführung der Division

$$f(z) = z^3 + z^2 - p z - \tfrac{1}{2} (p + 1) = o,$$

wobei p zur Abkürzung dient für $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$. Zur Vereinfachung der weiteren Behandlung mache man noch die Annahme $a > b$. Da $f(z)$ im Intervall $-\infty$ bis $+\infty$ dreimal das Zeichen wechselt $\big(f(-\infty) = -\infty$, $f(-1) = b^2$, $f(o) = -a^2$, $f(1) = -3 b^2$, $f(\infty) = \infty\big)$, so hat die kubische Gleichung $f(z) = o$ 3 reelle Wurzeln, von denen aber, der Bedingung $z^2 \gtreqless 1$ halber, nur die im Intervall o bis -1 liegende zulässig ist. Somit können von dem Rückkehrpunkte ausser der bereits erwähnten noch 2 unter gleichen Winkeln gegen die x-Achse geneigte Normalen auf die Kurve herabgelassen werden. Zur näheren Ermittlung ihrer Lage ist die kubische Gleichung nach ihren Wurzeln aufzulösen.

Für Subnormale Sn, Länge der Normale N und Abstand s derselben vom Koordinatenanfang hat man

$$Sn = yy' = -\frac{b^2 \sin^3\varphi \tan\varphi}{a},$$

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = \frac{b \sin^3\varphi}{a \cos\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

$$s = \frac{x + yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{a^2\cos^4\varphi - b^2\sin^4\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}.$$

Krümmungskreis.

Die Formel des Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}$$

geht für die Kurve 1) über in

$$5) \quad \varrho = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3}}{ab}.$$

Wie für Rückkehrpunkte erforderlich, wird ϱ in den Achsenschnittpunkten gleich o. Spezialisiert man $a = b$, so wird einfacher

$$\varrho = \pm\, 3a \sin\varphi\cos\varphi.$$

Der absolute Wert dieses Krümmungsradius wird, wie die Untersuchung der Differentialquotienten ergiebt, ein Maximum, wenn $\tan^2\varphi = 1$ ist. Die Kurvenpunkte, die dieser Gleichung entsprechen, liegen auf den Normalen durch den Koordinatenanfang. Die Kurve 1) zeigt also bei gleichen Halbachsen die schwächste Krümmung in den auf den Winkelhalbierenden der einzelnen Quadranten liegenden Kurvenpunkten.

Für die Koordinaten u und v des Krümmungsmittelpunktes erhält man endlich

$$u = x - \frac{(1+y'^2)\,y'}{y''}$$

$$= a\cos^3\varphi + \frac{3\sin^2\varphi\cos\varphi\,(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)}{a},$$

$$v = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

$$= b\sin^3\varphi + \frac{3\sin\varphi\cos^2\varphi\,(a^2\cos^2 + b^2\sin^2\varphi)}{b},$$

welche Formeln zugleich als Gleichung der Evolute der Kurve 1) gelten können.

Quadratur.[1])

Die Bestimmung eines Flächenteiles, der begrenzt ist von der Abscissenachse, zwei positiven Ordinaten und der Kurve 1), geschieht nach der Formel

$$U = \int y\, dx + \text{Const.},$$

die nach Einführung des Winkels φ übergeht in

$$U = -3ab\int \sin^4\varphi\cos^2\varphi\, a\,\varphi + \text{Const.}$$

[1]) Quadratur der Kurve für den Spezialfall **a = b**: Schlömilch, Übungsbuch, II, 62.

Die Integration des Differentiales kann ausgeführt werden durch Zurückführen auf einfachere Integrationen. Unter Benutzung der Rekursionsformeln [1])

$$\int \sin^p \varphi \cos^q \varphi \, d\varphi = \frac{\sin^{p+1} \varphi \cos^{q-1} \varphi}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p \varphi \cos^{q-2} \varphi \, d\varphi$$

$$= -\frac{\sin^{p-1} \varphi \cos^{q+1} \varphi}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} \varphi \cos^q \varphi \, d\varphi$$

ergiebt sich

$$U = -3ab\left(\frac{\sin^5 \varphi \cos \varphi}{6} - \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi}{24} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{16} + \frac{\varphi}{16}\right) + \text{Const.}$$

$$= -\frac{ab}{2} \sin \varphi \cos \varphi \left(\sin^2 \varphi - \tfrac{3}{4}\right)\left(\sin^2 \varphi + \tfrac{1}{2}\right) - \frac{3ab\varphi}{16} + \text{Const.}$$

oder bei Restitution rechtwinkliger Koordinaten durch die Formeln

$$\cos \varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, \ \sin \varphi = \frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}:$$

$$U = -\frac{b\, x^{\frac{1}{3}}}{16\, a} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \left(4 x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)\left(2 x^{\frac{2}{3}} - 3 a^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{3ab}{16} \arccos \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} + \text{Const.}$$

Soll die Fläche von der y-Achse aus gerechnet werden, so wird für $x = o$ $U = o$; man hat daher für die Konstante

$$\text{Const.} = \frac{3ab\pi}{32}.$$

Weil ferner $\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \arcsin \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ ist, so resultiert schliesslich

$$6) \quad U = \frac{b}{16\, a}\left[3 a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \left(4 x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)\left(2 x^{\frac{2}{3}} - 3 a^{\frac{2}{3}}\right)\right].$$

Soll die Fläche des Sektors berechnet werden, der begrenzt ist von der positiven Seite der x-Achse und dem Radiusvektor eines Kurvenpunktes, so geht die der Integration dienende Formel

$$S = \tfrac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx) + \text{Const.}$$

nach Einführung von φ über in

$$S = \frac{3ab}{2} \int \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi + \text{Const.}$$

Die oben bereits benutzten Rekursionsformeln ergeben

$$\int \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = -\frac{\sin 4\varphi}{32} + \frac{\varphi}{8}.$$

Nach Bestimmung der Integrationskonstanten Const. $= o$ erhält man schliesslich

$$7) \quad S = \frac{3ab}{64}(4\varphi - \sin 4\varphi).$$

Die Gesamtfläche der Kurve wird hieraus erhalten durch Einsetzen von $\varphi = 2\pi$ und ist $\frac{3ab\pi}{8}$. Das nämliche Resultat kann aus der Formel für U abgeleitet werden.

[1]) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, I, 357.

