Verwendung

der

Geometrie zum Beweise arithmetischer Lehrsätze.

Dr. Karl Heinrich Liersemann.

(Beilage des vierten Jahresberichtes der König Wilhelms-Schule zu Reichenbach in Schlesien).

Schnellpressendruck von W. Millisch's Buchdruckerei (Ad. Hoppe) in Reichenbach i. Schles.

Die eigentümlichen Schwierigkeiten, die der erste Unterricht in der allgemeinen Arithmetik aufweist, haben die Lehrenden zu den verschiedensten Mitteln, ja Mittelchen, greifen lassen, um der Schwierigkeiten Herr zu werden. Man ist einerseits so weit gegangen — und Lehrbücher, die in zahlreichen Anstalten gebraucht oder doch als „eingeführt" bezeichnet werden, sind Beweis dafür — sofort von Anfang aus Umformungen von Gleichungen, oft der gewaltsamsten Art, die arithmetischen Lehrsätze zu gewinnen; andererseits hat man sich, am Erfolge eines wissenschaftlichen Unterrichts verzweifelnd, damit begnügt, mit Zugrundlegung einer angesehenen Beispielsammlung die Lehrsätze und Regeln, ohne deren Beweis zu geben, nur praktisch üben zu lassen und dadurch allenfalls eine Art Nachweis ihrer Richtigkeit zu liefern; vielfach und wohl meistentheils geht man bald den einen, bald den andern Weg: zu Anfang, etwa so lange es Addiren und Subtrahiren gilt, wird der vom Lehrer oder einem älteren Schüler vorgesprochene Lehrsatz nur an Haufen von Beispielen einge—übt; später, so etwa beim Multipliciren von Summen und Differenzen, wird der Lehrsatz erst bewiesen, und dann danach gerechnet.

Daß alles dies weder Lehrer noch Schüler befriedigt, wird sich niemand verhehlen. Doch möchte ja der Weg immerhin mühsam sein, wenn er nur Frucht schaffte! Damit aber sieht's betrübt aus. Unsicherheit in den Elementen, die doch eine Folge der geschilderten Verfahrungsweisen mit Nothwendigkeit ist, wird auf späteren Stufen des Unterrichts immer sich als hemmend erweisen.

Gewiß ist es solchem verfehlten Unterrichte auch zuzuschreiben, wenn die Arithmetik als weniger geistbildend hinter der Geometrie zurücksteht, und eher zu einem banausischen Arbeiten führt als zu einem überlegten, welches sich bei jedem Schritt vorwärts des Weges und des Zieles bewußt bleibt.

Es sollte nicht also sein. Eine so vorzüglich gegliederte und durchsichtige Disciplin wie die Arithmetik sollte vor allen Dingen zum geistigen, nicht bloß zum gedächtnismäßigen Eigentum gemacht werden, sollte auf wissenschaftlichen Schulen nicht so sehr der bereitwillig sich darbietenden Anwendungen wegen, als vielmehr um ihrer selbst willen und um der von ihr dargereichten Bildung der geistigen Kraft willen gepflegt werden. Namentlich stellt es sich als nothwendig heraus, des Ineinandergreifens der verschiedenen Disciplinen einer und derselben Wissenschaft auch besonders beim Unterricht in der Arithmetik sich bewußt zu bleiben, und, so sehr es unerläßlich ist, jeder Disciplin den Charakter eines in sich abgeschlossenen Ganzen zu wahren, anderntheils die Hilfe nicht zu verschmähen, welche die Disciplinen einander zu leisten im Stande sind.

Richtige, aus der Sache selbst sich ergebende, nicht zum Zweck der Beweisführung erdachte, Definitionen sind von vornherein unerläßliche Nothwendigkeit. Es ist fehlerhaft — wenn auch der Fehler noch so weit verbreitet ist — die Differenz (um das zuerst sich bietende Beispiel zu wählen) als die Zahl zu „erklären“, welche zum Subtrahend addirt den Minuend ergiebt. Derartige Erklärungen sind höchstens dazu tauglich, die Richtigkeit eines aufgestellten Lehrsatzes a posteriori zu erweisen, nimmermehr aber den Lehrsatz zu finden: ein gesunder Beweis aber muß den Weg der Auffindung enthalten, sonst ist er nicht viel mehr als eine Probe. Wenn man ferner das Product als diejenige Zahl erklärt, welche sich aus dem Multiplicand ergiebt, wie der Multiplicator aus der Eins, so ist man sicher damit nicht im Stande ein Verständnis des Multiplicirens hervorzurufen, ganz abgesehen davon, daß man im Bestreben die Multiplicationsgesetze über natürliche Zahlen auf die Brüche zu übertragen — denn dies

Bestreben hat jene Definition erzeugt — den Zusammenhang zwischen Addiren und Multipliciren völlig verwischt. Man erinnere sich, um die richtigen Definitionen zu finden, an den allerersten Elementarunterricht im Rechnen: wie wird 2 von 5 subtrahirt? wie wird 6 durch 2 dividirt? Was auf jener Stufe des Unterrichts den Anfängern im Ziffernrechnen zur Gewinnung des Verständnisses verhalf, dasselbe ist auch allein im Stande, ihnen zu dienen, wenn sie das Rechnen mit allgemeinen Zahlen beginnen: denn ist auch ihre geistige Kraft in der Zwischenzeit gewachsen, so läßt sich nicht leugnen, daß ihnen nun, da sie die allgemeine Arithmetik beginnen sollen, die Buchstaben eher noch fremder entgegentreten, als zu Anfang die Ziffern oder die Rechenkunst überhaupt. Außerdem erfordert die Einheit des Unterrichts, daß man auf späteren Stufen das bisher Gelernte, namentlich so weit es grundlegend ist, benutze, so wie auf früheren Stufen nichts lehre, was später verworfen werden müßte.

