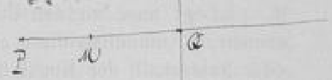
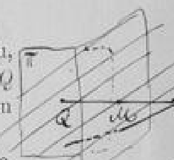
Über
das sphärische Polarsystem und seine Anwendung auf das Tetraeder.

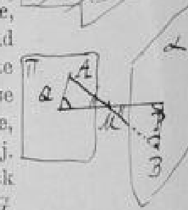
Von
Dr. Theodor Meyer.



Im Raume nehmen wir einen festen Punkt M an und ordnen jedem Punkte P diejenige Ebene π zu, welche normal zu der Geraden $\overline{PM}$ ist und diese in einem Punkte Q so schneidet, dass das Produkt $PM \cdot MQ$ einen konstanten, positiven oder negativen Wert hat. Dann lässt sich zeigen, dass durch diese Zuordnung von Punkten und Ebenen ein räumliches Polarsystem von besonderer Art bestimmt ist.*)



Legen wir nämlich durch den Punkt P eine Ebene α und fällen auf dieselbe von M aus die Normale, welche π in A und die Ebene α selbst in B schneidet, dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AMQ und PMB, das $AM \cdot MB = PM \cdot MQ$ ist, dass also die durch P gehende Ebene α dem auf π liegenden Punkte A entspricht. Ist ferner g eine beliebige Gerade durch P, und schneidet die Normalebene aus M zu g diese Gerade in einem Punkte F und die Ebene π in einer Geraden g', deren Schnittpunkt mit $\overline{MF}$ F' heissen möge, so sehen wir, dass jedem Punkte G von g die zu $\overline{GM}$ normale Ebene γ von g' entspricht, und dass $g\,(G)$ proj. $g'\,(\gamma)$ ist. Nennen wir noch G' den Punkt von g, durch welchen die Ebene γ geht, dann ist in dem Dreieck $GG'F'$ $\overline{G'M}$ Höhe zu der Seite GF', folglich geht die dem Punkte G' entsprechende Ebene γ' auch durch G, und somit erkennen wir, dass die projektivische Beziehung zwischen $g\,(G)$ und $g'\,(\gamma)$ auch eine involutorische ist. Hiermit ist der Beweis für die Behauptung erbracht, dass die oben angegebene Zuordnung von Punkten und Ebenen ein räumliches Polarsystem bestimmt. Es besitzt — und dadurch wird es zu einem besondern — die charakteristische Eigenschaft, dass die Normalen aus den Punkten des Systems auf die entsprechenden Ebenen alle durch einen Punkt gehen, und von ihm so geteilt werden, dass das Produkt der entstandenen Abschnitte einen konstanten Wert hat.



Nähert sich P dem Punkte M, dann entfernt sich π von letzterem Punkte und bei der Vereinigung von P und M wird π zur unendlich fernen Ebene. M ist also der Mittelpunkt des Systems, und folglich entspricht jeder durch M gehenden Ebene der in normaler Richtung unendlich fern gelegene Punkt.

Die Ordnungsfläche des Systems ist nur dann reell und zwar eine Kugelfläche, wenn das konstante Produkt, die Potenz des Systems, negativ ist, M also die Strecke PQ äusserlich teilt. Die Kugel hat M zum Mittelpunkt und die Quadratwurzel aus dem absoluten Werte des Produkts zum Radius. Wegen dieser Thatsache, dass die Ordnungsfläche des Systems eine reelle oder imaginäre Kugel ist, kann das Polarsystem ein sphärisches genannt werden.

Jedes Poltetraeder des Systems ist von besonderer Art, insofern sich in ihm die 4 Höhen schneiden und zwar im Mittelpunkt des Polarsystems. Diese Tetraeder sind entweder alle spitzwinklig, stumpfwinklig, oder alle rechtwinklig, je nachdem die Potenz des Systems positiv, negativ oder null ist.**)

Bewegt sich in dem sphärischen Polarsystem P auf einer Fläche II. O. f, dann durchläuft π einen Ebenenbüschel II. O., dessen Einhüllungsfläche f' von besonderer Art ist, je nach der Lage, die M zu f einnimmt. Liegt nämlich M auf f, dann wird f' von der unendlich fernen Ebene berührt, ist also ein elliptisches oder

*) S. auch Reye, synth. Geom. der Kugeln. Leipzig 1879. S. 29.