Rektifikation.[1])

Die Bogenformel

$$s = \int \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2} + \text{Const.}$$

nimmt bei Einführung von φ die Gestalt an

$$s = 3 \int \sin\varphi \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\varphi}\; d\,(\sin\varphi) + \text{Const.}$$

Für die weitere Behandlung sind zu unterscheiden die Fälle $a = b$ und $a \neq b$. Für $a = b$ wird

$$s = 3\,a \int \sin\varphi\; d\;(\sin\varphi) + \text{Const.}$$

$$= \frac{3\,a\,\sin^2\varphi}{2} + \text{Const.}$$

Rechnet man die Bogenlänge von der x-Achse aus, so wird $s = o$ für $\varphi = o$; die Konstante ist daher o, und es resultiert

$$8)\quad s = \frac{3\,a\,\sin^2\varphi}{2}.$$

Ist ferner $a \neq b$ und bezeichnet man zur Abkürzung $a^2 - b^2$ mit λ, so ergiebt sich zunächst

$$s = \frac{3}{2} \int \sqrt{a^2 - \lambda\,\sin^2\varphi}\; d\;(\sin^2\varphi).$$

Substituiert man $\sin^2\varphi = u$, so wird weiter

$$s = \frac{3}{2} \int \sqrt{a^2 - \lambda\,u}\;\text{du}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3\,\lambda}\sqrt{(a^2 - \lambda\,u)^3} + \text{Const.}$$

$$= -\frac{\sqrt{(a^2 - \lambda\,\sin^2\varphi)^3}}{\lambda} + \text{Const.}$$

Für $\varphi = o$ wird Const. $= \dfrac{a^3}{\lambda}$. Damit kommt dann s, wenn gleichzeitig für λ wieder $a^2 - b^2$ eingeführt wird, auf die Form

$$9)\quad s = \frac{a^3 - \sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3}}{a^2 - b^2}.$$

Als Gesamtlänge der Kurve 1) erhält man schliesslich

$$4\,\frac{a^2 + a\,b + b^2}{a + b} \quad \text{für } a \neq b,$$

$$6\,a \quad \text{für } a = b.$$

[1]) Schlömilch, Übungsbuch, II, 80 und 81.

II.

Lage und Gestalt der Fläche.

Durch Übertragen früherer Schlussweisen auf die Untersuchung der durch rechtwinklige Koordinaten und positive Konstante dargestellten Fläche

$$1)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

ergiebt sich, dass die Unbekannten an die Grenzgleichungen

$$\begin{aligned} a &\geqq x \geqq -a, \\ b &\geqq y \geqq -b, \\ c &\geqq z \geqq -c \end{aligned}$$

gebunden sind und dass die Fläche die Achsenabschnitte $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ bildet. Denkt man sich vom Koordinatenanfang aus einen Strahl mit den Richtungswinkeln α, β, γ gezogen und versteht man unter r den Radiusvektor eines auf dem Strahle gelegenen Flächenpunktes, so gelten für die Koordinaten dieses Punktes ausser 1) noch die Gleichungen

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma.$$

Nach Einsetzen dieser Werte geht die Gleichung 1) über in

$$r^{\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{\cos \alpha}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\cos \beta}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\cos \gamma}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \right] = 1.$$

Dieser neuen Gleichung wird bei ungeändertem r auch genügt, wenn man für α, β, γ ihre Supplemente setzt. Daher liegt auf der Verlängerung des Strahles im Abstande r ebenfalls ein Flächenpunkt; der Koordinatenanfangspunkt ist sonach Mittelpunkt der Fläche 1).

Weitere Aufschlüsse über die Gestalt der Fläche und damit die Mittel zu ihrer Konstruktion geben ebene Schnitte der Fläche. Als Gleichungen der Durchschnitte mit den Koordinatenebenen hat man zunächst

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

das sind die Gleichungen von Ellipsenevoluten mit den Halbachsen a und b, a und c, b und c.

Durch Verbindung der Gleichungen 1) und $z = h$, welche letztere eine Parallelebene zur xy-Ebene im Abstande h kennzeichnet, ergiebt sich ferner für die Durchschnittslinie

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{c^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}},$$

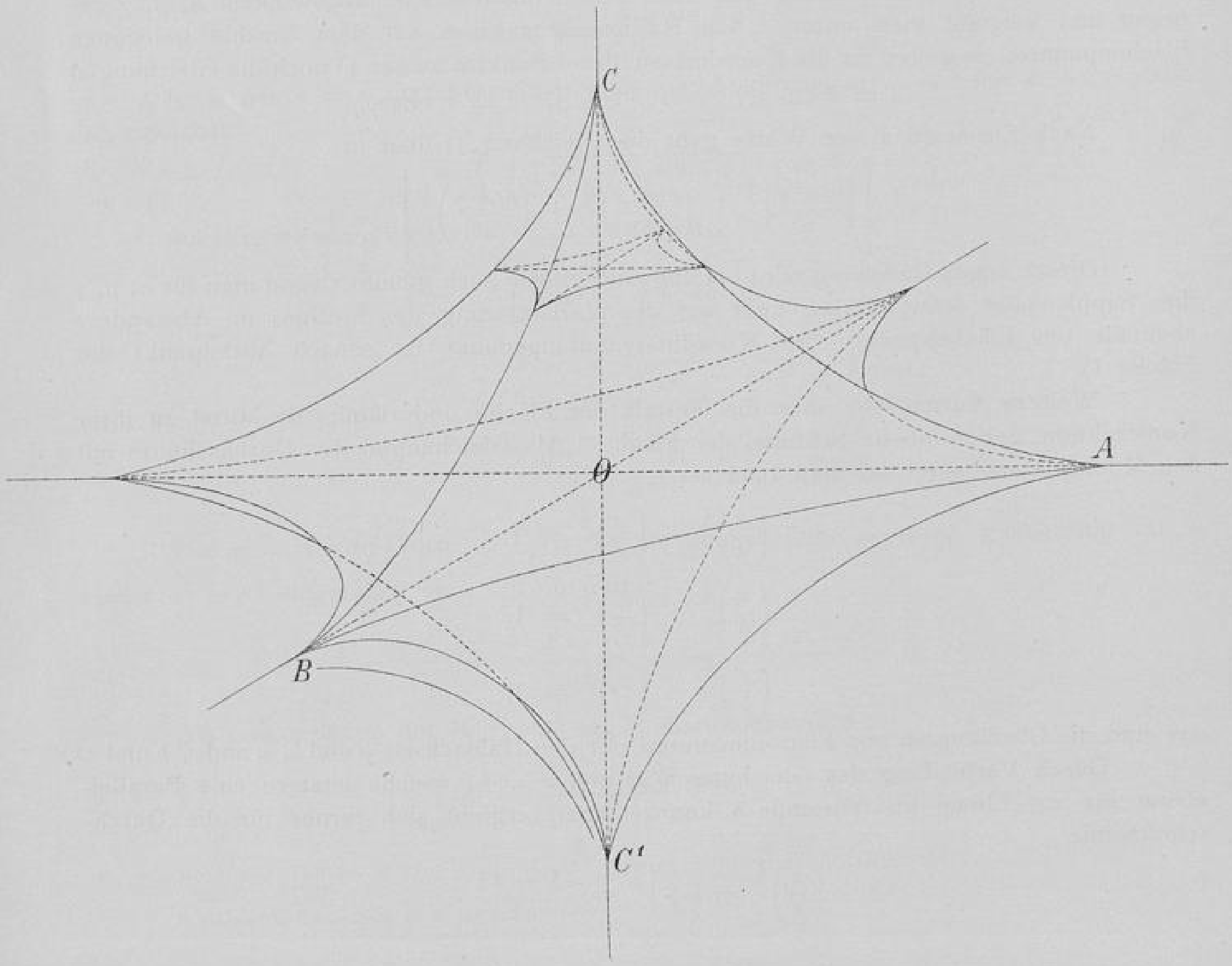
und wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$a_1 = \frac{a}{c} \sqrt{\left(c^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}}\right)^3}, \quad b_1 = \frac{b}{c} \sqrt{\left(c^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}}\right)^3}:$$

