Zur Theorie der Spiegelung des Regenbogens an einer ruhigen Wasserfläche.

Die interessante und ohne Zweifel schon öfter aufgeworfene Frage, ob sich ein Regenbogen, welcher eine ruhige Wasserfläche überspannt, jemals im Wasser spiegeln könne, hat bekanntlich Tyndall in seinen Vorlesungen über Optik berührt und in folgendem Sinne entschieden.[1] »Wenn sich auch die Wolke, auf der sich der Bogen malt, im Wasser spiegeln kann, so kann doch das Spiegelbild des am Himmel gesehenen Bogens nicht gleichzeitig mit demselben gesehen werden.« Nach diesem Ausspruch des britischen Naturforschers wird die Möglichkeit einer Spiegelung zugegeben; es wird nur bestritten, dass das Spiegelbild von dem direkt gesehenen Bogen herrühre. Indessen scheinen erst aus späterer Zeit zuverlässige Mitteilungen über die wirkliche Beobachtung solcher Spiegelbilder vorzuliegen. So hat Crookes[2] im Jahre 1877 einen über dem Meere stehenden Regenbogen und gleichzeitig einen von der Oberfläche desselben reflektierten Bogen beobachtet und dabei gefunden, dass die Farben des direkt sichtbaren Bogens und des Spiegelbildes an den Enden nicht zusammenfielen; vielmehr berührte das Rot des Bildes das Gelb des direkt gesehenen Bogens. Nach Sabine[3] lässt sich die von Crookes beobachtete Erscheinung auch im Kleinen nachahmen. Wenn man mittelst einer Brause den Strahl einer Gartenspritze zerstäubt, auf diese Weise im Sonnenschein Regenbogen erzeugt und die reflektierende Wasserfläche durch einen künstlichen Spiegel ersetzt, so kann man im letzteren die gespiegelten Bogen sehen. Dabei zeigten sich die Durchmesser der beiden reflektierten Bogen, entsprechend der von Crookes beobachteten Verschiebung der Farben, stets kleiner als die der direkt gesehenen. Sabine führt die Differenz auf den Umstand zurück, dass die das Spiegelbild erzeugenden Strahlen von tiefer liegenden Tropfen herrühren. Hierzu sei schon im voraus bemerkt, dass diese Erklärung unvollständig ist. Auch der Stand der Sonne kommt in Betracht; derselbe ist in der berührten Frage sogar das wesentlich Entscheidende. (Vergl. den Schluss von No. II, sowie No. VIII.)

Über eine zweite Beobachtung, welche im Jahre 1885 von einem Chemiker aus Lyon gemacht worden ist, referiert Dufour.[4] Der Bericht ist besonders dadurch interessant, dass in diesem Falle das Spiegelbild in scheinbarem Widerspruch mit der Behauptung Tyndall's

[1] Tyndall, Das Licht. Deutsch von G. Wiedemann. Braunschweig 1876. S. 29.

[2] Nature. 1877. V. XVI p. 329.

[3] Ebenda p. 361.

[4] Bulletin soc. vaud. sc. nat. XXI. p. 93. Siehe auch Naturforscher, Jahrgang 1886. S. 267.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

selbst für einen aufmerksamen Beobachter als das Bild des direkt gesehenen Bogens erschien. Jedoch konnten die Enden des im übrigen klaren Bildes nicht gesehen werden, weil der Wasserspiegel nicht weit genug reichte. Im Anschluss an diese Mitteilung hat Dufour eine Erklärung des eigentümlichen Phänomens gegeben und auch Bemerkungen über die für die Wiederholung desselben notwendigen Bedingungen geknüpft.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die theoretische Diskussion der die Spiegelung des Regenbogens betreffenden Verhältnisse zu vervollständigen. Dabei lässt sich nicht vermeiden, dass das Hauptresultat der Untersuchung Dufour's wiederkehrt; indessen dürfte der abweichende Weg, welcher zu seiner Auffindung führt, selbst das bekannte Ergebnis in neuer Beleuchtung erscheinen lassen.

Übrigens scheint Dufour weder von der Beobachtung Crookes' noch von den Versuchen Sabine's Kenntnis gehabt zu haben. Auch die vorliegende Abhandlung war bereits im wesentlichen vollendet, als ich in den Beiblättern zu Poggendorf's Annalen für Physik und Chemie[1]) ein kurzes Referat von E. Wiedemann über die im Jahre 1877 in England gemachten Erfahrungen fand. Um so grössere Freude empfand ich über die somit konstatierte Thatsache, dass bereits eine interessante Bestätigung eines der im Nachstehenden enthaltenen theoretischen Ergebnisse durch die Erfahrung vorlag. Indirekt erhält dadurch zugleich die Descartes-Newton'sche Theorie des Regenbogens, auf welcher die folgende Untersuchung beruht, eine kräftige Stütze, wenn sie überhaupt noch einer solchen bedarf.

Noch bemerke ich, dass ich, da mir die Originalmitteilungen von Crookes und Sabine nicht mehr rechtzeitig zur Verfügung standen, obige Angaben aus der sekundären Quelle schöpfen musste.

I.

Zufolge der Descartes-Newton'schen Theorie können die aus einem kugelförmigen Wassertropfen nach erlittener Brechung und Reflexion austretenden Lichtstrahlen nur dann einen wirksamen Eindruck auf ein Auge machen, wenn eine hinreichend grosse Menge derselben parallel oder nahezu parallel den Tropfen verlässt, und dazu ist erforderlich, dass sie gegen die in den Tropfen eintretenden Sonnenstrahlen um einen für jede Farbe bestimmten Winkel abgelenkt werden. Bezeichnet man den Ablenkungswinkel für rotes Licht (Fraunhofer'sche Linie B) durch δ, den für violettes (Fraunhofer'sche Linie H) durch ε, so haben δ und ε, je nachdem eine ein-, zwei- oder dreimalige Reflexion im Inneren des Tropfens stattfindet, also bez. für den ersten (Hauptregenbogen), zweiten (Nebenregenbogen) und dritten Regenbogen die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte, wobei die Brechungsexponenten für die beiden Lichtarten bez. gleich 1,330 und 1,343 angenommen worden sind.[2])

	δ	ε
1. Regenbogen	137° 30′	138° 20′
2. „	230° 6′	233° 9′
3. „	317° 9′	322° 54′

[1]) Beiblätter 1877. Band I. S. 679.

[2]) Die Berechnung beruht auf den Formeln $w = m\pi - 2(m+1)y + 2x$ und $\sin x = n \sin y$, in welchen w der Ablenkungswinkel, x und y der Einfalls- resp. Brechungswinkel, m die Anzahl der Reflexionen im Inneren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der angeführte Satz ist für die Erklärung aller den Regenbogen betreffenden Vorgänge von fundamentaler Bedeutung. Durch ihn findet zunächst die Thatsache ihre Begründung, dass die Farbenzonen jedes am Himmel sichtbaren Bogens eine Schar konzentrischer Kreisringe bilden, deren gemeinsames Centrum in der durch den Mittelpunkt der Sonne und das Auge bestimmten Geraden liegt. Dabei spielt der dritte Regenbogen, welcher nicht mehr unberücksichtigt bleiben darf, seit durch die Beobachtung Heilermann's[1]) die Möglichkeit, ihn unter günstigen Verhältnissen zu sehen, ausser Zweifel gestellt ist, eine besondere Rolle. Sein Centrum liegt zwischen Sonne und Auge, während die Centra der beiden ersten Regenbogen in der Verlängerung der Verbindungsstrecke von Sonne und Auge über letzteres hinaus liegen. Man kann daher zwar die beiden ersten Regenbogen gleichzeitig sehen, nicht aber den dritten zugleich mit den beiden andern.

