Das abgekürzte Rechnen

für Eltern und Schüler dargestellt von Prof. Dr. Zickerow.

Der Gebrauch von Zahlen mit mehr als vier geltenden Ziffern ist nur in verhältnismäßig wenigen Fällen des Verkehrslebens berechtigt. Wenn es im Reichshaushaltsetat für das Jahr 1911 heißt: der ordentliche Etat schließt in Einnahme und Ausgabe mit 2707819913 Mark ab, so würde in ebenso entgegenkommender Weise oder vielleicht noch besser dem Interesse des deutschen Reichsbürgers genügt, wenn statt der Zahl, die genau zu lesen niemand Zeit hat, einfach 2,7 Milliarden oder 2707 Millionen geschrieben würde.

Wie prunkhaft gestalten sich in den Zeitungen die großen Abrechnungen unsrer Banken, die Bilanzen mit Debet und Kredit, Aktiva und Passiva usw. Beispielsweise finde ich da 1891748783 M. 80 Pf. als Summe von achtzehn 6 bis 9 stelligen Posten verrechnet, darunter auch einen von 400000 M., der also nur schätzungsweise eingestellt werden konnte. Daß daraus die Wertlosigkeit der letzten 6 Stellen in allen 18 Posten folgt, ist nicht beachtet worden. Um denselben Grad der Genauigkeit zu erhalten, hätte die Angabe der ersten 4 Ziffern — 1891 Millionen Mark — genügt. Zahlen mit mehr als 4 geltenden Ziffern stellen im allgemeinen gewisse Arbeitswerte dar. Wenn die Sonnenhöhe auf 23,497° angegeben wird, so ist dies nur durch Ablesung feinster Kreisteilungen am Höhenkreis ermittelt worden. Die Feststellung der Zahl erfordert eine gewisse Zeit, und die Instrumente, die dazu gebraucht werden, stellen einen gewissen Wert dar. Während Winkelmessungen noch leicht auszuführen sind, bieten diejenigen skalarer Größen — Strecken, Flächen, Massen — weit größere Schwierigkeiten. So erforderte die fünfmalige, genaue Messung einer Strecke von 43,428 m Länge bei Gelegenheit einer Basismessung für eine Triangulation fünf Stunden Arbeitszeit und konnte nur mit Instrumenten ausgeführt werden, die auch bedeutenden Wert hatten. Bei solchen Messungen bedarf es einschränkender Bedingungen, Rücksichtnahme auf den Barometerstand, auf die Refraktion (Brechung des Lichtstrahls in der Luft), auf die Temperatur u. a. Da sich der Stahl unserer Eisenbahnschienen bei 100° C. im Verhältnis von 1 : 810 ausdehnt, ist bei Legung der 18 m langen Übergangsschienen mit einer Zunahme von 22 mm zu rechnen. Noch größere Arbeitswerte stellen die Zahlen astronomischer, geodätischer und physikalischer Präzisionsarbeiten oder chemischer Wägungen dar; hier sind sogar 6 geltende Ziffern existenzberechtigt.

Für das schulgemäße Rechnen genügen daher Zahlen mit 4 geltenden Ziffern vollkommen. Um nun die für das Rechnen an höheren Lehranstalten, namentlich an Gymnasien, aufs äußerste beschränkte Zeit nach Möglichkeit auszunützen, wird jede weitere Vereinfachung der Rechenarbeit sich von selbst empfehlen. Die „abgekürzte Rechnung“ wird durch die aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts stammende „österreichische Methode“ vorbereitet, die auch übrigens in Süddeutschland, Frankreich und Italien angewendet wird. Im wesentlichen ist sie ein Zuzählen mit Hilfe der dekadischen Ergänzung, wie es schon Fibonacci um 1220 ausführte.

Der Hauptschullehrer F. A. Haidinger*) stellt in seiner Anleitung zur Rechenkunst, 1. Teil, Wien 1799, das Subtrahieren mit dem Borgen und das Subtrahieren ohne Borgen dar. Seite 46: „Der Grund dieses letzteren Verfahrens ist der: Wenn man den Rest der Subtraktion zu dem Subtrahendus addiert, muß der Minuendus herauskommen, z. B. 3 von 7 fl. bleiben 4 fl., denn 4 und 3 sind 7.“ Bis zum letzten Viertel des vorigen Jahrhunderts wurden an den österreichischen Volksschulen beide Arten gelehrt, indem im 3. Schuljahre das Subtrahieren mit Wegzählen und erst im 4. Schuljahre das mit Zuzählen entwickelt wurde; seitdem wird nur die letztere Art gepflegt. Leider sind die Versuche, die „österreichische Methode“ an unsern höheren Schulen durchzuführen, vielfach daran gescheitert, daß die Eltern diese Rechenart nicht verstanden und daher mit der Schule nicht Hand in Hand arbeiten konnten. In den nachstehenden Blättern soll deshalb beides, die österreichische Weise und das darauf begründete abgekürzte Rechnen an mehreren Beispielen ausführlich dargelegt werden.