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Das ist abermals die Gleichung einer Ellipsenevolute so lange zwar, als $c > h$ ist, während für $c = h$ die Evolute in einen Punkt degeneriert, für $c < h$ aber durch reelle Werte von x und y überhaupt nicht mehr erfüllt wird. Zugleich erkennt man, dass die Rückkehrpunkte der Schnittevolute in die xz- und yz-Spuren der Fläche 1) fallen. Die Halbachsen a_2, b_2 und a_3, b_3 der Evoluten, die ähnlicher Ableitung zufolge von Parallelschnitten zur yz- und zur xz-Ebene gebildet werden, können durch cyklische Vertauschung aus den für a_1 und b_1 aufgestellten Ausdrücken erhalten werden.

Auf die soeben entwickelten Eigenschaften der Parallelschnitte gründet sich ein Verfahren zur Erzeugung der Fläche 1) durch Parallelverschiebung einer sich stetig ändernden Ellipsenevolute, wodurch zugleich ein anschauliches Bild von ihrer Gestalt ge-



wonnen wird. Wählt man die Ebene der erzeugenden Evolute parallel der xy-Ebene, so gleiten während der Parallelverschiebung ihr Mittelpunkt längs der z-Achse, ihre Rückkehrpunkte längs Evoluten, die in den xz- bez. yz-Ebenen mit den Halbachsen $OA = a$, $OC = c$, bez. $OB = b$, $OC = c$ konstruiert sind. Die entstehende Fläche läuft in 6 Spitzen aus, die auf den Koordinatenachsen in den Abständen $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ liegen.

Soll über die Natur eines Achsenschnittes, z. B. durch die z-Achse, entschieden werden und bezeichnet man den Winkel der Horizontalspur der schneidenden Ebene mit der positiven Seite der x-Achse mit ω, die auf die Horizontalspur und die z-Achse bezogenen ebenen Koordinaten der Schnittlinie mit x', z', so bestehen für den Übergang von den ursprünglichen zu den neuen Koordinaten die Gleichungen

$$x = x' \cos \omega, \quad y = x' \sin \omega, \quad z = z'.$$

Nach Einsetzen der rechts stehenden Ausdrücke in die Gleichung 1) geht diese über in

$$\left(\frac{z'}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x'}{a'}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$a' = \frac{a\,b\,\sqrt{1 + B^2}}{\sqrt{(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\,B^{\frac{2}{3}})^3}}, \quad \tan \omega = B.$$

Die Schnittkurve ist also eine Ellipsenevolute. Cyklische Vertauschung führt auf die Werte der Evolutenhalbachsen a'' und a''' bei den übrigen Klassen von Achsenschnitten.

Nach dem vorausgehenden kann die Fläche 1) nunmehr auch erzeugt werden durch Rotation einer veränderlichen Ellipsenevolute um eine ihrer Achsen $CC' = 2c$, die mit der z-Achse zusammenfallend gedacht werde. Die Endpunkte der veränderlichen Achse gleiten während der Rotation längs einer in der xy-Ebene mit den Halbachsen $OA = a$ und $OB = b$ konstruierten Ellipsenevolute.

Für die Untersuchung des Schnittes einer Ebene ganz allgemeiner Lage

$$Ax + By + Cz = D$$

mit der Fläche 1) bringe man die Gleichung der letzteren auf rationale Form durch Einführung neuer Variablen. Substituiert man

$$x = a\,\xi^3, \quad y = b\,\eta^3, \quad z = c\,\zeta^3,$$

so genügen die Punkte der Schnittlinie gleichzeitig den Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$
$$A\,a\,\xi^3 + B\,b\,\eta^3 + C\,c\,\zeta^3 = D.$$

Die Gleichung ihrer Horizontalprojektion ergiebt sich daraus durch Elimination von ζ und lautet

$$\begin{aligned}&(A^2 a^2 + C^2 c^2)\,\xi^6 + (B^2 b^2 + C^2 c^2)\,\eta^6 + 3\,C^2 c^2\,\xi^2\,\eta^2\,(\xi^2 + \eta^2)\\ &+ 2\,A B a b\,\xi^3 \eta^3 - 3\,C^2 c^2\,(\xi^4 + \eta^4) - 6\,C^2 c^2\,\xi^2\,\eta^2 - 2\,A D a\,\xi^3\\ &- 2\,B D\,b\,\eta^3 + 3\,C^2 c^2\,(\xi^2 + \eta^2) + D^2 - C^2 c^2 = o.\end{aligned}$$

Die Horizontalprojektion der Schnittlinie, somit auch diese selbst, sind hiernach komplizierte Formen der Kurven 6. Grades.

Die vorstehend eingeführten neuen Variablen können geometrisch gedeutet werden. Da die absoluten Werte der Quotienten $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ den Wert 1 nicht überschreiten können, so gilt das Gleiche auch für die Variablen ξ, η, ζ, die nunmehr auch als Cosinus dreier Winkel φ, ψ, χ aufgefasst werden können. Die Summe der Cosinus-Quadrate muss, der Flächengleichung 1) zufolge, gleich 1 sein. Dies wird eintreten, wenn man φ, ψ, χ definiert als Richtungswinkel eines vom Koordinatenanfang ausgehenden Strahles. Damit ist aber ein drittes Verfahren gewonnen zur Konstruktion der Fläche 1) aus einzelnen Punkten, das dem bei Konstruktion der Ellipsenevolute geübten entspricht: Man lege um den Mittelpunkt des Koordinatensystems drei Kugelflächen mit den Radien a, b und c; die Schnittpunkte dieser Flächen mit einem vom Koordinatenanfang ausgehenden Strahl — dessen Richtungswinkel φ, ψ, χ seien — projiziere man dreimal nacheinander auf die Achsen; dann sind die letzterhaltenen Projektionen der auf dem Strahl gelegenen Radien die rechtwinkligen Koordinaten des Flächenpunktes $\varphi\ \psi\ \chi$.

Tangentialebenen.