Aus gesunden Definitionen wird der Unterricht auch gesunde Verfahrungsweisen sich bilden. Für den Unterricht in der Arithmetik ist ein beachtenswerther Fingerzeig in den entsprechenden Gebieten der Planimetrie gegeben. Dies zu entwickeln, und zwar zunächst in der Beschränkung auf reelle Zahlen, ist die Absicht des vorliegenden Aufsatzes. Die Darstellung wird sich nach ausführlicher Erörterung des zu Grunde liegenden Gedankens in der Anwendung auf die einzelnen Lehrsätze nur auswählend verhalten. Die Berücksichtigung der imaginären Zahlen bleibt einer späteren Monographie vorbehalten.

I.

So wie die allgemeine Arithmetik sich veranlaßt sieht, Zeichen für allgemeine Zahlenwerthe festzusetzen, und mittelst derselben und der schon vom Ziffernrechnen her bekannten übrigen Zeichen eine Sprache sich gebildet hat, welche an Kürze und Bestimmtheit unübertroffen da steht: so ist es für die Entwicklung d. h. den Beweis der arithmetischen Gesetze nothwendig ein Zeichen für die „allgemeine Einheit“ zu wählen, welches leicht geschrieben und mit andern seinesgleichen leicht verbunden werden können muß. (Es mag hier erwähnt, aber auch nur erwähnt werden, daß zwischen einer Zahl mit der allgemeinen Benennung Einheit und einer unbenannten Zahl, wie beispielsweise zwischen a Einheiten und a, ein gewaltiger Unterschied ist.) Als Zeichen für die „allgemeine Einheit", welches den oben aufgestellten Bedingungen entspricht, bietet sich ein gerader — vertical oder — horizontal gezogener Strich von mäßiger Länge, also eine kleine horizontale Strecke, am passendsten dar. Wie man sich unter einem Buchstaben der Übereinkunft nach „jede beliebige bestimmte Zahl" denkt, so möge eine solche Strecke „jede beliebige bestimmte Einheit" bedeuten, sei sie nun Mark, oder Meter, oder Tag, oder Grad u. s. w. Drei Einheiten derselben Art werden somit durch drei gleich lange Strecken dargestellt werden, und das Bild von einer drei Einheiten derselben Art haltenden Zahl wird eine dreimal so lange Strecke sein. Wie zeichnet man eine Zahl von a Einheiten? Die nächste Antwort ist schnell gegeben: als eine Strecke von beliebiger Länge. Woran aber erkennt man alsdann, daß sie a Einheiten halten soll? Es wird also darüber ein Abkommen getroffen werden müssen. Für den Anfang wird es sich empfehlen, auf der Strecke, welche die (allgemein) benannte Zahl a darstellen soll, von Anfang drei oder vier, und ebenso vom Ende ein oder zwei Theile gleich der für die Einheit vorgestellten Strecke zu markiren, und über den letzten Theil den „Index" a zu schreiben — die Indices **1**, **2**, **3**, **4**, ..., a—**1** bleiben als selbstverständlich weg. (Fig. **1**.) In den meisten Fällen wird es genügen eine Strecke von beliebiger Länge zu zeichnen und dazu den Buchstaben (a) zu schreiben. (Fig. **2**.)

Somit kann nicht bloß eine Strecke zur Versinnbildlichung einer (allgemeinen) Zahl dienen, noch weniger finden im folgenden die Strecken als specielle Beispiele für Zahlgrößen Verwendung, sondern sie sind die naturgemäß sich darbietenden Zeichen für allgemein benannte Zahlen. Daher finden sie auch ihren Platz bei allen Gesetzen der ersten und zweiten Stufe (Addiren und Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren): die dritte Stufe (Potenziren, Logarithmiren, Radiciren) entbehrt, weil sie von unbenannten Zahlen handelt, im allgemeinen der graphischen Darstellung.

Die Verwendung der Strecke zur Darstellung der Gesetze der Addition und Subtraction zeigt nun zunächst, wie zwischen den Aufgaben $a + c$ und $a - c$ kein anderer Unterschied besteht, als daß bei der ersten die c Einheiten in demselben Sinne wie die a Einheiten, bei der andern in entgegengesetztem Sinne gezählt werden.[1]) Es ist also auch von vornherein nothwendig an der Strecke a nicht nur die Länge sondern zugleich die Richtung (Fig. 1.) in Betracht zu ziehen: die der zuerst gezeichneten Strecke beigelegte Richtung bestimmt die aller übrigen. — Die Gesetze $a + c = c + a$, $a + c + n = a + n + c = c + a + n =$ u. s. w.[2]), so wie die Aufgaben $a \pm (c \pm n)$[3]), ferner namentlich die Beziehungen zwischen Addition und Subtraction[4]), werden durch die graphische Darstellung sofort bewiesen resp. gelöst. Als Beispiel ist in Fig. 3. der Lehrsatz $a - (c + n) = a - c - n$ dargestellt. Faßt man den in der Zeichnung dargestellten Vorgang in Worte, so ist der Beweis resp. die Lösung gefunden.

Die Erklärung des Productes $a \,.\, c$ als einer Summe aus c Addenden a[5]) wird durch eine Zeichnung wie Fig. 1. versinnbildlicht: man hat dort jeden einzelnen Theil als a, statt als Einheit anzusehen und den Index c statt a zu nennen. (Nebenbei gesagt, findet so auch die oben als minder vortheilhaft bezeichnete Definition des Productes ihre Darstellung.) Für das Product zweier Factoren $a \,.\, c$ bedient man sich indes als graphischer

---

[1]) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von Dr. K. H. Liersemann. § 1.3) u. § 4.3) Es möge hier gleichzeitig erwähnt werden, daß der Zusammenhang zwischen Arithmetik und Geometrie gebietet, die — sei es additiven, sei es subtractiven — Abschnitte einer Strecke AB mit dem Theilpunkte C nicht, wie es gewöhnlich geschieht, AC und BC, sondern vielmehr AC und CB zu lesen.

[2]) § 3.

[3]) § 9.

[4]) § 6.

[5]) § 10.