I. Das Rechnen mit ganzen Zahlen.

1. Addition. Für das Zusammenzählen gibt die österreichische Methode keine besonderen Vorschriften. Dafür möchte ich aber daran erinnern, daß beim Addieren das Zusammenfassen zu vollen Zehnern und das Benutzen der Multiplikation, wenn zufällig mehrere gleiche Posten zu addieren sind, viel zu wenig geübt und angewandt wird. Darum folge hier ein Beispiel:

	man zählt also nicht, wie folgt, zusammen	sondern so:
3 965	3, 7, 8, 12, 17	3, 7, 17
904	1, 10, 18, 22, 28	10, 18, 28
3 941	2, 7, 16, 25, 34	7, 34
584	3, 7, 10, 13	10, 13
4 093		
13 487		

2. Subtraktion. Hier setzt die österreichische Methode ein. Man denke sich die Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . in einer Reihe neben- oder übereinander aufgeschrieben. Von 3 bis 8 sind jedenfalls 5 Plätze weiter zu zählen. Daher folgendes Verfahren:

	man spreche:
9385	6 bis 15 ist 9
— 876	8 „ 8 „ 0
8509	8 „ 13 „ 5
	1 „ 9 „ 8

Hierbei ist zu erkennen, daß der Zehner der zweiten Zahl der nächsten des Subtrahendus hinzugezählt ist. Noch 2 Beispiele:

506 935	8 bis 15 ist 7	67 257	9 bis 17 ist 8
— 367 098	10 „ 13 „ 3	— 58 989	9 „ 15 „ 6
139 837	1 „ 9 „ 8	8 268	10 „ 12 „ 2
	7 „ 16 „ 9		9 „ 17 „ 8
	7 „ 10 „ 3		6 „ 6 „ 0
	4 „ 5 „ 1		

*) Diese Mitteilungen verdanke ich Herrn Schulrat Konrad Kraus in Wien.

Als nützliche Anwendung dieser Art Subtraktion sind Winkelberechnungen*, zu üben, z. B. den Komplementwinkel zu $36{,}48^0$ zu berechnen. Man rechnet wie folgt im Kopf, die fettgedruckten Ziffern ergeben das Resultat, das geeigneten Falles gleichzeitig hingeschrieben wird. 8 bis 10 ist **2**, 5 bis 10 ist **5**, 7 bis 10 ist **3**, 4 bis 9 ist **5**, also $53{,}52^0$. Oder bei Berechnung des Ergänzungswinkels von $36{,}48^0$ zu 2 R oder 180^0: 8 bis 10 ist **2**, 5 bis 10 ist **5**, 7 bis 10 ist **3**, 4 bis 8 ist **4**, 0 bis 1 ist **1**, also $143{,}52^0$. Um den dritten Dreieckswinkel zu bestimmen, muß die Summe der beiden gegebenen Winkel von 180^0 abgezogen werden. Beispiel:

$\alpha = 64{,}52^0$ es wird im Kopf gerechnet: 9 bis 10 ist **1**, 12 bis 20 ist **8**,
$\beta = 35{,}67^0$ 11 bis 20 ist **9**, 11 bis 18 ist **7**, also $\gamma = 79{,}81^0$.

3. Multiplikation. Man schreibt die Faktoren nebeneinander**), den an Ziffern reicheren rechts als Multiplikator und multipliziert dann zuerst mit der höchsten Stelle desselben den anderen Faktor. Die folgenden Teilprodukte werden um je eine Stelle nach rechts verschoben. Das Überschreiten des etwa links vorhandenen Randes wird hierdurch leicht vermieden. Andere Vorteile werden sich später zeigen. Beispiel A nach der alten, B nach der neuen Weise.

$$\begin{array}{lr}
\text{A} & \underline{6394 . 706438} \\
 & 51152 \\
 & 19182 \\
 & 25576 \\
 & 38364 \\
 & \underline{44758} \\
 & 4516964572
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\text{B} & \underline{6394 . 706438} \\
 & 44758 \\
 & 38364 \\
 & 25576 \\
 & 19182 \\
 & \underline{51152} \\
 & 4516964572
\end{array}$$

4. Division. Hier wird das oben gezeigte Subtraktionsverfahren angewendet und dadurch das Hinschreiben des Subtrahendus vermieden***). Beispiel A altes Verfahren, B neues, C Probe.