Schreibt man die Flächengleichung 1) in der Form

$$F\,(x\ y\ z) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = o,$$

so gilt bekanntlich für die Tangentialebene des Punktes $x\ y\ z$, wenn man die laufenden Koordinaten dieser Ebene mit ξ, η, ζ bezeichnet,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}\,(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}\,(\zeta - z) = o.$$

Substituiert man

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{3\ a^{\frac{2}{3}}\ x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\ a\ \cos\varphi},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3\ b^{\frac{2}{3}}\ y^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\ b\ \cos\psi},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2}{3\ c^{\frac{2}{3}}\ z^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\ c\ \cos\chi},$$

so kommt die Gleichung der Tangentialebene auf die einfache Form

$$2)\qquad \frac{\xi}{a\cos\varphi} + \frac{\eta}{b\cos\psi} + \frac{\zeta}{c\cos\chi} = 1.$$

Nach den Regeln der analytischen Geometrie folgt hieraus für die Cosinus ihrer Stellungswinkel ν_x, ν_y, ν_z

$$\cos\nu_x = \frac{b\ c\ \cos\psi\ \cos\chi}{n},$$

$$\cos\nu_y = \frac{a\ c\ \cos\varphi\ \cos\chi}{n},$$

$$\cos\nu_z = \frac{a\ b\ \cos\varphi\ \cos\psi}{n},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$n = \sqrt{(a\ b\ \cos\varphi\ \cos\psi)^2 + (a\ c\ \cos\varphi\ \cos\chi)^2 + (b\ c\ \cos\psi\ \cos\chi)^2}.$$

Über die Lage der Tangentialebene an Punkten eines Hauptschnittes kann entschieden werden aus der Lage der Tangenten, die durch diese Punkte an die Evolutenschnitte der Fläche 1) gelegt werden können. Man findet hiernach, dass an Achsenpunkte eines Hauptschnittes unendlich viele Tangentialebenen gelegt werden können, deren gemeinsame Durchschnittslinie die Achse selbst ist; dass ferner jedem anderen Punkte des Hauptschnittes nur eine Tangentialebene zukommt, die mit der Ebene des Hauptschnittes zusammenfällt. Für die Konstruktion der Tangentialebene an einem Flächenpunkt allgemeiner Lage beachte man, dass sie der Gleichung 2) zufolge die Achsenabschnitte $a \cos \varphi$, $b \cos \psi$, $c \cos \chi$ bildet, die bei der Konstruktion des Flächenpunktes durch dreimalige Projektion von Kugelradien mit gewonnen werden.

Zur Bestimmung des Maximalwertes der Dreiecksfläche, die von den Spuren der Tangentialebene eingeschlossen wird,[1]) schreibt man zweckmässig die Gleichung der Fläche 1) und die Achsenabschnitte der Tangentialebene in der Form

$$F = A x^{\frac{2}{3}} + B y^{\frac{2}{3}} + C z^{\frac{2}{3}} - 1 = o,$$

$$a \cos \varphi = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{A}, \quad b \cos \psi = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{B}, \quad c \cos \chi = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{C}.$$

Die Seiten der durch die Achsenschnittpunkte der Berührungsebene bestimmten Dreiecksfläche $\triangle$ sind dann

$$a_1 = \sqrt{\frac{y^{\frac{2}{3}}}{B^2} + \frac{z^{\frac{2}{3}}}{C^2}}, \quad b_1 = \sqrt{\frac{z^{\frac{2}{3}}}{C^2} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{A^2}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{A^2} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{B^2}}.$$

Für die Dreiecksfläche erhält man nach bekannten Regeln

$$\begin{aligned} \triangle &= \tfrac{1}{4} \sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)(-a_1 + b_1 + c_1)(a_1 - b_1 + c_1)(a_1 + b_1 - c_1)} \\ &= \tfrac{1}{4} \sqrt{2 a_1^2 b_1^2 + 2 a_1^2 c_1^2 + 2 b_1^2 c_1^2 - a_1^4 - b_1^4 - c_1^4} \\ &= \frac{1}{2ABC} \sqrt{A^2 (yz)^{\frac{2}{3}} + B^2 (zx)^{\frac{2}{3}} + C^2 (xy)^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Soll $\triangle$ ein Maximum werden, so muss das Gleiche gelten für

$$F_1 = A^2 (yz)^{\frac{2}{3}} + B^2 (zx)^{\frac{2}{3}} + C^2 (xy)^{\frac{2}{3}},$$

wozu erforderlich ist, dass x, y, z den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial x} = o,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial y} = o$$

genügen, die nach Einsetzen der Werte der partiellen Ableitungen übergehen in

$$\begin{aligned} A B^2 x^{\frac{2}{3}} + (A^3 - C^3) y^{\frac{2}{3}} - B^2 C z^{\frac{2}{3}} &= o, \\ (B^3 - C^3) x^{\frac{2}{3}} + A^2 B y^{\frac{2}{3}} - A^2 C z^{\frac{2}{3}} &= o. \end{aligned}$$

Fügt man hinzu die Flächengleichung

$$A x^{\frac{2}{3}} + B y^{\frac{2}{3}} + C z^{\frac{2}{3}} - 1 = o,$$

so können nunmehr $x^{\frac{2}{3}}$, $y^{\frac{2}{3}}$, $z^{\frac{2}{3}}$, somit auch x, y, z ermittelt werden.

[1]) Schlömilch, Übungsbuch, I, 242 und 243.

Unter Benutzung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} A' &= B^3 + C^3 - A^3, \\ B' &= C^3 + A^3 - B^3, \\ C' &= A^3 + B^3 - C^3, \\ D &= 2\,(A^3 B^3 + A^3 C^3 + B^3 C^3) - (A^6 + B^6 + C^6) \end{aligned}$$

erhält man

$$x = \sqrt{\left(\frac{A^2 A'}{D}\right)^3}, \quad y = \sqrt{\left(\frac{B^2 B'}{D}\right)^3}, \quad z = \sqrt{\left(\frac{C^2 C'}{D}\right)^3}$$

und nach Substitution dieser Ausdrücke in die Flächenformel:

$$\triangle = \frac{1}{2\,D}\sqrt{D} = \frac{1}{2\sqrt{D}}.$$

Kehrt man zu den ursprünglichen Konstanten a, b, c zurück, so resultiert schliesslich für das Maximum der durch die Achsenschnittpunkte der Berührungsebene bestimmten Dreiecksfläche

$$\triangle = \frac{a^2\, b^2\, c^2}{2\sqrt{2\, a^2\, b^2\, c^2\, (a^2 + b^2 + c^2) - (a^4\, b^4 + a^4\, c^4 + b^4\, c^4)}}.$$

Für $a = b = c$ wird hieraus einfacher

$$\triangle = \frac{a^2}{2\sqrt{3}},$$

d. i. $\frac{2}{3}$ der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks von der Seitenlänge a.