Für die scheinbaren Halbmesser des roten und violetten Bogens — sie mögen bezw. durch α und β bezeichnet werden — liefert die obige Tabelle die folgenden Werte, welche zugleich erkennen lassen, dass die Anordnung der Farben im dritten Regenbogen dieselbe ist, wie im ersten, aber umgekehrt im Vergleich mit dem zweiten, und dass der dritte breiter ist, als der zweite und dieser wieder breiter als der erste.

	α	β
1. Regenbogen	42° 30′	41° 40′
2. „	50° 6′	53° 9′
3. „	42° 51′	37° 6′

Die Konstanz des Ablenkungswinkels ist auch die Quelle, aus welcher der Grund fliesst für die Behauptung, dass jedermann nur seinen eigenen Regenbogen sehen kann, aber nicht den des Nachbars, und dass dieselben Tropfen, welche den direkt gesehenen Bogen erzeugen, nicht zugleich ein für denselben Beobachter sichtbares Spiegelbild hervorrufen können. Dadurch ist jedoch die Möglichkeit für die Entstehung eines Spiegelbildes keineswegs ausgeschlossen. Während es regnet, befinden sich vertikal unter den Tropfen, welche das Farbenband am Himmel veranlassen, stets andere, und diese besitzen vermöge ihrer tieferen Lage die Fähigkeit, wirksame Strahlen auf eine zwischen dem Beobachter und der Regenwand liegende Wasserfläche zu senden; bei geeigneter Höhe der Tropfen können daher solche Strahlen nach dem Auge zurückgeworfen werden.

Für die Erörterung der Bedingungen, welche der Erzeugung eines Spiegelbildes günstig sind, kommt demgemäss zunächst in Frage, welche geometrische Anordnung die von der Wasserfläche nach dem Auge reflektierten wirksamen Strahlen haben, und welches der Ort der Punkte ist, in denen die das Bild erzeugenden Strahlen vor ihrem Eintritt in das Auge den Wasserspiegel treffen. Im Anschluss daran wird dann zu untersuchen sein, wie sich die gegenseitige

des Tropfens und n der Brechungsexponent ist. Man bestimmt zunächst x so, dass n ein Maximum wird, und erhält

$$\sin x = \sqrt{\frac{(m+1)^2 - n^2}{m(m+2)}} \quad \text{u. s. w.}$$

Vergl. Heilermann und Diekmann, Algebra. Essen 1878/79. S. 108. Siehe auch Günther, Geophysik. Band II. Stuttgart 1885. S. 146.

[1]) Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. 1880. 11. Jahrgang. S. 72.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Lage des direkt gesehenen und des gespiegelten Bogens mit dem Standpunkt des Beobachters und mit der Höhe der Sonne ändert, speciell, welche Entfernung die höchsten Punkte und welchen Abstand die Enden der beiden Bogen haben, und unter welchen Umständen die Erscheinung unmöglich wird.

Da für die Spiegelung des zweiten und dritten Regenbogens durchaus Analoges gilt, wie für die des ersten, nur dass die Winkel α und β andere, aus obiger Tabelle zu entnehmende Werte haben, so darf die nachfolgende Untersuchung auf den Hauptregenbogen beschränkt bleiben. Dabei wird die Sonne als punktuell angesehen. Später werden dann an geeigneten Stellen die Modifikationen anzugeben sein, welche die Resultate mit Rücksicht darauf erleiden, dass die Sonne in Wirklichkeit als leuchtende Scheibe erscheint.

II.

Zunächst werde der Fall betrachtet, dass die vom Sonnenmittelpunkt ausgehenden Strahlen in horizontaler Richtung die Regenwolke treffen.

Wenn Strahlen auf eine spiegelnde Ebene E so fallen, dass sie von da nach einem festen Punkte B zurückgeworfen werden, so müssen ihre Anfangsrichtungen zufolge der beiden Grundgesetze, welchen jede Reflexion unterworfen ist, sämtlich nach einem zweiten festen Punkte B_1 konvergieren, welcher in Bezug auf die Ebene E symmetrisch zu B liegt. Es sei nun (Figur 1) B das Auge, E die reflektierende Wasseroberfläche, O der Schnittpunkt der Ebene E mit der Verbindungsstrecke BB_1 also $BO = h$ die Höhe des Auges über dem Wasser. Ferner schneide die durch BO und den Sonnenmittelpunkt bestimmte Vertikalebene die Wasserfläche in der Geraden OC und die zu OC senkrechte Regenwand d. h. die Ebene des direkt gesehenen Bogens in der Geraden Cr. Alsdann ist die Richtung der unter sich parallelen Sonnenstrahlen fixiert durch die Gerade OC oder auch durch die zu OC parallele Gerade B_1M_1. Ein Teil der Regenwand ist in der Figur durch das Viereck VCr_1J dargestellt. Jeder der von den Tropfen der Regenwand herkommenden wirksamen Strahlen von roter Farbe z. B. tP, welcher nach B reflektiert wird und deshalb nach B_1 konvergieren muss, bildet mit dem einfallenden Sonnenstrahl, also auch mit der festen Geraden B_1M_1 einen Winkel α von konstanter Grösse. Daher ist der geometrische Ort aller Strahlen tP von gleicher Brechbarkeit eine Rotationskegelfläche mit dem Knotenpunkt B_1 und der Axe B_1M_1.

Da die Regenwand zur Axe B_1M_1 des Kegels senkrecht steht, so ist die Gruppierung der das Spiegelbild erzeugenden Tropfen eine kreisförmige. Das Centrum dieses Kreises ist M_1. Macht man $MC = BO$, so ist M der Mittelpunkt des Kreises, welchem der direkt von B aus gesehene Bogen angehört. Die Radien der beiden Kreise sind Mr und M_1r_1, wobei r und r_1 die Gipfelpunkte des direkt gesehenen bezw. des reflektierten roten Bogens bedeuten. Wegen der Gleichheit der Winkel rBM und $r_1B_1M_1$ sind die beiden Kreise kongruent; überdies liegen ihre Mittelpunkte M und M_1 symmetrisch in Bezug auf das Niveau des Wassers. Demgemäss wird der gespiegelte Bogen von dem direkt sichtbaren stets derart umschlossen, dass die Schnittpunkte D und E beider (vgl. Figur 1a) in der Oberfläche des Wassers sich befinden und ihre obersten Punkte r und r_1 von einander um $MM_1 = 2h$ entfernt sind. Der reflektierte Bogen Dr_1E wird nun aber von dem Auge in die Lage des Bogens Dr′E versetzt, welcher symmetrisch zu Dr_1E liegt (Figur 1a), bildet daher zufolge der obigen Auseinandersetzungen gerade die unter dem Wasser liegende Fortsetzung des direkt sichtbaren Bogens.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Was von den Strahlen roten Lichts gilt, lässt sich ohne weiteres auf die Strahlen jeder anderen Lichtgattung übertragen, nur dass dem Winkel α ein anderer, dem Brechungsexponenten der betreffenden Farbe entsprechender Wert beizulegen ist.

Das Ergebnis der vorhergehenden Betrachtungen lässt sich nun zusammenfassen, wie folgt:

Bei horizontaler Richtung der Sonnenstrahlen liegt der Gipfelpunkt des reflektierten Bogens um die doppelte Höhe des Auges über dem Wasser tiefer als der des direkt gesehenen Bogens gleicher Farbe; die gleichartigen Enden beider Bogen berühren sich; das Spiegelbild selbst ergänzt den über Wasser sichtbaren Bogen zu einem Vollkreise, dessen Centrum ebenso hoch über dem Wasser liegt als das Auge. Schon hiermit findet der Irrtum Sabine's (vgl. Einleitung) seine Erledigung; denn die Sehnen, über welchen sich die beiden Bogen spannen, sind gleich, obwohl der gespiegelte Bogen von einer Tropfenzone herrührt, welche tiefer liegt, als die den direkt sichtbaren Bogen erzeugenden Tropfen.