$$\begin{array}{lr}
\text{A} & 258769 : 496 = 521 \\
 & \underline{2480} \\
 & 1076 \\
 & \underline{992} \\
 & 849 \\
 & \underline{496} \\
 & 353
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\text{B} & 258769 : 496 = 521 \\
 & \underline{1076} \\
 & \underline{849} \\
 & 353
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\text{C} & \underline{496 . 521} \\
 & 2480 \\
 & 992 \\
 & 496 \\
 & \underline{+\ 353} \\
 & 258769
\end{array}$$

Die Rechnung in B entwickelt sich folgendermaßen:

$496 \backsim 500$; lies 496 ist etwa gleich 500;
$2500 : 500 = 5$
$5 . 6 = 30$, bis 37 ist 7
$5 . 9 = 45$; $45 + 3 = 48$, bis 48 ist 0
$5 . 4 = 20$; $20 + 4 = 24$, bis 25 ist 1.

Es tritt die 6 hinzu; $1076 : 500 = 2$
$2 . 6 = 12$, bis 16 ist 4
$2 . 9 = 18$; $18 + 1 = 19$, bis 27 ist 8
$2 . 4 = 8$; $8 + 2 = 10$, bis 10 ist 0.

Es tritt die 9 hinzu; $849 : 500 = 1$ usw.
Rest 353.

*) Winkel werden erfreulicher Weise seit einiger Zeit dezimal gerechnet; wann wird die dezimale Zeiteinteilung eingeführt werden?

**) schon von J. Strehl, Methodik der Rechenkunst, Wien 1845 eingeführt.

***) Haidinger 1799.

II. Das Rechnen mit Dezimalzahlen.

Hier ist auf das Komma Rücksicht zu nehmen Für Addition und Subtraktion gilt die bekannte Regel, daß Komma unter Komma treten muß. Das besagt nichts andres, als daß nur Ziffern gleicher Wertstellung gerade so wie Zahlengrößen gleicher Benennung addiert oder subtrahiert werden können. Bei Multiplikations- und Divisionsaufgaben beachte man die sinngemäße Begründung, die schon vor langer Zeit zu folgender Regel geführt hat: Man setze das Komma im Multiplikator und Divisor (also in den rechts stehenden Zahlen) hinter die erste geltende Ziffer und verschiebe das Komma im Multiplikandus um ebensoviel Stellen nach entgegengesetzter, im Dividendus nach derselben Richtung*) Diese Regel ist nur eine Anwendung der für das Kürzen und Erweitern gemeiner Brüche geltenden Vorschriften.

Bekanntlich ist $10:2 = (10 \,.\, 8):(2 \,.\, 8) = 80:16$ und umgekehrt $80:16 = \frac{80}{8}:\frac{16}{8} = 10:2$

d. h. ein Quotient (Bruch) wird nicht verändert, wenn Dividendus und Divisor (Zähler und Nenner) mit ein und derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden.

Ferner ist $5 \,.\, 9 = (5 \,.\, 3) \,.\, (9:3) = 15 \,.\, 3 = 45$

d. h. ein Produkt wird nicht verändert, wenn der eine Faktor mit einer Zahl multipliziert, der andere durch dieselbe Zahl dividiert wird.

Nach Verschiebung des Kommas läßt sich, vollends wenn die Zahlen noch abgerundet werden, das Resultat überschlagsweise finden und so die Anzahl der Ganzen, d. h. die Stellung des Kommas im Endergebnis festsetzen.

Beispiel: 593,82 . 78,3568

Setze ich im rechts stehenden Multiplikator das Komma hinter die erste geltende Ziffer, also um eine Stelle nach links, zwischen 7 und 8, so habe ich diese Zahl durch 10 dividiert. Um den Wert des Produktes nicht zu ändern, muß ich den andern Faktor mit 10 multiplizieren, also das Komma eine Stelle nach rechts rücken, d. h. zwischen 8 und 2 setzen. Da ich jetzt 5938,2 mit 7,83568 oder, unter Weglassung der Dezimalstellen und Abrundung der Ganzen, 6000 mit 8 zu multiplizieren habe, so wird das Ergebnis etwa 48000 sein; das Komma wird also hinter die fünfte Stelle von vorn, von links nach rechts gerechnet, gesetzt werden müssen.

Hätte ich dividieren sollen 593,82 : 78,3568, so würde, nachdem das Komma im Divisor wieder zwischen 7 und 8 gesetzt wäre, das des Dividendus zwischen 9 und 3 treten, und das Ergebnis von 59,382 : 7,83568 oder rund 59 : 8 würde etwa 7 sein oder nur eine Stelle vor dem Komma haben.