Da die Gleichungen

$$u = a \cos \varphi, \quad v = b \cos \psi, \quad w = c \cos \chi$$

ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c charakterisieren, so kann die Fläche 1) auch angesehen werden als Einhüllende der Ebenen, die durch die Projektionen der Punkte dieses Ellipsoides auf die Achsen bestimmt sind. Soll dieses Resultat durch Entwicklung der Gleichung der Einhüllenden, die dann identisch sein muss mit der Gleichung 1), verifiziert werden, so kann dies in folgender Weise geschehen.[1])

Als Gleichung der durch die Projektionen des Ellipsoidpunktes $u\, v\, w$ auf die Achsen bestimmten Ebene hat man zunächst

$$f\,(x\, y\, z\, u\, v\, w) = \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} - 1 = o.$$

Hierzu tritt die Ellipsoidgleichung

$$f_1\,(u\, v\, w) = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} - 1 = o.$$

Betrachtet man u und v als unabhängige Parameter der Ebene $f = o$, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Fläche, die einer stetigen Änderung der Parameter entspricht, durch Elimination von u, v, w aus den Gleichungen $f = f_1 = o$ und den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial f_1}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial f_1}{\partial u}, \\ \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial f_1}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial f_1}{\partial v}, \end{aligned}$$

---

[1]) Schlömilch, Übungsbuch, I, 184.

die nach Ausführung der Differentiation übergehen in

$$c^2 z u^3 = a^2 x w^3,$$
$$c^2 z v^3 = b^2 y w^3.$$

Ihre Auflösung nach u und v ergiebt

$$u = \frac{a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{3}}} w, \quad v = \frac{b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{3}}} w.$$

Durch Einsetzen dieser Werte kommen die Gleichungen $f = o$, $f_1 = o$ auf die Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{w}{c^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{3}}},$$
$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{c^{\frac{4}{3}} z^{\frac{2}{3}}}{w^2}.$$

Durch Division erhält man hieraus

$$w = c^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{3}},$$

welcher Wert die vorausgehenden Gleichungen überführt in

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

das ist aber die Flächengleichung 1).

Es erübrigt noch zu bemerken, dass eine auf Grund von Analogieschlüssen etwa erwartete Zuordnung der Fläche 1) zu einem konzentrischen Ellipsoid, derart, dass die Fläche 1) aufgefasst werden könnte als geometrischer Ort der Krümmungsmittelpunkte aus Achsenschnitten oder Parallelschnitten zu den Koordinatenebenen, nicht besteht. Die Evoluten der Achsenschnitte eines Ellipsoides zeigen nämlich nicht die Achsenschnitten der Fläche 1) zukommende Übereinstimmung in einer Achse; die Achsen der Evoluten aufeinander folgender Parallelschnitte des Ellipsoides ändern sich ferner in einem anderen Verhältnis als die Achsen aufeinanderfolgender Parallelschnitte der Fläche 1).

Normalen.

Die allgemeine Normalengleichung

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

nimmt für die zur Untersuchung stehende Fläche die Form an

3) $a \cos \varphi \, (\xi - a \cos^3 \varphi) = b \cos \psi \, (\eta - b \cos^3 \psi) = c \cos \chi \, (\zeta - c \cos^3 \chi).$

Wie aus der Lage der Tangentialebenen an Punkten eines Hauptschnittes bereits hervorgeht, lassen sich durch Achsenpunkte der Fläche unendlich viele, durch alle anderen Punkte eines Hauptschnittes nur je eine Normale ziehen. Die Normalen der ersten Art stehen senkrecht zur Achse, die der zweiten Art senkrecht zur Ebene des Hauptschnittes.

Zur Ermittlung der Anzahl und der Lage der Normalen, die vom Koordinatenanfang auf die Fläche 1) herabgelassen werden können, beachte man, dass der Radiusvektor für Flächenpunkte solcher Normalen Maximal- bez. Minimalwerte annehmen muss. Die Koordinaten x, y, z dieser Flächenpunkte genügen daher gleichzeitig den Gleichungen

$$F = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = o,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \; \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \; \frac{\partial F_1}{\partial x} = o,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \; \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \; \frac{\partial F_1}{\partial y} = o,$$

worin F_1 zur Abkürzung für $x^2 + y^2 + z^2$ dient. Nach Einsetzen der Werte der partiellen Ableitungen gehen die Differentialgleichungen über in

$$a^{\frac{2}{3}} \, x^{\frac{4}{3}} - c^{\frac{2}{3}} \, z^{\frac{4}{3}} = o,$$

$$b^{\frac{2}{3}} \, y^{\frac{4}{3}} - c^{\frac{2}{3}} \, z^{\frac{4}{3}} = o,$$

aus denen dann in Verbindung mit $F = o$ für die Koordinaten der auf den Normalen liegenden Flächenpunkte die Werte

$$x = \pm\, a \sqrt{\left(\frac{b\,c}{a\,b + a\,c + b\,c}\right)^3},$$

$$y = \pm\, b \sqrt{\left(\frac{a\,c}{a\,b + a\,c + b\,c}\right)^3},$$

$$z = \pm\, c \sqrt{\left(\frac{a\,b}{a\,b + a\,c + b\,c}\right)^3}$$

gefunden werden. Der Radiusvektor hat für alle diese Flächenpunkte den Minimalwert

$$\frac{a\,b\,c}{a\,b + a\,c + b\,c}.$$

Es können demnach vom Koordinatenanfang 8 Normalen auf die Fläche 1) herabgelassen werden. Die um den Koordinatenanfang mit dem Radius $\frac{a\,b\,c}{a\,b + a\,c + b\,c}$ gelegte Kugelfläche wird von der Fläche 1) umhüllend in 8 Punkten berührt. Für $a = b = c$ wird der Radius der Kugelfläche einfacher gleich $\frac{a}{3}$. Die Fläche des regelmässigen Sechsecks, welches einem grössten Kreise auf dieser Kugelfläche einbeschrieben werden kann, beträgt $\frac{a^2}{2\sqrt{3}}$, ist also gleich dem Maximalwert der Dreiecksfläche, die von den Spuren der Tangentialebene der Fläche 1) eingeschlossen wird.

Hauptkrümmungshalbmesser.