III.

Ich wende mich nun zu der Frage, welche Dufour vorzugsweise ins Auge gefasst und beantwortet hat, unter welchen Umständen es möglich ist, dass das beobachtete Spiegelbild dem Beschauer als das wirkliche Bild des gleichzeitig am Himmel gesehenen Bogens erscheint; jedoch will ich dieselbe von einem veränderten Standpunkte aus beleuchten und im Anschluss daran einige andere Punkte von Interesse berühren.

Figur 2 stelle die durch das Auge B parallel zur Richtung der Sonnenstrahlen gelegte Vertikalebene dar, es seien also r und r_1 die höchsten Punkte des direkt sichtbaren und des reflektierten roten Bogens, v und v_1 die entsprechenden Punkte der violetten Bogen, R und V die Incidenzpunkte der von r_1 bezw. v_1 kommenden Strahlen. Alsdann ist

$$\text{Winkel } rBM = \alpha = 42^0\ 30'$$
$$\text{Winkel } vBM = \beta = 40^0\ 40'$$

Die Höhe des reflektierten roten Bogens über dem Auge B wird durch den Winkel $r_1BM = \gamma$ gemessen, folglich erscheint der grösste Abstand r_1 beider Bogen von B aus unter dem Winkel $\alpha - \gamma$. Nun hat man

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{r_1M}{d}$$

oder, da $Mr = d\operatorname{tg}\alpha$ und $rr_1 = 2h$ ist,

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha - \frac{2h}{d}$$

Hieraus ist ersichtlich: Je kleiner die Höhe h des Auges über dem Wasser im Verhältnis zur Entfernung d von der Regenwand ist, um so geringer fällt der Unterschied zwischen α und γ aus, um so eher wird daher der Beobachter geneigt sein, das Spiegelbild für das Bild des direkt gesehenen Bogens zu halten.

Um einen deutlicheren Einblick in die Art zu geben, wie mit der Abnahme des Quotienten $\frac{2h}{d}$ der gespiegelte Bogen dem direkt gesehenen immer näher rückt, habe ich die folgende Tabelle nach obiger Formel berechnet.

$\frac{2h}{d}$	z. B. h	d	γ	$\alpha - \gamma$
0,4	20	100	27° 18,5′	15° 11,5′
0,2	5 20	50 200	35° 36,9′	6° 53,1′
0,1	5 20	100 400	39° 13,5′	3° 16,5′
0,05	5 20	200 800	40° 54,2′	1° 35,8′
0,02	5 20	500 2000	41° 52,2′	0° 37,8′
0,001	5 20	1000 4000	42° 11,2′	0° 18,8′
0,005	5	2000	42° 20,6′	0° 9,4′
0,0002	5	5000	42° 26,2′	0° 3,8′

Im fünften Beispiele beträgt der scheinbare Abstand der roten Bogen blos noch etwa $1^1/_4$ Vollmondsbreiten. Vergleicht man ferner die Werte von γ mit dem von β, so findet man, dass schon vom vierten Beispiele an γ grösser als β ist, dass also dann die beiden Bogen, der gespiegelte und der direkt sichtbare, jetzt in ihrer ganzen Breite aufgefasst, dergestallt in einander übergreifen, dass dieselbe Tropfenzone zur Erzeugung beider beiträgt, in beiden Fällen natürlich verschiedene Farben liefernd. In Wirklichkeit findet sogar dieses Übergreifen schon eher statt, als die Rechnung zeigt, da wegen der scheinbaren Grösse der Sonne jeder der beiden Bogen um etwa 32 Bogenminuten breiter ist.

Andererseits ist nicht zu übersehen, dass die scheinbaren Entfernungen der Gipfelpunkte r, r_1 und r′ von der Wasserfläche durch die Winkel

$$rBC = \delta, \qquad r_1BC = \delta_1, \qquad r'BC = \delta'$$

gemessen werden. Nun ist der Winkel MBC $= \varphi$ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{d}$$

bestimmt, folglich hat man

$$\delta = \alpha + \varphi, \qquad \delta_1 = \gamma + \varphi, \qquad \delta' = \alpha - \varphi.$$

In besonderen Fällen ergeben sich folgende Werte.

h	d	δ_1	δ'	$\delta - \delta' = 2\varphi$	$\delta - \delta_1 = \alpha - \gamma$
5	100	42° 5,2′	39° 38,3′	5° 43,4′	3° 16,1′
5	500	42° 26,6′	41° 55,6′	1° 8,8′	0° 37,8′
5	1000	42° 28,4′	42° 12,8′	0° 34,4′	0° 18,8′

Die Abweichung der entsprechenden Zahlenwerte für δ und δ', sowie für $\delta - \delta_1$ und $\delta - \delta'$ kann nicht überraschen. Wegen der Lage des Auges über dem Wasserspiegel muss der Unterschied zwischen dem Spiegelbild und dem am Himmel sichtbaren Bogen stets grösser

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erscheinen, als die Differenz zwischen dem letzteren und dem reflektierten Bogen, sofern nicht eine optische Täuschung unterläuft, welche die Wirkung des wahren Verhältnisses der Sehwinkel modificiert oder ganz aufhebt.[1])

Dagegen sind die Winkel rBv und r'Bv' stets gleich, d. h. der direkt gesehene Bogen erscheint ebenso breit wie das Spiegelbild. Doch ist auch hier eine Irreleitung des Urteils für die oberen Teile nicht ausgeschlossen.[2])

IV.

Es handelt sich nunmehr um den Ort der Incidenzpunkte P (Figur 1), in denen die das Spiegelbild hervorrufenden Strahlen die Wasserfläche treffen. Da die Strahlen jeder Farbe auf einer Rotationskegelfläche liegen, deren Umdrehungsaxe mit der festen Geraden B_1M_1 zusammenfällt und deren Knotenpunkt B_1 ist, da überdies der als eben zu betrachtende Wasserspiegel der Rotationsaxe parallel läuft, so ist aus bekannten geometrischen Gründen der Schnitt beider Flächen eine Hyperbel, deren Mittelpunkt in O ruht und deren der Kegelaxe B_1M_1 parallele Hauptaxe in die Gerade OC fällt. Demnach sind die Incidenzpunkte P für jede Farbe auf einen Hyperbelbogen beschränkt, welcher bis an die Regenwand heranreicht. Der Scheitel dieses Zweiges ist derjenige Punkt, in welchem der vom Gipfelpunkt des entsprechenden gespiegelten Bogens kommende Strahl die Wasserfläche trifft, für die rote Farbe also R, für die violette V (vergl. Figur 2); und es ist

$$OR = a = h \operatorname{ctg} \alpha$$
$$OV = a_1 = h \operatorname{ctg} \beta$$

Eine einfache geometrische Berechnung lehrt ferner, dass die imaginäre Halbaxe jeder solchen Hyperbel gleich $OB_1 = h$ ist, also von dem Brechungsexponenten nicht abhängt. Dagegen ändert sich der Asymptotenwinkel mit der Farbe; für die roten Strahlen ist er gleich α, für die violetten β. Da die Axen aller dieser Hyperbeln in dieselben geraden Linien fallen und der Asymptotenwinkel (α) der einen grösser als derjenige (β) der anderen ist, so wird der von den violetten Strahlen herrührende Hyperbelzweig von dem konzentrischen, durch die roten Strahlen erzeugten Zweige so umschlossen, dass die allen übrigen Farben entsprechenden Kurventeile den zwischen den beiden ersten liegenden Teil der Ebene ausfüllen. Beginnt daher die Wasserfläche erst in grösserer Entfernung vom Auge, als die Scheitel der beiden äussersten Hyperbelzweige liegen, so würde der obere Teil des gespiegelten Bogens nicht gesehen werden können. Dagegen würden die Enden desselben fehlen, wenn die Wasserfläche nicht bis an die Regenwand heranreichte.