Darstellung mit besserem Erfolge eines Rechtecks mit der Grundlinie a und der Höhe c. Den Beweis für die Richtigkeit dieser Verwendung des Rechtecks liefert die Planimetrie. Es beruht dies streng genommen darauf, daß man — wozu man ebenso berechtigt ist — die allgemeine Einheit (nicht durch eine Strecke sondern) durch ein Quadrat bildlich darstellt: a solcher Quadrate hintereinander bilden einen (rechteckigen) Streifen, und c solcher Streifen über einander bilden das Rechteck von $a \,.\, c$ Quadraten Inhalt; dessen Grundlinie hält a und seine Höhe c Einheiten des Längenmaßes, über welchem als Seite das quadratische Rechtecksmaß construirt ist. (Fig. 4.) Hiernach ist die Richtigkeit der Gesetze $a \,.\, c = c \,.\, a$[6]), $a \,.\, c \,.\, n = a \,.\, n \,.\, c$ u. s. w.[7]) sofort ersichtlich, sowie daß ein Product multiplicirt wird, wenn man nur einen Factor multiplicirt[8]); ferner findet man ebenso leicht die Lösung der Aufgaben über Multiplication eines Binoms mit einer Zahl[9]), als auch mit einem Binom[10]). Ein Beispiel bietet Fig. 5. $(a + c) \,.\, (n - r) = a \,.\, n + c \,.\, n - a \,.\, r - c \,.\, r.$[11])

Was endlich die Division betrifft, so möge hier zunächst darauf hingewiesen werden, wie es durch den Parallelismus der Arithmetik mit der Geometrie ebenfalls gerechtfertigt wird, das Messen vor dem Theilen zu erwägen; die Aufgabe eine Strecke in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen wird ebenso durch Zuhilfenahme einer Messungsaufgabe gelöst, wie in der Arithmetik jede Theilung auf eine Messung zurückgeführt wird[12]): der Verschiebung der Benennung in der Arithmetik entspricht die Übertragung mittelst Parallelen in der Geometrie. Somit ist auch die am unten angegebenen Orte[13]) aufgestellte Definition des Messens zugleich die des Dividirens überhaupt[14]), indem die Theilungsaufgabe ihre Lösung schließlich stets in einer Messung findet[12]): entwirft man sich dazu eine Figur, so wird sie wie-

---

[6]) [7]) § 14.
[8]) § 22.
[9]) § 19.
[10]) § 20.
[11]) § 20. 2)
[12]) § 15. b. **Lehrsatz und Regel.**
[13]) § 15. a. 1)
[14]) § 16. 1)

derum die Figur 1. sein mit den bei Erörterung des Productes (pg. 7. Zeile 16 v. u.) angegebenen Abänderungen — zugleich ist dadurch der Zusammenhang zwischen Multipliciren und Dividiren[15]) gefunden.

Die Darstellung der Divisionsgesetze, welche Functionen*) betreffen, möge an dem ersten derselben $(a + c) : n = a : n + c : n$[16]) gezeigt werden. (Fig. 6.) Man vergleiche damit den an dem angegebenen Orte[16]) niedergelegten Beweis: Zeichnung und Beweis entsprechen einander Schritt für Schritt.

An derselben Figur möge auch gezeigt werden, wie gerechtfertigt es ist, die Gesetze über inverse Functionen in der Art zu beweisen, daß man die über die entsprechenden directen Functionen in die Sprache der inversen überträgt[17]). Soll man nämlich den Quotienten $(m - s) : n$[18]) finden, so wird man eine Strecke m (in Fig. 6. $a + c$) zeichnen, auf derselben eine Strecke s (c) rückwärts auftragen, wodurch man die Differenz $m - s$ (a) erhält: wie oft nun die Strecke oder das Maß n in der Differenz $m - s$ enthalten ist, findet man offenbar, indem man m und s mißt und die gefundenen Maßzahlen $m : n$ und $s : n$ subtrahirt — der ganze Vorgang enthält also nichts anderes als eine Übertragung aus der Sprache der Summe in die der Differenz.

Ganz ebenso läßt sich der Übergang von der Division einer mehrtheiligen Summe zur Division eines Productes[19]) durch eine Zeichnung nachweisen.

Von den Gesetzen des **Potenzirens** bieten einige ebenfalls willkommene und nicht zu unterschätzende Anwendung des Princips, welches im Voranstehenden auseinandergesetzt ist. Selbstverständlich sind es nur diejenigen, welche über den Exponenten 3 nicht

---

15) § 16 u. 17.
*) Einl. u. allg. Bem. IV.; vgl. Vorwort pg. IV. Z. 17 v. o.
16) § 21. 1)
17) Einl. u. allg. Bem. VIII. 1)
18) ib. **)
19) Einl. u. allg. Bem. VIII. 2)

hinausgehen. $(x \pm a)^2$, $(x \pm a)^3$ lassen sich mit Hilfe des Quadrates resp. Kubus vortrefflich anschaulich machen, wie namentlich auch, daß es zur Potenzirung eines Binoms nicht genügt, die Glieder zu potenziren, und daß man umgekehrt gleichhohe Potenzen nicht addiren oder subtrahiren kann, indem man diese Rechnungen an ihren Grundzahlen ausführt; auch daß $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ und $\frac{a^2}{2}$ zweierlei ist.

Für Logarithmus und Radix läßt die graphische Darstellung vollständig im Stich: doch ist, weit entfernt, daß dies eine Schwäche wäre, darin vielmehr eine einfache Consequenz des Umstandes zu sehen, daß die Rechnungen der dritten Stufe nicht mehr ein Zurückgehen auf die Zerlegung der Zahlen in ihre Einheiten erfordern, wie doch die der ersten Stufe durchaus und die der zweiten in ihren Anfängen: die graphische Darstellung basirt ja aber gerade auf dem Gedanken, die allgemeine Einheit mit einem handlichen Zeichen zu versehen.

II.

Wenn somit die graphische Darstellung schon im Gebiete der natürlichen Zahlen eine willkommene Unterstützung durch ihre Anschaulichkeit bietet, ja eigentlich mehr noch, wenn sie nicht bloß die Gesetze selber, sondern für den der's versteht auch den Beweis der Gesetze giebt — so ist diese Handreichung noch weit höher für die Darstellung der analytischen[20]) Zahlen anzuschlagen.