III. Die abgekürzte Multiplikation und Division.

Die abgekürzte Rechnung ist nicht Willkür, sondern etwas Notwendiges. Denn wenn ungenaue, aus Messungen erhaltene Zahlen in Betracht kommen, ist es unmöglich, ein wahres, unbedingt richtiges Resultat zu liefern**). Ein Beispiel wird uns dies zeigen. Ein Bürgersteig habe die Breite von 5,27 m. Diese Zahl sagt nicht, daß die Breite genau 527 cm sei, sondern daß bei genauerer Messung hinter dieser Ziffernfolge noch andere Ziffern stehen, die zu ermitteln nicht möglich oder überflüssig waren. Die Zahl 5,27 m gilt für den ganzen Bereich $(5{,}27 \pm 0{,}005)$ m. Wenn mit 5,27 m die Länge des ganzen Bürgersteigs 47,32 m zur Ermittelung der gesamten etwa zu bepflasternden Fläche multipliziert werden soll, so ist dabei zweierlei zu bedenken: 1. darf ohne

*) F. Wolff, theoretische und praktische Zahlenlehre 1828.

**) Vergleiche F. Klein, Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil I. Vorlesung W/S. 07/08. Herausgegeben von E. Hellinger. Leipzig 1908. Teubner. Seite 23 und 24.

weiteres abgekürzt gerechnet werden? und 2. welche Reihenfolge ist für die beiden Faktoren vorzuschreiben? Stellt man zunächst die Faktoren so, daß derjenige mit der geringeren Stellenzahl Multiplikand, der andere Multiplikator ist, so erhält man das Ergebnis 249,4 qm.

$\dot{5},\dot{2}\dot{7}$. 47,32	5,27 . 47,32
21 08	21 08
3 69	3 689
16	1581
1	1054
249,4	249,3764

Hätte man nicht abgekürzt gerechnet, so ständen hinter der 4 noch weitere 3 Ziffern, ohne daß sie irgend welche Berechtigung haben. Denn wie ausdrücklich bemerkt wurde, ist der Stellenwert der hinter der 7 stehenden Ziffer unbekannt, also auch der Stellenwert der hinter der 8 stehenden Ziffer im ersten Teilprodukt, ebenso auch die Hundertstel im Gesamtergebnis, um so mehr die folgenden Stellen.

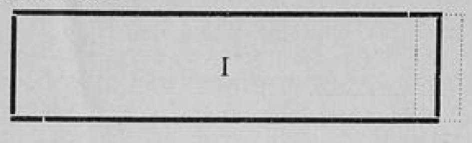
Würde man vorläufig nur berücksichtigen, daß die Zahl 5,27 eigentlich den Zusatz ± 0,005 tragen muß, so folgt daraus, daß auch das Ergebnis = 5,37 . 47,32 ± 0,005 . 47,32 sein muß.

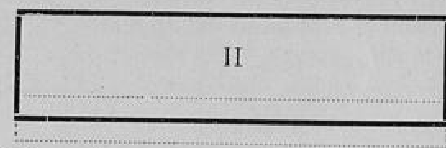
Das gibt 249,4 ± 0,04732 . 5
= 249,4 ± 0,23660
= 249,4 ± 0,2

d. h. unter Rücksicht auf die gemachte Annahme ist die Zahl 249,4 möglicherweise schon um 0,2 falsch, also ist es, um bei der Wahrheit zu bleiben oder um eine möglichst genaue Aussage zu machen, nur statthaft 249,4 zu schreiben, also **abgekürzt** zu rechnen. Richtiger wäre es vielleicht, nur die **3 ersten Stellen** zu schreiben. Im Hinblick hierauf kommt man überhaupt zu der Regel, daß eine 3stellige Zahl, d. h. die genaue Bestimmung dreier Dezimalstellen durch Multiplikation mit einer **mehrstelligen** Zahl eben auch nur wieder ein **3stelliges** Ergebnis genau zu gewährleisten vermag. Um über die Reihenfolge der Faktoren zu entscheiden, betrachte man zunächst die nachstehenden Rechnungen.

A	B
$\dot{5},\dot{2}\dot{7}$. 47,32	47,$\dot{3}\dot{2}$. 5,27
21 08	236 60
3 69	9 46
16	3 31
1	249,37
249,4	
5,27 (4,7,32 ± 0,005)	47,32 (5,27 ± 0,005)
= 5,27 . 47,32 ± 5,27 0,005	= 47,32 . 5,27 ± 47,32 . 0,005
= 249,4 ± 0,02635	= 249,37 ± 0,23660
Mx. = 249,42635	Mx. = 249,60660
Mi. = 249,37365	Mi. = 249,13340
Diff. = 0,05270 ∼ 0,05	Diff. = 0,47320 ∼ 0,47