Demgemäss wird das Areal, welches das Wasser wenigstens decken muss, wenn das Spiegelbild dem Beobachter vollständig sichtbar sein soll, durch zwei koaxiale Hyperbelzweige und die Regenwand begrenzt.

[1]) In der That wird das Auge beim Anblick des direkt gesehenen Bogens getäuscht. Derselbe erscheint niedriger als die Grösse des Sehwinkels erfordert, aus denselben Gründen, welche bewirken, dass die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes nicht eine vollkommene Halbkugel, sondern abgeplattet ist. Über die Berechnung dieser Abweichung vergl. Günther, Geophysik Band II. S. 122.

[2]) Bekanntlich erscheint das Farbenband des am Himmel sichtbaren Regenbogens an den Enden breiter als an den höheren Teilen. Diese mit der vorigen verwandte Erscheinung ist auf dieselbe Ursache zurückzuführen, wie die scheinbare Vergrösserung der Sonne, des Mondes und der Sternbilder am Horizont. Einen neuen interessanten Beitrag zur Erklärung dieser eigentümlichen Täuschung hat Stroobant gegeben (Bulletin de l'Académie royale de Belgique. Série 3, Tome VIII p. 719 und Tome X, p. 315. Vergl. auch Naturforscher, Jahrg. 1885 S. 150 und 442).

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

V.

Der rein geometrischen Betrachtung stelle ich einen zweiten, auf die Koordinatenmethode gegründeten Weg an die Seite, welcher an sich ein gewisses Interesse beansprucht. Zu dem Zwecke bezeichne ich (vergl. Fig. 1) den Neigungswinkel APV des aus dem Tropfen austretenden roten Strahl's tP durch ξ und den Winkel, welchen OP mit der zu den Sonnenstrahlen parallelen Geraden OC bildet, also POC durch η. Alsdann ist ξ eine Funktion von η. Um das Gesetz der Abhängigkeit, welches zwischen η und ξ besteht, zu finden, werde durch P die Parallele QP zu OC gezogen, sodass auch Winkel VPQ $= \eta$ ist, und um P eine Kugel gelegt. Auf der Oberfläche der letzteren liefern dann die Geraden Pt, PV und PQ die Ecken eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, dessen Hypotenuse FK ist. Da nun

$$\text{arc FK} = \alpha, \qquad \text{arc LF} = \xi, \qquad \text{arc KL} = \eta$$

ist, so besteht die Relation

$$\cos\eta \cdot \cos\xi = \cos\alpha. \tag{1}$$

Die Bestimmung des Orts für die Incidenzpunkte P aller Strahlen gleicher Farbe hat jetzt keine Schwierigkeit. Nimmt man O als Anfangspunkt und OX als Abscissenaxe für rechtwinklige Koordinaten und bezeichnet die Koordinaten des Punktes P durch x und y, so entspringen folgende Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = \overline{OP}^2 = h^2 \operatorname{ctg} \xi^2 \text{ oder}$$

$$\frac{h^2}{x^2 + y^2} = \operatorname{tg} \xi^2, \tag{2}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \eta, \tag{3}$$

denen man auch dadurch, dass man auf beiden Seiten der Gleichung (2) die Zahl 1 addiert und in ähnlicher Weise die Gleichung (3) behandelt, folgende Gestalt geben kann:

$$\frac{x^2 + y^2 + h^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\cos\xi^2}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{1}{\cos\eta^2}.$$

Multipliciert man die beiden letzten Formeln mit einander, so erhält man mit Rücksicht auf die Beziehung (1) die Gleichung des gesuchten Orts

$$\frac{x^2 + y^2 + h^2}{x^2} = \frac{1}{\cos\alpha^2},$$

welche sich noch auf die Form bringen lässt

$$\frac{x^2}{h^2 \operatorname{ctg}\alpha^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1$$

Hieraus erkennt man die Übereinstimmung mit dem obigen Resultat, dass nämlich der Ort eine Hyperbel mit den Halbaxen $a = h \operatorname{ctg} \alpha$ und $b = h$ ist. Der Parameter der Kurve ist demnach gleich $2h \operatorname{tg} \alpha$ und ihr Asymptotenwinkel α.

Auch die Fläche, welche von sämtlichen Strahlen Pt gleicher Farbe erfüllt wird, lässt sich mit Benutzung der oben gemachten Bemerkung, dass nämlich diese Strahlen sämtlich durch den festen Punkt B_1 gehen, durch analytische Mittel bestimmen (vergl. Figur 1). Dazu ist nur die Untersuchung eines beliebigen zur Axe OC der Hyperbel senkrechten Schnitts erforderlich. Die Regenwand ist eine dieser Bedingung entsprechende Ebene. Ihr Abstand von O ist OC $=$ d. Als Abscissenaxe werde die Schnittlinie VC der Regenwand und der Wasserfläche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gewählt, und O sei der Anfangspunkt für rechtwinklige Koordinaten. t ist ein beliebiger Punkt der zu bestimmenden Schnittkurve, seine Ordinate $tV = y$, seine Abscisse $VC = x$.

Ein Blick auf die Figur gestattet folgende Beziehungen abzulesen:

$$OV = \frac{d}{\cos\eta},\quad OP = h \operatorname{ctg}\xi,\quad PV = y \operatorname{ctg}\xi.$$

Da nun $OV = OP + PV = (h + y)\operatorname{ctg}\xi$ ist, so erhält man

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\xi = \frac{y+h}{d}\cos\eta$$

Ferner folgt aus dem Dreieck VOC:

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\eta = \frac{x}{d}$$

Es kommt jetzt darauf an, ξ und η aus den beiden Gleichungen (1) und (2) mit Hilfe der oben abgeleiteten Relation

$$(3) \qquad \cos\eta . \cos\xi = \cos\alpha$$

zum Fortfall zu bringen. Dies geschieht auf folgende Weise. Man giebt zunächst der Gleichung (2) die Gestalt

$$(4) \qquad \cos\eta^2 = \frac{d^2}{x^2+d^2}$$

und kombiniert letztere Formel mit (1), dann wird

$$\operatorname{tg}\xi^2 = \frac{(y+h)^2}{x^2+d^2}$$

und hieraus durch eine leicht erkennbare Umformung

$$\cos\xi^2 = \frac{x^2+d^2}{(y+h)^2+x^2+d^2}$$

Durch Multiplikation dieser letzten Gleichung mit Formel (4) gelangt man mit Rücksicht auf (3) zu der Gleichung der gesuchten Schnittkurve

$$\cos\alpha^2 = \frac{d^2}{(y+h)^2+x^2+d^2} \quad \text{oder}$$

$$(y+h)^2 + x^2 = d^2 \operatorname{tg}\alpha^2$$

d. h. der Schnitt ist ein Kreis. Somit ist ein neuer Beweis für die Behauptung erbracht, dass der Ort der Strahlen Pt ein Rotationskegel ist, dessen Axe derjenigen der Hyperbel parallel läuft.