Zur Bestimmung der Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 hat man

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{(1 + q^2)\,r - 2\,p\,q\,s + (1 + p^2)\,t}{r\,t - s^2}\,N,$$

$$\varrho_1\,\varrho_2 = \frac{N^4}{r\,t - s^2},$$

worin
$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c \cos \chi}{a \cos \varphi}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c \cos \chi}{b \cos \psi},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{c (\cos^2 \varphi + \cos^2 \chi)}{3 a^2 \cos^4 \varphi \cos \chi}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{c}{3 a b \cos \varphi \cos \psi \cos \chi},$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{c (\cos^2 \psi + \cos^2 \chi)}{3 b^2 \cos^4 \psi \cos \chi},$$

$$N = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + a^2 c^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \chi + b^2 c^2 \cos^2 \psi \cos^2 \chi}}{a b \cos \varphi \cos \psi}$$
$$= \frac{N_1}{a b \cos \varphi \cos \psi}$$

zu setzen ist. Führt man zur weiteren Abkürzung

$$N_2 = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \psi) \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + (a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \cos^2 \chi) \cos^2 \varphi \cos^2 \chi$$
$$+ (b^2 \cos^2 \psi + c^2 \cos^2 \chi) \cos^2 \psi \cos^2 \chi$$

ein, so erhält man schliesslich

$$4) \quad \begin{aligned} \varrho_1 + \varrho_2 &= \frac{3 N_1 N_2}{a b c \cos \varphi \cos \psi \cos \chi}, \\ \varrho_1 \varrho_2 &= \left(\frac{3 N_1{}^2}{a b c}\right)^2. \end{aligned}$$

Die quadratische Form des für $\varrho_1 \varrho_2$ erhaltenen Ausdruckes giebt zu erkennen, dass sämtliche Normalschnitte eines Flächenpunktes ihre konvexe Seite derselben Gegend des Raumes zuwenden.

Kubatur.[1]

Unter Anwendung der Kubaturformel

$$V = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} z \, dx \, dy$$

ergiebt sich für das zwischen den positiven Teilen der Koordinatenebenen und der Fläche 1) enthaltene Volumen

$$V = c \int_0^a \int_0^{b \sqrt{[1 - (\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}]^3}} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} dx \, dy.$$

Führt man neue Variable x_1, y_1 ein mittels der Substitution

$$x = a x_1{}^3, \quad y = b y_1{}^3,$$

[1]) Schlömilch, Übungsbuch, II, 224 und 225.

so geht das Integral über in

$$V = 3\,b\,c \int_0^a \int_0^{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - y_1{}^2 \right]^{\frac{3}{2}} y_1{}^2 \, dx \, dy_1$$

$$= 9\,a\,b\,c \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x_1{}^2}} \left(1 - x_1{}^2 - y_1{}^2\right)^{\frac{3}{2}} x_1{}^2 \, y_1{}^2 \, dx_1 \, dy_1 \,,$$

d. i. ein Integral mit kreisförmigem Integrationsbereich. Führt man zur Erzielung konstanter Integrationsgrenzen Polarkoordinaten r, Θ ein, wobei bekanntlich $r\,dr\,d\Theta$ an die Stelle von $d\,x_1\;d\,y_1$ tritt, so erhält man weiter

$$V = 9\,a\,b\,c \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \, r^5 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta \, dr \, d\Theta \,.$$

Um den Ausdruck unter dem Integralzeichen rational zu machen, substituiere man endlich

$$r^2 = 1 - u^2 \,,$$

wodurch das Integral auf die Form kommt

$$V = 9\,a\,b\,c \int_1^0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} - u^4 \, (1 - u^2)^2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta \, du \, d\Theta$$

$$= 9\,a\,b\,c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta \, d\Theta \,. \int_0^1 u^4 \, (1 - u^2)^2 \, du.$$

Nach Entwickelung von $u^4\,(1 - u^2)^2$ lässt sich die Integration nach u leicht ausführen, wonach sich für V zunächst ergiebt

$$V = \frac{8\,a\,b\,c}{35} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \Theta - \sin^4 \Theta) \, d\Theta \,.$$

Da endlich

$$\int \sin^2 \Theta \, d\Theta = \frac{1}{2}\,\Theta - \frac{1}{4} \sin 2\,\Theta \,,$$

$$\int \sin^4 \Theta \, d\Theta = \frac{3}{8}\,\Theta - \frac{1}{4} \sin 2\,\Theta + \frac{1}{32} \sin 4\,\Theta$$

ist, so resultiert

$$5) \qquad V = \frac{a\;b\;c\;\pi}{70} \,.$$

Das gesamte von der Fläche 1) eingeschlossene Volumen beträgt $\frac{4\,a\,b\,c\,\pi}{35}$, d. i. $\frac{3}{35}$ des Volumens des umbeschriebenen Ellipsoides. Für $a = b = c$ wird $V = \frac{4\,a^3\,\pi}{35}$, d. i. $\frac{3}{35}$ des Volumens der umbeschriebenen oder $\frac{81}{35}$ des Volumens der einbeschriebenen Kugel.

Complanation.[1])

Die Complanation der Fläche 1) geschieht zweckmässig zwischen Kurven isokliner Normalen. Hierzu ist erforderlich, dass in die allgemeine Complanationsformel

$$S = \int\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\ dy$$

die Winkel eingeführt werden, durch die die Richtung einer Normale dieser Fläche bestimmt ist. Bezeichnet ν den Neigungswinkel der Normale gegen die xy-Ebene, χ den Winkel ihrer Horizontalprojektion mit der x-Achse, so gelten die Gleichungen

$$\tan\chi = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{B}{A}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\cot^2\nu = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1-Ax^{\frac{2}{3}}-By^{\frac{2}{3}}}{C^3}\left(\frac{A^2}{x^{\frac{2}{3}}}+\frac{B^2}{y^{\frac{2}{3}}}\right),$$

wobei zur Vereinfachung

$$\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = A,\quad \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}} = B,\quad \frac{1}{c^{\frac{2}{3}}} = C$$

gesetzt worden ist. Aus der ersten erhält man

$$y = \frac{B^3 x \cot^3\chi}{A^3}.$$

Betrachtet man χ als die für y eintretende neue Unbekannte, so ist

$$dy = -\frac{3B^3 x\cos^2\chi}{A^3\sin^4\chi}\, d\chi.$$

Durch Substitution dieses Wertes geht die Complanationsformel unter Beachtung der Relation

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\sin\nu}$$

über in

$$S = -\frac{3B^3}{A^3}\int\int\frac{x\cos^2\chi}{\sin\nu\ \sin^4\chi}\, dx\, d\chi.$$

Aus der Gleichung für $\cot^2\nu$ ergiebt sich ferner beim Einsetzen des für y ermittelten Wertes

$$x^2 = \frac{A^6\sin^6\chi}{(A^3\sin^2\chi+B^3\cos^2\chi+C^3\sin^2\chi\cos^2\chi\cot^2\nu)^3}$$

und durch Differentiation, wobei ν als die neue für x eintretende Variable anzusehen ist,

$$x\,dx = \frac{3A^6C^3\sin^8\chi\cos^2\chi\cos\nu\, d\nu}{\sin^3\nu\,(A^3\sin^2\chi+B^3\cos^2\chi+C^3\sin^2\chi\cos^2\chi\cot^2\nu)^4}.$$

Substituiert man diesen Wert in die Formel für S, so wird nun

$$S = -9A^3B^3C^3\int\int\frac{\sin^4\nu\cos\nu\tan^4\chi\, d\nu\, d\chi}{\left[(A^3\tan^2\chi+B^3)\sin^2\nu+C^3\sin^2\chi\cos^2\nu\right]^4}.$$

[1]) Schlömilch, Übungsbuch, II, 235, 243—246.