Die Grenzen, innerhalb deren der wahre Wert des obigen Produktes sich befinden muß, liegen im Fall A neun mal enger an einander als im Falle B. Die Rechnungsart A ist also vorzuziehen d. h. der Multiplikator muß die an Ziffern reichere Zahl sein. Diese Notwendigkeit ist bei Zahlen, deren Ziffernanzahlen größere Verschiedenheit zeigen, noch deutlicher zu erkennen. Multipliziert man z. B. 9,56 mit 8,3576, so erhält man 79,89, aber 79,8986 wenn man 9,56 als Multiplikator nimmt. Im ersten Falle beträgt der Fehler ± 9,56 . 0,00005 = 0,0004780, im zweiten Falle 8,3576 . 0,004 = 0,0417880 oder rund 0,0005 gegen 0,04, mit andern Worten: im ersten Falle ist der Fehler etwa **hundert** mal kleiner als im zweiten. Noch deutlicher sprechen die Zeichnungen





Hier umgrenzen die punktierten Linien die Flächen, innerhalb deren die zugehörige Seite des fraglichen Rechtecks liegen kann. Diese Fläche beträgt in

$$\text{I: } 0{,}01 \,.\, 5{,}27 = 0{,}0527 \text{ qm} \sim {}^{1}/_{20} \text{ qm}$$
$$\text{II: } 0{,}01 \;\; 47{,}32 = 0{,}4732 \text{ qm} \sim {}^{1}/_{2} \text{ qm}$$

Klar und deutlich geht daraus hervor, daß die ziffernreichere Zahl als Multiplikator genommen werden muß.

Zur Erläuterung des Verfahrens der abgekürzten Multiplikation folgen mehrere Beispiele; a zeigt das alte, b das abgekürzte Verfahren.

1 a.	b.
9,356 . 8,3704	9,356 . 8,3704
37 424	74,848
6549 2	2 807
2 8068	655
74 848	4
78,3134 624	78,314

Die Multiplikation beginnt bei b mit der höchsten Stelle 8; die fettgedruckten Ziffern werden hingeschrieben.

8 . 6 = **48**; 8 . 5 = 40; 40 + 4 = **44**; 8 . 3 = 24; 24 + 4 = **28**; 8 . 9 = 72; 72 + 2 = **74**.

Dann wird über die 6 ein Punkt gesetzt und der Multiplikandus mit 3 multipliziert. 3 . 6 = 18; da 18 ∾ 20, wird 2 zum nächsten Teilprodukt addiert, daher 3 . 5 = 15; 15 + 2 = **17**; 3 . 3 = 9; 9 + 1 = **10**; 3 . 9 = 27; 27 + 1 = **28**.

Jetzt setze ich einen Punkt über die 5 und beginne mit 7 . 5 = 35 ∾ 40 und fahre dann fort 7 . 3 = 21; 21 + 4 = 25; 7 . 9 = 63; 63 + 2 = **65**.

Dann ein Punkt über 3 und Multiplikation mit 0. Da das Ergebnis 0 ist, setze ich endlich einen Punkt über die 9, multipliziere mit 4 und erhalte 4 . 3 = 12; 4 . 9 = 36; 36 + 1 = 37; 37 ∾ **40**.

Schließlich folgt die Addition der Teilprodukte. Läßt man nur die 4 ersten Ziffern gelten, so erhält man nach beiden Verfahren 78,31. Dasselbe ergibt sich, wenn im vorliegenden Beispiel der Multiplikand auf 3 Stellen gekürzt wird.

		2a.	b.
8,37 . 9,356		27,809 . 5693,45	27,809 . 5693,45
75 33		139 045	139 045
2 51		1112 36	16 685
42	Vergleiche mit a!	8342 7	2 503
5		250281	83
78,31		166854	11
		139045	1
		158329,15105	158 328

Wendet man auf diese Aufgabe die Kommaregel an, so ergibt sich 27809 . 5,69345 ∾ 28000 . 5,7 oder 30000 . 6 ∾ 180000, d. h. das Ergebnis muß 6 Stellen **vor** dem Komma haben. Hätte man vor Anfang der Rechnung die Faktoren auf 4 geltende Ziffern gekürzt, so würde sich ergeben haben:

27,81 . 5693
139 05
16 69
2 50
8
15 8320

In allen drei Fällen lautet das Ergebnis auf 4 geltende Ziffern gekürzt: 158300. Vergleiche mit a!

3a. 6938750 . 394000
2775500
6244875
2081625
2733867500000

b. 6939000 . 394000
20817
6245
277
27340 000 00,00

Hier ist 6938750 zunächst auf 4 geltende Ziffern gekürzt, dann ist 6939000 . 394000 $\sim$ 7000000 . 400000 $\sim$ 28 . 10^{11}. Das Ergebnis muß also eine 13stellige Zahl sein.

4a. 9,087 . 3,1416
54 522
90 87
3634 8
9087
27 261
28,5477192

b. 9,087 . 3,1416
27 261
909
363
9
5
28,547

Der Überschlag vor Beginn der Rechnung hätte 9 . 3 = 27, d. h. eine zweistellige Zahl ergeben. Beide Resultate auf 4 geltende Ziffern gekürzt sind = 28,55.

5a. 0,253 0,3689
2 277
20 24
151 8
759
0,0933 317

b. 0,253 . 0,3689
0,0 253 . 3,689 $\sim$ 0,09
759
152
20
2
0,0 933

6a. 38,56 . 0,9376
231 36
2699 2
1 1568
34 704
36,153856
36,15

b. 38,56 . 0,9376
3,856 . 9,376 $\sim$ 36
34 704
1 157
270
23
36,154
36,15

Bei den folgenden Beispielen von ausgeführten Divisionsaufgaben bezeichnet a die alte Weise b die abgekürzte und c die Probe.

1a. 5,9234 : 2,375
5923,4 : 2 375 = 2,4940
4750
11734
9500
22340
21375
9650
9500
150

b. 5,9234 : 2,375 $\sim$ 2
59234 : 2375 = 2,4940
11734
2234
96
1

c. 2,375 . 2,494
4 750
950
213
9
+ 1
5,923

Die Vereinfachung der Rechnung tritt deutlich hervor. Das alte Verfahren gewinnt das Ergebnis mit Hilfe von 34, das neue mit 12 Ziffern. Die erlangte Genauigkeit ist in beiden

Fällen die gleiche. Das Verfahren der abgekürzten Division ist im einzelnen folgendes: Nach Feststellung des Kommas und der ersten Ziffer des Quotienten (hier der 2) wird das Produkt dieser Zahl und des Divisors vom Dividendus nach der oben gezeigten Methode subtrahiert. Sind im Dividendus noch Ganze vorhanden (hier die 4), so treten diese einzeln zu den Teilresten hinzu (kommen herunter, werden heruntergezogen); so entsteht hier 11734. Nun wiederholt sich die Division. Treten keine Ganzen zum Teilrest mehr hinzu (müßten also nach dem alten Verfahren Nullen angehängt werden, wenn keine Dezimalstellen folgen), dann wird über die niedrigste Stelle des Divisors (hier über 5) ein Punkt gesetzt und in den vorher erhaltenen Rest (2234) mit dem übrig bleibenden Divisor (237) dividiert usw. Es ergibt sich:

5923 : 2375 = 2 (in den Quotienten)

2 . 5 = 10, bis 13 ist **3**
2 . 7 = 14, 14 + 1 = 15, bis 22 ist **7**
2 . 3 = 6, 6 + 2 = 8, bis 9 ist **1**
2 . 2 = 4, bis 5 ist **1**

es tritt 4 hinzu

11734 : 2375 = 4 (in den Quotienten)

4 . 5 = 20, bis 24 ist **4**
4 . 7 = 28, 28 + 2 = 30, bis 33 ist **3**
4 . 3 = 12, 12 + 3 = 15, bis 17 ist **2**
4 . 2 = 8, 8 + 1 = 9, bis 11 ist **2**

Punkt über 5

2234 : 237 = 9 (in den Quotienten)

9 . 5 = 45, rund 50
9 . 7 = 63, 63 + 5 = 68, bis 74 ist **6**
9 . 3 = 27, 27 + 7 = 34, bis 43 ist **9**
9 . 2 = 18, 18 + 4 = 22, bis 22 ist 0

Punkt über 7

96 : 23 = 4 (in den Quotienten)

4 . 7 = 28, rund 30
4 . 3 = 12, 12 + 3 = 15, bis 16 ist **1**
4 . 2 = 8, 8 + 1 = 9, bis 9 ist 0

2 a. 568720,0 : 938654 = 0,605889
563192 4
5527 600
4693 270
834 3300
750 9232
83 40680
75 09232
8 314480
7 509232
805198

b. 568720,0 : 938654 $\sim$ 0,6
5687200 : $\dot{9}\dot{3}\dot{8}\dot{6}\dot{5}4$ = 0,605889
55276
8343
834
84
0

c. 938654 . 0,605889
$\dot{9}\dot{3}\dot{8}\dot{6}\dot{5},\dot{4}$. 6,05889
563192 4
4693 3
750 9
75 0
8 4
568720,0

Zur Ausführung der Rechnung a sind 69, zu b nur 15 Ziffern nötig!

3a. 2 : 59,87
200,00000 : 5987 = 0,0334
17961
20390
17961
24290
23948
342

b. 2 : 59,87
0,2 : 5,987
$\backsim$ 0,2 : 6 $\backsim$ 0,03
20000 : $\dot{5}\dot{9}\dot{8}7$ = 0,0334
2039
243
4

c. 0,0334 . 59,87
1670
301
26
2
+ 4
2,003

Zu a sind 28, zu b nur 8 Ziffern nötig!

4 a. $0{,}34 : 15{,}67$

$34{,}00 : 1567 = 0{,}02169$
3134
2660
1567
10930
9402
15280
14103
1177

b. $0{,}34 : 15{,}67$

$0{,}034 : 1{,}567 \sim 0{,}02$
$3400 : 1\dot{5}\dot{6}7 = 0{,}02169$
266
109
15
1

c. $15{,}67 \cdot 0{,}02169$

$0{,}15\dot{6}\dot{7} \cdot 2{,}169$
3134
157
94
14
+ 1
0,3400

Zu a sind 35, zu b nur 9 Ziffern nötig!

5a. $8934 : 0{,}7654$

$89340000 : 7654 = 11672{,}3$
7654
12800
7654
51460
45924
55360
53578
17820
15308
25120
22962
2158

b. $8934 : 0{,}7654$

$89340 : 7{,}654 \sim 10000$
$89340 : 7\dot{6}\dot{5}\dot{4} = 11672{,}3$
12800
5146
554
18
2

c. $0{,}7654 \cdot 11672{,}3$

$\dot{7}\dot{6}\dot{5}\dot{4} \cdot 1{,}16723 \sim 7000$
7654
765
459
53
1
+ 2
8934

6a. $0{,}567 : 0{,}9372$

$5670{,}0 : 9372 = 0{,}60499$
56232
46800
37488
93120
84348
87720
84348
3372

b. $0{,}567 : 0{,}9372$

$5{,}6 : 9, \sim 0{,}6$
$56700 : \dot{9}\dot{3}\dot{7}\dot{2} = 0{,}60499$
468
93
9
1

c. $0{,}9372 \cdot 0{,}60499$

$0{,}0\dot{9}\dot{3}\dot{7}\dot{2} \cdot 6{,}0 \sim 0{,}54$
56232
375
84
8
+ 1
0,56700

d. $0{,}9372 \cdot 0{,}60499$

84348
84348
37488
56232
+ 3372
0,567000000

Die durch Messung gefundene ungenaue Zahl 23,96 hat den Geltungsbereich $23{,}96 \pm 0{,}005$, wobei $\pm 0{,}005$ als Geltungsspielraum anzusehen ist. Der Divisor sei 63,7 mit dem Geltungsbereich $63{,}7 \pm 0{,}05$. Wenn diese Zahlen ohne Geltungsbereich dividiert werden, erhält man 0,3762.

$23{,}96 : 63{,}7$

$2{,}396 : 6{,}37 = 0{,}3762 \pm X$, wo X den Fehler bedeutet;
485
39
1 folglich ist

$$(23{,}96 \pm 0{,}005) : (63{,}7 \pm 0{,}05) = 0{,}3762 \pm X \text{ oder}$$

$$23{,}96 \pm 0{,}005 = \underbrace{63{,}7 \cdot 0{,}3762}_{23{,}96} \pm 0{,}05 \cdot 0{,}3762 \pm 63{,}7 \cdot X \pm 0{,}05 \cdot X$$

$$\pm 0{,}005 = \pm 0{,}05 \cdot 0{,}3762 \pm 63{,}7 \cdot X$$

Das Produkt 0,05 . X ist von so geringer Ordnung, daß es unbeachtet gelassen werden darf, und da es nur auf den absoluten Höchstbetrag des Fehlers ankommt, können alle Glieder positiv genommen werden. Daraus folgt, wenn 0,3762 auf 0,4 abgerundet wird,

$$X = \frac{0{,}005 + 0{,}05 \cdot 0{,}4}{63{,}7} \quad \text{d. h.}$$

der absolute Höchstbetrag des Fehlers ist gleich einem Quotienten. Der Zähler dieses Quotienten ist die Summe des Geltungsspielraumes des Dividendus und des mit dem abgerundeten Werte des bei der Rechnung entstandenen Quotienten multiplizierten Geltungsspielraumes des Divisors. Der Nenner dieses Quotienten ist der Divisor. Durch Erweiterung mit 2 ergibt sich daraus die im Rechenbuch von Harms & Kallius erwähnte Regel.

IV. Abgekürztes Ausziehen der Quadratwurzel.

In dem nachstehenden Beispiel zeigt a das alte Verfahren, b das abgekürzte, c dasselbe bei nur vier geltenden Ziffern, d die Probe mit den vollständigen Zahlen, e die Probe mit nur 4 geltenden Ziffern

a. $\sqrt{39{,}64|82} = \pm 6{,}29668$

```
36
 3 64 : 12
 2 44
 1 2082 : 124
 1 1241
     84100 : 1258
     75516
      858400 : 12592
      755556
      10284400 : 125932
      10074624
        209776
```

b. $\sqrt{39{,}6482} = \pm 6{,}29669$

```
 3 64 : 12
 1 2082 : 124
     841 : 1258
       86
       11
        0
```

c. $\sqrt{39{,}65} = \pm 6{,}296$

```
 3 65 : 12
 1 21 : 124
    9
    2
```

d. $6{,}2967 \cdot 6{,}2967$

```
37 7802
  1 2593
    5666
     377
      43
39,6481
```

e. $6{,}296 \cdot 6{,}296$

```
37 776
 1 259
   566
    37
39,638
39,64
```

Das abgekürzte Ausziehen der Quadratwurzel unterscheidet sich vom hergebrachten zunächst dadurch, daß die Subtrahenden nicht hingeschrieben werden, sondern daß die Subtraktion nach der österreichischen Methode Anwendung findet. So lange noch Stellen des Radikanden vorhanden sind, die zur Teildifferenz hinzutreten können, wird durch das Doppelte des ganzen Ergebnisses dividiert. Dann wird aber mit dem letzten Teildivisor nach der abgekürzten Art weiter dividiert. Während also das alte Verfahren immer umständlicher wurde, je mehr Stellen das Resultat erhielt, vereinfacht sich hier die ganze Rechnung wesentlich und erreicht schnell ihr Ende. Die Proben d und e gestalten sich ebenfalls sehr kurz und leicht verständlich.

Wenn die Anzahl der Dezimalstellen im Radikand ungerade ist, so darf man keineswegs die fehlende Stelle durch eine Null ersetzen, man hat vielmehr unter Anwendung des eben beschriebenen abgekürzten Verfahrens nach weiter geführter Division das neue Quadrat des letzten Teilquotienten nicht vollständig, sondern auf Zehner abgekürzt dem nächsten Teilprodukt hinzuzuzählen. Beispiele mit Proben:

1. $\sqrt{28{,}49\,|\,7} = \pm\, 5{,}3382$

```
3 49 : 10
407 : 10̇6̇
88
2
0
```

oder ausführlicher:

$\sqrt{28{,}49\,|\,7} = \pm\, 5{,}3382$

```
3 49 : 10
3 09
 407 : 106
 319
  88 : 10 . 7
  86
   2 : 1 . 1
   2
   0
```

Probe: 5,3382 . 5,3382

```
26 6910
 1 6015
   1601
    426
     11
28,4963
```

2. $\sqrt{0{,}02\,|\,00\,|\,03\,|\,4} = \pm\, 0{,}141433$

```
100 : 2
 403 : 28
 1224 : 282
   94 : 28
    9 : 3
    0
```

Probe: 0,141433 . 0,141433

```
0,0141433
    56573
     1414
      566
       42
        4
0,0200032
```

3. $\sqrt{5{,}87279} = \pm\, 2{,}42338$

```
1 87 : 4
  1127 : 48
   1639 : 484
    186 : 48 . 4
     41 : 5
```

Probe: 2,42338 . 2,42338

```
4 84676
  96935
   4847
    727
     73
     19
5,87277
```

Ist der Radikand eine durch Messung gefundene, also ungenaue Zahl, so ist das abgekürzte Verfahren notwendig, da das Anhängen von Nullen nicht gerechtfertigt werden kann. Will man dagegen aus einer Kardinalzahl die Quadratwurzel berechnen, so ist gegen das Anhängen von Nullen nichts einzuwenden, und die Genauigkeit kann durch Ausdehnung der Rechnung beliebig groß werden. Hierbei wächst aber nach dem alten Verfahren die Rechenarbeit ins Ungeheuerliche. Darum erscheint auch hier das abgekürzte Rechnen als empfehlenswert, nachdem 2 oder 3 Nullenpaare angehängt worden sind. Beispiele mögen dies vor Augen führen.

$\sqrt{2} = \pm 1{,}4142135$

1
100 : 2
69
400 : 28
281
11900 : 282
11296
60400 : 2828
56564
383600 : 28284
282841
10075900 : 282842
8485269
159063100 : 2828426
141421325
17641775

Probe: 1,4142135 . 1,4142135

1 4142135
56568540
14142135
56568540
28284270
14142135
42426405
70710675
17641775
2,00000000000000

$\sqrt{2} = \pm 1{,}4142135$

100 : 2
400 : 28
11900 : 282
604 : 283
38 : 28
10 : 3
1 : 0,3

$\sqrt{7} = \pm 2{,}6457513$

4
300 : 4
276
2400 : 52
2096
30400 : 528
26425
397500 : 5290
370349
2715100 : 52914
2645725
6937500 : 529150
5291501
164599900 : 5291502
158745069
5854831

Probe: 2,6457513 . 2,6457513

5 2915026
1 58745078
105830052
132287565
185202591
132287565
26457913
79372539
+ 5854831
7,00000000000000

$\sqrt{7} = \pm 2{,}6457513$

300 : 4
2400 : 52
30400 : 528
3975 : 529
272 : 53
7 : 5
2 : 0,5