**) Auch in diesem Falle kann man noch von einem sphärischen Polarsystem reden. Jedem Punkte P entspricht die zu $\overline{PM}$ normale Ebene von M und jede Ebene, die nicht durch M geht, hat letzteren Punkt zu ihrem Pol. Enthält eine Ebene den Punkt M, dann entspricht ihr jeder Punkt auf ihrer durch M gehenden Normalen. Die Ordnungsfläche reduziert sich auf den Punkt M.

hyperbolisches Paraboloid, je nachdem f eine nicht geradlinige Fläche II. O. oder eine Regelfläche II. O. ist. Ist f eine Kegelfläche II. O., dann wird f' zu einer Parabel, deren Ebene normal zu dem Kegelstrahl steht, auf welchem der Punkt M liegt. — Nehmen wir zweitens M innerhalb f an und setzen diese Fläche zunächst als krummlinig voraus, dann ist f' ein Ellipsoid. Ist aber f eine Regel- oder Kegelfläche II. O., dann wird f' zu einem einschaligen Hyperboloid oder zu einer Ellipse. — Für den Fall endlich, dass M ausserhalb f liegt, erhalten wir für f' ein zwei- oder einschaliges Hyperboloid, je nachdem f eine krummlinige Fläche II. O. oder eine Regelfläche II. O. ist. f' geht über in eine Hyperbel, falls f eine Kegelfläche ist. Jeder Kugel f entspricht in dem sphärischen Polarsystem eine Rotationsfläche II. O. f', welche M zu einem Brennpunkt und die Verbindungsgerade dieses Punktes mit dem Mittelpunkte O der Kugel zur Rotationsachse hat. Nimmt man daher eine Kugel als gegeben an und beachtet, dass in Bezug auf dieselbe das Produkt der Sehnen- und Sekantenabschnitte des Punktes M konstant ist, so erkennt man sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Legt man zu den Strahlen eines Punktes in ihren Schnittpunkten mit einer Kugelfläche die Normal- „ebenen, so umhüllen diese ein Rotationsellipsoid oder Rotationshyperboloid, je nachdem der Punkt innerhalb „oder ausserhalb der Kugel liegt.*) Der Punkt ist ein Brennpunkt der Rotationsfläche.“

— Die Thatsache, dass im sphärischen Polarsystem jeder Kugel eine Rotationsfläche II. O. entspricht, giebt uns ein Mittel an die Hand, um die Sätze der Kugel in einfacher Weise auf jene zu übertragen. So hat z. B. der Satz: „Durch 4 Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, ist eine Kugel bestimmt“ — den folgenden zu seinem reciproken:

„Durch 4 Ebenen, von denen keine drei durch eine Gerade gehen, ist eine Rotationsfläche II. O. bestimmt, „welche einen bestimmten Punkt zu einem Brennpunkt hat.“

Wir verzichten darauf, andere Kugelsätze zu übertragen, da dies wenigstens teilweise schon von Salmon in seiner analytischen Geometrie des Raumes geschehen ist, allerdings nur unter der beschränkenden Voraussetzung, dass die Ordnungsfläche des Systems reell ist. Weil einer Curve II. O. in dem sphärischen Polarsystem eine bestimmte Kegelfläche II. O. entspricht. (die supplementär ist zu der andern Kegelfläche, welche aus dem Punkte M die Curve projiciert), so lassen sich auch zu den Sätzen über die Curven II. O. bestimmte reciproke über die Kegelflächen II. O. bilden. Es möge dies durch ein Beispiel gezeigt werden. Einem Brennpunkt F der Curve II. O. λ entspricht eine Ebene durch den Mittelpunkt O der Kegelfläche, deren Strahlensystem aus der Geraden $\overline{OM}$ durch eine orthogonale Ebeneninvolution projiciert wird. Weil nun eine Curve II. O. 2 Brennpunkte hat, so ergiebt sich der Satz:

„Zu jeder durch den Mittelpunkt einer Kegelfläche II. O. gelegten Geraden giebt es zwei Ebenen von der „Art, dass das Strahlensystem einer jeden derselben aus der Geraden durch eine orthogonale „Ebeneninvolution „projiciert wird.“

Weil ferner die Verbindungsgerade der beiden Brennpunkte durch den Pol der unendlich fernen Geraden von λ geht, so folgt weiter:

„Jene beiden Ebenen schneiden sich auf der Polarebene der Geraden.“

Man sieht leicht, wie mit Hülfe der Curve II. O. die Ebenen konstruiert werden können.

Auch auf diese Übertragungen wollen wir hier nicht weiter eingehen, sondern uns nunmehr zu dem Tetraeder wenden, um von demselben mittelst des sphärischen Polarsystems eine Reihe von Sätzen abzuleiten, die noch nicht alle bekannt sein dürften.

I. Das allgemeine Tetraeder.

Die Eckpunkte eines Tetraeders mögen mit A, B, C, D und die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit α, β, γ, δ bezeichnet werden. Ferner seien in den bezüglich eines sphärischen Polarsystems reziproken Tetraeder α', β', γ', δ' die den Eckpunkten des erstern entsprechenden Seiten und A', B', C', D' die den Seiten des erstern entsprechenden Eckpunkte.

Ziehen wir nun im Tetraeder $ABCD$ die Höhe aus A zu α, so hat dieselbe im reziproken Tetraeder $A'B'C'D'$ als entsprechendes Element diejenige Grade von α', durch welche die Normalebene des Punktes M**) zu der Geraden $\overline{MA'}$ geht. Da nämlich A' der Ebene α entspricht, so ist die Gerade $\overline{MA'}$ normal zu α, also

*) Liegt der Punkt auf der Kugelfläche, dann gehen die Normalebenen teils durch diesen Punkt, teils durch seinen Gegenpunkt auf der Kugel.

**) M wie oben Mittelpunkt des Systems.

parallel zu der Höhe durch A und mithin auch normal zu der Ebene, welche die jener Höhe entsprechende Gerade enthält. Da nun bei dem allgemeinen Tetraeder die 4 Höhen auf einer Regelschar liegen, weil sie von den Normalen der Seitenflächen, welche durch die Höhenschnittpunkte der letzteren gehen, getroffen werden, so folgt:

„Legt man durch einen Punkt die Normalebenen zu seinen Verbindungsgeraden mit den Eckpunkten „eines Tetraeders, so schneiden dieselben die gegenüberliegenden Seiten in 4 Geraden einer Regelschar."

Diese 4 Geraden können in einem besondern Falle zu zwei Paaren in zwei Ebenen und in einem noch besonderen in einer Ebene liegen. Dies folgt daraus, dass die Höhen des Tetraeders mit 2 zu einander normalen Gegenkanten zwei Paare sich schneidender Geraden bilden, und dass die Höhen des Tetraeders mit 2 Paar normaler Gegenkanten alle durch einen Punkt, den Höhenschnittpunkt des Tetraeders, gehen.

Da den Eckpunkten A und B des ersten Tetraeders die Seiten α' und β' des zweiten entsprechen, so entspricht dem unendlich fernen Punkte $P\infty$ auf der Geraden $\overline{AB}$ diejenige (zu $\overline{AB}$) normale Ebene, welche M mit der Geraden $\alpha'\ \beta'$ verbindet. Weil ferner der Mittelpunkt M der Kante AB von dem unendlich fernen Punkte $P\infty$ durch A und B harmonisch getrennt ist, so ist auch die entsprechende Ebene μ' harmonisch getrennt von M durch α' und β'. Verbinden wir nun den Punkt M_1 mit der gegenüberliegenden Kante CD durch eine Ebene — die Mittelebene der letztern Kante —, so entspricht derselben in dem reziproken Tetraeder der Punkt, in welchem μ' von der Kante $\overline{\gamma'\ \delta'}$ getroffen wird, und da bekanntlich die 6 Mittelebenen eines Tetraeders durch einen Punkt, den Schwerpunkt S desselben, gehen, wobei sie sich 4mal zu dreien in einer Geraden schneiden, so führt uns das sphärische Polarsystem zu folgendem Satze:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die durch die Seiten derselben von einem festen Punkt „M harmonisch getrennte Ebene und bringt sie zum Durchschnitt mit der gegenüberliegenden Kante, so erhält „man 6 Punkte einer Ebene, welche 4mal zu dreien in einer Geraden liegen."

Die Ebene soll gemäss der Bezeichnungsweise bei dem entsprechenden Satze über das Dreieck die Harmonikalebene des Punktes M genannt werden, und sie werde, weil sie dem Schwerpunkt S entspricht, mit s bezeichnet.

Durch reziproke Übertragung des letzten Satzes erhalten wir weiter den folgenden:

„Bestimmt man auf jeder Kante eines Tetraeders den Punkt, welcher durch die Eckpunkte von einer „festen Ebene harmonisch getrennt ist, und verbindet denselben mit der gegenüberliegenden Kante, so erhält „man 6 Ebenen eines Punktes, welche 4mal zu dreien durch eine Gerade gehen."

In diesem Satze ist auch der von dem Schnittpunkte der 6 Mittelebenen eines Tetraeders enthalten, und somit erkennen wir, wie uns das sphärische Polarsystem von einem nur für einen besondern Fall gültigen Satze sofort zu dem allgemein gültigen geführt hat.

Bewegen wir nun das Tetraeder $ABCD$ so lange im Raume bis sein Schwerpunkt S mit dem Mittelpunkte M des sphärischen Polarsystems zusammenfällt, dann rückt die Harmonikalebene s des Punktes M in Bezug auf das reziproke Tetraeder $A'B'C'D'$ in die unendliche Ferne, und folglich ist letzterer mit S vereinigter Punkt auch Schwerpunkt des Tetraeders $A'B'C'D'$. Wir haben also für das sphärische Polarsystem den Satz:

„Fällt der Schwerpunkt eines Tetraeders mit dem Mittelpunkte eines sphärischen Polarsystems zusammen, „so vereinigt sich mit letzterem Punkte auch der Schwerpunkt des reziproken Tetraeders."

Legt man also zu jeder Schwerlinie eines Tetraeders die Ebene, welche die Strecke zwischen dem Eckpunkte und dem Schwerpunkte in 2 Abschnitte von konstantem Produkte teilt, so erhält man ein zweites Tetraeder, welches mit dem ersteren den Schwerpunkt gemeinsam hat und zu ihm reziprok in Bezug auf ein sphärisches Polarsystem ist. Zugleich erkennt man jetzt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Die Normalebenen der Schwerlinien eines Tetraeders in ihren zweiten Schnittpunkten mit der dem „Tetraeder umgeschriebenen Kugel bilden ein Tetraeder, welches mit dem erstern den Schwerpunkt gemeinsam „hat und zu ihm in Bezug auf ein sphärisches Polarsystem reziprok ist."

Eine einfache Folgerung des Satzes von den 6 Mittelebenen eines Tetraeders ist auch der: Die Verbindungsstrecken der Mitten zweier Gegenkanten eines Tetraeders werden durch den Schwerpunkt halbiert. Die reziproke Übertragung dieses Satzes lautet:

„Legt man durch 2 Gegenkanten eines Tetraeders die durch ihre Seiten von einem Punkte M harmonisch „getrennten Ebenen, so schneiden sich diese auf der Harmonikalebene des Punktes M und sind durch M und „diese Ebene harmonisch getrennt."

Wir denken uns nun zu dem Tetraeder $ABCD$ die umgeschriebene Kugel mit dem Mittelpunkt U. Dann entsprechen den Punkten derselben die Berührungsebenen einer Rotationsfläche II. O., welche den Punkt M zu einem Brennpunkt hat und auch die Seitenflächen des Tetraeders $A'B'C'D'$ berührt. Dem Mittelpunkt U der Kugel entspricht eine Ebene u, welche die Polarebene des Punktes M bezüglich der Rotationsfläche ist. Da sich in dem Punkte U die normal zu den Kanten des Tetraeders $ABCD$ und zwar durch deren Mittelpunkt gelegten Ebenen schneiden, wobei sie viermal zu dreien durch eine Gerade gehen, so ergibt sich durch reziproke Übertragung folgender Satz:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die von ihren Seitenflächen durch einen Punkt M harmonisch „getrennte Ebene und bringt diese zum Durchschnitt mit der Normale des Punktes M zu seiner Verbindungs- „ebene mit der Kante, so erhält man 6 Punkte einer Ebene, welche 4mal zu dreien auf einer Geraden liegen."

Diese Ebene ist die Polarebene des Punktes M bezüglich derjenigen Rotationsfläche II. O., welche die Seiten des Tetraeders berührt und M zu einem Brennpunkt hat.

Verbinden wir nun den Mittelpunkt M_1 der Kante AB mit dem Mittelpunkte M_2 der gegenüberliegenden Kante CD, dann wird, wie bereits hervorgehoben, die Strecke M_1M_2 durch den Schwerpunkt S halbiert. Ziehen wir daher durch M_1 die Parallele zu CD, und nennen wir C_1 und D_1 die Punkte, in welchen diese Parallele die Geraden $\overline{CS}$ und $\overline{DS}$ trifft, dann ist $CS=SC_1$, $DS=SD_1$ und folglich $C_1D_1=CD$. Ebenso geht die durch M_2 zu der Kante AB gezogene Parallele durch die zu A und B bezüglich des Schwerpunktes symmetrisch gelegenen Punkte A_1 und B_1, und wir erkennen weiter, dass die durch die Mitte der vier übrigen Kanten zu ihren jedesmaligen Gegenkanten gezogenen Parallelen bzhw. die Punktepaare C_1A_1, C_1B_1, D_1A_1, D_1B_1 verbinden. Das Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$, welches durch jene 6 Gerade bestimmt ist, hat mit dem Tetraeder $ABCD$ die Mitten der Kanten und daher auch den Schwerpunkt gemeinsam; die Tetraeder liegen ferner zu einander perspektivisch und sind symmetrisch, aber nicht congruent. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

„Zieht man durch die Mitte jeder Kante eines Tetraeders die Parallele zu der gegenüberliegenden Kante, „so erhält man 6 Gerade, welche 4mal zu dreien durch einen Punkt gehen, also die Kanten eines zweiten „Tetraeders bilden. Dieses hat mit ersterem den Schwerpunkt gemeinsam, liegt zu ihm perspektivisch und „symmetrisch."

Den reziproken Satz wollen wir, wie folgt, aussprechen:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die von ihren Seiten durch einen M harmonisch getrennte „Ebene und bringt letztere zum Durchschnitt mit der Verbindungsebene des Punktes M mit der Gegenkante, so „erhält man 6 Gerade, welche 4mal zu dreien in einer Ebene liegen, also die Kanten eines Tetraeders bilden. „— Beide Tetraeder haben dieselbe Harmonikalebene in Bezug auf den Punkt M und liegen so zu einander „perspektivisch, dass sich je 2 entsprechenden Ebenen auf der Harmonikalebene schneiden und von dieser und „dem Punkte M harmonisch getrennt sind."

Dieser Satz enthält wieder den vorhergehenden, aus welchem er abgeleitet wurde, als besondern Fall.

Errichten wir nun zu den Kanten des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$ in ihren Mittelpunkten M_1, M_2 . . . M_6 die Normalebenen, so gehen dieselben durch einen Punkt H, nämlich den Mittelpunkt der dem Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ umgeschriebenen Kugel. Da nun die Kanten des Tetraeders $ABCD$ mit denen des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$ parallel laufen und die Mittelpunkte gemeinsam haben, so können jene Ebenen auch aufgefasst werden als solche, welche durch die Mitte der Kanten des Tetraeders $ABCD$ normal zu den Gegenkanten gelegt sind, und somit ergibt sich sofort der Satz von Monge:

„Die Normalebenen aus den Mitten der Kanten eines Tetraeders zu den Gegenkanten schneiden sich in „einem Punkte, und zwar gehen diese Ebenen viermal zu dreien durch eine Gerade."

Da U der Mittelpunkt der dem Tetraeder $ABCD$, und H der Mittelpunkt der dem Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ umgeschriebenen Kugel ist, so sind U und H entsprechende Punkte in den beiden bezüglich des gemeinsamen Schwerpunktes S symmetrisch gelegenen Tetraedern. Folglich ergiebt sich weiter die Beziehung:

„In jedem Tetraeder liegt der Schwerpunkt S, der Mittelpunkt U der umgeschriebenen Kugel und der- „jenige Punkt H in einer Geraden, in welchem die Normalebenen aus den Mitten der Kanten zu den Gegen- „kanten sich schneiden. Die Strecke UH wird durch den Punkt S halbiert."

Der Satz von Monge lautet in seiner reziproken Übertragung:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die von ihren Seiten durch einen festen Punkt M harmonisch „getrennte Ebene und bringt letztere zum Durchschnitt mit der Normalen des Punktes M zu seiner Verbindungs- „ebene mit der Gegenkante, so erhält man 6 Punkte einer Ebene, die 4mal zu dreien auf einer Geraden liegen."

Aus dem vorletzten Satze folgt weiter, dass für jedes Tetraeder die Ebenen s, u und h durch eine Gerade gehen und dass s von u und h durch M harmonisch getrennt ist.

Während es nur eine Kugel gibt, welche durch die Ecken eines Tetraeders geht, gibt es deren 8, welche die Seiten des Tetraeders berühren. Zu dieser Erkenntniss führt uns folgende Überlegung. Ist J der Mittelpunkt einer die Seitenpflächen α, β, γ, δ des Tetraeders berührenden Kugel, dann hat dieser Punkt von den Ebenen gleiche Entfernung, liegt also auf der Halbirungsebene der von den Ebenen gebildeten Winkel. In dem Punkte A stossen die Ebenen β, γ, δ zusammen und die Winkel, welche 2 von diesen Ebenen, etwa β und γ bilden, werden durch 2 zu einander normale, durch die Kante AD gehende Ebenen halbiert, ebenso haben die Winkel, welche γ und δ miteinander bilden, zwei zu einander normale durch die Kante AB gehende Halbierungsebenen. Diese 4 Halbierungsebenen schneiden sich ausser in den Kanten AD und AB noch in 4 andern durch A gehenden Geraden. Jeder Punkt derselben ist von den Ebenen β, γ, δ gleichweit entfernt, also gehen auch die Halbierungsebenen der Winkel, welche β und δ miteinander bilden, durch die 4te Gerade. Diejenigen Punkte dieser Geraden nun, welche von der vierten Ebene α des Tetraeders ebenso weit entfernt sind als von β, γ, δ, liegen offenbar auf den beiden Halbierungsebenen der von α mit einer der übrigen Ebenen gebildeten Winkel. Wir erhalten also $4 \cdot 2$ oder 8 Punkte, welche von den Ebenen gleichweit entfernt sind, also die Mittelpunkte der die Seitenflächen berührenden Kugeln sind. Zugleich sehen wir, dass diese Punkte 16mal zu zweien mit einer Ecke in einer Geraden und 12mal zu vieren mit einer Kante in einer Ebene liegen.

Bilden wir nun die reziproke Beziehung, so erhalten wir den Satz:

„Es gibt 8 Rotationsflächen II. O., welche durch 4 Punkte gehen und einen andern fünften Punkt zu „einem Brennpunkt haben. Die 8 Polarebenen des Brennpunktes schneiden sich 16mal zu zweien auf einer „Seitenfläche des von den 4 Punkten gebildeten Tetraeders und gehen 12mal zu vieren durch einen Punkt auf „einer Kante des Tetraeders.“

II. Das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt.

Wir haben bei der allgemeinen Betrachtung über das sphärische Polarsystem bereits erwähnt, dass die Poltetraeder dieses Systems solche sind, in welchen die 4 Höhen durch einen Punkt gehen. Umgekehrt können wir jedes Tetraeder $ABCD$ mit einem Höhenschnittpunkte H zu einem Poltetraeder eines sphärischen Polarsystems machen, wenn wir nur bestimmen, dass H der Mittelpunkt des Systems und das konstante Produkt der Höhenabschnitte die Potenz desselben sein soll. Alsdann ist es möglich, in einfacher Weise zu den bisher bekannten Sätzen*) über das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt noch andere interessante abzuleiten, die gleich den früher bekannten recht deutlich die Analogie dieses räumlichen Gebildes mit dem Dreieck hervortreten lassen.

Indem wir nur beachten, dass den Eckpunkten $ABCD$ des Tetraeders mit dem Höhenschnittpunkt H in dem sphärischen Polarsystem die ihnen gegenüberliegenden Seiten α, β, γ, δ entsprechen, erkennen wir sofort die Richtigkeit der folgenden Sätze:

„Durchschneidet man die Kanten eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt durch eine Ebene π in 6 Punkten „und fällt zu jeder Verbindungsgeraden dieser Punkte mit dem Höhenschnittpunkt H aus der gegenüberliegen- „den Kante die Normalebene, so erhält man 6 Ebenen, welche durch einen Punkt P geken, der auf der „Normalen von H zu π liegt. Ist Q der Schnittpunkt dieser Normalen mit π, dann ist $QH \cdot HP$ gleich dem kon- „stanten Produkt der Höhenabschnitte des Tetraeders.“

„Verbindet man einen Punkt mit den Kanten eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt durch Ebenen und „fällt zu denselben aus dem Höhenschnittpunkt H die Normalen, so treffen diese die jedesmaligen gegenüber- „liegenden Kanten in 6 Punkten einer Ebene π, welche normal zu der Geraden $\overline{PH}$ liegt. Ist Q der Schnitt- „punkt dieser Normalen mit π, dann ist $PH \cdot HQ$ gleich dem konstanten Produkt der Höhenabschnitte des „Tetraeders.“

„Verbindet man eine Gerade g mit den 4 Eckpunkten eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt und fällt „auf diese Ebenen vom Höhenschnittpunkt H aus die Normalen, so treffen dieselben die gegenüberliegenden „Seiten in 4 Punkten einer zu g normal gelegenen Geraden g'. Die kürzeste Entfernung dieser beiden Geraden „wird durch H in zwei Abschnitte geteilt, deren Produkt gleich dem konstanten Produkt der Höhenabschnitte ist.“

Dem Mittelpunkte M_1 der Kante AB entspricht diejenige Ebene μ_1 durch die gegenüberliegende Kante CD, welche normal zu der Geraden $\overline{M_1 H}$ ist. Ferner hat der unendlich ferne Punkt P_∞ auf der Geraden $\overline{AB}$

*) Am eingehendsten scheint bis jetzt Vogt in einer interessanten wissenschaftlichen Beilage zum Programm des Friedrichs-Gymnasiums in Breslau vom Jahre 1881 das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt untersucht zu haben.

diejenige Ebene π zu seinem entsprechenden Element, welche H mit $\overline{CD}$ verbindet. Da nun aber M_1 von P 8 durch die Eckpunkte A und B harmonisch getrennt ist, so sind auch die Ebenen μ_1 und π harmonisch getrennt von den Seiten α und β. Wir haben also den Satz:

„Ist in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt letzterer Punkt mit der Mitte einer Kante durch eine „Gerade verbunden und legt man zu derselben aus der gegenüberliegenden Kante die Normalebene, dann ist „diese harmonisch getrennt von dem Höhenschnittpunkt durch die Seitenflächen der letzteren Kante." Oder:

„Legt man durch eine Kante eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt die von diesem Punkte durch die „Seiten der Kante harmonisch getrennte Ebene, so trifft die Normale derselben aus dem Höhenschnittpunkt die „gegenüberliegende Kante in ihrer Mitte."

Legen wir ferner durch eine Kante die Mittelebene, d. h. die Ebene, welche diese Kante mit der Mitte der Gegenkante verbindet, dann ist die von dieser Ebene durch die beiden Seitenflächen der Kante harmonisch getrennte Ebene parallel mit der Gegenkante, und es trifft die Normale aus dem Höhenschnittpunkt H zu letzterer Ebene die gegenüberliegende Kante in ihrem Höhenfusspunkt. Daraus folgt nun der Satz:

„In einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt trifft die Normale aus diesem Punkte zu einer Mittelebene „die gegenüberliegende Kante in einem Punkte, welcher von den Eckpunkten derselben durch ihren Höhenfuss- „punkt harmonisch getrennt ist."

Bestimmen wir nun auf jeder Kante den Punkt, welcher von den Eckpunkten durch ihren Höhefusspunkt, oder, was dasselbe ist, welcher von den Seitenflächen der Gegenkante durch den Höhenschnittpunkt des Tetraeders harmonisch getrennt ist, so erhält man 6 Punkte einer Ebene, nämlich der Harmonikalebene des Höhenschnitt-punktes. Da ferner diese Ebene in dem Polarsystem dem Schwerpunkt S des Tetraeder entspricht, so folgt:

„In einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt steht die Harmonikalebene des Höhenschnittpunkts H normal „zu der Verbindungsgeraden dieses Punktes mit dem Schwerpunkt S. Heisst Q der Schnittpunkt von $\overline{SH}$ mit „der Harmonikalebene, dann ist das Produkt $SH \,.\, HQ$ gleich dem Produkt der Höhenabschnitte des Tetraeders."

Den Höhenfusspunkten der Kanten entsprechen diejenigen Ebenen durch die Gegenkanten, welche parallel zu den ersten Kanten laufen, und die Mittelpunkte der Kanten haben zu ihren entsprechenden Elementen diejenigen Ebenen durch die Gegenkanten, welche durch die Seitenflächen derselben durch den Höhenschnittpunkt harmonisch getrennt sind. Da nun in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt die Mittelpunkte der Kanten und folglich auch die Höhenfusspunkte derselben auf einer Kugel liegen, welche den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat, so folgt:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt

„1) die Parallelebene zur Gegenkante,

„2) die von den Seitenflächen der Kante durch den Höhenschnittpunkt harmonisch getrennte Ebene, „so erhält man 12 Ebenen, welche von einer Rotationsfläche II. O. berührt werden, die den Höhenschnittpunkt „zu einem Brennpunkt und die Harmonikalebene desselben zu der zugehörigen Leitebene hat."

Die Punkte, in welchen die Berührungsebenen einer Rotationsfläche II. O. von ihrer Normalen aus einem Brennpunkt getroffen werden, liegen auf einer Kugel, welche mit der Fläche den Mittelpunkt gemeinsam hat. Da nun in unserm Falle die Ebenen der ersteren Art von ihren Normalen aus dem Höhenschnittpunkt in den Höhenfusspunkten der Kanten getroffen werden, so liegen auf der durch diese und die Mittelpunkte der Kanten gehenden Kugel auch die Schnittpunkte der Ebenen zweiter Art mit ihren Normalen aus dem Höhenschnittpunkt. Indem wir noch vorausschicken, was gleich bewiesen werden soll, dass der Höhenschnittpunkt des Tetraeders zu dem Mittelpunkt U der umgeschriebenen Kugel bezüglich des Schwerpunktes S symmetrisch liegt, so können wir nun folgenden Zusatz zu dem letzten Satze bilden:

„Die Rotationsfläche hat den Schwerpunkt des Tetraeders zum Mittelpunkt und den Höhenschnittpunkt „und den Mittelpunkt der umgeschriebenen Kugel zu Brennpunkten."

Ferner erkennen wir die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„In einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt liegen die Punkte, in welchen die Verbindungsgeraden des „Höhenschnittpunktes mit den Mitten der Kanten von ihren Normalebenen aus den jedesmaligen gegenüber- „liegenden Kanten getroffen werden, auf derselben Kugel, welche auch durch die Mitten der Kanten und die „Höhenfusspunkte derselben geht."

Nach dem im ersten Abschnitt (S. 6) dargelegten Satze von Monge liegt in jedem Tetraeder bezüglich des Schwerpunktes S der Mittelpunkt U der umgeschriebenen Kugel zu demjenigen Punkte H symmetrisch, durch welchen die aus den Mitten der Kanten normal zu den Gegenkanten gelegten Ebenen gehen. Weil man aber bei einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt je 2 Gegenkanten zu einander normal sind, so enthält die Ebene, welche normal zu der einen Kante durch die Mitte der Gegenkante gelegt wird, die letztere Kante ganz, und somit erkennen wir, dass bei diesem besonderen Tetraeder der Punkt H identisch ist mit dem Höhenschnittpunkt. Es ist also jetzt gezeigt, was wir vorhin als erwiesen annahmen, dass in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt die Strecke zwischen diesem Punkte und dem Mittelpunkte der umgeschriebenen Kugel durch den Schwerpunkt halbiert wird.

Die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte seien mit A_2, B_2, C_2, D_2 bezeichnet. Dann ist das Tetraeder $A_2B_2C_2D_2$ mit dem Tetraeder $ABCD$ ähnlich und ähnlich liegend inbezug auf H als äusseren Ähnlichkeitspunkt. Denn je zwei entsprechende Kanten z. B. A_2B_2 und AB sind zu einander parallel und stehen in dem Verhältniss $1:2$. Der Mittelpunkt U_2 der dem Tetraeder $A_2B_2C_2D_2$ umgeschriebenen Kugel ist der Mittelpunkt der Strecke UH, also identisch mit dem Schwerpunkt S des Tetraeders $ABCD$. Folglich gilt der Satz*):

„Die Kugel, welche durch die Mitten der oberen Höhenabschnitte eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt „geht, hat den Schwerpunkt des Tetraeders zum Mittelpunkt und ihr Radius ist gleich der Hälfte von dem „Radius der umgeschriebenen Kugel."

Da nun in dem sphärischen Polarsystem dem Mittelpunkt eines oberen Höhenabschnittes die zu dem Höhenschnittpunkt bezüglich der zugehörigen Seitenfläche symmetrisch gelegene Ebene entspricht, so gilt der Satz: Legt man zu jeder Seite eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt diejenige Parallelebene, welche mit dem Höhenschnittpunkt bezüglich der zugehörigen Seitenfläche symmetrisch liegt, so erhält man 4 Berührungsebenen einer Rotationsfläche II. O., welche den Höhenschnittpunkt zu einem Brennpunkt und dessen Harmonikalebene zur Direktrixebene hat.

Wir benutzen nun noch folgenden Satz und verweisen bezüglich seiner Ableitung auf § 10 der erwähnten Arbeit von Vogt:

„In jedem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt liegen die Schwerpunkte und die Höhenschnittpunkte der „Seitenflächen auf einer Kugel, deren Mittelpunkt F auf der Verbindungsgeraden der Punkte H und U liegt."

Von diesem Satze führt uns das sphärische Polarsystem sofort zu folgendem:

„Legt man durch die Ecken eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt die Parallelebenen zu den gegen- „überliegenden Seitenflächen und die Normalebenen zu den Verbindungsgeraden des Höhenschnittpunktes mit „den Schwerpunkten auf den gegenüberliegenden Seitenflächen, so erhält man 8 Ebenen, welche eine Rotations- „fläche II. O. berühren, die den Höhenschnittpunkt zu einem Brennpunkt hat, und deren Mittelpunkt auf der „Geraden $\overline{HU}$ liegt.

Da nun diese Ebenen von ihren Normalen aus dem Höhenschnittpunkt in den Punkten einer Kugel getroffen werden, und 4 von diesen Punkten die Eckpunkte des Tetraeders sind, so folgt weiter:

„Verbindet man in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt den Schwerpunkt einer Seitenfläche mit dem „Höhenschnittpunkt des Tetraeders durch eine Gerade, so wird dieselbe von ihrer Normalebene aus dem gegen- „überliegenden Eckpunkte in einem Punkte der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel getroffen."

Ist in einem sphärischen Polarsystem ein Tetraeder mit dem Höhenschnittpunkt H gegeben, und fällt letzterer Punkt nicht mit dem Mittelpunkt M des Systems zusammen, dann ist das reziproke Tetraeder nur dann von derselben Art, falls M auf einer Höhe des ersten Tetraeders liegt. Ist z. B. M ein Punkt der Höhe $\overline{AH}$, dann entspricht der Kante AB in dem reziproken Tetraeder eine Kante $A'B'$, welche normal zu der Ebene $\overline{ABH}$, also parallel mit der Kante CD ist. Die letzterer Kante in dem reziproken Tetraeder entsprechende Kante $C'D'$ ist normal zu CD, also auch zu $A'B'$. Ebenso erkennt man, dass auch die Kante $A'C'$ und $B'D'$ zu einander normal sind. Die Tetraeder $A'B'C'D'$ hat also 2 Paare zu einander normaler Gegenkanten, folglich schneiden sich seine Höhen in einem Punkte H'. Zugleich überzeugen wir nns von der Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Nimmt man in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt auf einer Höhe derselben einen Punkt M an und „legt zu den Verbindungsgeraden dieses Punktes mit den Eckpunkten des Tetraeders in ihrem zweiten Schnitt- „punkten mit der umgeschriebenen Kugel die Normalebenen, so erhält man ein Tetraeder, dessen Höhen durch „einen Punkt gehen, der auf der gemeinsamen Höhe beider Tetraeder liegt."

Aber auch dann, wenn M nicht auf einer Höhe des Tetraeders $ABCD$ liegt, ist das reziproke Tetraeder $A'B'C'D'$ noch von besonderer Art. Wir unterlassen es, seine Eigenschaften hier näher anzugeben; dieselben ergeben sich wieder am einfachsten durch reziproke Übertragung derjenigen des Tetraeders mit Höhenschnittpunkt.

*) Vgl. auch Vogt § 8.