Eine Aufgabe aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.

Aufgabe:

Ein Büschel von Kreisen und ein einzelner Kreis sind gegeben; man stelle jeden Kreis des Büschels mit diesem Kreise zusammen, konstruiere je die beiden Ähnlichkeitspunkte A, J; die Potenzlinie p und den Fusspunkt Q der letzteren auf der Centrale; welche Kurven werden von A, J, Q erzeugt und von p eingehüllt?

1. Koordinatensystem.

Aus den Gleichungen zweier gegebenen Kreise K_1 und K_2 kann die Gleichung eines dritten Kreises in folgender Weise abgeleitet werden:

$$K_3 = n_1 K_1 + n_2 K_2.$$

Giebt man dem Verhältnis $n_1 : n_2$ alle realen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man eine unendliche Anzahl von Kreisen K. Eine solche Gruppe von Kreisen nennt man ein Kreisbüschel. Die Mittelpunkte aller Kreise eines Büschels liegen auf einer Graden, der Büschelcentralen. Die Kreise desselben Büschels haben eine gemeinsame Potenzlinie, die Büschelchordale.

Beide durch das Büschel bestimmte Graden stehen auf einander senkrecht und sollen hier als Koordinatenaxen genommen werden. Die Centrale sei Abscissenaxe.

Die Gleichungen der beiden das Büschel bestimmenden Kreise ergeben sich dann in folgender Form:

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 2 a_1 x + c_1 = 0,$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 2 a_2 x + c_2 = 0.$$

Die Gleichung der Büschelchordalen ist danach:

$$P \equiv K_1 - K_2 \equiv 2 (a_2 - a_1) x - (c_2 - c_1) = 0.$$

Soll diese Grade mit der Ordinatenaxe zusammenfallen, so muss:

$$x = 0 \text{ und } c_1 = c_2 \text{ sein.}$$

Das Absolutglied in den Gleichungen sämtlicher Büschelkreise ist somit das gleiche. Die Bedeutung dieser Konstanten ergiebt sich einfach.

Jeder Punkt der Chordale eines Büschels hat für alle Kreise desselben gleiche Potenz. Der hier gewählte Nullpunkt hat also auch die genannte Eigenschaft. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Kreis ist der Wert, den die Funktion K (x, y) annimmt, wenn man in dieselbe die Koordinaten des Punktes einsetzt. Der Nullpunkt hat demnach für jeden Kreis des Büschels die Potenz c.

Ist diese Potenz positiv, so liegt der Nullpunkt ausserhalb der Büschelkreise. Letztere haben dann nur imaginäre Schnittpunkte. Konstruiert man mit $\sqrt{c}$ als Radius einen Kreis um den Anfangspunkt der Koordinaten, so trifft derselbe die Büschelkreise normal. Mittelpunkte von Büschelkreisen giebt es dann nur ausserhalb desselben. Seine beiden Gegenpunkte, die auf der Centrale liegen, sind als Büschelkreise mit verschwindend kleinem Radius zu betrachten. Er heisse im folgenden einfach der Nullkreis.

Ist die Potenz negativ, so liegt der Nullpunkt innerhalb der Büschelkreise. Letztere haben zwei reale Schnittpunkte — selbstverständlich auf der Büschelchordalen. — Der Nullkreis gehört zum Büschel und ist von allen der kleinste.

Ist $c = 0$, so berühren sich alle Kreise des Büschels im Nullpunkte.

Die Gleichung des gegebenen festen Kreises sei:

$$K \equiv x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0.$$

Die Koordinaten seines Centrums sind also: m und n, sein Radius ist r.

2. Aufstellung der Gleichungen für die durch die Ähnlichkeitspunkte A und J erzeugten Kurven.

Der äussere und der innere Ähnlichkeitspunkt (A und J) zweier Kreise teilen die Strecke zwischen den Centren aussen und innen im Verhältnis der Kreisradien. Beide Punkte liegen somit bei stetiger Änderung der Centralen auf ein und derselben Kurve. Insbesondere beschreibt J denjenigen Teil derselben, der zwischen der Büschelcentralen und einer zu dieser parallel durch den Kreismittelpunkt gezogenen Graden sich befindet.

Aus den Koordinaten des Mittelpunktes P des gegebenen festen Kreises und denjenigen des Centrums P_1 im Büschelkreise K_1 sind die Koordinaten jedes Punktes der Graden PP_1 bestimmt. Ist nämlich $r : r_1$ das Verhältnis, in welchem der Centralabstand PP_1 durch den Kurvenpunkt geteilt wird, wobei ein positives Teilverhältnis den Punkten zwischen P und P_1, ein negatives den übrigen Punkten der Graden PP_1 zukommt, so hat man:

$$x = \frac{r_1\, m + r\, a_1}{r_1 + r} \quad \text{und} \quad y = \frac{r_1\, n}{r_1 + r}.$$

Die Gleichung der Centralen PP_1 ergiebt sich aus den Koordinaten (m, n) von P und denen (x, y) eines Kurvenpunktes:

$$(n - y)\,\xi - (m - x)\,\eta + (my - nx) = 0.$$

Wird hierin $\eta = 0$, so wird $\xi = a_1$ und $a_1 = \dfrac{nx - my}{n - y}$.

Weiterhin ist:

$$r_1 = \sqrt{a_1{}^2 - c} = \sqrt{\left(\frac{nx - my}{n - y}\right)^2 - c}\,.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung für y ein, so erhält man die Kurvengleichung:

$$y = \frac{n\sqrt{\left(\dfrac{nx - my}{n - y}\right)^2 - c}}{r + \sqrt{\left(\dfrac{nx - my}{n - y}\right)^2 - c}}, \text{ oder:}$$

$$(n - y)\sqrt{\left(\frac{nx - my}{n - y}\right)^2 - c} = yr, \quad \text{oder:}$$

I. $(nx - my)^2 - (n - y)^2\, c = y^2r^2$, oder:

II. $n^2x^2 - 2mnxy + (m^2 - c - r^2)\, y^2 + 2ncy - n^2c = 0.$

Da diese Gleichung für die beiden Unbekannten vom zweiten Grade ist, so ist die zu untersuchende Kurve ein Kegelschnitt.

3. Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenaxen.

a. Setzen wir, um die Durchschnittspunkte mit der X-axe zu bestimmen, $y = 0$, so liefert unsere Gleichung zur Bestimmung der Abscissen die Gleichung:

$$x^2 = c.$$

Schneiden sich die Büschelkreise in reellen Punkten, ist also c negativ, so wird der Kegelschnitt von der X-axe in zwei imaginären Punkten getroffen.

Haben die Büschelkreise keine reellen Schnittpunkte, ist c positiv, so wird die Kurve von der Abscissenaxe in zwei zum Nullpunkt symmetrisch liegenden Punkten geschnitten.