VI.

Die Erscheinung der Spiegelung eines Regenbogens ist bisher unter der besonderen Voraussetzung erörtert worden, dass die Sonnenstrahlen horizontale Richtung haben, dass sich also die punktuell gedachte Sonne im Horizont befindet. Es fragt sich jetzt, wie sich die Sache ändert, wenn die Sonne in einer beliebigen Höhe z über dem Horizont des Beobachters steht.

Ein Teil der bisherigen Entwickelungen lässt sich ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen. Ich werde daher nur auf solche Fragen näher eingehen, deren Behandlung neue Gesichtspunkte erfordert. Um Wiederholungen zu vermeiden, bemerke ich im voraus, dass die Sonne auch im Folgenden als auf ihren Mittelpunkt reduciert gedacht wird. Um den Einfluss ihrer scheinbaren Grösse in Rechnung zu ziehen, hat man nur in allen nachher vorkommenden Formeln z durch $z \pm \rho$ zu ersetzen, wobei ρ den scheinbaren Halbmesser unseres Tagesgestirns bedeutet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine der obigen durchaus analoge geometrische Betrachtung (vergl. II) lehrt, dass auch, wenn die Strahlen der Sonne unter irgend einem Winkel z gegen die Horizontale geneigt sind, alle Strahlen tP von gleicher Farbe, welche das Spiegelbild hervorrufen, auf eine Rotationskegelfläche beschränkt sind, und dass der Ort der Incidenzpunkte P, in welchen diese Strahlen den Wasserspiegel treffen, eine Hyperbel ist. Die Axe des Kegels ist jedoch der Wasserfläche nicht parallel, sondern bildet mit ihr einen Winkel, welcher gleich der Höhe z des Sonnenmittelpunkts ist.

Zur näheren Untersuchung dieses Falles werde durch das Auge B die den Sonnenstrahlen parallele Vertikalebene gelegt. Ihre Schnittlinie mit der Wasserfläche sei OC (Fig. 3). In ihr liegen die Gipfelpunkte sämtlicher verschiedenfarbigen Bogen, der direkt sichtbaren und der reflektierten, u. a. auch die höchsten Punkte r und r_1 der beiden roten Bogen. Dasselbe gilt von dem Gegenpunkt B_1 des Auges B in Bezug auf den Wasserspiegel. Zieht man noch BM und B_1M_1 parallel zu dem von der Sonne kommenden Strahl Sr, so stellen diese Linien die Axen der beiden Kegelflächen vor, von denen die eine die direkt nach dem Auge gelangenden roten Strahlen, die andere die Strahlen enthält, welche den gespiegelten Bogen gleicher Farbe dem Auge sichtbar machen. Auf den Kegelaxen ruhen die Mittelpunkte M und M_1 der zugehörigen Kreise, und es ist Winkel

$$SrB = rBM = r_1B_1M_1 = \alpha.$$

Von besonderer Wichtigkeit ist nun die Bemerkung, dass die Ebenen der beiden Bogen bezw. auf den parallelen Geraden BM und B_1M_1 senkrecht stehen und deshalb parallel sind, im allgemeinen jedoch nicht zusammenfallen, da ihr Abstand

$$MK = h \sin z$$

ist, also nur für $z = o$ verschwindet. Ueberdies gewinnt man durch Betrachtung der Figur leicht die Ueberzeugung, dass die Strecke

$$rr_1 = MM_1 = BB_1 = 2h \text{ und}$$
$$rr_1 \parallel MM_1 \parallel BB_1$$

ist. Offenbar gilt das Gleiche für jede andere Farbe. Demgemäss lautet das erste Ergebnis:

Der Gipfelpunkt und der Mittelpunkt des gespiegelten Bogens liegen um die doppelte Höhe des Auges über dem Wasser tiefer als die entsprechenden Punkte des direkt sichtbaren Bogens gleicher Farbe. Die Ebenen beider Bogen haben parallele Lage und den Abstand h sin z.

Zieht man rF und BL parallel zu OL, so ist Winkel

$$SrF = LBM = z,$$
$$FrB = rBL = \alpha - z.$$

Wenn man ferner BL d. i. die horizontale Entfernung der Punkte r und r_1 von B durch d bezeichnet, so besteht zwischen den scheinbaren Höhen der Gipfelpunkte r und r_1 über dem Auge B, also zwischen den Winkeln

$$r_1BL = \gamma \text{ und } rBL = \alpha - z,$$

die leicht erkennbare Beziehung:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\alpha - z) - \frac{2h}{d},$$

aus welcher hervorleuchtet, dass der Unterschied zwischen γ und $\alpha - z$ um so geringer wird, je kleiner der Quotient $\frac{2h}{d}$ ist, d. h.:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei konstanter Sonnenhöhe z erscheinen die Gipfel des direkt sichtbaren und reflektierten Bogens um so näher an einander gerückt, je geringer die Höhe des Auges über dem Wasser im Verhältnis zu der horizontalen Entfernung der die höchsten Punkte der Bogen erzeugenden Tropfen ist.

VII.

Der Punkt R, in welchem der vom Punkte r_1 kommende Strahl die Wasserfläche trifft, bevor er in das Auge B gelangt, ist der Scheitel des Hyperbelzweiges, welcher die Incidenzpunkte aller roten Strahlen enthält, die dem Beobachter den reflektierten Bogen sichtbar machen. Den Mittelpunkt der Hyperbel findet man durch folgende Konstruktion. Man ziehe von B_1 aus den Strahl B_1Q so, dass Winkel

$$M_1B_1Q = \alpha$$

ist und verlängere CO und B_1Q bis zum Durchschnitt N; alsdann ist N der andere Scheitel, also der Halbierungspunkt A der Strecke RN der Mittelpunkt der Hyperbel.

Auch die Konstanten der Kurve lassen sich nunmehr durch Rechnung bestimmen, zunächst die Längen der Axen, welche ich durch 2a und 2b bezeichne. Aus der Figur 3 liest man ab, was folgt.

$$\text{Winkel } ORB_1 = \alpha - z \text{ und } ONB_1 = \alpha + z, \text{ daher}$$
$$RO = h\,\mathrm{ctg}(\alpha - z),$$
$$ON = h\,\mathrm{ctg}(\alpha + z).$$

Nun ist die reelle Axe der Hyperbel $2a = RN = RO + ON$, folglich erhält man nach gehöriger Reduktion

$$(1) \qquad a = \frac{h \sin 2\alpha}{2 \sin(\alpha + z)\,(\sin(\alpha - z)}$$

Um den Wert der imaginären Axe 2b zu finden, ziehe man RQ und NI parallel zu rC (Figur 3); alsdann liefern die rechtwinkligen Dreiecke NRQ und RNI die Relationen

$$RQ = 2a\,\mathrm{tg}(\alpha + z)$$
$$IN = 2a\,\mathrm{tg}(\alpha - z)$$

Da nun RQ und IN mit 2b durch die Gleichung $RQ \,.\, IN = 4b^2$ verknüpft sind, so ergiebt sich ohne weiteres

$$b = a\,\sqrt{\mathrm{tg}(\alpha + z)\,.\,\mathrm{tg}(\alpha - z)}$$

oder, wenn man obigen Wert von a substituiert,

$$(2) \qquad b = \frac{h \sin 2\alpha}{\sqrt{\sin 2(\alpha + z) \sin 2(\alpha - z)}}$$