Die gebrochenen Zahlen vornweg nehmend sei hier nur darauf hingewiesen, daß selbst der Elementar-Unterricht sich mit Vortheil der Theilung von Strecken bedient, um den Begriff des Bruches sowie die allerersten Operationen an Brüchen den Anfängern dadurch klar zu machen; es ergiebt sich zugleich, daß die Verwendung der graphischen Darstellung in diesem Gebiete so sehr von selbst sich darbietet, daß hier darüber hinweggegangen werden kann. Die mit den Brüchen zusammenhängende Lehre von den Verhältnissen und Proportionen[21]) gewinnt erst

---

[20]) Einl. u. allg. Bem. IX.

[21]) § 67 ff.

durch eine an der Hand geometrischer Grundgedanken einherschreitende Behandlung[21]) Klarheit und Durchsichtigkeit; doch kann auch dies hier übergangen werden, indem die in den Lehrbüchern der Planimetrie der Lehre von der Ähnlichkeit gewöhnlich vorausgehende Lehre von der „Proportionalität gerader Linien" im Grunde nichts anderes ist, als die graphische Darstellung der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen.

Auch für die negativen, irrationalen und imaginären Zahlen findet man in neueren Lehrbüchern der Arithmetik auf die graphische Darstellung verwiesen, je nach der Anlage des betreffenden Buches nur in Grundzügen[22]) oder ausführlicher. Da, wie oben gesagt, die imaginären Zahlen einer späteren Abhandlung vorbehalten bleiben, so erübrigt hier noch von den negativen und irrationalen zu handeln. Dabei wird es allerdings bei weitem mehr darauf ankommen, diesen Gebilden der Arithmetik ihren Platz in der Geometrie anzuweisen, als jedes der sie behandelnden arithmetischen Gesetze geometrisch zu beweisen. Denn wenn einmal ihre Berechtigung zur Existenz[23]) sowie die Art und Weise, wie sie sich den natürlichen Zahlen an- oder einfügen, dargelegt ist, wird sich von selbst die Berechtigung zur Ausdehnung der Gesetze über natürliche Zahlen auf diese beiden neuen Arten von Zahlen herausstellen.

Was zunächst die negativen Zahlen betrifft, welche die Auflösung der Subtractionsaufgabe $a - c$ für den Fall $a < c$ geben, so erfordert die graphische Darstellung dieser Aufgabe allerdings, daß der Strahl, auf welchem bisher (I) sämmtliche Strecken aufgetragen wurden, über seinen Anfangspunkt hinaus, also in entgegengesetzter Richtung verlängert werde. Das ist aber im Grunde genommen nicht eine Erweiterung einer bisherigen Anschauungsweise, sondern viel eher die Beseitigung einer durchaus nicht in der Sache begründeten, nur um der geringen Fassungskraft der Anfänger willen errichteten Schranke. Denn die graphische Darstellung der Differenz $a - c$ erfordert

---

22) Einl. u. allg. Bem. IX. pg. 9.
23) ib. pg. 7. Z. 8. v. u. ff.

ganz allgemein, a Einheiten auf einer beliebigen Geraden von einem in ihr beliebig gewählten Punkte aus nach einer beliebig angenommenen Richtung hintereinander aufzutragen, und von dem dadurch erhaltenen Endpunkte aus c ebensolche Einheiten in der der ersten Richtung entgegengesetzten: dann aber die sämmtlichen Einheiten zu zählen, wie es schon oben (pg. 7. Zeile 7 v. o.)[24]) auseinandergesetzt ist. Sollten nun für den Fall $a < c$ die überschießenden Einheiten des c durch das Subtrahiren erst geschaffen werden, so würde damit allerdings ein Neues gesetzt werden, dessen Berechtigung somit auch Zweifel erwecken könnte; sie sind aber bereits vorhanden, und das Neue besteht nur darin, sie zu zählen. Zum Zählen der Einheiten des a vorwärts und ebenso vieler Einheiten des c rückwärts bedient man sich nun der natürlichen Zahlen als Indices: zum Zählen der überschießenden Einheiten des c, welche ihrem Wesen nach gleichartig (wenn auch nicht gleichnamig) den bisherigen sind, bedient man sich derselben Indices mit dem Minuszeichen voran: warum mit dem Minuszeichen, dies zu erhärten, ist Sache der Arithmetik und kann hier füglich übergangen werden.

Somit ist ohne Weiteres abzulesen, daß wenn $a < c$, $a - c = -(c - a)$[25]); ferner auch, daß $-n = 0 - n$[26]), sowie — was unglaublicherweise manchem noch verborgen zu sein scheint — daß selbst die größte negative Zahl kleiner als die kleinste positive[27]), und daß eine negative Zahl desto kleiner ist, je größer ihr absoluter Werth ist[28]); namentlich aber ergiebt sich, was negative Indices[29]) bedeuten, nämlich daß man die damit versehenen Einheiten in der einer ursprünglich gewählten Richtung entgegengesetzten zu zählen hat.

---

24) § 4. 3); pg. 53. I.
25) § 52.
26) § 51. 1)
27) § 51. 7)
28) § 51. 3)
29) pg. 53. I. a. E.

Dieser Gegensatz der Richtung weist auf einen beachtenswerthen Zusammenhang zwischen negativen Zahlen und symmetrischen Figuren hin. Die Symmetrie sollte nicht erst in der Stereometrie, sondern bereits in der Planimetrie von der Congruenz (ebenso die symmetrische Ähnlichkeit von der Ähnlichkeit) unterschieden werden. Der Lehrer, welcher Gewicht darauf legt, daß seine Schüler in der Geometrie genaue Anschauungen gewinnen und sich nicht mit unanschaulichen Syllogismen begnügen, wird sich jener Forderung nicht entziehen, auch wenn ihn nicht das Bewußtsein von den Ansprüchen der Wissenschaft dazu drängt. Die Verwendung der Zeichnung zur Darstellung der arithmetischen Gesetze wird einen neuen Antrieb dazu geben. Zwei Figuren (z. B. zwei rechtwinklige Dreiecke) welche eine Dimension (die Höhe) gemeinschaftlich, die andere (die Grundlinie) entgegengesetzt gleich haben, sind symmetrisch, und ihre Flächeninhalte entgegengesetzt gleich. (Entsprechend bei drei Dimensionen, z. B. die Octanten eines Oktaeders.)

Nach diesen Auseinandersetzungen lassen sich durch graphische Darstellung sämmtliche Gesetze über negative Zahlen sofort von den Figuren ablesen. Daß $a + (-c) = a - c$, $a - (-c) = a + c$[30]) ergiebt sich unmittelbar aus dem Begriff des Gegensatzes der Richtung; ja eigentlich fließen diese beiden Gesetze daher, daß die Zahl $-c$, welche der Zahl a allerdings gleichartig ist, ihr gleichnamig gemacht wird — wie es die Aufgabe der Addition resp. Subtraction erfordert. Ebenso leicht ist zu sehen, daß $-a - c = -(a + c)$[31]), ferner $-a + c = -(a - c)$[31]) $= c - a$[32]), je nachdem $a > c$ oder $a < c$.

Was die Multiplication anbetrifft, so bedient man sich auch hier am vortheilhaftesten der oben (pg. 8. Zeile **1** ff. v. o.) auseinandergesetzten Darstellung. Man sieht nun leicht, daß das Rechteck $(-a) . c$ sowohl als das Rechteck $a . (-c)$ dem Rechteck

---

30) § 53.
31) § 9. N. 4)
32) § 8. N. 3)

$a . c$ symmetrisch, dagegen das Rechteck $(- a) . (- c)$ dem Rechteck $a . c$ congruent ist. Somit ist $(- a) . c = - a . c$, $a . (- c) = - a . c$, $(- a) . (- c) = a . c$[33].

Für die Division endlich ergiebt sich zunächst am leichtesten daß $(- a) : (- c) = a : c$[34] und zwar deshalb am leichtesten, weil hier Dividend und Divisor (nicht bloß gleichartig, sondern sogar) gleichnamig sind. Es bedeutet aber jenes Gesetz, daß man um von $- a$ durch wiederholte Subtraction der Strecke $- c$ bis zum Nullpunkte zu kommen, ebenso vieler Subtractionen bedarf, als um die Strecke a durch wiederholte Subtraction der Strecke c auf Null zu bringen.

Daß ferner $(- a) : c = - a : c$[35] folgt wie die Lösung der Aufgabe $(m - s) : n$ (vgl. pg. 9. Zeile 14 v. o.) mittelst der Definition $- a = 0 - a$.

Die Aufgabe $a : (- c)$ endlich wird durch ebenso viele Subtractionen gelöst wie die Aufgabe $(- a) : c$, da es für die Anzahl der Subtractionen offenbar nicht darauf ankommt, welche der beiden in Gegensatz tretenden Richtungen als die ursprüngliche angesehen wird, ob die des Dividenden oder die des Divisors. Es ist somit $a : (- c) = (- a) : c$, d. h. $= - a : c$[38].

Zum Schlusse dieses Abschnittes sei noch darauf hingewiesen, daß es auch aus der Verwendung der graphischen Darstellung folgt, wie zwar die negativen Zahlen eine aus der Natur der Sache mit Nothwendigkeit sich ergebende Erweiterung des ursprünglichen Zahlenbegriffes[37], die positiven dagegen nichts anderes sind als die absoluten[38], daher auch die positiven die Aufstellung besonderer Gesetze nicht erheischen. Nichtsdestoweniger ist es förderlich, die positiven Zahlen neben den negativen beizubehalten, da sich mittelst derselben gewisse Gegensätze schärfer darstellen, oder

---

33) § 54.
34) § 56. L. 2)
35) § 56. L. 1)
36) § 56. L. 1)
37) **Einl. u. allg. Bem. IX. pg. 7. Z. 20. v. u.**
38) § 51. 5)

auch bequemer schreiben, als wenn man nur die negativen Zahlen mit einem Vorzeichen versehen wollte. Immerhin ist festzuhalten, daß die negativen Zahlen für ihre Existenz innere, sachliche Gründe haben, während für die Aufstellung der positiven Zahlen nur äußere, Zweckmäßigkeits-Gründe angegeben werden können.

III.

Von den irrationalen Zahlen sollen zunächst nur diejenigen in Betracht gezogen werden, welche irrationale zweite Radices*) sind. Indem nämlich jede irrationale Zahl, sei sie eine höhere Radix, oder ein Logarithmus (oder auch eine andere niedere oder höhere Transcendente) sich ebenfalls in Form eines unendlichen nicht periodischen Decimalbruches darstellen läßt[39]) und die irrationale zweite Radix in der folgenden Darstellung schließlich auf jene Form bezogen werden wird, wird sich die Ausdehnung der im Folgenden gefundenen Resultate von selbst ergeben.

Um einen gesunden Anfang der Entwickelung zu gewinnen, muß von der Aufgabe zwei Strecken durch einander zu messen ausgegangen werden. Diese Aufgabe gehört unmittelbar hinter die folgenden: eine Strecke um eine andere zu verlängern oder zu verkürzen, eine Strecke zu vervielfältigen — und diese vier Aufgaben $a + c$, $a - c$, $n \, . \, a$, $a : c$ finden ihre Stelle in den allerersten Anfängen des planimetrischen Unterrichtes, namentlich auch deshalb, weil mit dem Gebrauch des Lineals und Zirkels nicht früh genug begonnen werden kann. (Die Aufgabe $a : n$, eine Strecke a in n gleiche Theile zu zerlegen, gehört einer späteren Stufe des Unterrichts an. Vgl. pag. 8. Zeile 21 v. o.) Es ist nun hervorzuheben, daß die mit dem Zirkel ausgeführte Messung $a : c$ die beiden Strecken a und c stets als commensurable, für das Verhältnis $a : c$ also stets einen rationalen Exponenten ergiebt. Es gebührt sich darauf hinzuweisen, daß die für a und c durch die Messung gefundenen Verhältniszahlen

---

*) Vorwort. IV. Z. 19. v. o. ff.

39) § 84. 1)

prim zu einander (relative Primzahlen, nichtverwandte Zahlen) sind und daß der letzte (mit dem zur Lösung verwendeten Zirkel noch faßbare) Rest, welcher in dem vorhergehenden Reste und deshalb auch in den beiden gegebenen Strecken a und c aufgeht, das größte gemeinschaftliche Maß von a und c ist. (In einer auch nur vorschriftsmäßig gefüllten Quarta von 40 Schülern zwei Unterrichtsstunden auf die Lösung und Einübung dieser vier Aufgaben zu verwenden dürfte nicht zu viel sein. Die auf späteren Stufen des Unterrichts nothwendige Ausdehnung der Aufgabe auf Messung zweier Winkel, zweier Figuren, zweier Körper wird sich ohne Schwierigkeit vollziehen.) Da somit die experimentelle Lösung der Aufgabe a : c nur auf den Begriff der Commensurabilität führt, so wäre es durchaus müßig zu fragen: wie aber, wenn die fortgesetzte Auftragung jedes neuen Restes auf dem vorhergehenden nie auf einen Rest Null führte? — Denn so lange man eben nichts anderes hat als den Zirkel, kann die in der Frage aufgestellte Eventualität eben nie eintreten. Man ist auch nicht einmal zu der Vermuthung berechtigt, daß die schließlich immer sich ergebende Auffindung eines endlichen Maßes eine Folge der nicht zu vermeidenden Fehler und Ungenauigkeiten der Zeichnung oder der Operation oder des gebrauchten Instrumentes seien. Daß dies in der That der Fall ist, ja daß man gegentheils fast jede zwei Strecken als incommensurabel anzusehen hat, wenn auch der Zirkel sie als commensurabel bezeichnet — dies anzunehmen ist man erst dann berechtigt, wenn es gelingt, sei es auch nur in einem einzigen Falle, nachzuweisen, daß zwei in einem unabänderlichen Verhältnisse stehende Strecken, d. h. aber zwei in einer bestimmten Figur vorkommende Strecken incommensurabel sind. Dieser Nachweis sollte daher in keinem Lehrbuche der Planimetrie fehlen. Es bieten sich dazu aus dem den Schülern gegenwärtigen Gebiete zwei Beispiele, deren Discussion hier Platz finden möge, da nur wenig Lehrbücher diesen so hochwichtigen Punkt erwägen.

Excursus I. Die Seiten eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks sind incommensurabel gegen einander. Fig. 7. Denn soll man die Hypotenuse BA eines rechtwinklig gleichwinklig gleichschenkligen Dreiecks ABC durch seine Kathete BC (oder CA) messen, so trage man BC zunächst einmal auf BA ab, wodurch ein Rest FA $<$ BC bleibt. (Da nämlich BA $<$ BC $+$ CA, so ist FA $<$ CA d. i. $<$ BC.) Diesen Rest FA hat man nun auf (BC oder einer gleichlangen Strecke z. B.) CA aufzutragen. Man erhält durch einmalige Auftragung von FA auf CA den Punkt L—denselben welchen man auch findet, wenn man FL $\perp$ FA errichtet. (Beweis mit Hilfe der Linie BL). Das gleichzeitig entstehende Dreieck LAF ist also ebenfalls rechtwinklig gleichschenklig: wenn man daher zur Fortsetzung der Lösung unserer Aufgabe $\left(\frac{BA}{BC}\right)$ FA zum zweiten Male auf CA — von L aus — aufträgt, so wiederholt man die ursprüngliche Aufgabe, die Hypotenuse eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks durch seine Kathete zu messen, nur an einem kleineren Dreiecke. Diese Wiederholung wird aber bei Fortsetzung des Verfahrens eine endlose, weil die sich ergebenden Dreiecke zwar immer kleiner werden, aber nie verschwinden: daher wird auch niemals der Rest auf irgend einer Hypotenuse Null, es ergiebt sich somit kein gemeinschaftliches Maß; q. e. d.

Excursus II. Eine stetig getheilte Strecke*) ist gegen ihre Abschnitte incommensurabel. Fig. 8.

Denn soll man die im Punkte C stetig getheilte Strecke AB oder eine ihr gleiche CT durch ihren Subtrahend CB (oder was dasselbe ist, den Minuend AC durch die Strecke AB) messen, so erhält man den Theilpunkt F und hat nun den Rest TF wiederum auf CF aufzutragen: dies ist aber eine Wiederholung derselben

*) Erklärung. Eine Strecke AB heißt (im Punkte C) stetig getheilt, wenn sie die mittlere Proportionale zwischen ihren (subtractiven) Abschnitten AC und CB ist. $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{CB}$ (strenger $\frac{AC}{AB} + \frac{AB}{CB} = 0$.)

Lehrsätze. Wenn die Tangente TC gleich dem Durchmesser AB ist, so ist der Durchmesser AB in C stetig getheilt. Trägt man ferner (den Subtrahend) CB auf dem Durchmesser oder der ihm gleichen Tangente CT ab, so ist CF in T stetig getheilt.

Aufgabe, indem CF in T stetig getheilt ist. Die Wiederholung wird aber bei Fortsetzung des Verfahrens ebenfalls eine endlose, da zwar die sich ergebenden Reste immer kleiner werden, aber nie verschwinden; denn so klein auch eine Strecke sein mag — theilt man sie stetig, so ist ihr Subtrahend zwar noch kleiner, aber nie Null. Daher ergiebt sich durch eine noch so weit fortgesetzte Auftragung nie ein gemeinschaftliches Maß für eine stetig getheilte Strecke und ihre Abschnitte.

Anmerkung. Die Darstellung des in den beiden Excursen angewendeten Verfahrens mittelst arithmetischer Zeichen geschieht ohne Schwierigkeit, sowie auch die Lösung der entstehenden Gleichung. Diese ist in beiden Fällen vom zweiten Grade, im ersten rein, im andern gemischt. —

Nachdem somit erwiesen ist, daß es incommensurable Strecken giebt, ist ebenso nothwendig das Verhältnis zweier incommensurabeln Strecken zu definiren. Das Verhältnis zweier commensurabeln Strecken wird mittelst des größten gemeinschaftlichen Maßes derselben definirt: daß sich diese Definition für incommensurable Strecken nicht verwenden läßt, liegt auf der Hand. Merkwürdigerweise fehlt diese andre Definition ebenfalls in vielen Lehrbüchern der Planimetrie. Daher die Beweise der zahlreichen Lehrsätze, in welchen die Incommensurabilität vorkommender Strecken (oder Winkel u. s. w.) beachtet werden muß, die überzeugende Strenge vermissen lassen.

Das Verhältnis zweier incommensurabeln Strecken a und c ist die Grenze zweier rationalen Verhältnisse, die man auf folgende Weise erhält. Man trage ein beliebiges Maß der einen Strecke a, es sei $\frac{a}{n}$, wo n eine natürliche Zahl bedeutet, auf der andern Strecke c so oft als möglich, r mal, auf, wodurch auf c noch ein Rest $< \frac{a}{n}$ bleibt, so daß wenn man $\frac{a}{n}$ noch einmal aufträgt, der Endpunkt über den von c hinausfällt ($c > r. \frac{a}{n}$ und $< (r + 1). \frac{a}{n}$); alsdann liegt das irrationale Verhältnis $\frac{c}{a}$ zwischen den rationalen Grenzverhältnissen

$\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ (aber nicht etwa in der Mitte, auch nicht auf irgend eine rationale Weise dazwischen; denn —?) Durch Vergrößerung der (beliebigen) Zahl n werden die Grenzen verengert: nie aber gelingt es n so zu bestimmen, daß das irrationale Verhältnis mit einem der beiden Grenzverhältnisse zusammenfällt.

Zwei irrationale Verhältnisse werden einander gleich genannt, wenn sich nachweisen läßt, daß sie bei jeder beliebigen Wahl der zu Grunde gelegten Maße zwischen denselben Grenzverhältnissen liegen.

Auf Grund dieser Erörterungen und Definitionen ist nun der Gang der Untersuchung in jedem einzelnen Falle, der die Incommensurabilität betrifft, derselbe. Beispielsweise an dem ersten planimetrischen Satze, bei welchem diese Frage auftritt: Jede Parallele zu einer Dreiecksseite schneidet die beiden andern Seiten (additiv oder subtractiv) in demselben Verhältnis. Nachdem vorausgehend (beim Trapez) der Satz bewiesen ist: Wenn man auf einem Schenkel eines Winkels vom Scheitel aus unter einander gleiche Strecken abträgt und aus den Theilpunkten Linien unter einander parallel nach dem andern Schenkel zieht, so werden auf diesem eben so viele unter einander gleiche Strecken abgeschnitten (und die nte Parallele ist nmal so groß als die erste) — ergiebt sich jener Satz von der Parallelen zu einer Dreiecksseite sofort für rationale Schnittverhältnisse: die Frage, welche nun entsteht, ob nämlich dieser Satz einer Ausdehnung auf irrationale Schnittverhältnisse fähig ist, wird auf Grund eines Verfahrens, welches in der Definition des Verhältnisses zweier incommensurabeln Strecken und in der Definition der Gleichheit zweier derartigen Verhältnisse angedeutet liegt, bejaht. —

Soweit das, was aus der Planimetrie hierher zu ziehen ist. Die Arithmetik zeigt nun zunächst, daß eine Radix, deren Radicand nicht die Potenz irgend einer natürlichen Zahl vom Grade des Exponenten ist, z. B. $\sqrt{2}$, weder eine natürliche, noch eine gebrochene Zahl ist. Daß sie trotzdem eine Existenz hat, läßt sich nicht wie bei den beiden ersten

Arten analytischer Zahlen durch Erweiterung des Begriffes „Zählen" [40]) zeigen, da dies eine Theilung der Einheit in unzählige Theile voraussetzen würde: hier hilft nichts anderes als die graphische Darstellung. Wenn diese daher bei den übrigen Zahlgebieten der Auffassung durch ihre Anschaulichkeit willkommene Hilfe bot, so ist sie für das gründliche Verständnis der irrationalen Zahlen unumgängliche Nothwendigkeit.

In aller Schärfe läßt sich beweisen, daß $\sqrt{2}$ die Hypotenuse eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks ist, dessen Kathete die Maßeinheit (1) ist — oder, was dasselbe ist, die Seite eines Quadrates in einem Kreise mit dem Radius 1; ferner $\sqrt{3}$ die Seite des regelmäßigen Dreiecks in einem ebenso großen Kreise; $\sqrt{5}$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 1 und 2 — u. s. w. Ebenso läßt sich, wenn auch mit größerer Umständlichkeit, jede Zusammenstellung von zweiten Radices mittelst der vier Species, der Radicand mag bestimmt oder allgemein sein, geometrisch deuten.

Nachdem auf diese Weise die Existenz dieser und damit auch der übrigen irrationalen Zahlen nachgewiesen ist, ergiebt sich ohne Weiteres, daß alle Gesetze, deren Giltigkeit für rationale Zahlen bewiesen ist, ebendarum auch für irrationale Zahlen gelten, da ihnen die den irrationalen Zahlen beliebig nahe zu bringenden rationalen Grenzwerthe unterliegen.[41])

Es möge diese Abhandlung schließend noch kurz angedeutet werden, daß selbst für die Lösung von Gleichungen die Geometrie werthvoll werden kann. Die Gleichungen $x + a = c$, $a + x = c$, $x - a = c$, $a - x = c$, $x . a = c$, $a . x = c$, $x : a = c$, $a : x = c$,[42]) und entsprechend leichte mögen nur erwähnt werden; dagegen soll noch kurz der gemischten Gleichung zweiten Grades[43]) gedacht werden.

40) pag. 53. I., pag. 61. II.
41) § 84. 2)
42) § 103. 1) bis 6)
43) § 115. 5)

Wird in der reducirten und auf Null gebrachten Gleichung der Coefficient des zweiten Gliedes $\pm$ p, und das bekannte Glied — der Homogeneität wegen — $\pm$ c^2 genannt, so lassen sich folgende drei Formen der Gleichung geometrisch deuten:

1., $x^2 - px + c^2 = 0$; hier sind x und $p - x$ die Segmente der Hypotenuse p eines rechtwinkligen Dreiecks, welches die Höhe c hat — oder die Abschnitte einer Sehne, welche die Sehne $2 . c$ desselben Kreises halbirt.

2., $x^2 + px - c^2 = 0$; hier ist x die Projection der Kathete c auf die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, und p die Projection der andern Kathete — oder x der Subtrahend der Sehne p, von dessen Endpunkt die Tangente c gezogen ist.

3., $x^2 - px - c^2 = 0$; wie vorhin, nur $x - p$ statt x.

Die Determination für den Fall 1, damit die Wurzeln der Gleichung reell sind, ergiebt die Figur. — Was ist über die graphische Darstellung der vierten Form $x^2 + px + c^2 = 0$ zu sagen?

Wird i Gleichung
der Coeffici s bekannte
Glied — de so lassen
sich folgende deuten:

1., x^2 — x die
Segmente d ks, welches
die Höhe c welche die
Sehne 2 . (

2., x^2 jection der
Kathete c an ks, und p
die Projection rahend der
Sehne p, von ist.

3., x^2 p statt x.

Die D urzeln der
Gleichung re r die gra=
phische Darst $c^2 = 0$
zu sagen?

der
Gli
sich

Seg
die
Seh

Kat
die
Seh

Gle
phi
zu

A

ig. 6.

Fig. 1.

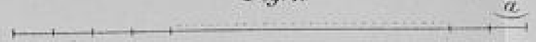


Fig. 2.

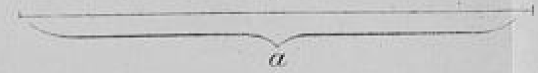


Fig. 3.

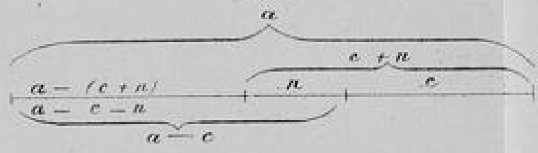


Fig. 4.

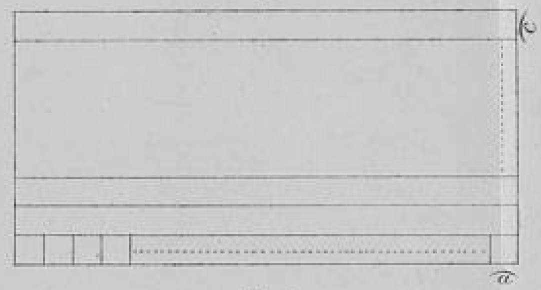


Fig. 5.

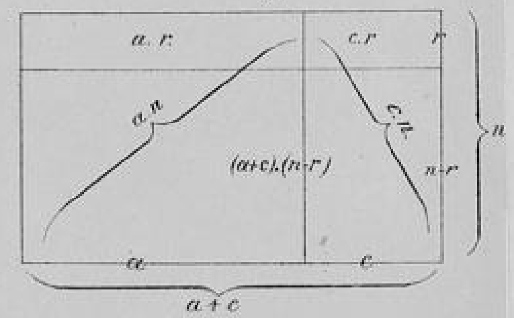
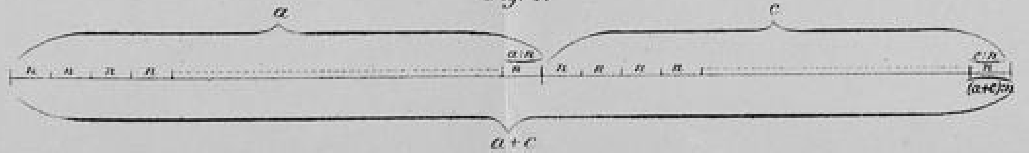


Fig. 6.



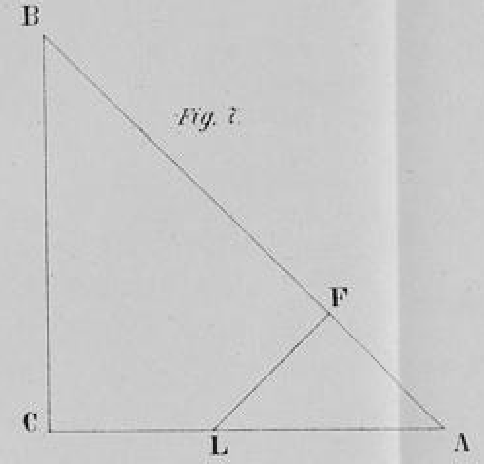


Fig. 7.

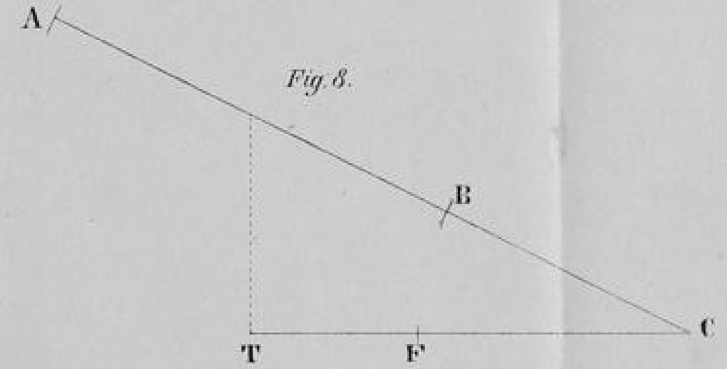


Fig. 8.