Berühren sich die Büschelkreise im Nullpunkte, ist $c = 0$, so ist der Nullpunkt Doppelpunkt des Kegelschnitts: derselbe zerfällt dann in zwei durch den Anfangspunkt gehende Graden:

$$(nx - my)^2 - y^2 r^2 \equiv [nx - (m + r) y] . [nx - (m - r) y] = 0.$$

Diese Graden sind real. Sie fallen mit der X-axe in eine Linie zusammen, wenn $n = 0$, wenn also das Centrum des gegebenen Kreises auf derselben Axe liegt. Sie liegen symmetrisch zu den Axen, wenn $m = 0$, wenn der Kreismittelpunkt auf der Y-axe liegt.

b. Um die Schnittpunkte der Kurve mit der Ordinatenaxe zu erhalten, setzen wir in der Kegelschnittsgleichung $x = 0$ und erhalten so:

$$(m^2 - c - r^2) y^2 + 2ncy - n^2c = 0.$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir für die beiden Wurzeln die Werte:

$$y = \frac{n}{m^2 - c - r^2} (- c \pm \sqrt{m^2 - r^2})$$

Beide Wurzeln sind reell, wenn $m > r$.
Sie sind reell und gleich, wenn $m = r$.
Sie werden imaginär, wenn $m < r$.

Schneidet also die Büschelchordale den gegebenen Kreis, so trifft sie den Kegelschnitt nicht; berührt sie den Kreis, so berührt sie auch den Kegelschnitt; trifft sie den Kreis nicht in reellen Punkten, so hat sie mit dem Kegelschnitt zwei reale Punkte.

4. Schnittpunkte der Kurve und des Kreises.

Die vier realen oder komplexen Schnittpunkte beider Kurven zweiten Grades sind zu je zweien auf einer realen Graden enthalten. Ein Paar realer Schnittpunkte lässt sich sofort bestimmen. Von allen möglichen Centralen fallen die beiden in eine Grade zusammen, die nach den beiden unendlich fernen Centren der Büschelkreise gezogen sind. Diese Grade, die durch die Gleichung: $y - n = 0$ bestimmt ist, wird durch die Kreisperipherie in dem Verhältnis $r : \infty$ geteilt. Da dieses Verhältnis den Anforderungen entspricht, so sind die beiden Gegenpunkte gemeinschaftliche Punkte der Kurve und des Kreises. Bringen wir die Gleichungen beider Kurven auf folgende Form:

$$K \equiv (x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0,$$

$$C \equiv \left(x - m\frac{y}{n}\right)^2 - (n-y)^2 \frac{c}{n^2} - r^2 \frac{y^2}{n^2} = 0,$$

so erkennen wir sofort die Wahrheit obiger Behauptung. Zwei reelle Wurzelpaare beider Gleichungen sind demnach:

$$x_1 = r + m \text{ und } y_1 = n,$$
$$x_2 = r - m \text{ und } y_2 = n.$$

Die beiden andern Schnittpunkte lassen sich, so lange sie reell sind, leicht konstruieren. Berühren sich zwei Kreise von aussen oder innen, so ist der Berührungspunkt innerer oder äusserer Ähnlichkeitspunkt.

Unsere fraglichen Schnittpunkte sind also gefunden, sobald es gelingt, diejenigen Büschelkreise zu ziehen, die den gegebenen Kreis berühren. Zu dem Zweck zeichne man die Chordale P_1 des gegebenen Kreises und des Büschelkreises K_1,

$$P_1 \equiv K_1 - K \equiv 2 (m - a_1) x + 2ny - m^2 - n^2 + r^2 + c = 0.$$

Durchschneide damit die Büschelchordale: $(x = 0)$, so erhält man den Chordalpunkt C und als dessen Ordinate

$$y' = \frac{m^2 + n^2 - (c + r^2)}{2n}$$

Durch diesen Schnittpunkt gehen die gemeinsamen Tangenten des gegebenen Kreises K und der ihn berührenden Büschelkreise. Legt man von C aus die beiden Tangenten an den gegebenen Kreis, so sind ihre Berührungspunkte unsere gesuchten Schnittpunkte.

Liegt C ausserhalb des gegebenen Kreises, so giebt es zwei reelle Schnittpunkte. Ist C auf K gelegen, dann erhalten wir nur einen Berührungskreis und nur einen reellen gemeinschaftlichen Punkt. Befindet sich C im Innern von K, so sind die Schnittpunkte imaginär.

Die reale Grade, auf welcher die beiden reellen oder konjugiert komplexen Schnittpunkte enthalten sind, habe die Gleichung:

$$ax + by + d = 0,$$

worin a, b und d bestimmte, sogleich zu ermittelnde Werte haben.

Die Gleichung irgend eines Kegelschnitts nun, welcher durch die vier Schnittpunkte unserer Kurve mit den beiden Graden: $y - n = 0$ und

$ax + by + d = 0$ gelegt ist, wird dann lauten:

$$n^2 x^2 - 2mn\, xy + (m^2 - c - r^2)\, y^2 + 2cny - n^2 c + (y - n)\,(ax + by + d) = 0$$

oder:

$$n^2 x^2 - (2mn - a)\, xy + (m^2 - c - r^2 + b)\, y^2 - anx + (2nc - bn + d)\, y - n^2 c - nd = 0.$$

Das Produkt der beiden linearen Ausdrücke braucht nicht noch mit einem Faktor versehen zu werden, da wir annehmen können, derselbe sei bereits in die Koeffizienten a, b, d eingegangen.

Soll die erhaltene Kurvengleichung einen Kreis vorstellen, so ergeben sich die Bedingungen:

$$n^2 = m^2 - c - r^2 + b \text{ und daraus: } b = n^2 - m^2 + c + r^2,$$

$$2mn - a = 0 \qquad \text{„} \quad \text{„} \qquad a = 2mn.$$

Setzen wir diese Werte ein, so lautet die Kreisgleichung:

$$n^2x^2 + n^2y^2 - 2mn^2x + (nc - n^3 + nm^2 - nr^2 + d)\, y - n^2c - nd = 0$$

Der durch diese Gleichung dargestellte Kreis wird mit dem gegebenen Kreis:

$$n^2x^2 + n^2y^2 - 2mn^2x - 2n^3y + n^2m^2 + n^4 - n^2r^2 = 0$$

identisch, wenn $d = n\,(r^2 - m^2 - n^2 - c)$ gesetzt wird. Die gesuchte Grade hat hiernach folgende Gleichung:

$$2mnx + (n^2 - m^2 + c + r^2)\, y + n\,(r^2 - m^2 - n^2 - c) = 0.$$

Aus ihr in Verbindung mit derjenigen des gegebenen festen Kreises ergeben sich für die Koordinaten der gesuchten Schnittpunkte der Kurve und des Kreises die Werte:

$$x_{3,4} = m\, \frac{(n^2 - m^2 + c + r^2)^2 - 4\, n^2 r^2 + 4\, n^2 m^2}{(n^2 - m^2 + c + r^2)^2 + 4\, n^2 m^2}$$

$$\pm \frac{(n^2 - m^2 + c + r^2)\, r}{\sqrt{(n^2 - m^2 + c + r^2)^2 + 4\, n^2 m^2}} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{4\, n^2 r^2}{(n^2 - m^2 + c + r^2)^2 + 4\, n^2 m^2}\right)} \text{und}$$

$$y_{3,4} = n\, \frac{4\, m^2 n^2 - (n^2 - m^2 + c + r^2)\,(r^2 - c + m^2 - n^2)}{(n^2 - m^2 + c + r^2)^2 + 4\, n^2 m^2}$$

$$\pm \frac{2mnr}{\sqrt{(n^2 - m^2 + c + r^2)^2 + 4\, n^2 m^2}} \sqrt{\ldots\ldots}$$

Beide Wurzeln sind reell, wenn der Subtrahend des Radikanden kleiner als 1 ist. Der Nenner des Subtrahenden ist aber — wie eine einfache Rechnung zeigt — gleich dem Quadrat der Entfernung des Chordalpunktes C vom Kreismittelpunkt multipliziert mit 4 n^2. Die Bedingung für Reellität der Schnittpunkte lautet demnach:

$r^2 < PC^2$, wenn P Mittelpunkt des Kreises. Wie oben erhalten wir hier wieder das Ergebnis: Die Schnittpunkte beider Kegelschnitte sind reell, wenn der Chordalpunkt C ausserhalb des gegebenen Kreises liegt.

Weil $PC^2 = m^2 + (y' - n)^2$ ist, so heisst die Bedingung:

$$r^2 < m^2 + (y' - n)^2.$$

Dieser Ungleichheit wird immer genügt, wenn $m > r$.

Setzen wir für y' den früher ermittelten Wert ein, so nimmt die Bedingung folgende Form an:

$$(m^2 + n^2 - c - r^2)^2 + 4\,n^2\,c > 0.$$

Ist c positiv, so wird dieser Ausdruck immer > 0. Wenn dagegen c negativ ist, so setze man $c = -k^2$, worin k eine absolute Zahl bedeutet, dann gestaltet sich die Ungleichheit folgendermassen:

$$m^2 + n^2 + k^2 - r^2 > \pm 2nk \quad \text{oder}$$
$$m^2 + n^2 + k^2 \mp 2nk - r^2 > 0.$$

Diese Funktion wird annulliert für $r^2 = m^2 + (k \mp n)^2$, folglich hat sie für alle Werte von r^2, die unterhalb der kleineren Wurzel und oberhalb der grösseren Wurzel liegen, das gleiche Vorzeichen.

$m^2 + (k-n)^2$ ist aber das Quadrat über der Entfernung des Kreismittelpunktes von demjenigen Schnittpunkte der Büschelkreise, welcher mit ihm auf derselben Seite der Abscissenaxe liegt, also die kleinere Wurzel; während $m^2 + (k + n)^2$ das Quadrat über der Strecke vom Kreismittelpunkte bis zu demjenigen Schnittpunkte der Büschelkreise ist, der auf der andern Seite der Abscissenaxe liegt, also die grössere Wurzel.

Für Werte von r^2, die kleiner sind als $m^2 + (k - n)^2$ ist nun obiger Ausdruck positiv, also auch für Werte von r^2, die grösser sind als $m^2 + (k + n)^2$.

Der Chordalpunkt C liegt also ausserhalb des gegebenen Kreises in folgenden Einzelfällen:

1) wenn $m > r$ ist,
2) wenn c positiv,
3) wenn der Radius des gegebenen Kreises kleiner ist als die Entfernung des Mittelpunktes vom nächstliegenden Schnittpunkte der Büschelkreise,
4) wenn derselbe grösser ist, als der Abstand des Centrums vom weiterliegenden Schnittpunkte der Büschelkreise.

Daraus folgt: der dritte und der vierte Schnittpunkt des Kegelschnittes mit dem Kreise sind reell, wenn der gegebene feste Kreis die Büschelchordale nicht schneidet, ferner wenn die Kreise des Büschels keine realen Schnittpunkte haben und endlich wenn der gegebene Kreis die Büschelchordale ausserhalb des zum Büschel gehörigen Nullkreises trifft.

Die Schnittpunkte sind reell und fallen zusammen, wenn der gegebene Kreis durch einen der realen Schnittpunkte des Büschels geht.

Die Schnittpunkte sind imaginär, wenn der gegebene Kreis die Büschelchordale innerhalb des Büschelnullkreises schneidet.

5. Untersuchung über die Natur des gefundenen Kegelschnitts.

Ist: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ irgend ein Kegelschnitt, so hängt die Natur desselben von der Grösse des Ausdrucks:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{12}$$

ab. Je nachdem nämlich dieser Ausdruck negativ, Null oder positiv ist, erscheint jener Kegelschnitt als Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Die characteristische Formel lautet für unsern Kegelschnitt:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = n^2\,(c + r^2).$$

Auf das Vorzeichen dieses Ausdruckes ist der Faktor n^2 ohne Einfluss.

1. $c + r^2$ wird nur unter der Bedingung negativ, dass c negativ und grösser als r^2 ist.
   Schneiden sich die Büschelkreise in reellen Punkten und ist der Radius des Nullkreises grösser als derjenige des gegebenen Kreises, so beschreiben der äussere und innere Ähnlichkeitspunkt eine Ellipse.
2. $n^2(c + r^2)$ wird Null, wenn $n = 0$, oder c negativ und gleich r^2 ist.
   a) Ist $n = 0$, so reduciert sich die Gleichung des Kegelschnitts auf folgende Form:
   $$(m^2 - c - r^2)y^2 = 0; \text{ also auch } y^2 = 0.$$
   Die Kurve zerfällt dann in zwei mit der Abscissenaxe zusammenfallende Graden.
   Liegt also der Mittelpunkt des gegebenen Kreises auf der Büschelcentralen, so liegen — wie nicht anders zu erwarten war — die Ähnlichkeitspunkte auch auf ihr.
   b) Ist c negativ und gleich r^2, so folgt:
   Haben die Büschelkreise reale Durchschnittspunkte, und ist der Radius des gegebenen Kreises gleich dem Radius des Nullkreises, der zum Büschel gehört, so beschreiben die beiden Ähnlichkeitspunkte eine Parabel.
3. Der Ausdruck $c + r^2$ wird positiv, wenn c gleich Null, oder c positiv, oder wenn c negativ und kleiner als r^2 ist.
   a) Ist $c = 0$, so berühren sich alle Kreise im Nullpunkte. Der Kegelschnitt besteht dann, wie schon No. 3 gezeigt, aus zwei sich schneidenden Graden.
   b) Ist c positiv, sind also die Schnittpunkte der Büschelkreise imaginär, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.
   c) Ist endlich c negativ und kleiner als r^2, so folgt: Treffen sich die Büschelkreise in reellen Punkten, und ist der Radius des Büschelnullkreises kleiner als der des gegebenen Kreises, so erscheint der Kegelschnitt als ein Hyperbel.