Die beiden Formeln (1) und (2) können dazu dienen, auch den Parameter und den Asymptotenwinkel der Hyperbel als Funktionen der Grössen α, z und h darzustellen. Bezeichnet man den Parameter durch 2p und den Asymptotenwinkel durch 2ω, so findet man

$$(3) \qquad p = \frac{h \sin 2\alpha}{2 \cos(\alpha + z) \cos(\alpha - z)},$$

$$(4) \qquad \mathrm{tg}\,\omega = \sqrt{\mathrm{tg}(\alpha + z)\,\mathrm{tg}(\alpha - z)}$$

Bei der Betrachtung der Gleichungen (1), (2) und (3) fällt in die Augen, dass die Halbaxen der Kurve ebenso wie ihr Parameter der Höhe h des Auges direkt proportional sind, während der Asymptotenwinkel von h unabhängig ist. Um auch erkennen zu lassen, in welcher Weise

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diese Grössen sich ändern, wenn die Sonnenhöhe z andere Werte annimmt, bringe ich die Gleichungen auf folgende Form:

$$a = \frac{h \sin 2\alpha}{\cos 2z - \cos 2\alpha},$$

$$b = \frac{h \sin 2\alpha \,.\, \sqrt{2}}{\cos 4z - \cos 4\alpha},$$

$$p = \frac{h \sin 2\alpha}{\cos 2z + \cos 2\alpha},$$

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(1 + \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2z}\right)}.$$

Da der cosinus bei abnehmendem Argument zunimmt und seinen grössten absoluten Wert erreicht, wenn das Argument gleich Null ist, so erkennt man, dass ein Wachsen von z auch eine Vergrösserung von a, b und p zur Folge hat und dass diese Grössen gleichzeitig mit z abnehmen, bis sie ihr Minimum für $z = o$ erreichen. Im letzteren Falle reducieren sich die Werte von a, b, p, wie aus den allgemeinen Formeln hervorgeht, auf folgende:

$$a = h \operatorname{ctg}\alpha, \; b = h, \; p = h \operatorname{tg}\alpha.$$

Dagegen nimmt ω bis 0 ab, wenn z bis α wächst, und erreicht seinen Maximalwert α für $z = o$.

Will man die Konstanten des Hyperbelzweiges, welchen die violetten Strahlen des reflektierten Bogens auf der Wasserfläche inducieren, als Funktionen von h und z darstellen, so hat man nur nötig, in obigen Formeln $\alpha\,(= 42^0\ 30')$ durch $\beta\,(= 40^0\ 40')$ zu ersetzen. Man gewinnt dann leicht die Überzeugung, dass beide Zweige das Flächenstück begrenzen, auf welchem sämtliche Strahlen, die das vollständige Farbenband des gespiegelten Bogens dem Auge sichtbar machen, auffallen.

Der Scheitel des einen Zweiges ist R, der des andern sei V. Nun besteht zwischen den horizontalen Entfernungen der Punkte R und V vom Auge und der Sonnenhöhe z der durch die folgenden Formeln ausgedrückte Zusammenhang:

$$RO = h \operatorname{ctg}(\alpha - z),$$

$$VO = h \operatorname{ctg}(\beta - z).$$

Wird z grösser, so vergrössern sich auch OR und OV, d. h. die Scheitel der beiden Hyperbeln entfernen sich in horizontaler Richtung um so weiter vom Auge, je höher die Sonne steht. Für $z = 0$ liegen sie dem Beobachter am nächsten. Letzterer muss also bei niedrigem Stand der Sonne dem Ufer des Wassers näher treten, als bei höherem, wenn er die höchsten Teile des gespiegelten Bogens sehen will.

Bildet man die Differenz zwischen OV und OR, so erhält man nach gehöriger Umformung

$$RV = \frac{h \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - z)\,\sin(\beta - z)}.$$

Hier wird bei zunehmendem z der Divisor des Quotienten kleiner, sodass der Abstand RV der beiden Scheitel wächst, während er für $z = 0$ seinen kleinsten Wert hat.

Durch Zusammenfassung der letzten Ergebnisse kann ich also folgenden Satz aussprechen:

Das Areal, welches das Wasser wenigstens decken muss, wenn der reflektierte Bogen dem Beobachter vollständig sichtbar sein soll, ist von der Regenwand und zwei Hyperbelzweigen begrenzt, deren gemeinsame Hauptaxe in der durch Auge und Sonne bestimmten Vertikalebene liegt. Die horizontale Entfernung der Scheitel beider Kurvenzweige vom Auge ist ebenso wie der Abstand der Scheitel um so grösser, je höher die Sonne steht; den kleinsten Wert hat jede der drei Grössen, wenn sich die Sonne im Horizont befindet.

Einige der vorstehenden Resultate können auch aus der Figur abgelesen werden, indessen habe ich den Weg der Rechnung der geometrischen Betrachtung vorgezogen, weil der erstere alle aufzuwerfenden Fragen vollständig und mit Sicherheit zu beantworten und überdies jeden Einzelfall numerisch festzuhalten gestattet.

VIII.

Bei der Frage nach der gegenseitigen Lage der Enden des direkt gesehenen und reflektierten Bogens gleicher Farbe, zu welcher ich mich jetzt wende, tritt in sofern eine Schwierigkeit auf, als die Ebenen der beiden Bogen im allgemeinen nicht zusammenfallen. Indessen findet auch diese Aufgabe eine einfache Erledigung, wenn man die beiden Kegelflächen, welche die Strahlen enthalten, die dem Auge die beiden Bogen sichtbar machen, durch eine zu den parallelen Axen senkrechte Ebene durchschneidet und zunächst die Schnittfigur studiert. Die Wahl der Ebene des reflektierten Bogens erweist sich dabei als zweckmässig. Die Schnitte sind dann zwei Kreise mit den Mittelpunkten K und M_1 und den Radien r_2K und r_1M_1 (vergl. Figur 3). Der Abstand der höchsten Punkte r_2 und r_1 beider Kreise ist stets grösser als die Centrale KM_1 und zwar besteht zwischen r_1r_2 und KM_1 die Beziehung

$$r_1 r_2 = KM_1 \cos\alpha,$$

deren Richtigkeit man sofort erkennt, wenn man beachtet, dass der Abstand der beiden parallelen Geraden r_2B und r_1B_1 gleich dem der Axen BM und B_1M_1, also gleich KM_1 ist und sich gegen die Strecke r_1r_2 unter dem Winkel α neigt. Da ausserdem

$$MK_1 = 2h \cos z$$

ist, so lässt sich r_1r_2 auch direkt als Funktion von h und z darstellen; es ist

$$r_1 r_1 = 2h \cos\alpha \cdot \cos z.$$

Dadurch ist die gegenseitige Lage der beiden Kreise vollständig fixiert. Die in der Wasserfläche liegenden Sehnen derselben seien D_2E_2 und D_1E_1. Die Endpunkte der beiden Sehnen können im allgemeinen nicht zusammenfallen, sondern D_1E_1 muss kleiner als D_2E_2 sein. Beides folgt aus der geometrischen Thatsache, dass die Schnittpunkte zweier Kreise auf der normalen Halbierungslinie der Centrale liegen müssen. Denn im vorliegenden Falle befinden sich beide Centra unterhalb des Wasserspiegels, folglich muss dies auch von den Schnittpunkten der beiden Kreise gelten, und darin findet die obige doppelte Behauptung ihre Begründung.

Nun entsprechen allerdings die Punkte D_2 und E_2 nicht genau den Enden D und E, sondern etwas höher gelegenen Punkten des direkt gesehenen Bogens. Aber eben deshalb gilt sogar in etwas verstärkterem Masse die Behauptung:

Die Begrenzungssehne D_1E_1 des reflektierten Bogens ist und erscheint im allgemeinen kürzer als die Sehne DE des direkt gesehenen Bogens gleicher Farbe.