Sollen durch die Integration alle zwischen zwei Kurven isokliner Normalen mit den Neigungswinkeln ν_0 und $\nu_1 > \nu_0$ gelegenen Flächenelemente zusammengefasst werden, so sind als Integrationsgrenzen o und 2π für χ, ν_1 und ν_0 für ν zu wählen. Führt man zu weiterer Vereinfachung die Variablen t und u ein mittels der Gleichungen

$$\sin\nu = u, \quad \tan\chi = t, \left[\sin\nu_0 = u_0, \quad \sin\nu_1 = u_1\right]$$

und beachtet ausserdem, dass der zwischen den Integrationskurven enthaltene Flächenring zufolge der symmetrischen Lage der Fläche zu den Koordinatenebenen das Vierfache des in einem Oktanten liegenden Ringteiles sein muss, so kommt S schliesslich auf die Form

$$S = 36\,A^3 B^3 C^3 \int_{u_0}^{u_1} u^4\,du \int_0^\infty \frac{t^4\,(1+t^2)^3\,dt}{\left[B^3 u^2 + \left\{C^3 + (A^3 + B^3 - C^3)\,u^2\right\} t^2 + A^3 u^2 t^4\right]^4}.$$

Das Integral nach t kann auf einfachere Integrale zurückgeführt werden. Schreibt man dasselbe in der Form

$$J = \int_0^\infty \frac{t^4\,(1+t^2)^3\,dt}{(a_1 + b_1 t^2 + c_1 t^4)^4}, \qquad a_1,\, b_1,\, c_1 > o,$$

so geht es durch Entwicklung im Zähler über in

$$J = \int_0^\infty \frac{t^4}{U^4}\,dt + 3\int_0^\infty \frac{t^6}{U^4}\,dt + 3\int_0^\infty \frac{t^8}{U^4}\,dt + \int_0^\infty \frac{t^{10}}{U^4}\,dt,$$

worin U zur Abkürzung dient für $a_1 + b_1 t^2 + c_1 t^4$. Bezeichnet man die stets positive Differenz $b_1^2 - 4\,a_1 c_1$ mit λ_1^2, so kommen durch Anwendung der Rekursionsformeln [1])

$$\int \frac{t^2}{U^{n+1}}\,dt = \frac{b_1}{2n\,\lambda_1^2}\int\frac{dt}{U^n} - \frac{(4n-3)\,c_1}{n\,\lambda_1^2}\int\frac{t^2}{U^n}\,dt - \frac{b_1 t + 2\,c_1 t^3}{2n\,\lambda_1^2\,U^n},$$

$$\int \frac{dt}{U^{n+1}} = \frac{(b_1^2 - 2\,a_1 c_1)\,t + b_1 c_1 t^3}{2\,n\,a_1\,\lambda_1^2\,U^n} - \frac{(8n-2)\,a_1 c_1 - (2n-1)\,b_1^2}{2n\,a_1\,\lambda_1^2}\int\frac{dt}{U^n} + \frac{(4\,n-3)\,b_1 c_1}{2\,n\,a_1\,\lambda_1^2}\int\frac{t^2\,dt}{U^n},$$

$$\int \frac{t^{2n+2}}{U^{m+1}}\,dt = \frac{2\,n-1}{4\,m\,c_1}\int\frac{t^{2n-2}}{U^m}\,dt - \frac{b_1}{2\,c_1}\int\frac{t^{2n}}{U^{m+1}}\,dt - \frac{t^{2n-1}}{4\,m\,c_1\,U^m},$$

sämtliche Einzelintegrale zurück auf die Integrale

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{dt}{U} \quad \text{und} \quad J_2 = \int_0^\infty \frac{t^2}{U}\,dt,$$

deren Wert leicht ermittelt werden kann. Man erhält zunächst für J_1 durch Partialbruchzerlegung

[1]) Rekursionsformeln 1) und 2): Schlömilch, Übungsbuch, II, 17.

$$J_1 = \frac{2c_1}{\lambda_1}\left\{\int_0^\infty \frac{dt}{(b_1-\lambda_1)+2c_1t^2} - \int_0^\infty \frac{dt}{(b_1+\lambda_1)+2c_1t^2}\right\}, \frac{b_1+\lambda_1}{b_1-\lambda_1} > o$$

$$= \frac{\pi\sqrt{c_1}}{\lambda_1\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{b_1-\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{b_1+\lambda_1}}\right)$$

$$= \frac{\lambda\sqrt{c_1}}{\lambda_2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{b_1-\sqrt{b_1^2-\lambda_1^2}}{2a_1c_1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{a_1h_1}},$$

worin $h_1 = b_1 + 2\sqrt{a_1c_1}$ gesetzt worden ist. Auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$J_2 = \frac{\lambda_1+b_1}{\lambda_1}\int_0^\infty \frac{dt}{(b_1+\lambda_1)+2c_1t^2} + \frac{\lambda_1-b_1}{\lambda_1}\int_0^\infty \frac{dt}{(b_1-\lambda_1)+2c_1t^2}$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda_1}\left\{\frac{b_1+\lambda_1}{\sqrt{2c_1(b_1+\lambda_1)}} - \frac{b_1-\lambda_1}{\sqrt{2c_1(b_1-\lambda_1)}}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{b_1+\lambda_1}-\sqrt{b_1-\lambda_1}}{2\lambda_1\sqrt{2c_1}}\pi = \frac{\pi}{2\sqrt{c_1h_1}}.$$

Von den Werten J_1 und J_2 ausgehend gelangt man nunmehr unter Anwendung der Rekursionsformeln durch allmähliches Aufsteigen in der Integralreihe[1])

$\int\frac{dt}{U^2}$, $\int\frac{t^2}{U^2}dt$, $\int\frac{t^4}{U^2}dt$, $\int\frac{dt}{U^3}$, $\int\frac{t^2}{U^3}dt$, $\int\frac{t^4}{U^3}dt$, $\int\frac{t^6}{U^3}dt$, $\int\frac{dt}{U^4}$, $\int\frac{t^2}{U^4}dt$ auf die Werte

$$\int_0^\infty \frac{t^4}{U^4}dt = \frac{\pi(7h_1-5b_1)}{64\sqrt{a_1^3h_1^7}}, \quad 3\int_0^\infty \frac{t^6}{U^4}dt = \frac{15\pi}{32\sqrt{a_1h_1^7}},$$

$$3\int_0^\infty \frac{t^8}{U^4}dt = \frac{15\pi}{32\sqrt{c_1h_1^7}}, \quad \int_0^\infty \frac{t^{10}}{U^4}dt = \frac{\pi(7h_1-5b_1)}{64\sqrt{c_1^3h_1^7}}.$$

Beachtet man bei der Zusammenfassung dieser Einzelintegrale, dass

$$7h_1 - 5b_1 = 2b_1 + 14\sqrt{a_1c_1} = 2(h_1 + 5\sqrt{a_1c_1})$$

ist, so findet man schliesslich

$$J = \frac{5\pi}{32}\left(\sqrt[6]{\frac{c_1}{a_1^2}} + \sqrt[6]{\frac{a_1}{c_1^2}}\right)^3\frac{1}{\sqrt{h_1^7}} + \frac{\pi}{32}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1^3}} + \frac{1}{\sqrt{c_1^3}}\right)\frac{1}{\sqrt{h_1^5}}.$$

Bei der Rückkehr zu den Konstanten A, B, C und unter gleichzeitiger Einführung der Abkürzungen

$$\lambda = (\sqrt{A^3} + \sqrt{B^3})^2 - C^3,$$

$$M = (\sqrt{A^3} + \sqrt{B^3})^3\sqrt{A^3B^3}, \qquad N = \sqrt{A^9} + \sqrt{B^9}$$

[1]) Schlömilch, Übungsbuch, II, 141.

wird nun einfacher

$$S = \frac{9\pi\ C^3}{8\sqrt{A^3 B^3}} \int_{u_0}^{u_1} \left\{ \frac{5\ M u^3}{\sqrt{(C^3 + \lambda u^2)^7}} + \frac{N u}{\sqrt{(C^3 + \lambda u^2)^5}} \right\} du\,.$$

Um die Integration nach u ausführen zu können, benutze man die Rekursionsformel[1])

$$\int \frac{u^m}{T^n}\, du = -\frac{u^{m-1}}{(2n-m-1)\lambda\, T^{n-1}} + \frac{(m-1)\, C^3}{(2n-m-1)\lambda} \int \frac{u^{m-2}}{T^n}\, du\,,$$

worin T zur Abkürzung für $C^3 + \lambda u^2$ steht. Hiernach erhält man

$$\int \frac{u}{T^{\frac{5}{2}}}\, du = -\frac{1}{3\lambda T^{\frac{3}{2}}}\,,$$

$$\int \frac{u^3}{T^{\frac{7}{2}}}\, du = -\frac{u^2}{3\lambda T^{\frac{5}{2}}} - \frac{2\ C^3}{15\lambda^2 T^{\frac{5}{2}}}\,,$$

und damit kommt die Complanationsformel, wenn noch

$$\sqrt{C^3 + \lambda u_0^2} = \sqrt{C^3 + \lambda \sin^2 \nu_0} = \mu_0\,,$$

$$\sqrt{C^3 + \lambda u_1^2} = \sqrt{C^3 + \lambda \sin^2 \nu_1} = \mu_1$$

gesetzt wird, auf die Form

$$S = \frac{3\pi\ C^3}{8\lambda^2\sqrt{A^3 B^3}} \left\{ \left(5\ M + \lambda N\right)\left(\frac{1}{\mu_0^3} - \frac{1}{\mu_1^3}\right) - 3\ C^2 M \left(\frac{1}{\mu_0^5} - \frac{1}{\mu_1^5}\right) \right\}.$$

Soll sich die Complanation auf die gesamte Fläche 1) erstrecken, so integriere man bez. ν zwischen den Grenzen o und $\frac{\pi}{2}$, wodurch alle Flächenelemente mit positivem z zusammengefasst werden, und gebe dem entstehenden Resultate noch den Faktor 2. Die Rückkehr zu den ursprünglichen Konstanten der Fläche erfolgt zweckmässig unter Benutzung von Hilfskonstanten $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, die definiert sind durch

$$A^3 = \alpha^2 = \frac{1}{a^2}, \quad B^3 = \beta^2 = \frac{1}{b^2}, \quad C^3 = \gamma^2 = \frac{1}{c^2}, \quad \varepsilon = \alpha + \beta = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\,.$$

Für die Gesamtfläche Ω erhält man dann zunächst

$$\Omega = \frac{3\pi}{4} \frac{\varepsilon^3 + 2\gamma\varepsilon^2 + (2\gamma^2 - \alpha\beta)\,\varepsilon + \gamma(\gamma^2 - 2\alpha\beta)}{\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

und beim Zurückgehen auf a, b, c

$$6)\quad \Omega = \frac{3\pi}{4} \frac{a^3 b^3 + a^3 c^3 + b^3 c^3 + 2abc\left[a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + ab\right]}{(ab + ac + bc)^2}\,.$$

Für $a = b = c$ wird $\Omega = \frac{17\, a^2 \pi}{12}$, d. i. $\frac{17}{48}$ der umbeschriebenen, $\frac{51}{16}$ der einbeschriebenen Kugelfläche.

[1]) Schlömilch, Übungsbuch, II, 9.

wird nun einfacher

$$S = \frac{9\pi \ldots}{8\sqrt{\ldots}} \ldots \frac{N u}{(\ldots^3 + \lambda u^2)^5}\Bigg\} du .$$

Um die Integrati… ütze man die Rekursionsformel[1])

$$\int \frac{u^m}{T^n} du = - \ldots) \, C^3 \over (\ldots - 1) \lambda \int \frac{u^{m-2}}{T^n} du ,$$

worin T zur Abkürzung … hält man

$$\ldots \frac{C^3}{\ldots \lambda^2 T^{\frac{5}{2}}},$$

und damit kommt die C…

$$\ldots = \mu_0 ,$$

$$\ldots = \mu_1$$

gesetzt wird, auf die F…

$$S = \frac{3\pi C^3}{8\lambda^2 \sqrt{A^3 B \ldots}} \ldots C^2 M \left(\frac{1}{\mu_0{}^5} - \frac{1}{\mu_1{}^5}\right)\Bigg\} .$$

Soll sich die C… he 1) erstrecken, so integriere man bez. ν zwischen de… Flächenelemente mit positivem z zusammengefasst werde… sultate noch den Faktor 2. Die Rückkehr zu den urspr… erfolgt zweckmässig unter Benutzung von Hilfskonst… durch

$$A^3 = \alpha^2 = \frac{1}{a^2}, \ldots \varepsilon = \alpha + \beta = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} .$$

Für die Gesam… t

$$\Omega = \frac{3 \ldots}{\ldots} \ldots \frac{\ldots + \gamma(\gamma^2 - 2\alpha\beta)}{\ldots)^2}$$

und beim Zurückgehen …

$$6) \quad \Omega = \frac{3\pi}{4} \; \frac{a^3 b^3 + \ldots b^2 (c + a) + c^2 (a + b) + a b \,]}{\ldots c)^2} .$$

Für $a = b = \ldots$ umbeschriebenen, $\frac{51}{16}$ der einbeschriebenen Kugelfläch…

---

[1]) Schlömilch, Übungsb…