Zu denselben Ergebnissen gelangt man auch ohne Berücksichtigung der Kurvengleichung durch folgende Betrachtung:

Auf jeder Centralen liegen nur zwei Punkte der Kurve, also kann diese nur ein Kegelschnitt sein.

Die Kurvenpunkte teilen die Centralabstände innen und aussen nach dem Verhältnisse der Kreisradien. Der Quotient $r : r_1$ ist aber veränderlich. Für jeden Wert desselben kann zwar der innere Ähnlichkeitspunkt angegeben werden, nicht aber der äussere. Dieser liegt unendlich fern, sobald das Verhältnis $r : r_1$ den Wert eins annimmt, wenn also $r = r_1$ wird.

1. Schneiden sich die Büschelkreise in reellen Punkten, so ist der Halbmesser des Nullkreises die untere Grenze der Werte, die r_1 annehmen kann.
   Ist nun von vornherein der Radius des Nullkreises grösser als der des gegebenen Kreises, so ist der Bruch $r : r_1$ immer ein echter. Der äussere Ähnlichkeitspunkt kann jetzt niemals unendlich fern liegend werden: Der Kegelschnitt hat nur endliche Punkte, ist also eine Ellipse.
   Ist aber der Radius des Nullkreises kleiner als der des gegebenen Kreises, so giebt es zwei zum Nullpunkte symmetrisch liegende Büschelkreise, die dem gegebenen an Grösse gleich sind. Es sind somit zwei Richtungen vorhanden, auf denen unendlich ferne Punkte des Kegelschnittes liegen, derselbe ist also eine Hyperbel. — Da die beiden Centralen nach den Mittelpunkten der angegebenen Büschelkreise die Hyperbel in einem endlichen und in einem unendlich entfernten Punkte treffen, so sind sie den Asymtoten parallel.
   Ist endlich der Halbmesser des Nullkreises gleich dem des gegebenen Kreises, so kann nur für ihn der Quotient $r : r_1$ gleich der Einheit werden: Es giebt dann auch nur auf einer Richtung unendlich entfernte Punkte des Kegelschnittes, dieser ist somit eine Parabel. — Die Centrale durch den Nullpunkt ist der Parabelaxe parallel.

2. Schneiden sich die Büschelkreise im Nullpunkte, so wird für diesen $r : r_1 = r : 0$; innerer und äusserer Ähnlichkeitspunkt fallen in ihn zusammen; er selbst ist Doppelpunkt der Kurve; diese zerfällt in zwei sich schneidende Graden. Die Büschelkreise um die Punkte $a_1 = \pm r$ haben den Halbmesser r; auf den durch sie bestimmten Centralen liegen je ein endlicher und ein unendlich entfernter Schnittpunkt. Diese Centralen sind also den gefundenen Graden parallel.
3. Haben die Büschelkreise keine realen Schnittpunkte, so kann r_1 von 0 bis ∞ wachsen. Es sind demnach wieder zwei Büschelkreise vorhanden, deren Radien denen des gegebenen Kreises gleich sind. Dadurch ist der Kegelschnitt als Hyperbel bestimmt. Für die beiden kleinsten Büschelkreise, deren Radien gleich Null sind, fallen A und J zusammen, also berühren die durch die Punkte $x = \pm \sqrt{c}$ gezogenen Centralen die Hyperbel. Die beiden Büschelkreise, deren Mittelpunktsabscissen $a_1 = \pm \sqrt{r^2 + c}$, sind gleich dem gegebenen Kreise. Die durch sie bestimmten Centralen sind den Asymptoten der Hyperbel parallel.

Obige Betrachtung giebt noch Anlass zu folgender Bemerkung: Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises und der auf der Büschelcentrale liegende Mittelpunkt des Büschelkreises sind mit den beiden Ähnlichkeitspunkten harmonisch gelegen. Die Büschelcentrale ist folglich Polare des gegebenen Kreismittelpunktes in Bezug auf den gefundenen Kegelschnitt.

6. Das Centrum des Kegelschnittes.

Die Koordinaten des Mittelpunktes einer Kurve zweiter Ordnung sind bekanntlich dargestellt durch die beiden Ausdrücke:

$$\xi = \frac{a_{22}\, a_{13} - a_{12} a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}, \quad \eta = \frac{a_{11}\, a_{23} - a_{12}\, a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22}}.$$

Nach Einsetzung der betreffenden Werte erhalten wir hier:

$$\xi = \frac{m\, c}{c + r^2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{n\, c}{c + r^2}$$

Das Centrum der Kurve ist unendlich fern, wenn $c + r^2 = 0$, m und n aber $\gtrless 0$ sind. In diesem Falle ist, wie schon oben gefunden, der Kegelschnitt eine Parabel. Dividiert man die Mittelpunktskoordinaten durch einander, so erhält man $\frac{\xi}{\eta} = \frac{m}{n}$, folglich sind der Nullpunkt der Mittelpunkt des gegebenen Kreises und das Centrum des Kegelschnittes auf derselben Graden enthalten. Liegt also der Mittelpunkt des gegebenen Kreises auf der Büschel-chordale oder -centrale, so liegt auch der Mittelpunkt der Kurve auf diesen Linien.

Das Centrum fällt in den Nullpunkt des Koordinatensystems, wenn $c = 0$, wenn also die Kurve in zwei Graden entartet.

Der Mittelpunkt der Kurve befindet sich im Centrum des gegebenen Kreises, wenn $r^2 = 0$. Der gegebene Kreis ist dann nur noch ein Punkt. Von Ähnlichkeitspunkten kann dann nicht mehr die Rede sein. Unsere Gleichung zerfällt dann in die beiden linearen Produkte:

$$(nx - my)^2 - (n - y)^2\, c \equiv [\,nx - (m + \sqrt{c}\,)\, y + n \sqrt{c}\,] \cdot$$
$$[nx - (m - \sqrt{c}\,)\, y - n \sqrt{c}\,] = 0.$$

Die dadurch definierten Graden sind real oder konjugiert komplex, je nachdem c positiv oder negativ ist; je nachdem sich die Büschelkreise in imaginären oder in reellen Punkten schneiden. Ihr Schnittpunkt ist der Punkt (m, n), also in jedem Falle real. In ihm sind bei negativem c alle äusseren und inneren Teilpunkte vereint. Die Abscissenaxe wird von ihnen, so lange sie selbst nicht komplex sind, in den beiden Gegenpunkten des Nullkreises getroffen. Diese sind aber als Büschelkreise mit unendlich kleinem Halbmesser zu betrachten. Obige Graden verbinden sie mit dem Punkte (m, n) und sind somit die innersten Centralen. Weil für sie das Verhältnis $r : r_1$ den unbestimmten Wert $0 : 0$ annimmt, so kann auf ihnen kein bestimmter Teilpunkt angegeben werden.

7. Umwandlung der Parabelgleichung in die Scheitelgleichung.

Unter der Voraussetzung: $c + r^2 = 0$, also c negativ, ist die Kurve der Ähnlichkeitspunkte eine Parabel und hat folgende Gleichung:

$$(nx - my)^2 + 2ncy - n^2c = 0.$$

Drehen wir das Koordinatensystem um den Nullpunkt, so dass der Klammerinhalt $nx - my$ durch ein Vielfaches einer Koordinate allein ersetzt wird, z. B. durch ein Multiplum von y'. Ist die Grösse der Drehung ausgedrückt durch den Winkel w, so gelten vorerst folgende Formeln:

$$x = \cos wx' - \sin wy' \text{ und } y = \sin wx' + \cos wy'.$$

Dann wird:

$$(nx - my) = (n \cos w - m \sin w)\, x' - (n \sin w + m \cos w)\, y'.$$

Dies wird ein Vielfaches von y', wenn der Koeffizient von x' verschwindet, wenn also: $n \cos w - m \sin w = 0$ ist; daraus folgt:

$$\sin w = \frac{n}{m} \cos w.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung $\cos^2 w + \sin^2 w = 1$ ein, so erhält man:

$$\cos w = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \text{ und } \sin w = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Da uns ein Winkel w genügt, so können wir den positiven Wert der Quadratwurzel annehmen. Der Klammerinhalt nimmt dann die Form an:

$$(nx - my) = -\sqrt{m^2 + n^2}\,.\, y'$$

und die Parabelgleichung lautet nun:

$$(m^2 + n^2)\, y'^2 + \frac{2n^2c}{\sqrt{m^2 + n^2}}\, x' + \frac{2mnc}{\sqrt{m^2 + n^2}}\, y' - n^2c = 0,$$

$$\text{oder: } y'^2 + \frac{2n^2c}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}\, x' + \frac{2mnc}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}\, y' - \frac{n^2c}{m^2 + n^2} = 0,$$

$$\text{oder: } \left(y' + \frac{mnc}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}\right)^2 + \frac{2n^2c}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}} \left(x' - \frac{m^2c + (m^2 + n^2)^2}{2\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}\right) = 0.$$

Verschiebt man den Anfangspunkt in den Punkt ξ, η, für welchen:

$$y' = \eta - \frac{mnc}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}} \text{ und } x' = \xi + \frac{m^2c + (m^2 + n^2)^2}{2\sqrt{(m^2 + n^2)^3}} \text{ sind,}$$

so erhält die Scheitelgleichung der Parabel folgende Gestalt:

$$\eta^2 + \frac{2n^2c}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}\, \xi = 0.$$

Die Koordinaten des Parabelscheitels im x' y' System sind:

$$x' = \frac{m^2c + (m^2 + n^2)^2}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}\,, \quad y' = -\frac{mnc}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}\,,$$

eingesetzt in die Transformationsformeln:

$$x = \frac{mx' - ny'}{\sqrt{m^2 + n^2}} \text{ und } y = \frac{nx' + my'}{\sqrt{m^2 + n^2}}\,,$$

liefert die Koordinaten des Scheitels im ursprünglichen System:

$$x = \frac{m}{2} + \frac{mc\,(m^2 + 2n^2)}{2\,(m^2 + n^2)^2} \text{ und } y = \frac{n}{2} - \frac{m^2nc}{2\,(m^2 + n^2)^2}.$$

Der Scheitel der Parabel kann niemals in den Koordinatenanfangspunkt des ursprünglichen Systems noch in den Kreismittelpunkt fallen, es müsste denn $m = n = 0$ werden, dann aber ist unsere Kurve keine Parabel mehr.

Die Koordinaten des Brennpunktes sind im ξ, η System: $\eta = 0$, $\xi = -\dfrac{n^2c}{2\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}$,

also im x' y' System:

$$x' = \frac{c\,(m^2 - n^2) + (m^2 + n^2)^2}{2\sqrt{(m^2 + n^2)^3}},\ y' = -\frac{mnc}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}},$$

folglich im ursprünglichen System:

$$x = \frac{m}{2}\left(\frac{m^2 + n^2 + c}{m^2 + n^2}\right) \text{ und } y = \frac{n}{2}\left(\frac{m^2 + n^2 - c}{m^2 + n^2}\right).$$

Die Axe der Parabel bildet mit der Büschelcentralen den Winkel w, für welchen $\operatorname{tang} w = \dfrac{\sin w}{\cos w} = \dfrac{n}{m}$ ist; somit haben wir den Beweis für die No. 5 aufgestellte Behauptung: Die Centrale durch den Nullpunkt ist parallel der Parabelaxe.

Aus ihrem Richtungskoeffizienten und den Koordinaten des Brennpunktes erhält man nach einigen Umformungen als Gleichung der Parabelaxe:

$$nx - my - \frac{mnc}{m^2 + n^2} = 0.$$

Ist im besonderen Falle $m = 0$, liegt das Centrum des gegebenen Kreises auf der y-axe, so wird die Büschelchordale Symmetrieaxe der Parabel. Die Gleichung der Kurve ist alsdann:

$$x^2 + 2\frac{c}{n}\left(y - \frac{n}{2}\right) = 0.$$

Die Koordinaten des Scheitels sind jetzt: $x = 0$ und $y = \dfrac{n}{2}$; diejenigen des Brennpunktes: $x = 0$ und $y = \dfrac{n^2 - c}{2n}$, wird dann noch $c = -n^2$, ist also der gegebene Kreis um einen der reellen Schnittpunkte der Büschelkreise beschrieben, so fällt der Brennpunkt der Parabel in den Kreismittelpunkt und die Büschelcentrale wird Direktrix der Parabel.

Als Gleichung der Centralen durch den Parabelscheitel erhält man:

$$\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\cdot\frac{m^2c}{(m^2 + n^2)^2}\right)x - \left(\frac{m}{2} - \frac{m}{2}\cdot\frac{m^2c + 2n^2c}{(m^2 + n^2)^2}\right)y + \frac{mnc}{m^2 + n^2} = 0.$$

Diese Grade schneidet die Abscissenaxe im Punkte $x = -\dfrac{2mc\,(m^2 + n^2)}{m^2c + m^2 + n^2}$.

Der Büschelkreis um diesen Punkt bestimmt also mit dem gegebenen Kreise den Scheitel der Parabel.

8. Transformation der Ellipsen- und Hyperbelgleichung auf die Mittelpunktsgleichung.

Legen wir durch das Centrum der Kurve ein neues dem ursprünglichen paralleles Koordinatensystem, so hängen die neuen Koordinaten x' und y' mit den alten durch die Gleichungen zusammen:

$$x = x' + \frac{mc}{c + r^2} \text{ und } y = y' + \frac{nc}{c + r^2}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so bekommen wir die neue Gleichung:

$$n^2x'^2 + \frac{2n^2mc\,x'}{c+r^2} + \frac{n^2m^2c^2}{(c+r^2)^2} - 2mnx'y' - \frac{2n^2mc\,x'}{c+r^2} - \frac{2m^2nc\,y'}{(c+r^2)^2} +$$

$$+ (m^2-c-r^2)\,y'^2 + \frac{2m^2nc\,y'}{c+r^2} - \frac{2nc^2y'}{c+r^2} - \frac{2ncr^2y'}{c+r^2} + \frac{m^2n^2c^2}{(c+r^2)^2} -$$

$$- \frac{n^2c^3}{(c+r^2)^2} - \frac{n^2c^2r^2}{(c+r^2)^2} + 2ncy' + \frac{2n^2c^2}{c+r^2} - n^2c = 0.$$

Die Glieder mit x' und y' heben sich, wie das ja notwendig ist, und man erhält nach Vereinigung der Absolutglieder dann die Gleichung:

$$n^2x'^2 - 2mn\,x'y' + (m^2-c-r^2)\,y'^2 - \frac{n^2r^2c}{c+r^2} = 0.$$

Suchen wir durch Drehung des Koordinatensystems um den neuen Anfangspunkt eine weitere Vereinfachung, so dass der Koeffizient von x'y' verschwindet, und somit die Koordinatenaxen zu Symmetrieaxen werden. Bezeichnen wir die Koordinaten des neuen Systems durch ξ, η, so ist: $x' = \cos w\,\xi - \sin w\,\eta$, $y' = \sin w\,\xi + \cos w\,\eta$.

Nach dem Einsetzen dieser Werte erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$M\,\xi^2 + 2\,N\,\xi\eta + K\eta^2 + L = 0$, wenn
$M = n^2\cos^2 w - 2mn\,.\cos w\,.\sin w + (m^2-c-r^2)\sin^2 w,$
$N = -\,n^2\cos w\,.\sin w - mn\,(\cos^2 w - \sin^2 w) + (m^2 - c - r^2)\cos w\,.\sin w,$
$K = n^2\sin^2 w + 2mn\,\cos w\,.\sin w + (m^2 - c - r^2)\cos^2 w$ und
$L = -\dfrac{n^2r^2c}{c+r^2}$ ist.

Setzt man, damit das Glied mit $\xi\eta$ verschwinde, $N = 0$ und $\sin w\,.\cos w = \frac{1}{2}\sin 2w$ und $\cos^2 w - \sin^2 w = \cos 2w$, so folgt daraus:

$$\operatorname{tang} 2w = \frac{2mn}{m^2 - n^2 - c - r^2}.$$

Durch Addition und Subtraktion der ersten und dritten Bedingung ergiebt sich:

$$M + K = n^2 + m^2 - c - r^2,$$

und nach einigen Umformungen:

$$M - K = \sqrt{(n^2 + m^2 - c - r^2)^2 + 4n^2(c + r^2)}.$$

Daraus erhält man die Koeffizienten:

$$M = \frac{1}{2}\left(n^2 + m^2 - c - r^2 + \sqrt{(n^2 + m^2 - c - r^2)^2 + 4n^2(c + r^2)}\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\left(n^2 + m^2 - c - r^2 - \sqrt{(n^2 + m^2 - c - r^2)^2 + 4n^2(c + r^2)}\right).$$

Die Gleichung des Kegelschnitts können wir nun schreiben:

$$-\frac{M}{L}\,\xi^2 - \frac{K}{L}\,\eta^2 - 1 = 0.$$

a) $c + r^2 < 0$.

Auf Grund dieser Voraussetzung ist c negativ und sein absoluter Wert grösser als r^2, ferner ist L negativ, aber M und K sind beide, weil $4n^2(c + r^2)$ negativ und die positiv genommene Wurzel kleiner ist als: $(n^2 + m^2 - c - r^2)$, positiv.

Substituiert man deshalb: $-\frac{M}{L} = \frac{1}{\alpha^2}$ und $-\frac{K}{L} = \frac{1}{\beta^2}$, so erhält man als die Mittelpunktsgleichung der Ellipse: $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$.

Die eine Halbaxe hat die Länge $\alpha = \sqrt{\left(-\frac{L}{M}\right)}$ und bildet mit der Büschelcentralen einen Winkel w, für welchen

$$\tan 2w = \frac{2mn}{m^2 - n^2 - c - r^2}.$$

Die andere Halbaxe hat die Länge $\beta = \sqrt{\left(-\frac{L}{K}\right)}$.

Die Axen werden einander gleich und die Ellipse wird zu einem Kreise, wenn $M = K$, oder wenn $(n^2 + m^2 - c - r^2)^2 + 4n^2(c + r^2) = 0$.

Daraus folgt: $c + r^2 = -(n + mi)^2$.

Für reelle c und r kann diese Gleichung nur dann bestehen, wenn ihr imaginärer Teil verschwindet, wenn $m = 0$ ist. Soll demnach die Ellipse zum Kreise werden, so muss der Mittelpunkt des gegebenen Kreises und somit auch derjenige der Ellipse (No. 6) auf die Ordinatenaxe des ursprünglichen Systems zu liegen kommen. Dann nimmt obige Bedingungsgleichung die Form an: $c + r^2 = -n^2$ oder $r^2 + n^2 = -c$. Das heisst: Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises liegt innerhalb des zum Büschel gehörigen Nullkreises und die gemeinschaftliche Sehne beider ist ein Durchmesser des gegebenen Kreises.

Die Kurvengleichung lautet jetzt: $x^2 + y^2 + 2\frac{c}{n}y - c = 0$.

Der Kegelschnitt ist unter diesen Voraussetzungen ein Kreis, dessen Centrum die Koordinaten $\xi = 0$, $\eta = -\frac{c}{n}$ und dessen Radius die Länge $\varrho = \frac{r}{n}\sqrt{-c}$ hat.

b) $c + r^2 > 0$,

und zwar 1) c negativ und seinem absolen Werte nach $< r^2$.

Unter diesen Bedingungen wird: L positiv, M positiv und K negativ. Deshalb setze man hier: $-\frac{M}{L} = -\frac{1}{\alpha^2}$ und $-\frac{K}{L} = \frac{1}{\beta^2}$, so erhält man als Mittelpunktsgleichung der Hyperbel:

$$-\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0.$$

Die Halbaxen haben die Länge $\alpha = \sqrt{\frac{L}{M}}$ und $\beta = \sqrt{-\frac{L}{K}}$.

Ist dagegen 2) c positiv, so wird L negativ, M positiv und K negativ, darum brauche man hier die Substitution: $-\frac{M}{L} = \frac{1}{\alpha^2}$ und $-\frac{K}{L} = -\frac{1}{\beta^2}$, dann lautet die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel: $\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$.

Im erstern Falle liegt die Hauptaxe der Hyperbel auf der Ordinaten —, im andern auf der Abscissenaxe.

9. Asymptoten der Hyperbel.

Ziehen wir durch den Nullpunkt Parallelen $y = tx$ zu den Asymptoten der Kurve, so treffen dieselben die Hyperbel in einem unendlich fernen Punkte. Wir erhalten daher die zugehörigen Werte des Richtungskoeffizienten t, wenn wir in der Kurvengleichung y durch tx ersetzen, die neue Gleichung durch x^2 dividieren und zur Grenze für ein unendlich grosses x übergehen. Auf diese Weise ergiebt sich somit:

$$t^2 - \frac{2mn}{m^2 - c - r^2}\, t + \frac{n^2}{m^2 - c - r^2} = 0 \quad \text{und daraus:} \quad t = \frac{n}{m \mp \sqrt{c + r^2}}.$$

Die beiden Asymptoten bilden also mit der Abscissenaxe je einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente je einem dieser Ausdrücke gleich ist.

Verbindet man den Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit den Mittelpunkten derjenigen beiden Büschelkreise, die dem gegebenen an Grösse gleich sind, deren Mittelpunktskoordinaten also: $x = \pm \sqrt{c + r^2}$ und $y = 0$ sind, so heisst die Gleichung dieser beiden Centralen: $nx - (m \mp \sqrt{c + r^2})\, y \mp n \sqrt{c + r^2} = 0.$

Der Richtungskoeffizient dieser beiden Graden ist demnach: $\frac{n}{m \mp \sqrt{c + r^2}}$.

Die Asymptoten der Hyperbel sind also diesen Centralen parallel, wie schon oben No. 5 behauptet worden. Die Gleichungen der Asymptoten ergeben sich folgendermassen.

Unter der Bedingung $a_{12} - a_{11}\, a_{22} > 0$ ist die Zerlegung der allgemeinen Kegelschnittsgleichung in das Produkt zweier linearen Ausdrücke vermehrt um eine Konstante immer möglich. Die linearen Faktoren sind gleich Null gesetzt je die Gleichung einer Asymptote, während durch das Vorzeichen der Konstanten bestimmt ist, in welchen der durch die Asymptoten entstandenen vier Felder die Hyperbeläste zu liegen kommen. Führen wir an unserer Gleichung die Zerlegung aus, so wird: $nx^2 - 2mnxy + (m^2 - c - r^2)\, y^2 + 2ncy - n^2c \equiv$

$$\left[x - \frac{\sqrt{c + r^2} + m}{n}\, y + \frac{c}{\sqrt{c + r^2}}\right] \cdot \left[x + \frac{\sqrt{c + r^2} - m}{n}\, y - \frac{c}{\sqrt{c + r^2}}\right] - \frac{cr^2}{c + r^2} = 0.$$

Die Gleichungen der beiden Asymptoten lauten demnach:

$$x - \frac{\sqrt{c + r^2} + m}{n}\, y + \frac{c}{\sqrt{c + r^2}} = 0 \quad \text{und} \quad x + \frac{\sqrt{c + r^2} - m}{n}\, y - \frac{c}{\sqrt{c + r^2}} = 0.$$

Die Bedingung für normale Lage dieser beiden Graden heisst:

$$1 - \frac{(\sqrt{c + r^2} + m)\,(\sqrt{c + r^2} - m)}{n^2} = 0, \text{ oder } c + r^2 = m^2 + n^2.$$

Für ein positives c tritt letzteres ein, sobald der gegebene Kreis den Nullkreis orthogonal schneidet. In diesem Falle stehen die Asymptoten auf einander senkrecht und unsere Hyperbel ist gleichseitig. Sie ist dargestellt durch die Gleichung: $x^2 - 2\frac{m}{n}xy - y^2 + 2\frac{c}{n}y - c = 0.$

Wenn aber die Büschelkreise sich in reellen Punkten schneiden, c somit negativ ist, so wird genannter Bedingungsgleichung nur dann genügt, wenn der gegebene Kreis den Büschelnullkreis in der Weise schneidet, dass die gemeinschaftliche Sehne ein Durchmesser des Nullkreises ist. Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel bleibt die obige.

10. Zusammenstellung der gewonnenen Resultate.

Der innere und äussere Ähnlichkeitspunkt können folgende Kurven erzeugen:

1. Liegt der Mittelpunkt des gegebenen Kreises auf der Büschelcentrale, so befinden sich auch alle Ähnlichkeitspunkte auf dieser Graden.
2. Schneiden sich die Büschelkreise in realen Punkten und ist
   a) der Radius des Büschelnullkreises grösser als derjenige des gegebenen Kreises, so ist die Kurve der Ähnlichkeitspunkte eine Ellipse; diese wird zu einem Kreise, wenn das Centrum des gegebenen Kreises auf der Büschelchordalen innerhalb des Nullkreises

sich befindet und die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise ein Durchmesser des gegebenen ist;

b) der Radius des Büschelnullkreises kleiner als der des gegebenen, dann beschreiben die fraglichen Punkte eine Hyperbel; diese wird gleichseitig, wenn der feste Kreis den Nullkreis so schneidet, dass die gemeinschaftliche Sehne beider ein Durchmesser des Nullkreises ist; sie zerfällt in zwei im Nullpunkte sich schneidende Graden, wenn der Radius des Nullkreises verschwindend klein ist, d. h. wenn die Büschelkreise sich im Nullpunkte treffen;

c) der Radius des Nullkreises gleich demjenigen des gegebenen ist, dann liegen die Ähnlichkeitspunkte auf einer Parabel.

3. Haben die Büschelkreise nur imaginäre Schnittpunkte, so erzeugen die Ähnlichkeitspunkte eine Hyperbel; diese wird gleichseitig, wenn Nullkreis und gegebener Kreis sich normal schneiden.

11. Welche Kurve wird von den Potenzlinien p eingehüllt?

Konstruiert man die Potenzlinien p_1 und p_i des gegebenen Kreises K mit den Büschelkreisen K_1 und K_i, so schneiden sich die Graden p_1 (Potenzlinie von K und K_1) und p (Chordale von K_1 und K_i) und p_i (Potenzlinie von K_i und K) in einem Punkte; p_i trifft also p in dem Punkte, in welchem p von p_1 geschnitten wird; dieser Punkt bleibt unverändert derselbe, wenn man für K_i der Reihe nach alle Kreise des Büschels setzt. Wir haben daher: „Die Chordalen, welche ein beliebiger fester Kreis mit allen den einzelnen Kreisen eines Kreisbüschels bestimmt, treffen die Büschelchordale in demselben Punkte.“ *)

Die Potenzlinien p bilden ein Strahlenbüschel, dessen Träger auf der Büschelpotenzlinie liegt.

Der analytische Beweis des aufgestellten Satzes gestaltet sich etwa so:

Wenn $K_i \equiv n_{1i} K_1 + n_{2i} K_2 = 0$, dann wird $p_i \equiv K_i - K \equiv n_{1i} K_1 + n_{2i} K_2 - K = 0$.

Die Verhältniszahlen n_{1i} und n_{2i} können immer in der Weise gewählt werden, dass ihre Summe gleich 1, oder dass $n_{1i} = 1 - n_{2i}$ ist.

Setzt man diesen Wert in die letzte Gleichung ein: $p_i \equiv K_1 - K - n_{2i}(K_1 - K_2) = 0$.

Weil ferner $K_1 - K_2 \equiv p = 0$ die Gleichung der Büschelpotenzlinie und $K_1 - K \equiv p_1 = 0$ die Gleichung der Potenzlinie von K und K_1 ist, so hat man: $p_i \equiv p_1 - n_{2i}\, p = 0$ und erkennt daraus, dass p_i durch den Schnittpunkt p und p_1 geht. **)

Von diesem hiermit bewiesenen Satze wurde schon in No. 4 Anwendung gemacht; ebendaselbst wurde die Ordinate des Büschelträgers — des Chordalpunktes — angegeben und die Bedingungen ermittelt, unter welchen dieser Punkt ausserhalb — auf oder innerhalb der Peripherie des gegebenen Kreises liegt. Aus dem Werte für seine Ordinate:

$$y = \frac{m^2 + n^2 - (c + r^2)}{2n}$$

lassen sich noch folgende besondere Lagen erkennen.

1. Ist $n = 0$, so wird $y = \infty$, das heisst: die Potenzlinien aller Kreise um die Punkte einer Graden, sind einander parallel.
2. $y = 0$, wenn $m^2 + n^2 = c + r^2$ wird. Wenn folglich (No. 9) bei positivem c der gegebene Kreis den Nullkreis normal schneidet, bei negativem c dagegen beide Kreise sich in der Weise treffen, dass die gemeinschaftliche Sehne ein Durchmesser des Nullkreises ist, dann erscheint der Schnittpunkt der Büschel-chordalen und -centralen als Träger des Strahlenbüschels.
3. Wenn $m = 0$ und $c + r^2 = -n^2$ werden sollte, dann hat für y folgende Gleichung statt: $y = n$.

*) Handbuch der Mathematik von Schlömilch. §. 8. No. 23.

**) Schlömilch. a. a. O.

In No. 8 ist ermittelt worden, dass dieser Fall bei negativem c nur dann eintritt, wenn der Mittelpunkt des gegebenen Kreises innerhalb des Nullkreises liegt und die gemeinschaftliche Sehne ein Durchmesser des gegebenen Kreises wird. Unter dieser Bedingung fällt also der Büschelträger in das Centrum des gegebenen Kreises.

12. Welche Kurve enthält die Fusspunkte Q der Potenzlinien p auf den Centralen?

Alle Potenzlinien, die in Frage kommen, gehen durch den Chordalpunkt c auf der Büschelchordalen.

Alle Centralen gehen durch den Mittelpunkt P des gegebenen Kreises.

Jedes Paar zusammengehöriger Potenzlinie und Centrale schneidet sich unter rechtem Winkel im Fusspunkte Q. Die Scheitel Q liegen somit alle auf einem Kreise, der über der Verbindungslinie des Mittelpunktes im gegebenen Kreise und des Chordalpunktes als Durchmesser beschrieben ist.

Die Gleichung dieses Kreises lässt sich folgendermassen entwickeln:

Potenzlinie $p_i \equiv K - K_i \equiv 2\,(a_i - m)\,x - 2ny + k - c = 0,$

Centrale: $(K, K_i) : nx + (a_2 - m)\,y - na_i = 0.$

Eliminiert man aus beiden a_i, so folgt:

$$\frac{2mx + 2ny - k + c}{2x} = \frac{my - nx}{y - n} \quad \text{oder:} \quad x^2 + y^2 - mx - \left(n + \frac{k - c}{2n}\right) y + \frac{k - c}{2} = 0.$$

Offenbar genügen ihr die Wertepaare: $x = m,\ y = n$ und: $x = 0,\ y = \dfrac{m^2 + n^2 - (c + r^2)}{2n}$.

Als Koordinaten seines Centrums ergeben sich sofort die Werte:

$$\xi = \frac{m}{2} \text{ und } \eta = \left(n + \frac{m^2 + n^2 - (c + r^2)}{2n}\right) : 2.$$

Die Linie PC ist also wirklich ein Durchmesser des gefundenen Kreises.

Für $x = 0$, nimmt y noch den zweiten Wert $y = n$ an. Die zu diesem Fusspunkte zugehörige Centrale wird der Büschelcentralen parallel, schneidet sie somit unendlich fern. Der um diesen Schnittpunkt mit unendlich grossem Radius beschriebene Büschelkreis ist die Büschelchordale selbst. Peripherie und Potenzlinie fallen für ihn in eine Grade zusammen.

Bezeichnet man die Entfernung des Kreismittelpunktes (m, n) vom Chordalpunkte (0, y') mit 2ϱ, so folgt sofort: $4\varrho^2 = m^2 + (n - y')^2$ oder $\varrho = \dfrac{1}{2}\sqrt{m^2 + (n - y')^2}$.

Der Radikand ist für reelle m und n immer positiv, der Radius des gefundenen Kreises kann niemals imaginär werden d. h. der Kreis der Fusspunkte ist immer reell.

ϱ wird Null und der gefundene Kreis zieht sich in einen Punkt zusammen, wenn $m = (n - y') = 0$ werden sollte, oder wenn P und C sich decken. Unter welchen Umständen sich diese Bedingungen erfüllen, ist schon in voriger No. festgestellt worden.

$\varrho = \infty$ und der Kreis der Fusspunkte ist gleichfalls unendlich gross, sobald $n = 0$, weil ja dann sämtliche Potenzlinien parallel werden und der Chordalpunkt in die unendliche Ferne rückt.