Die Wirkung, welche eine Änderung der Höhe h des Auges unter sonst gleichen Umständen für die Abstände der Enden beider Bogen zur Folge hat, kann mit Hilfe einer räumlichen Betrachtung erkannt werden, für welche die Figur 3 eine genügende Unterstützung bietet. Erstens ist ersichtlich, dass die Ebenen der beiden Bogen sich durch Parallelverschiebung nähern oder entfernen, je nachdem h kleiner oder grösser wird, was auch aus dem Ausdruck h sin z für den Abstand beider Ebenen hervorgeht. Zweitens zeigt sich, dass, wenn h kleiner

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird, GM wächst, dagegen HM_1 abnimmt, während unter der gemachten Annahme die Radien rM und r_1M_1 der Kreise, welchen die Bogen angehören, konstant und gleich gross bleiben, folglich muss die Sehne DE kleiner, die andere D_1E_1 grösser werden; und umgekehrt stellt sich die Sache bei einer Vergrösserung von h. In jedem Falle ändern sich DE und D_1E_1 im entgegengesetzten Sinne. Das Resultat des Zusammenwirkens beider Umstände ist demgemäss folgendes:

Bei irgend einem bestimmten Stande der Sonne findet eine Annäherung oder Entfernung der gleichfarbigen Enden des direkt gesehenen und reflektierten Bogens statt, je nachdem der Beobachter seinen Standpunkt erniedrigt oder erhöht, ohne seinen Abstand von der Regenwand zu ändern.

Diese Forderung der Theorie liesse sich bei passender Gelegenheit leicht dadurch verificieren, dass man die Verschiebung beobachtet, welche die sich event. berührenden Farben der beiden Bogen bei Veränderung der Höhe des Auges erfahren.

Hierbei ist die Bemerkung von Wichtigkeit, dass durch Verkleinerung der Höhe h des Auges zwar eine fortgesetzte Annäherung der gleichfarbigen Enden erzielt wird, dass jedoch bei beliebigem Stande der Sonne eine vollständige Koincidenz, welche nur für $h = 0$ eintreten könnte, aus dem Grunde ausgeschlossen ist, weil in diesem Falle eine Spiegelung überhaupt illusorisch wird, also nur der Bogen am Himmel gesehen werden kann. Dies ist die notwendige Ergänzung zu den Auseinandersetzungen am Schluss von Nro. II, durch welche ich meine in der Einleitung ausgesprochene Behauptung begründet habe, dass der Stand der Sonne für die Erklärung der Ungleichheit der Sehnen DE und D_1E_1, welche den direkt und indirekt sichtbaren Bogen gleicher Farbe begrenzen, der wesentlichere Faktor sei. Die Grösse des Unterschiedes ist zwar bei einer bestimmten von Null verschiedenen Sonnenhöhe von h abhängig; aber die Entscheidung über die Gleichheit oder Ungleichheit wird durch die Grösse von z bedingt.

Ändert sich die Höhe z der Sonne, während die übrigen in Betracht kommenden Grössen, also h und d, konstant bleiben, so nähern oder entfernen sich die Ebenen der beiden Bogen ebenfalls, jedoch nicht, wie bei der Änderung von h, durch Parallelverschiebung, sondern durch Drehung. Beim Abnehmen von z bewegen sich beide Ebenen auf eine vertikale Grenzlage zu, welche sie für $z = o$ erreichen, ohne dass die Erscheinung einer Spiegelung aufhört.

Der Vollständigkeit halber will ich noch zeigen, wie die letzte Frage an der Hand der Rechnung weiter verfolgt werden kann. Dazu ist nur nötig, die Sehnen

$$DE = 2s \text{ und } D_1E_1 = 2s_1,$$

sowie den Abstand ihrer Mittelpunkte GH zu berechnen. (Figur 3.)

Bezieht man die Hyperbel, welche die Strahlen des reflektierten roten Bogens auf der Wasserfläche bilden, auf ihre Axen, so ist s_1 die zur Abscisse $AH = x$ gehörige Ordinate, folglich

$$s_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Setzt man $OH = e$, so ist

$$x + a = HN = e + h\operatorname{ctg}(\alpha + z),$$
$$x - a = HR = e - h\operatorname{ctg}(\alpha - z), \text{ folglich}$$

$$(1) \qquad s_1 = \frac{b}{a}\sqrt{\Big(e + h\operatorname{ctg}(\alpha + z)\Big)\Big(e - h\operatorname{ctg}(\alpha - z)\Big)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man ferner $OG = f$, so erhält man aus der Figur folgende Beziehungen:

$$rM = BM \operatorname{tg} \alpha,$$
$$BM = f \cos z, \text{ also}$$
$$rM = f \operatorname{tg} \alpha \cos z;$$
$$GM = PM \operatorname{tg} z,$$
$$PM = BM - BP = f \cos z - \frac{h}{\sin z}, \text{ also}$$
$$GM = f \sin z - \frac{h}{\cos z};$$
$$s^2 = rM^2 - GM^2, \text{ folglich}$$
$$s = \sqrt{f^2 \operatorname{tg} \alpha^2 \cos z^2 - \left(f \sin z - \frac{h}{\cos z}\right)^2} \tag{2}$$

Durch ein erneutes Studium der Figur findet man noch folgende Reihe von Gleichungen:

$$HG = KM \cos z,$$
$$KM = rr_1 \sin z,$$
$$rr_1 = 2h \cos(\alpha - z).$$

Da überdies $e - f = GH$ ist, so hat man nur die 4 Gleichungen mit einander zu multiplicieren, um die dritte Hauptformel zu erhalten:

$$e - f = 2h \sin z \cos z \cos(\alpha - z) \text{ oder}$$
$$e - f = h \sin 2z \cos(\alpha - z). \tag{3}$$

Die Formeln (1), (2) und (3) sind nun unter der Annahme zu diskutieren, dass e und h konstant bleiben. Hierzu benutze ich die obige Bemerkung, dass $\operatorname{tg} \omega$ oder, was dasselbe ist, $\frac{b}{a}$ mit abnehmendem z zunimmt. Berücksichtigt man noch, dass unter derselben Voraussetzung einer Verkleinerung von z auch $\operatorname{ctg}(\alpha + z)$ wächst, während $\operatorname{ctg}(\alpha - z)$ abnimmt, so äussert sich der Gesamteffekt dieser Änderungen darin, dass s_1 unausgesetzt wächst, wenn z kleiner wird, und seinen grössten Wert erreicht, wenn $z = 0$ ist.

Im letzteren Falle ($z = 0$) gehen die drei Formeln in die folgenden über

$$s_1 = \sqrt{e^2 \operatorname{tg} a^2 - h^2}, \quad s = \sqrt{f^2 \operatorname{tg} \alpha^2 - h^2} \text{ und } e - f = 0,$$

folglich ist, welches auch der Wert von h sein mag,

$$s = s_1.$$

Da dann überdies die Ebenen der beiden Bogen zusammenfallen, so heisst das: die Enden des reflektierten Bogens berühren die des wirklichen.

Demgemäss liefern die letzten Untersuchungen folgendes Resultat:

Wenn die Sonnenhöhe z abnimmt, so wächst unter sonst gleichen Verhältnissen die Sehne $2s_1$, über welcher der gespiegelte Bogen sich spannt, bis zu ihrem Maximalwerte, welchen sie für $z = 0$ erreicht. Nur im letzteren Falle berühren sich die korrespondierenden Enden des reflektierten und direkt gesehenen Bogens.

Die obigen Formeln gestatten auch in jedem anderen Falle die Lage der Enden beider Bogen genau zu bestimmen, insbesondere auch durch Einführung der den übrigen Farben entsprechenden Werte des Winkels α festzustellen, ob resp. welche Farben an den Enden beider Bogen zusammenliegen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Von Interesse ist noch die Erörterung der unteren Grenze der Sehne $2s_1$, weil sie zur Beantwortung der Frage führt, bei welchem Wert der Sonnenhöhe z die Möglichkeit der Spiegelung eines Regenbogens aufhört. Offenbar tritt der gesuchte Fall dann ein, wenn $2s_1 = 0$ ist, und dazu ist notwendig, dass

$$e - h \operatorname{ctg} (\alpha - z) = 0$$

ist. Nun ist aber dann e die horizontale Entfernung des Gipfelpunktes r des direkt gesehenen Bogens, welche oben durch d bezeichnet worden ist, also genügt der verlangte Grenzwert von z der Gleichung:

$$d = h \operatorname{ctg} (\alpha - z).$$

Der Quotient $\frac{d}{h}$ hat eine einfache geometrische Bedeutung. Setzt man

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{d}{h},$$

so stellt φ den spitzen Winkel dar, unter welchem $BO = h$ von C aus erscheint (vergl. Figur 3). Die Grenzbedingung ist daher jetzt

$$\alpha - z = \varphi.$$

Hieraus folgt:

Ist $z > \alpha - \varphi$, wobei φ durch die Gleichung $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{d}{h}$ bestimmt ist, so wird die Entstehung eines Spiegelbildes unmöglich.

Zu demselben Ergebnis gelangt man auch durch die Überlegung, dass eine Spiegelung nicht mehr stattfindet, wenn der Scheitel R des durch die roten Strahlen des reflektierten Bogens erzeugten Hyperbelzweiges vertikal unter r liegt. Da im allgemeinen $OR = h \operatorname{ctg}(a-z)$ ist, so hat man wieder die Bedingung $d = h \operatorname{ctg}(\alpha - z)$.

Der erhaltene Satz giebt Anlass zu einer interessanten Folgerung, die ich durch ein Beispiel illustrieren will.

Je höher die Sonne steht, desto niedriger werden beide Bogen sein, der wirkliche wie der gespiegelte. Während aber der letztere schon für $z = \alpha - \varphi$ verschwindet, wird die Erzeugung des ersteren erst für $z = \alpha$ unmöglich. Ist z. B. $h = 5$ m und $d = 100$ m, so findet man

$$\varphi = 2^0\ 52'$$

Wenn daher in diesem Falle die Höhe der Sonne zwischen $42^0\ 30'$ und $39^0\ 38'$ liegt, so würde der Beobachter zwar direkt einen Regenbogen am Himmel sehen, aber selbst unter sonst günstigen Verhältnissen den Anblick eines Spiegelbildes nicht geniessen.

Ich stehe am Schlusse meiner theoretischen Untersuchung und stelle nun das Facit derselben den bis jetzt über den Gegenstand bekannt gewordenen Erfahrungen gegenüber. Es handelt sich dabei vorzugsweise um die durch Genauigkeit sich auszeichnenden Mitteilungen der beiden hervorragenden englischen Physiker Crookes und Sabine, welche mir noch vor dem Abgange des Manuskripts in die Druckerei im Original zu Gesicht gekommen sind.

Die obige theoretische Erörterung setzte eine ruhige, ja sogar vollkommen glatte Wasserfläche voraus. Indessen ist nach Crookes die Glätte keineswegs im strengsten Sinne des Wortes erforderlich. Denn die See war zwar ruhig, aber ihre Oberfläche über und über mit winzigen Wellen bedeckt, und doch fand eine vollkommene Reflexion eines Hauptregenbogens statt; ja es konnte sogar eine schwache Spiegelung eines Nebenbogens entdeckt werden,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und auch der dunkle Raum zwischen beiden Bogen war deutlich reproduciert. Beiläufig sei bemerkt, dass Crookes gleichzeitig zwei Bogen am Himmel gesehen hat, den Nebenbogen sogar mit beträchtlicher Intensität. Auch bei Sabine's Versuchen waren stets vier Bogen sichtbar, zwei direkt und zwei durch Spiegelung.

Leider fehlt bei Crookes eine nähere Angabe hinsichtlich der Höhe seines Auges über der Oberfläche des Meeres. Doch darf man annehmen, dass dieselbe im Verhältnis zu der Entfernung der die Regenbogen erzeugenden Tropfenzonen nicht klein gewesen sei. Denn der Beobachter befand sich auf einem Brückenpfeiler, dabei regnete es über ihm und auf der See aus etwas zerteilten Wolkenmassen. Demnach müsste das Spiegelbild bedeutend niedriger erschienen sein als der wirkliche Bogen. Indessen hat Crookes auch diesen Punkt übergangen.

Vollständiger ist der Bericht hinsichtlich der übrigen Einzelheiten. Das Spiegelbild reichte beinahe bis an den Pfeiler heran; zweitens zeigten die Farben an den Enden beider Bogen eine Verschiebung, die jedoch verhältnismässig gering war. Diese Beobachtungsthatsachen erklären sich sämtlich aus dem Umstande, dass die Erscheinung bei tiefem Stande der Sonne beobachtet wurde. Auch Sabine fand die Durchmesser der beiden reflectierten Bogen stets merklich kleiner als die der gleichzeitig direkt gesehenen, fügt aber eine Bemerkung über die Höhe der Sonne und des Auges nicht hinzu. Es muss daher der Zukunft vorbehalten bleiben, die Berührungspunkte zwischen Theorie und Erfahrung zu vermehren. Immerhin darf ich sagen, dass, soweit die Mitteilungen für eine sichere Entscheidung hinreichen, die schönste Übereinstimmung stattfindet.

So schliesse ich denn die vorliegende, auf elementaren Betrachtungen beruhende Studie mit dem Wunsche, dass dieselbe sowohl nach der Seite der physikalischen Ergebnisse als auch hinsichtlich der methodischen Behandlung des Gegenstandes nicht ohne Interesse gelesen werden möge.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und auch der dunkle Raum zwischen beiden Bogen war deutlich reproduciert. Beiläufig sei
bemerkt, dass Crookes … gesehen hat, den Nebenbogen sogar
mit beträchtlicher Intens… waren stets vier Bogen sichtbar,
zwei direkt und zwei d…

Leider fehlt bei … tlich der Höhe seines Auges über
der Oberfläche des Mee… ss dieselbe im Verhältnis zu der
Entfernung der die Re… icht klein gewesen sei. Denn der
Beobachter befand sich … hete es über ihm und auf der See
aus etwas zerteilten … s Spiegelbild bedeutend niedriger
erschienen sein als der … kes auch diesen Punkt übergangen.

Vollständiger … gen Einzelheiten. Das Spiegelbild
reichte beinahe bis an … die Farben an den Enden beider
Bogen eine Verschiebu… ing war. Diese Beobachtungsthat-
sachen erklären sich s… Erscheinung bei tiefem Stande der
Sonne beobachtet wur… esser der beiden reflectierten Bogen
stets merklich kleiner … henen, fügt aber eine Bemerkung
über die Höhe der So… uss daher der Zukunft vorbehalten
bleiben, die Berührung… rung zu vermehren. Immerhin darf
ich sagen, dass, sowe… tscheidung hinreichen, die schönste
Übereinstimmung stat…

So schliesse … aren Betrachtungen beruhende Studie
mit dem Wunsche, d… der physikalischen Ergebnisse als
auch hinsichtlich der … standes nicht ohne Interesse gelesen
werden möge.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf