

König Wilhelms-Schule zu Reichenbach in Schlesien.

Metrische Beziehungen

an

Tangentenfiguren der Kegelschnitte.

Von

Dr. Otto Handel,
Oberlehrer.

Abhandlung zum Jahresberichte Ostern 1889.



Mit vier Figurentafeln.

1889. Prog.-No. 209.

Breslauer Genossenschafts-Buchdruckerei, E. G., Ursulinerstr. 1.

gre
10 (1889)

1021, 196





Handel, Dr., Oberlehrer, Metrische Beziehungen an Tangentenfiguren der Kegelschnitte.

Reichenbach i/Schl. Prog. Ostern 1889.

Tangentenfiguren der Kegelschnitte.

Die von Kreistangenten sich knüpfenden metrischen Beziehungen werden darf, scheinen gewisse bei allen Kegelschnitten wiederkehrende Massverhältnisse, denen sich die Kreissätze als besondere Fälle unterordnen, bisher gänzlich übersehen worden zu sein.

Es sind vorzugsweise zwei Kreiseigenschaften, um deren Verallgemeinerung es sich in der vorliegenden Arbeit handelt: die algebraischen Beziehungen, welche zwischen den Seiten eines Dreiecks und den durch seine vier Berührungskreise gebildeten Seitenabschnitten bestehen, und die schon von Pitot¹⁾ bei beschränkter Auffassung angegebene, erst von Steiner²⁾ genauer untersuchte und vervollständigte Eigenschaft des von vier Kreistangenten begrenzten einfachen (konvexen, konkaven oder überschlagenen) Vierecks.

Naturgemäss ist das Ziel nicht so leicht erreichbar, wie in dem besonderen Falle des Kreises. Indessen wächst die Verwickelung der Verhältnisse keineswegs in dem Masse, wie es auf den ersten Blick scheint. Immerhin überrascht die Einfachheit der Endergebnisse; denn die Vielzahl der Beziehungen vereinigt sich schliesslich bei dem Dreieck, wie bei dem Viereck, in einem relativ einfachen Kriterium, und es ist bemerkenswert, dass das von Baltzer³⁾ für den Kreis und das Viereck aufgestellte Merkmal nur einer geringfügigen Erweiterung bedarf, um für alle Kegelschnitte gültig zu bleiben.⁴⁾

Die allgemeinen Relationen dienen überdies als Quelle für die Herleitung zahlreicher theils neuer, theils bekannter Kegelschnitteigenschaften. Direkte Beweise den durch Specialisierung gewonnenen Sätzen hinzuzufügen, habe ich unterlassen.

Zu dem Zwecke der Sonderung der Tangentenfiguren nach der Lage der Berührungspunkte in Bezug auf die Eckpunkte liessen sich projektivische Gebilde nicht umgehen. Im übrigen ist die Methode der Untersuchung durchgehends elementar-synthetisch. Infolgedessen dürften zahlreiche Einzelheiten auch im Schulunterricht Verwertung finden können. Manche Erwähnung ist direkt dieser Absicht entsprungen, so der Gesamthalt des § 2. Jedoch erforderte die Wahrung der Einheitlichkeit des Ganzen weise Beschränkung.⁵⁾

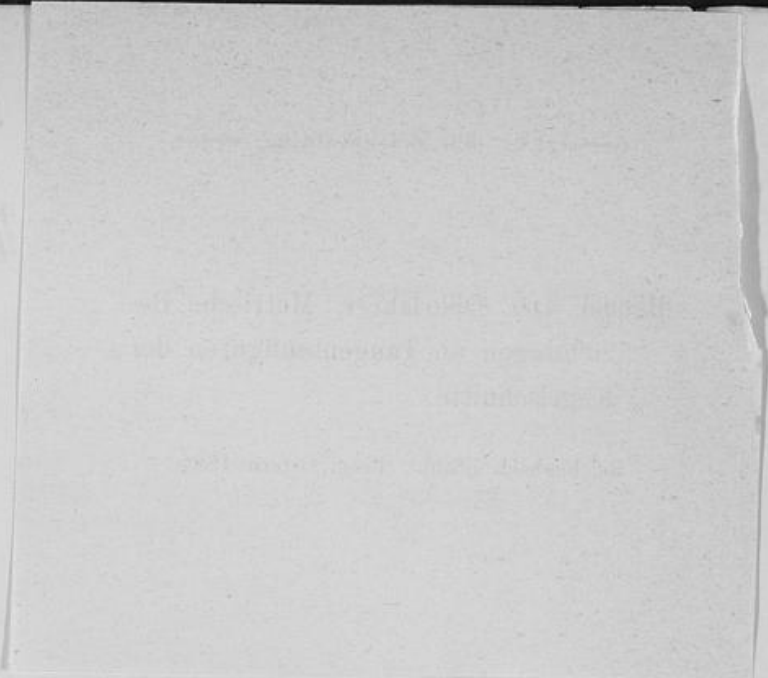
¹⁾ Memoires de Paris. 1725. p. 45.

²⁾ Crelle, Journal für Mathematik. Band 32, S. 305. Oder: Steiner's Gesammelte Werke. Band 2, S. 381.

³⁾ Elemente der Mathematik. Band 2. (4. Aufl.) S. 44.

⁴⁾ Für das windschiefe Vierseit, dessen Seiten eine Kugel berühren, wird das Baltzer'sche Kriterium nach Vogt illusorisch. Vergl. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 92, S. 328.

⁵⁾ Verwandte didaktische Fragen beabsichtigt der Verfasser demnächst an anderem Orte zu behandeln.



Metrische Beziehungen an Tangentenfiguren der Kegelschnitte.

Während die Frage nach den an Systeme von Kreistangenten sich knüpfenden metrischen Gesetzen seit langer Zeit als erledigt angesehen werden darf, scheinen gewisse bei allen Kegelschnitten wiederkehrende Massverhältnisse, denen sich die Kreissäetze als besondere Fälle unterordnen, bisher gänzlich übersehen worden zu sein.

Es sind vorzugsweise zwei Kreiseigenschaften, um deren Verallgemeinerung es sich in der vorliegenden Arbeit handelt: die algebraischen Beziehungen, welche zwischen den Seiten eines Dreiecks und den durch seine vier Berührungskreise gebildeten Seitenabschnitten bestehen, und die schon von Pitot¹⁾ bei beschränkter Auffassung angegebene, erst von Steiner²⁾ genauer untersuchte und vervollständigte Eigenschaft des von vier Kreistangenten begrenzten einfachen (konvexen, konkaven oder überschlagenen) Vierecks.

Naturgemäss ist das Ziel nicht so leicht erreichbar, wie in dem besonderen Falle des Kreises. Indessen wächst die Verwickelung der Verhältnisse keineswegs in dem Masse, wie es auf den ersten Blick scheint. Immerhin überrascht die Einfachheit der Endergebnisse; denn die Vielzahl der Beziehungen vereinigt sich schliesslich bei dem Dreieck, wie bei dem Viereck, in einem relativ einfachen Kriterium, und es ist bemerkenswert, dass das von Baltzer³⁾ für den Kreis und das Viereck aufgestellte Merkmal nur einer geringfügigen Erweiterung bedarf, um für alle Kegelschnitte gültig zu bleiben.⁴⁾

Die allgemeinen Relationen dienen überdies als Quelle für die Herleitung zahlreicher theils neuer, theils bekannter Kegelschnittseigenschaften. Direkte Beweise den durch Specialisierung gewonnenen Sätzen hinzuzufügen, habe ich unterlassen.

Zu dem Zwecke der Sonderung der Tangentenfiguren nach der Lage der Berührungspunkte in Bezug auf die Eckpunkte liessen sich projektivische Gebilde nicht umgehen. Im übrigen ist die Methode der Untersuchung durchgehends elementar-synthetisch. Infolgedessen dürften zahlreiche Einzelheiten auch im Schulunterricht Verwertung finden können. Manche Erwähnung ist direkt dieser Absicht entsprungen, so der Gesamthalt des § 2. Jedoch erforderte die Wahrung der Einheitlichkeit des Ganzen weise Beschränkung.⁵⁾

¹⁾ Memoires de Paris. 1725. p. 45.

²⁾ Crelle, Journal für Mathematik. Band 32, S. 305. Oder: Steiner's Gesammelte Werke. Band 2, S. 381.

³⁾ Elemente der Mathematik. Band 2. (4. Aufl.) S. 44.

⁴⁾ Für das windschiefe Viereck, dessen Seiten eine Kugel berühren, wird das Baltzer'sche Kriterium nach Vogt illusorisch. Vergl. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 92, S. 328.

⁵⁾ Verwandte didaktische Fragen beabsichtigt der Verfasser demnächst an anderem Orte zu behandeln.

Die Untersuchung fusst im wesentlichen auf folgenden — auch auf elementarem Wege zugänglichen — Eigenschaften aller Kegelschnitte:

- 1) Die Tangente bildet mit den Brennstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.
- 2) Die Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Schnittpunkte zweier Tangenten halbiert den von den Brennstrahlen der Berührungspunkte eingeschlossenen Winkel.

Um in dem Fortgange der Erörterung, insbesondere bei dem Wortausdruck der Ergebnisse, Weitläufigkeiten zu vermeiden, werde im voraus bemerkt, dass zufolge des ersten Satzes die Sinus der vier konkaven Winkel, welche eine Tangente mit den Brennstrahlen ihres Berührungspunktes bildet, unter einander gleich sind, sodass eine Unterscheidung der vier Winkel nicht erforderlich, ja sogar überflüssig ist, so lange nur die genannte goniometrische Funktion in Betracht kommt. Ich werde daher in allen solchen Fällen einfach von »dem Brennstrahl-Tangentenwinkel« sprechen.

§ 1.

Es seien T_1 und T_2 zwei sich in A_3 schneidende Tangenten eines Kegelschnitts, B_1 und B_2 ihre Berührungspunkte, β_1 und β_2 die zugehörigen Brennstrahl-Tangentenwinkel und F ein Brennpunkt. Alsdann liefert die Betrachtung der Dreiecke A_3FB_1 und A_3FB_2 (Figur 1) die Proportionen —

$$\begin{aligned} A_3B_1 : A_3F &= \sin A_3FB_1 : \sin \beta_1, \\ A_3F : A_3B_2 &= \sin \beta_2 : \sin A_3FB_2, \end{aligned}$$

aus welchen wegen der Gleichheit der Winkel A_3FB_1 und A_3FB_2 folgt

$$(1) \quad A_3B_1 : A_3B_2 = \sin \beta_2 : \sin \beta_1$$

d. h.: Die durch den Schnittpunkt und die Berührungspunkte begrenzten Abschnitte zweier Kegelschnittstangenten verhalten sich umgekehrt wie die Sinus der zugehörigen Brennstrahl-Tangentenwinkel.

Bei dem Kreise ist stets $\beta_1 = \beta_2$, also $A_3B_1 = A_3B_2$, bei den übrigen Kegelschnitten nur dann, wenn der Punkt A_3 auf einer Symmetrieaxe der Kurve liegt.

Schreiben wir die obige Beziehung (1) in der Form

$$(2) \quad A_3B_1 \sin \beta_1 = A_3B_2 \sin \beta_2,$$

so drückt sie die Gleichheit der Abstände des Schnittpunktes der Tangenten von den Brennstrahlen der Berührungspunkte aus.¹⁾ Für die folgenden Betrachtungen ist aber eine andere geometrische Auffassung, welche ich, um später eine Unterbrechung der Untersuchung zu vermeiden, schon hier erwähne, zweckmässiger. $A_3B_1 \sin \beta_1$ kann auch angesehen werden als die Normalprojektion der Strecke A_3B_1 auf eine Gerade, welche den einen oder anderen nach dem Berührungspunkte B_1 gehenden Brennstrahl senkrecht schneidet, und Entsprechendes gilt von $A_3B_2 \sin \beta_2$. Bei einer solchen von Tangente zu Tangente sich ändernden Wahl der Projektionsaxe sind also die Projektionen der durch den Schnittpunkt und die Berührungspunkte begrenzten Abschnitte zweier Kegelschnittstangenten gleich.

Wir nehmen zu den Tangenten T_1 und T_2 eine dritte T_3 hinzu, bezeichnen ihren Berührungspunkt durch B_3 , den zugehörigen Brennstrahl-Tangentenwinkel durch β_3 und die Schnittpunkte (T_1, T_3) und (T_2, T_3) durch A_2 beziehungsweise A_1 . Alsdann können die Lagen-

¹⁾ Diese Eigenschaft folgt auch unmittelbar daraus, dass A_3F den Winkel B_1FB_2 halbiert.

verhältnisse des Berührungspunktes auf jeder Tangente in Bezug auf die Schnittpunkte mit den beiden anderen von dreifacher Art sein. So folgen z. B. die auf T_3 liegenden Punkte entweder in der Ordnung

$$A_1 B_3 A_2 \propto A_1 \text{ (Fig. 1) oder } A_1 A_2 B_3 \propto A_1 \text{ Fig. 2) oder } A_1 A_2 \propto B_3 A_1 \text{ (Fig. 3).}$$

In jedem Falle ist nach dem Princip der Vorzeichen

$$A_1 A_2 = A_1 B_3 + B_3 A_2.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\sin \beta_3$ und berücksichtigen, dass

$$A_1 B_3 \sin \beta_3 = A_1 B_2 \sin \beta_2,$$

$$A_2 B_3 \sin \beta_3 = A_2 B_1 \sin \beta_1$$

ist, so erhalten wir je nach der Aufeinanderfolge der Punkte auf T_3 die Beziehungen

$$(3) \quad A_1 A_2 \sin \beta_3 \begin{cases} = A_2 B_1 \sin \beta_1 + A_1 B_2 \sin \beta_2 \text{ für die Punktfolge (im Endlichen) } A_1 B_3 A_2 \\ = - A_2 B_1 \sin \beta_1 + A_1 B_2 \sin \beta_2 \text{ " " " " " " " " } A_1 A_2 B_3 \\ = A_2 B_1 \sin \beta_1 - A_1 B_2 \sin \beta_2 \text{ " " " " " " " " } A_2 A_1 B_3 \end{cases}$$

d. h.: Wird eine Kegelschnittstangente von zwei anderen geschnitten, so ist die Projektion¹⁾ des von den letzteren begrenzten Stücks der ersteren gleich der Summe oder Differenz der Projektionen der anliegenden Abschnitte der beiden anderen.

§ 2.

Die geschickte Anwendung des oben gewonnenen Satzes (1) führt in so einfacher Weise zu zahlreichen Eigenschaften der Kegelschnitte, dass es gerechtfertigt erscheinen wird, an dieser Stelle einige Beispiele zur Bekräftigung der Behauptung einzuschleiben.

1. Die Parabeltangente hat die Eigenschaft, dass sie mit der Axe des Kegelschnitts, sowie mit jedem Durchmesser, Winkel von der Grösse ihres Brennstrahl-Tangentenwinkels bildet. Ziehen wir daher durch die Berührungspunkte B_1 und B_2 die Parallelen zur Axe und bezeichnen ihre Schnittpunkte mit den Tangenten T_1 und T_2 durch D_2 beziehungsweise D_1 , so verhält sich (Fig. 16)

$$A_3 D_1 : A_3 B_2 = \sin \beta_2 : \sin \beta_1,$$

woraus in Verbindung mit (1) folgt

$$D_1 A_3 = A_3 B_1.$$

Da sich in gleicher Weise zeigen lässt, dass $D_2 A_3 = A_3 B_2$ ist, so erhalten wir die merkwürdigen Sätze:

Die Berührungspunkte zweier Parabeltangente und ihre Schnittpunkte mit den durch die Berührungspunkte gehenden Durchmessern bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms.

Jede Parabeltangente ist der Ort für die Mittelpunkte aller anderen Tangente der Kurve, sofern letztere durch ihre eigenen Berührungspunkte und den Berührungsdurchmesser der ersten Tangente begrenzt werden.

Geht die Berührungsehne der beiden Tangente durch den Brennpunkt der Parabel, so ist das Parallelogramm ein Rhombus, weil sich in diesem Falle die Tangente rechtwinklig schneiden.

¹⁾ Im oben festgesetzten Sinne, wie im Folgenden immer, wenn von Projektionen der Tangente ohne besonderen Zusatz die Rede ist.

2. Es seien T_1 und T_2 zwei parallele Tangenten eines Kegelschnitts (Ellipse oder Hyperbel). Alsdann ist B_1B_2 ein Durchmesser und $\beta_1 = \beta_2$. Werden nun diese Tangenten von einer dritten T_3 (Berührungspunkt B_3 , Brennstrahl-Tangentenwinkel β_3) geschnitten in A_2 beziehungsweise A_1 , so bestehen die Proportionen (Fig. 17)

$$A_2B_1 : A_2B_3 = \sin \beta_3 : \sin \beta_1,$$

$$A_1B_2 : A_1B_3 = \sin \beta_3 : \sin \beta_2,$$

folglich, weil $\beta_1 = \beta_2$ ist: $A_2B_3 : A_1B_3 = A_2B_1 : A_1B_2$.

Bezeichnet man den Schnittpunkt (B_1B_2, A_1A_2) durch V , so verhält sich auch

$$A_2V : A_1V = A_2B_1 : A_1B_2.$$

Daher sind $A_1 A_2 B_3 V$ harmonische Punkte, d. h.:

Das von zwei parallelen Kegelschnittstangenten begrenzte Stück jeder dritten Tangente wird durch den eigenen Berührungspunkt und den Berührungsdurchmesser der beiden ersten Tangenten harmonisch geteilt.

Bei der Ellipse kann der besondere Fall eintreten, dass

$$B_1B_2 \parallel A_1A_2$$

ist. Alsdann ergibt sich, wenn O den Mittelpunkt des Kegelschnitts bedeutet,

$$A_1B_3 = A_2B_3 = \frac{1}{2} A_1A_2 = \frac{1}{2} B_1B_2 = B_1O,$$

folglich

$$B_3O \parallel A_1B_2 \parallel A_2B_1,$$

wodurch der Beweis des Satzes geführt ist:

Ist ein Durchmesser der Ellipse den Tangenten in den Endpunkten eines zweiten Durchmessers parallel, so ist auch der zweite den Tangenten in den Endpunkten des ersten parallel.

3. Schneiden sich zwei Tangenten T_1 und T_2 eines beliebigen Kegelschnitts, während eine dritte T_3 der Berührungsehne der beiden ersten parallel ist, so findet bei Festhaltung der obigen Bezeichnung und mit Rücksicht auf (1) die Beziehung statt (Fig. 1)

$$A_3A_2 : A_3A_1 = A_3B_1 : A_3B_2 = \sin \beta_2 : \sin \beta_1$$

oder

$$A_3A_2 \sin \beta_1 = A_3A_1 \sin \beta_2$$

d. h.: Wenn in einem Tangentendreieck eines Kegelschnitts eine Seite der Berührungsehne der beiden anderen parallel ist, so verhalten sich die letzteren umgekehrt wie die Sinus ihrer Brennstrahl-Tangentenwinkel.

Im besonderen Falle des Kreises ist das Dreieck immer gleichschenkelig, weil dann $\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$ ist; im allgemeinen sind nicht die Seitenstrecken, sondern nur ihre Projektionen (im oben dargelegten Sinne) gleich.

Unter derselben Voraussetzung, dass $B_1B_2 \parallel A_1A_2$ ist, bestehen bei jedem Tangentendreieck nach (1) die Beziehungen:

$$A_2B_1 : A_1B_2 = \sin \beta_2 : \sin \beta_1, \text{ weil gleich } A_3B_1 : A_3B_2;$$

$$A_2B_3 : A_2B_1 = \sin \beta_1 : \sin \beta_3,$$

$$A_1B_2 : A_1B_3 = \sin \beta_3 : \sin \beta_2.$$

Durch Multiplikation der drei Gleichungen ergibt sich

$$A_2B_3 = A_1B_3 = \frac{1}{2} A_1A_2$$

d. h.: Ist eine Tangente eines Kegelschnitts der Berührungsehne zweier anderen parallel, so wird das durch die letzteren begrenzte Stück der ersteren im Berührungspunkte halbiert.

Diese Eigenschaft liefert in Verbindung mit dem in Nummer 3 dieses Paragraphen hergeleiteten Satze ein überaus einfaches und anschauliches Mittel, um das Vorhandensein konjugierter Durchmesser bei der Ellipse nachzuweisen. Letztere besitzt nämlich nach jeder Richtung zwei parallele Tangenten. Legt man daher eine Sehne parallel zu zwei solchen Tangenten, so schneiden sich die in den Endpunkten der Sehne berührenden Tangenten wegen des obigen Satzes auf dem Berührungsdurchmesser der parallelen Tangenten, und letzterer halbiert deshalb diese Sehne, sowie jede ihr parallel laufende. Aus demselben Grunde muss auch der Durchmesser, welcher der Schar paralleler Sehnen angehört, die Mittelpunkte der dem ersten Durchmesser parallelen Sehnen enthalten, weil die Tangenten in seinen Endpunkten dem ersten Durchmesser parallel laufen. Aus unserer Beweisführung ergibt sich:

Zwei Durchmesser der Ellipse sind konjugiert, d. h. jeder halbiert die dem anderen parallelen Sehnen, wenn der eine den Tangenten in den Endpunkten des anderen parallel ist.

4. Ist in einem Tangentendreieck die Berührungsehne zweier Seiten der dritten nicht parallel, so besteht ein allgemeinerer, auf ebenso einfachem Wege zugänglicher Satz, der den obigen als Sonderfall in sich fasst.

Zunächst hat man nach (1) immer die Beziehungen (Figur 5)

$$A_3B_1 : A_3B_2 = \sin \beta_2 : \sin \beta_1,$$

$$A_2B_3 : A_2B_1 = \sin \beta_1 : \sin \beta_3,$$

$$A_1B_2 : A_1B_3 = \sin \beta_3 : \sin \beta_2,$$

aus welchen durch Multiplikation folgt

$$A_3B_1 \cdot A_2B_3 \cdot A_1B_2 = A_3B_2 \cdot A_2B_1 \cdot A_1B_3$$

d. h.: In jedem Tangentendreieck eines Kegelschnitts ist das Produkt von drei nicht benachbarten Seitenabschnitten gleich dem Produkt der drei übrigen.

Hierbei ist die Lage des Kegelschnitts gegen das Dreieck ganz gleichgültig. Übrigens lässt sich die Beweisführung ohne weiteres auf jedes beliebige Tangentenpolygon übertragen.

Wendet man auf dasselbe Dreieck den Satz des Menelaus an, indem beispielsweise B_1B_2 als Transversale betrachtet wird, so ergibt sich, wenn man den Schnittpunkt (B_1B_2, A_1A_2) durch C bezeichnet, (Figur 5)

$$A_3B_1 \cdot A_2C \cdot A_1B_2 = A_3B_2 \cdot A_2B_1 \cdot A_1C.$$

Aus beiden Sätzen folgt durch Division die Proportion

$$A_2B_3 : A_2C = A_1B_3 : A_1C$$

d. h.: Das von zwei Kegelschnittstangenten begrenzte Stück einer dritten Tangente wird durch den Berührungspunkt der letzteren und die Berührungsehne der beiden ersten harmonisch geteilt.

§ 3.

Nach der Abschweifung nehmen wir den Faden der allgemeinen Untersuchung wieder auf. Ehe wir jedoch durch Anwendung des im § 1 aufgeführten Satzes auf die drei Seiten des Tangentendreiecks $A_1A_2A_3$ zur Ableitung derjenigen Beziehungen schreiten können, welche zwischen den durch die Berührungspunkte entstehenden Abschnitten der Figurenseiten, diesen selbst und den zugehörigen Brennstrahl-Tangentenwinkeln bestehen, müssen wir die Frage erörtern, welche Möglichkeiten für die relative Lage der Berührungspunkte zu den Eckpunkten des Dreiecks auftreten können.

Zu dem Zwecke wollen wir uns die beiden Tangenten T_1 und T_2 festliegend, die dritte T_3 an dem Kegelschnitte hingleitend denken. Alsdann erzeugen die Punkte A_1 und A_2 auf den festen Tangenten zwei projektivische Punktreihen, deren besonderer Charakter sich mit der Natur des Kegelschnitts ändert. Bezeichnen wir die unendlich entfernten Punkte der beiden Geraden T_1 und T_2 durch $R_{1\infty}$ und $R_{2\infty}$, so sind $R_{1\infty}$ und $R_{2\infty}$ nur bei der Parabel entsprechende Punkte des projektivischen Gebilde. Bei der Ellipse und Hyperbel dagegen sind den Punkten $R_{1\infty}$ und $R_{2\infty}$ im Endlichen gelegene Punkte Q_2 resp. Q_1 zugeordnet; in letzteren werden die festen Tangenten von den ihnen parallelen Tangenten T_1' und T_2' geschnitten. Es wird nun darauf ankommen, die ganzen Wege, welche A_2 und A_1 zu durchlaufen haben, in geeigneter Weise in Teilstrecken zu zerlegen.

Bei der Parabel (Fig. 5) sind

$$\begin{array}{cccc} A_3 & B_2 & R_{2\infty} & \dots \text{ auf } T_2 \\ B_1 & A_3 & R_{1\infty} & \dots \text{ auf } T_1 \end{array}$$

entsprechende Punkte. Während daher B_3 die Kurve in der Richtung $B_1 B_2 \infty B_1$ durchläuft, durchwandert

$$\begin{array}{cccc} A_1 \text{ die Teilstrecken} & A_3 B_2 & B_2 R_{2\infty} & R_{2\infty} A_3 \\ A_2 = & = & B_1 A_3 & A_3 R_{1\infty} & R_{1\infty} B_1 \end{array}$$

und dementsprechend liegen die Eckpunkte des Dreiecks und die Berührungspunkte auf den drei Tangenten in folgender Ordnung (im Endlichen):

$$\begin{array}{lll} \text{auf } T_1: & A_3 A_1 B_2 & A_3 B_2 A_1 & A_1 A_3 B_2 \\ \text{auf } T_2: & A_3 A_2 B_1 & A_2 A_3 B_1 & A_2 B_1 A_3 \\ \text{auf } T_3: & A_1 B_3 A_2 & A_2 A_1 B_3 & A_1 A_2 B_3 \end{array}$$

Sehen wir ab von der unendlich entfernten Tangente, für welche die gesuchten metrischen Beziehungen naturnotwendig illusorisch werden, so finden wir für die relative Lage der Berührungspunkte nur folgende Möglichkeit:

- I. Ein Berührungspunkt liegt auf einer Seite (d. h. zwischen ihren Endpunkten), zwei auf den Verlängerungen der beiden anderen über die Endpunkte der ersten hinaus. (Fig. 2.)

Da bei der Ellipse (Fig. 6) die den unendlich entfernten Punkten $R_{1\infty}$ und $R_{2\infty}$ entsprechenden Punkte Q_2 und Q_1 von A_3 durch die Berührungspunkte B_2 und B_1 (im Endlichen) getrennt werden, so liegen hier die verwandten Punkte der projektivischen Punktreihen in der Folge

$$\begin{array}{cccccc} A_3 & B_2 & Q_2 & R_{2\infty} & A_3 & \text{auf } T_2 \\ B_1 & A_3 & R_{1\infty} & Q_1 & B_1 & \text{auf } T_1. \end{array}$$

Nimmt nun die dritte Tangente T_3 alle möglichen Lagen an, so durchwandern die Punkte A_1 und A_2 folgende Paare zugeordneter Teilstrecken:

$$\begin{array}{cccc} A_1 \text{ die Strecken} & A_3 B_2 & B_2 Q_2 & Q_2 R_{2\infty} & R_{2\infty} A_3 \\ A_2 \text{ die Strecken} & B_1 A_3 & A_3 R_{1\infty} & R_{1\infty} Q_1 & Q_1 B_1 \end{array}$$

und hiermit korrespondieren auf den drei Tangenten die endlichen Punktfolgen:

$$\begin{array}{lll} \text{auf } T_1: & A_3 A_1 B_2 & A_3 B_2 A_1 & A_3 B_2 A_1 & A_1 A_3 B_2 \\ \text{auf } T_2: & A_3 A_2 B_1 & A_2 A_3 B_1 & A_2 B_1 A_3 & A_2 B_1 A_3 \\ \text{auf } T_3: & A_1 B_3 A_2 & A_2 A_1 B_3 & A_1 B_3 A_2 & A_1 A_2 B_3 \end{array}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass sich die schon oben gekennzeichnete Möglichkeit für die Lagenverhältnisse der Berührungspunkte wiederholt, ausserdem aber noch folgende auftritt:

- II. Alle drei Berührungspunkte liegen auf den Seiten (Fig. 1.).

Bei der Hyperbel (Fig. 7) dürfen wir, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, annehmen, dass die beiden festen Tangenten denselben Zweig des Kegelschnitts berühren; denn von irgend drei Tangenten müssen zwei dies naturgemäss thun. Die den unendlich entfernten Punkten $R_{1\infty}$ und $R_{2\infty}$ entsprechenden Punkte Q_2 und Q_1 liegen hier auf den Verlängerungen der Strecken A_3B_2 und A_3B_1 , daher ist nunmehr die Anordnung der verwandten Punkte der projektivischen Punktreihen folgende:

$$\begin{array}{cccccc} A_3 & B_2 & R_{2\infty} & Q_2 & A_3 & \text{auf } T_2 \\ B_1 & A_3 & Q_1 & R_{1\infty} & B_1 & \text{auf } T_1. \end{array}$$

Ausser diesen Punkten müssen noch die Schnittpunkte der festen Tangenten T_1 und T_2 mit den Asymptoten S_1 und S_2 eingeführt werden, nämlich

$$(T_1, S_1) \equiv J_1 \quad (T_2, S_1) \equiv J_2 \quad (T_1, S_2) \equiv K_1 \quad (T_2, S_2) \equiv K_2.$$

Da einer der beiden Punkte J_1 oder K_1 notwendig zwischen A_3 und Q_1 liegt, so dürfen wir annehmen, dass J_1 diese Lage habe. Damit ist folgende Reihenfolge festgesetzt:

$$\begin{array}{cccccc} J_2 & R_{2\infty} & Q_2 & K_2 & \text{auf } T_2 \\ J_1 & Q_1 & R_{1\infty} & K_1 & \text{auf } T_1 \end{array}$$

Bei der Bewegung der dritten Tangente durchwandert daher

$$\begin{array}{cccccc} A_1 \text{ die Strecken } A_3B_2 & B_2J_2 & J_2R_{2\infty} & R_{2\infty}Q_2 & Q_2K_2 & K_2A_2 \\ A_2 \text{ die Strecken } B_1A_3 & A_3J_1 & J_1Q_1 & Q_1R_{1\infty} & R_{1\infty}K_1 & K_1B_1 \end{array}$$

Die Lagenverhältnisse der Berührungspunkte sind dementsprechend folgende:

$$\begin{array}{lll} \text{auf } T_1: & A_3A_1B_2 & A_3B_2A_1 & A_3B_2A_1 & A_1A_3B_2 & A_1A_3B_2 & A_1A_3B_2 \\ \text{auf } T_2: & A_3A_2B_1 & A_2A_3B_1 & A_2A_3B_1 & A_2A_3B_1 & A_2B_1A_3 & A_2B_1A_3 \\ \text{auf } T_3: & A_1B_3A_2 & A_2A_1B_3 & A_1A_2B_3 & A_1B_3A_2 & A_2A_1B_3 & A_1A_2B_3 \end{array}$$

Demgemäss tritt der Fall I wieder auf und ausserdem die beiden folgenden:

- III. Ein Berührungspunkt liegt auf einer Seite, zwei auf den Verlängerungen der beiden anderen und zwar einer jenseits des gemeinschaftlichen Endpunktes dieser beiden Seiten, der andere jenseits des Endpunktes der ersten Seite (Fig. 4).
- IV. Ein Berührungspunkt liegt auf einer Seite, zwei auf den Verlängerungen der beiden anderen über ihren gemeinschaftlichen Endpunkt hinaus. (Fig. 3.)

Hiermit ist die Zahl der Möglichkeiten für die relative Lage der Berührungspunkte erschöpft. Die beiden letzten Fälle sind der Hyperbel allein, Fall II der Ellipse allein eigentümlich; Fall I kehrt bei allen Kegelschnittarten wieder. Ausserlich betrachtet, beruht die Sonderstellung der Ellipse darauf, dass nur dieser Kegelschnitt ganz von dem Dreiecksumfang umschlossen werden kann, während die Hyperbel vor den übrigen Kegelschnitten die Zweifzahl der Zweige und somit die Möglichkeit voraus hat, dass zwei Tangenten den einen Zweig, die dritte den anderen berühren kann.

§ 4.

Wenn wir nun die Seiten des Tangendendreiecks

$$\begin{array}{ccc} A_1A_2 & A_2A_3 & A_3A_1 \\ \text{durch} & a_3 & a_1 & a_2 \\ \text{und die zugehörigen Brennstrahl-Tangentenwinkel durch} & \beta_3 & \beta_1 & \beta_2 \end{array}$$

bezeichnen, so bestehen nach § 1 die Beziehungen¹⁾

$$\begin{aligned} a_1 \sin \beta_1 &= \pm A_2 B_3 \sin \beta_3 \pm A_3 B_2 \sin \beta_2, \\ a_2 \sin \beta_1 &= \pm A_1 B_3 \sin \beta_3 \pm A_3 B_1 \sin \beta_1, \\ a_3 \sin \beta_3 &= \pm A_2 B_1 \sin \beta_1 \pm A_1 B_2 \sin \beta_2, \end{aligned}$$

sodass einer bestimmten Lage des Berührungspunktes eine bestimmte Kombination der Vorzeichen entspricht. Treffen wir für jeden der im vorigen Paragraphen besprochenen Fälle die geeignete Auswahl, multiplicieren die drei Gleichungen mit passenden Zeichen, addieren sie dann und berücksichtigen, dass

$$\begin{aligned} A_1 B_2 \sin \beta_2 &= A_1 B_3 \sin \beta_3, \\ A_2 B_1 \sin \beta_1 &= A_2 B_3 \sin \beta_3, \\ A_3 B_1 \sin \beta_1 &= A_3 B_2 \sin \beta_2 \end{aligned}$$

ist, so ergeben sich folgende Formeln.

Im Fall I ist, wenn a_1 die Fundamentalseite, d. h. diejenige ist, welche der Kegelschnitt zwischen ihren Endpunkten berührt:²⁾

$$(4) \begin{cases} A_1 B_3 \sin \beta_3 = A_1 B_2 \sin \beta_2 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 + a_3 \sin \beta_3) \\ A_2 B_1 \sin \beta_1 = A_2 B_3 \sin \beta_3 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 - a_3 \sin \beta_3) \\ A_3 B_1 \sin \beta_1 = A_3 B_2 \sin \beta_2 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 - a_2 \sin \beta_2 + a_3 \sin \beta_3) \end{cases}$$

d. h. die Projektion³⁾ jedes Seitenabschnitts ist halb so gross als die algebraische Summe der Projektionen der Dreieckseiten. Liegt der Eckpunkt, von welchem der Abschnitt ausgeht, der Fundamentalseite gegenüber, so sind alle Seiten mit positiven Vorzeichen behaftet; geht der Abschnitt von einem anderen Eckpunkte aus, so ist die Gegenseite des dritten Eckpunktes negativ, die beiden anderen positiv zu setzen.

Im Fall II ergibt sich:

$$(5) \begin{cases} A_1 B_3 \sin \beta_3 = A_1 B_2 \sin \beta_2 = \frac{1}{2} (-a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 + a_3 \sin \beta_3) \\ A_2 B_3 \sin \beta_3 = A_2 B_1 \sin \beta_1 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 - a_2 \sin \beta_2 + a_3 \sin \beta_3) \\ A_3 B_1 \sin \beta_1 = A_3 B_2 \sin \beta_2 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 - a_3 \sin \beta_3) \end{cases}$$

Hierbei ist stets nur die Gegenseite des Eckpunkts, von welchem der Abschnitt ausgeht, negativ zu nehmen.

Im Fall III ist, wenn der Kegelschnitt die Seite a_1 zwischen ihren Endpunkten berührt, während der Berührungspunkt der Seite a_2 auf der Verlängerung über A_1 hinaus liegt:⁴⁾

$$(6) \begin{cases} A_1 B_3 \sin \beta_3 = A_1 B_2 \sin \beta_2 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 - a_3 \sin \beta_3) \\ A_2 B_1 \sin \beta_1 = A_2 B_3 \sin \beta_3 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 + a_3 \sin \beta_3) \\ A_3 B_1 \sin \beta_1 = A_3 B_2 \sin \beta_2 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 - a_2 \sin \beta_2 - a_3 \sin \beta_3) \end{cases}$$

¹⁾ Bei jeder der drei Beziehungen ist unter den vier möglichen Kombinationen der Vorzeichen die Verbindung der beiden negativen Zeichen ausgeschlossen.

²⁾ Auch a_2 oder a_3 können an Stelle von a_1 treten, daher ist die Gesamtzahl der Formeln in diesem Falle 9.

³⁾ Im obigen Sinne.

⁴⁾ Da jede Seite als Fundamentalseite genommen werden kann, ausserdem die beiden anderen Seiten ihre Rollen vertauschen können, so umfasst dieser Fall im ganzen 12 Formeln.

Dabei zeigt sich das Gesetz: Wenn der Eckpunkt, von welchem der Abschnitt ausgeht, der Fundamentalseite gegenüberliegt, so ist nur die Seite negativ zu setzen, deren Berührungspunkt jenseits jenes Eckpunktes liegt. Geht aber der Abschnitt von den Endpunkten der Fundamentalseite aus, so ist nur diese Seite oder es sind sämtliche Seiten positiv zu nehmen, je nachdem jenseits des Ausgangspunktes des Abschnitts ein oder kein Berührungspunkt liegt.

Im Fall IV ergibt sich für a_1 als Fundamentalseite:¹⁾

$$(7) \begin{cases} A_1 B_3 \sin \beta_3 = A_1 B_2 \sin \beta_2 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 - a_2 \sin \beta_2 - a_3 \sin \beta_3) \\ A_2 B_1 \sin \beta_1 = A_2 B_3 \sin \beta_3 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 - a_2 \sin \beta_2 + a_3 \sin \beta_3) \\ A_3 B_1 \sin \beta_1 = A_3 B_2 \sin \beta_2 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 - a_3 \sin \beta_3) \end{cases}$$

Wenn daher in diesem Falle der Eckpunkt, von welchem der Abschnitt ausgeht, der Fundamentalseite gegenüberliegt, so ist nur diese Seite positiv, die anderen negativ zu setzen. Geht jedoch der Abschnitt von einem anderen Eckpunkte aus, so ist nur die Gegenseite dieses Eckpunktes negativ zu nehmen.

Der Rückblick auf die das Dreieck betreffende Untersuchung lehrt, dass die Zahl der Beziehungen

bei der Parabel 9, bei der Ellipse 12, bei der Hyperbel 36 beträgt und dass stets die Projektion irgend eines Seitenabschnitts gleich der halben algebraischen Summe der Projektionen der Seiten ist. Nur die Kombinationen der Vorzeichen innerhalb der algebraischen Summe ändern sich von Formel zu Formel, jedoch nicht regellos, sondern einem sämtliche Relationen umfassenden Kriterium sich unterordnend.

Die Änderung der Vorzeichen hängt nämlich ab teils von der Lage des Kegelschnitts in Bezug auf die Fundamentalseite, teils von der Richtung, in welcher man von dem Eckpunkte aus, welcher Anfangspunkt des auszudrückenden Seitenabschnitts ist, zu den Berührungspunkten der dort zusammentreffenden Seiten gelangt. Ist a_1 die Fundamentalseite (Fig. 1, 2, 3, 4), so kann der Kegelschnitt nur in drei Gebieten liegen:

- a) in dem endlichen Dreiecksgebiete N,
- b) in dem unendlichen der Fundamentalseite anliegenden Gebiete P, welches durch diese Seite und die Verlängerungen der beiden anderen begrenzt wird,
- c) in dem die Fundamentalseite nicht erreichenden Scheitelgebiete N, welches durch die Verlängerungen der beiden anderen Seiten über den gemeinschaftlichen Eckpunkt hinaus begrenzt wird.

Nach dieser Vorbemerkung lässt sich das Doppelkriterium so formulieren:

1) Die Gegenseite des Eckpunktes, von welchem der Seitenabschnitt ausgeht, ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Kegelschnitt bzw. der diese Seite berührende Zweig in Bezug auf die Fundamentalseite im Gebiete P oder in den Gebieten N liegt.

2) Die beiden anderen Seiten, von deren gemeinschaftlichem Eckpunkt der Seitenabschnitt ausgeht, sind negativ oder positiv zu nehmen, je nachdem ihre Berührungspunkte auf den Verlängerungen über den gemeinsamen Eckpunkt hinaus oder in der entgegengesetzten Richtung liegen.

¹⁾ Über die Zahl der Formeln gilt dasselbe, wie bei Fall I.

So liest man z. B. aus Figur 3 ohne weiteres ab

$$A_2 B_3 \sin \beta_3 = \frac{1}{2} (a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 - a_3 \sin \beta_3),$$

weil der die Seite a_2 berührende Zweig im positiven Gebiete P sich befindet, während der Berührungspunkt B_1 von A_2 aus in der positiven und B_3 von A_2 aus in der negativen Richtung liegt.

§ 5.

Wir betrachten folgende spezielle Fälle:

1. Da der Kreis eine besondere Ellipse ist, für welche $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 90^\circ$ wird, so fließen aus den anwendbaren Formelgruppen (4) und (5) die folgenden bekannten Sätze.

Wird der Kreis vom Dreiecksumfang umschlossen, so ist

$$A_1 B_2 = A_1 B_3 = \frac{1}{2} (-a_1 + a_2 + a_3) \text{ u. s. w.}$$

Berührt der Kreis die Seite a_1 zwischen ihren Endpunkten und die Verlängerungen der beiden andern, so ist

$$A_1 B_2 = A_1 B_3 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3)$$

$$A_2 B_1 = A_2 B_3 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 - a_3)$$

$$A_3 B_1 = A_3 B_2 = \frac{1}{2} (a_1 - a_2 + a_3)$$

2. Ist eine Seite des Dreiecks, dessen Umfang einen beliebigen Kegelschnitt berührt, der Berührungsehne der beiden anderen parallel, z. B.

$$B_2 B_3 \parallel A_2 A_3,$$

so besteht zufolge der obigen Betrachtungen (§ 2 Nr. 3) die Gleichung:

$$a_2 \sin \beta_2 = a_3 \sin \beta_3.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung vereinfachen sich die Formeln (4) (5) und (7) und liefern in Übereinstimmung mit obigen Untersuchungen (§ 2)

$$A_2 B_1 = A_3 B_1 = \frac{1}{2} a_1$$

3. Sind zwei der drei Tangenten z. B. $A_1 B_2$ und $A_1 B_3$ die Asymptoten einer Hyperbel, also A_1 der Mittelpunkt des Kegelschnitts, so werden die Brennstrahl-Tangentenwinkel β_2 und β_3 gleich Null, da die Berührungspunkte B_2 und B_3 im Unendlichen sich befinden. Unter dieser Voraussetzung ergeben die Formeln (5) und (7):

$$A_2 B_1 = A_3 B_1 = \frac{1}{2} a_1$$

d. h.: Das von den Asymptoten begrenzte Stück jeder Hyperbeltangente wird im Berührungspunkte halbiert.

§ 6.

Anknüpfend an die obigen Erörterungen über die Berührung eines Dreiecks durch einen Kegelschnitt (§ 3) gehen wir zu einem System von vier Tangenten über, indem wir den drei Tangenten $T_1 T_2 T_3$ eine vierte T_4 , welche den Kegelschnitt im Punkte B_4 berühren möge, hinzufügen. Wir setzen, wie oben, T_1 und T_2 als festliegend voraus und lassen T_3 und T_4 alle möglichen Lagen annehmen. Alsdann bilden die Schnittpunkte

$$(T_1, T_3) = A_2 \quad (T_2, T_3) = A_2 \quad (T_1, T_4) = C_1 \quad (T_2, T_4) = C_2$$

die Eckpunkte eines veränderlichen einfachen Vierecks $A_1 C_1 C_2 A_2$, in welchem jederzeit die Seiten $A_1 C_1$ und $C_2 A_2$ einander gegenüberliegen. Dabei beschreiben C_1 und C_2 auf den festen

Tangenten dieselben projektivischen Punktreihen wie A_1 und A_2 . Zur sicheren Auffindung der möglichen Lagenverhältnisse der Berührungspunkte

$B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4$
 in Bezug auf die Vierecksseiten
 $A_1 C_1 \quad A_2 C_2 \quad A_1 A_2 \quad C_1 C_2$

sind deshalb die oben (§ 3) abgegrenzten zugeordneten Teilstrecken, welche A_1 und A_2 durchlaufen, zu kombinieren mit denselben Strecken als solchen, welche von C_1 und C_2 durchwandert werden.

Bei der Parabel durchlaufen

	1.	2.	3.
A_1 und C_1 die Strecken	$A_3 B_2$	$B_2 R_2 \infty$	$R_2 \infty A_3$
A_2 und C_2 " " "	$B_1 A_3$	$A_3 R_1 \infty$	$R_1 \infty B_1$

Die Zahl der Kombinationen ist daher sechs, und diese liefern folgendes Schema für die (endlichen) Punktfolgen auf den 4 Tangenten:

	$1_1^1)$	1_2	1_3	2_2	2_2	3_3
auf T_1 :	$C_2 A_2 B_1$	$C_2 A_3 B_1$	$C_2 B_1 A_2$	$C_2 A_2 B_1$	$C_2 B_1 A_2$	$A_2 C_2 B_1$
auf T_2 :	$A_1 C_1 B_2$	$A_1 B_2 C_1$	$C_1 A_1 B_2$	$C_1 A_1 B_2$	$C_1 B_2 A_1$	$A_1 C_1 B_2$
auf T_3 :	$A_1 B_3 A_2$	$A_1 B_3 A_2$	$A_1 B_3 A_2$	$A_2 A_1 B_3$	$A_2 A_1 B_3$	$A_1 A_2 B_3$
auf T_4 :	$C_1 B_4 C_2$	$C_2 C_1 B_4$	$C_1 C_2 B_4$	$C_2 C_1 B_4$	$C_1 C_2 B_4$	$C_1 C_2 B_4$

Demgemäss sind, wenn die unendlich entfernte Tangente ausgeschlossen wird, für die relative Lage der Berührungspunkte nur drei Möglichkeiten vorhanden:

- I. Zwei Berührungspunkte liegen auf zwei Gegenseiten, zwei auf den Verlängerungen der beiden andern gleichsinnig, d. h. so, dass die Richtungen, nach welchen die Gegenseiten verlängert werden müssen, um zu den Berührungspunkten zu gelangen, demselben Umlaufsinne um das Viereck angehören. ($1_1, 2_2$).
- II. Zwei Berührungspunkte liegen auf zwei anstossenden Seiten, zwei auf den Verlängerungen der beiden anderen über die nicht gemeinschaftlichen Eckpunkte hinaus. ($1_2, 1_3$).
- III. Alle vier Berührungspunkte liegen auf den Verlängerungen der Seiten und zwar auf je zwei Gegenseiten ungleichsinnig d. h. so, dass die Richtungen, nach welchen die Gegenseiten verlängert werden müssen, um zu den Berührungspunkten zu gelangen, nicht demselben Umlaufsinne um das Viereck angehören. ($2_2, 3_3$).

Diese drei Fälle entsprechen zugleich den drei Arten einfacher Vierecke: dem konvexen (III), dem konkaven (II) und dem überschlagenen (I). Sie treten stets an derselben Figur auf; denn das aus irgend 4 Parabeltangente gebildete vollständige Vierseit besteht immer aus drei einfachen Vierecken (Fig. 9):

$a_1 a_2 a_3 a_4$ (I) $a_1 a_6 a_3 a_5$ (II) $a_2 a_6 a_4 a_5$ (I)

Ein analoges Verfahren führt bei der Ellipse, wo

	1.	2.	3.	4.
A_1 und C_1 die Strecken	$A_3 B_2$	$B_2 Q_2$	$Q_2 R_2 \infty$	$R_2 \infty A_3$
A_2 und C_2 " " "	$B_1 A_3$	$A_3 R_1 \infty$	$R_1 \infty Q_1$	$Q_1 B_1$

durchlaufen, zu folgendem die 10 möglichen Kombinationen umfassenden Tableau für die Punktfolgen auf den 4 Tangenten:

¹⁾ Oder $A_2 C_2 B_1$ auf T_1 und $C_1 A_1 B_2$ auf T_2 . Ähnliches gilt für die Kombinationen 2_2 und 3_3 . Auf das Endergebnis übt diese Vertauschbarkeit der Reihenfolgen einen Einfluss nicht aus. Dieselbe Bemerkung ist auch in der Folge bei Ellipse und Hyperbel zu beachten.

	1 ₁ ¹⁾	1 ₂	1 ₃	1 ₄	2 ₂	2 ₃	2 ₄	3 ₃	3 ₄	4 ₄
auf T ₁ :	C ₂ A ₂ B ₁	C ₂ A ₂ B ₁	C ₂ B ₁ A ₂	C ₂ B ₁ A ₂	C ₂ A ₂ B ₁	C ₂ B ₁ A ₂	C ₂ B ₁ A ₂	C ₂ A ₂ B ₁	A ₂ C ₂ B ₁	C ₂ A ₂ B ₁
auf T ₂ :	A ₁ C ₁ B ₂	A ₁ B ₂ C ₁	A ₁ B ₂ C ₁	C ₁ A ₁ B ₂	C ₁ A ₁ B ₂	C ₁ A ₁ B ₂	A ₁ B ₂ C ₁	A ₁ C ₁ B ₂	A ₁ B ₂ C ₁	C ₁ A ₁ B ₂
auf T ₃ :	A ₁ B ₃ A ₂	A ₁ B ₃ A ₂	A ₁ B ₃ A ₂	A ₁ B ₃ A ₂	A ₂ A ₁ B ₃	A ₂ A ₁ B ₃	A ₂ A ₁ B ₃	A ₁ B ₃ A ₂	A ₁ B ₃ A ₂	A ₁ A ₂ B ₃
auf T ₄ :	C ₁ B ₄ C ₂	C ₂ C ₁ B ₄	C ₁ B ₄ C ₂	C ₁ C ₂ B ₄	C ₂ C ₁ B ₄	C ₁ B ₄ C ₂	C ₁ C ₂ B ₄	C ₁ B ₄ C ₂	C ₁ C ₂ B ₄	C ₁ C ₂ B ₄

Es ist klar, dass die Kombinationen 1₁, 2₄, 3₃, (I) — 1₂, 1₄ (II) — 2₂, 4₄ (III) — neue Fälle nicht darstellen, die übrigen aber noch folgende Möglichkeiten für die Lagenverhältnisse der Berührungspunkte repräsentieren:

IV. Alle vier Berührungspunkte liegen auf den Seiten. (1₃).

V. Zwei Berührungspunkte liegen auf zwei anstossenden Seiten, zwei auf den Verlängerungen der beiden andern über den gemeinschaftlichen Eckpunkt hinaus. (2₃, 3₄).

Nach einer äusseren Betrachtung der Sache wird die Ellipse entweder von dem Vierecksumfang umschlossen (Figur 10), und das Viereck ist alsdann ein konvexes a₁a₂a₃a₄ (IV) oder ein konkaves a₁a₅a₃a₆ (V). Oder die Ellipse liegt ausserhalb der Fläche des Vierecks (Figur 9), und letzteres kann dann ein konvexes (III) oder ein konkaves (II) oder ein überschlagenes (I) sein. Sämtliche fünf Fälle verteilen sich also auf zwei Figuren, von denen die eine in dem hier wesentlichen Punkte mit der bei der Parabel auftretenden übereinstimmt.

Für die Parabel und die Ellipse ist hiermit die Erörterung der relativen Lage der Berührungspunkte vollständig erledigt. Denn die Aufhebung der Annahme, dass die beiden Tangenten T₁ und T₂ festliegen, würde nur eine Änderung in der Länge der zugeordneten Teilstrecken, nicht in ihrer Aufeinanderfolge bewirken. Nicht das Gleiche gilt von der Hyperbel, sowie ein Überschreiten der Asymptotenlage stattfindet. Die Untersuchung ist vielmehr bei diesem Kegelschnitt in zwei Teile zu zerlegen, sofern die beiden festen Tangenten, auf denen zwei Gegenseiten des veränderlichen einfachen Vierecks liegen, entweder denselben Zweig oder verschiedene Zweige der Hyperbel berühren können.

Unter der Voraussetzung, dass die festen Tangenten denselben Zweig berühren, durchlaufen

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
A ₁ und C ₁ die Strecken	A ₃ B ₂	B ₂ I ₂	I ₂ R ₂ ∞	R ₂ ∞Q ₂	Q ₂ K ₂	K ₂ A ₃
A ₂ und C ₂ =	B ₁ A ₃	A ₃ I ₁	I ₁ Q ₁	Q ₁ R ₁ ∞	R ₁ ∞K ₁	K ₁ B ₁

Die veränderlichen Tangenten können deshalb 21 verschiedene Lagenbeziehungen zu einander haben, während die Berührungspunkte und Eckpunkte in folgender Ordnung liegen:

	1 ₁ ²⁾	1 ₂	1 ₃	1 ₄	1 ₅	1 ₆	2 ₂
auf T ₁ :	C ₂ A ₂ B ₁	C ₂ A ₂ B ₁	B ₁ A ₂ C ₂	B ₁ A ₂ C ₂	C ₂ B ₁ A ₂	C ₂ B ₁ A ₂	C ₂ A ₂ B ₁
auf T ₂ :	A ₁ C ₁ B ₂	A ₁ B ₂ C ₁	A ₁ B ₂ C ₁	C ₁ A ₁ B ₂	C ₁ A ₁ B ₂	C ₁ A ₁ B ₂	C ₁ A ₁ B ₂
auf T ₃ :	A ₁ B ₃ A ₂	A ₁ B ₃ A ₁	A ₁ B ₃ A ₂	A ₁ B ₃ A ₂	A ₁ B ₃ A ₂	A ₁ B ₃ A ₂	A ₂ A ₁ B ₃
auf T ₄ :	C ₁ B ₄ C ₂	C ₂ C ₁ B ₄	C ₁ C ₂ B ₄	C ₁ B ₄ C ₂	B ₄ C ₁ C ₂	C ₁ C ₂ B ₄	C ₂ C ₁ B ₄
	2 ₃	2 ₄	2 ₅	2 ₆	3 ₃	3 ₄	3 ₅
auf T ₁ :	C ₂ A ₂ B ₁	C ₂ A ₂ B ₁	C ₂ B ₁ A ₂	C ₂ B ₁ A ₂	C ₂ A ₂ B ₁	C ₂ A ₂ B ₁	C ₂ B ₁ A ₂
auf T ₂ :	C ₁ A ₁ B ₂	C ₁ B ₂ A ₁	C ₁ B ₂ A ₁	C ₁ B ₂ A ₁	C ₁ A ₁ B ₂	C ₁ B ₂ A ₁	C ₁ B ₂ A ₁
auf T ₃ :	A ₂ A ₁ B ₃	A ₂ A ₁ B ₃	A ₂ A ₁ B ₃	A ₂ A ₁ B ₃	A ₁ A ₂ B ₃	A ₁ A ₂ B ₃	A ₁ A ₂ B ₃
auf T ₄ :	C ₁ C ₂ B ₄	C ₁ B ₄ C ₂	B ₄ C ₁ C ₂	C ₁ C ₂ B ₄	C ₁ C ₂ B ₄	C ₁ B ₄ C ₂	B ₄ C ₁ C ₂

¹⁾ Über die Kombinationen 1₁, 2₂, 3₃, 4₄ vergl. obige Bemerkung S. 13.

²⁾ Über die Kombinationen 1₁, 2₂, 3₃, 4₄, 5₅, 6₆ vergl. obige Bemerkung S. 13.

	3_6	4_4	4_5	4_6	5_5	5_6	6_6
auf T_1 :	$C_2 B_1 A_2$	$C_2 A_2 B_1$	$C_2 B_1 A_2$	$C_2 B_1 A_2$	$A_2 C_2 B_1$	$A_2 C_2 B_1$	$A_2 C_2 B_1$
auf T_2 :	$C_1 B_2 A_1$	$A_1 C_1 B_2$	$A_1 C_1 B_2$	$A_1 C_1 B_2$	$A_1 C_1 B_2$	$A_1 C_1 B_2$	$A_1 C_1 B_2$
auf T_3 :	$A_1 A_2 B_3$	$A_1 B_3 A_2$	$A_1 B_3 A_2$	$A_1 B_3 A_2$	$B_3 A_1 A_2$	$B_3 A_1 A_2$	$A_1 A_2 B_3$
auf T_4 :	$C_1 C_2 B_4$	$C_1 B_4 C_2$	$B_4 C_1 C_2$	$C_1 C_2 B_4$	$B_4 C_1 C_2$	$C_1 C_2 B_4$	$C_1 C_2 B_4$

Die schon oben gekennzeichneten Fälle I, II, III und V wiederholen sich in den Kombinationen $1_1, 2_6, 3_5, 4_4, (I) - 1_2, 1_6, (II) - 2_2, 3_3, 5_5, 6_6, (III) - 3_4, 4_5, (V) -$. Ausserdem zeigen sich noch folgende Möglichkeiten:

- VI. Zwei Berührungspunkte liegen auf zwei anstossenden Seiten, zwei auf den Verlängerungen der beiden andern, und zwar einer jenseits des gemeinschaftlichen, der andere jenseits des nicht gemeinschaftlichen Eckpunkts. ($1_3, 1_5, 2_4, 4_6$).
- VII. Zwei Berührungspunkte liegen auf zwei Gegenseiten, zwei auf den Verlängerungen der beiden andern ungleichsinnig. ($1_4, 2_5, 3_6$).
- VIII. Alle vier Berührungspunkte liegen auf den Verlängerungen der Seiten, und zwar auf zwei Gegenseiten gleichsinnig, auf den beiden andern Gegenseiten ungleichsinnig. ($2_3, 5_6$).

Zur Vereinfachung der weiteren Untersuchung dient folgende auch an sich wichtige Überlegung. Die einfachen Vierecke, welche bis jetzt bei der Hyperbel aufgetreten sind, können hinsichtlich der Verteilung der Berührungspunkte auf die beiden Zweige des Kegelschnitts in drei Gruppen gebracht werden. Dieselben enthalten:

- a) solche Vierecke, deren Seiten sämtlich denselben Zweig der Hyperbel berühren.
- b) solche, bei denen drei Seiten den einen Zweig, die vierte den anderen berührt.
- c) solche, bei denen zwei Gegenseiten den einen, die beiden übrigen Gegenseiten den andern Zweig berühren.

Dagegen waren bis jetzt von der Betrachtung ausgeschlossen:

- d) solche Vierecke, bei denen je zwei Gegenseiten verschiedene Zweige berühren.

Gehen wir aber zu der Annahme über, dass die beiden festen Tangenten T_1 und T_2 , auf welchen zwei Gegenseiten $A_2 C_2$ bzw. $A_1 C_1$ des veränderlichen Vierecks liegen, verschiedene Zweige der Hyperbel berühren, so können nur die unter b und d gekennzeichneten Vierecke auftreten. Da nun die erstere Art b für die vorliegende Frage nichts Neues liefern kann, so darf die nähere Erörterung auf die andere d beschränkt bleiben.

Die Punkte $A_1 A_2 C_1 C_2$ durchwandern nunmehr die projektivischen Punktreihen, welche die veränderlichen Tangenten auf den festen erzeugen, in folgender Weise (Fig. 8):

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
A_1 und C_1 die Strecken	$K_2 Q_2$	$Q_2 B_2$	$B_2 I_2$	$I_2 R_2 \infty$	$R_2 \infty A_3$	$A_3 K_2$
A_2 und C_2 =	$K_1 R_1 \infty$	$R_1 \infty A_3$	$A_3 I_1$	$I_1 Q_1$	$Q_1 B_1$	$B_1 K_1$

Kombinieren wir die dritte und vierte Tangente T_3 und T_4 auf alle Arten, lassen aber von den möglichen 21 Kombinationen alle diejenigen, bei denen die veränderlichen Tangenten beide denselben Hyperbelzweig berühren, ausser acht, so bleiben nur 9 Lagenbeziehungen übrig, und diesen entsprechen folgende Anordnungen der Punkte auf den Tangenten:

	1_4	1_5	1_6	2_4	2_5	2_6	3_4	3_5	3_6
auf T_1 :	$A_2 B_1 C_2$	$A_2 B_1 C_2$	$A_2 C_2 B_1$	$A_2 C_2 B_1$	$A_2 C_2 B_1$	$A_2 B_1 C_2$	$A_2 C_2 B_1$	$A_2 C_2 B_1$	$A_2 B_1 C_2$
auf T_2 :	$A_1 B_2 C_1$	$C_1 A_1 B_2$	$C_1 A_1 B_2$	$A_1 B_2 C_1$	$C_1 A_1 B_2$	$C_1 A_1 B_2$	$C_1 A_1 B_2$	$C_1 B_2 A_1$	$C_1 B_2 A_1$
auf T_3 :	$A_2 A_1 B_3$	$A_2 A_1 B_3$	$A_2 A_1 B_3$	$A_2 B_3 A_1$	$A_2 B_3 A_1$	$A_2 B_3 A_1$	$A_2 A_1 B_3$	$A_2 A_1 B_3$	$A_2 A_1 B_3$
auf T_4 :	$C_1 C_2 B_4$	$C_1 B_4 C_2$	$C_1 C_2 B_4$	$C_1 C_2 B_4$	$C_1 B_4 C_2$	$C_1 C_2 B_4$	$C_1 C_2 B_4$	$C_1 B_4 C_2$	$C_1 C_2 B_4$

Vorstehende Tabelle liefert für die relative Lage der Berührungspunkte grösstenteils schon bekannte Fälle, nämlich I ($1_4, 2_5, 3_6$), II ($2_6, 3_5$) und V ($1_5, 2_4$), ausserdem noch folgenden:

IX. Alle vier Berührungspunkte liegen auf den Verlängerungen der Seiten, und zwar auf je zwei anstossenden Seiten ungleichsinnig oder, was auf dasselbe hinauskommt, jenseits zweier nicht benachbarten Eckpunkte. ($1_6, 3_4$.)

Sämtliche Möglichkeiten für die Berührung eines Vierecks durch eine Hyperbel können an wenigen Figuren zur Anschauung gebracht werden. Denken wir uns zunächst vier Tangenten der Hyperbel, welche denselben Zweig des Kegelschnitts berühren, so geben diese, wie bei der Parabel, zur Entstehung von vier einfachen Vierecken Veranlassung, von denen das konvexe Fall III, das konkave Fall II, das überschlagene Fall I repräsentiert (Figur 9). Berühren nur drei den einen Zweig, die vierte den anderen (Figur 12), so stellt von den so entstehenden drei einfachen Vierecken das konvexe $a_1 a_2 a_3 a_4$ den Fall VIII, das konkave $a_1 a_5 a_3 a_6$ den Fall VI, das überschlagene $a_2 a_5 a_4 a_6$ den Fall VII dar.

Berühren zwei gerade Linien den einen, die beiden übrigen den anderen Hyperbelzweig, so kommt es noch darauf an, ob die denselben Zweig berührenden Geraden, als Seiten des konvexen Vierecks aufgefasst, einander gegenüberliegen (Figur 13) oder einen Eckpunkt gemeinsam haben (Figur 11). Die erstere Annahme führt zu demselben Ergebnis, wie Figur 9, denn auch hier (Figur 13) sind die drei einfachen Vierecke: das konvexe $a_1 a_2 a_3 a_4$, das konkave $a_1 a_6 a_3 a_5$, das überschlagene $a_2 a_5 a_4 a_6$, beziehungsweise Repräsentanten der Fälle III, II, I; bei der zweiten Voraussetzung (Figur 11) liefert das konvexe Viereck $a_1 a_2 a_3 a_4$ den Fall IX, das konkave $a_1 a_6 a_3 a_5$ den Fall V, während das überschlagene $a_2 a_5 a_4 a_6$ den Fall I wiederholt.

Ich schliesse die Erörterung der Berührung eines Vierecks durch einen Kegelschnitt mit der Bemerkung, dass die Zahl der möglichen Fälle sich keineswegs deckt mit der Zahl aller denkbaren. Unmöglich sind beim Kegelschnitt folgende Lagenverhältnisse:

- α) Alle Berührungspunkte liegen auf den Verlängerungen der Seiten gleichsinnig.
- β) Drei Berührungspunkte liegen auf den Seiten, einer auf der Verlängerung der vierten.
- γ) Ein Berührungspunkt liegt auf einer Seite, drei auf den Verlängerungen der übrigen.

Der letztere Fall umfasst noch mehrere Unterfälle, deren Aufzählung, als für den vorliegenden Zweck ohne Interesse, unterbleibt.

§ 7.

Nachdem wir im vorhergehenden Paragraphen alle Möglichkeiten für die Berührung eines einfachen (konvexen, konkaven oder überschlagenen) Vierecks durch einen Kegelschnitt festgestellt haben, gehen wir nunmehr zu der Frage nach den metrischen Relationen, die sich an diese Figur knüpfen, über. Zu dem Zwecke bezeichnen wir ohne Rücksicht auf die Art des einfachen Vierecks und seine Lage zum berührenden Kegelschnitt die bei dem Durchlaufen des Umfangs auf einander folgenden Eckpunkte durch $A_1 A_2 A_3 A_4$, die Seitenstrecken

	$A_1 A_2$	$A_2 A_3$	$A_3 A_4$	$A_4 A_1$
durch	a_1	a_2	a_3	a_4
ihre Berührungspunkte durch				
	B_1	B_2	B_3	B_4
und die zugehörigen Brennstrahl-Tangentenwinkel durch				
	β_1	β_2	β_3	β_4

Alsdann bestehen die von der relativen Lage der Berührungspunkte abhängigen Beziehungen:

$$\begin{aligned} a_1 \sin \beta_1 &= \pm A_1 B_4 \sin \beta_4 \pm A_2 B_2 \sin \beta_2^1) \\ a_3 \sin \beta_3 &= \pm A_4 B_4 \sin \beta_4 \pm A_3 B_2 \sin \beta_2^1). \end{aligned}$$

Treffen wir in jedem der oben (§ 6) besprochenen neun Fälle die geeignete Wahl der Zeichen, fassen wir dann die beiden Gleichungen in passender Weise durch Addition oder Subtraktion zusammen und berücksichtigen zugleich, dass je nach der Lage der Berührungspunkte auf den beiden anderen Gegenseiten

$$\begin{aligned} a_2 &= \pm A_2 B_2 \pm A_3 B_2^1) \\ a_4 &= \pm A_1 B_4 \pm A_4 B_4^1) \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich eine Reihe von Relationen, welche sich auf die folgenden drei wesentlich verschiedenen Formen zurückführen lassen:

$$\begin{aligned} (9) \quad a_1 \sin \beta_1 + a_3 \sin \beta_3 &= a_2 \sin \beta_2 + a_4 \sin \beta_4 && \text{in den Fällen IV, V, IX.} \\ (10) \quad a_1 \sin \beta_1 - a_3 \sin \beta_3 &= a_2 \sin \beta_2 + a_4 \sin \beta_4^2) && \text{VI, VII, VIII.} \\ (11) \quad a_1 \sin \beta_1 - a_3 \sin \beta_3 &= a_2 \sin \beta_2 - a_4 \sin \beta_4^2) && \text{I, II, III.} \end{aligned}$$

Die Formeln stimmen darin überein, dass zwei Gegenseiten des einfachen Vierecks links, die beiden anderen rechts vom Gleichheitszeichen stehen, und jede Seite multipliziert ist mit dem Sinus des zugehörigen Brennstrahl-Tangentenwinkels. Der einzige Unterschied liegt in den Vorzeichen. Dass die Verschiedenheit nicht durch die Natur des Kegelschnitts bedingt sein kann, folgt aus § 6. Bei der Parabel kann zwar, da von der unendlich entfernten Tangente abzusehen ist, nur Formel 11 vorkommen; aber bei der Ellipse sind die erste und dritte, bei der Hyperbel sogar alle drei Relationen möglich. Auch die Art des Vierecks, nämlich die Frage, ob es ein konvexes, konkaves oder überschlagenes ist, kann einen ausschlaggebenden Einfluss nicht haben. Es bleibt daher nur die Lage des Kegelschnitts gegen das Viereck übrig, und diese ist in der That für die vorliegende Frage von entscheidender Bedeutung.

Durchläuft man den Umfang des einfachen Vierecks in einem bestimmten Sinne, so ergeben sich für die Lage des Kegelschnitts resp. des berührenden Zweiges (der Hyperbel) in Bezug auf die Seiten nur drei Möglichkeiten. Der berührende Teil hat

- 1) in Bezug auf alle vier Seiten dieselbe Lage, d. h. er liegt entweder in Bezug auf alle Seiten links, oder in Bezug auf alle Seiten rechts (IV, V, IX);
- 2) in Bezug auf drei Seiten dieselbe, in Bezug auf die vierte die entgegengesetzte Lage (VI, VII, VIII);
- 3) in Bezug auf je zwei Gegenseiten entgegengesetzte Lage (I, II, III).

Die bisher unterschiedenen neun Fälle sind somit drei Hauptfällen untergeordnet derart, dass jedem derselben eine der drei Formeln (9, 10, 11) entspricht. Da die entgegengesetzte Lage des berührenden Kegelschnitts bzw. Hyperbelzweiges übereinstimmt mit dem Gegensatz der Vorzeichen innerhalb der Relationen, so können wir dem Gesamtergebnis folgende Fassung geben:

In jedem einfachen (konvexen, konkaven oder überschlagenem) Viereck, dessen Seiten einen Kegelschnitt berühren, ist die algebraische Summe der

¹⁾ Die Kombination der beiden negativen Zeichen ist in den vorliegenden Fällen ungiltig.

²⁾ Durch passende Bezeichnung der Eckpunkte kann man immer bewirken, dass die Differenz in der obigen und nicht in der umgekehrten Form auftritt. Ergäbe sich z. B. bei getroffener Wahl die Gleichung $a_1 \sin \beta_1 - a_3 \sin \beta_3 = a_4 \sin \beta_4 - a_2 \sin \beta_2$, so hätte man nur nötig, die Bezeichnung $A_1 A_2 A_3 A_4$ bzw. durch $A_2 A_3 A_4 A_1$ zu ersetzen, um diese Gleichung in die obige Form überzuführen.

Projektionen zweier Gegenseiten gleich der algebraischen Summe der Projektionen der beiden anderen. Dabei sind die Seiten, in Bezug auf welche der berührende Teil des Kegelschnitts entgegengesetzte Lage hat, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen.

§ 8.

Der vorstehende allgemeine Satz über das einfache Viereck, welches einem Kegelschnitte umschrieben ist, führt durch Specialisierung zu einer Reihe wichtiger, teilweise bekannter Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung. Diesen werde die Schlussbetrachtung gewidmet.

1. Bilden vier Tangenten eines Kegelschnitts ein Parallelogramm, ein Fall, welcher nur bei der Ellipse und Hyperbel eintreten kann, so ist

$$a_1 = a_3, \quad a_2 = a_4, \quad \beta_1 = \beta_3, \quad \beta_2 = \beta_4.$$

Dadurch wird der allgemeine Satz auf die Gleichungen zurückgeführt

$$(12) \quad a_1 \sin \beta_1 = a_2 \sin \beta_2 = a_3 \sin \beta_3 = a_4 \sin \beta_4$$

oder

$$a_1 : a_2 = \sin \beta_2 : \sin \beta_1$$

d. h.: In jedem Tangentenparallelogramm eines Kegelschnitts (Ellipse oder Hyperbel) verhalten sich zwei anstossende Seiten umgekehrt wie die Sinus der zugehörigen Brennstrahl-Tangentenwinkel.

Diese merkwürdige Eigenschaft lässt sich in mehr als einer Hinsicht weiter verwerten. Nehmen wir beispielsweise hinzu die Proportion (Figur 14)

$$A_2 B_1 : A_2 B_2 = \sin \beta_2 : \sin \beta_1,$$

so folgt

$$a_1 : a_2 = A_2 B_1 : A_2 B_2$$

und hieraus

$$B_1 B_2 \parallel A_1 A_3.$$

In analoger Weise lässt sich zeigen, dass $B_3 B_4 \parallel A_1 A_3$ ist. Demgemäss erhalten wir

$$B_1 B_2 \parallel B_3 B_4 \text{ und ebenso } B_1 B_4 \parallel B_2 B_3$$

d. h.: In jedem Tangentenparallelogramm eines Kegelschnitts (Ellipse oder Hyperbel) bilden die Berührungspunkte die Eckpunkte eines zweiten Parallelogramms, dessen Seiten den Diagonalen des ersten parallel laufen.

Der vorige Satz lässt sich auch so ausdrücken: In jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Parallelogramm liefern die vier Seiten gleiche Projectionen (im obigen Sinne). In dieser Fassung enthält er die Verallgemeinerung und Bestätigung der bekannten Eigenschaft des Kreises, dass jedes Tangentenparallelogramm desselben ein Rhombus ist.

2. Das durch die Asymptoten und zwei beliebige Tangenten der Hyperbel gebildete vollständige Viereck enthält unter anderen einfachen Vierecken ein überschlagenes, in welchem die Asymptotenstücke einander gegenüberliegen. Die beiden anderen Gegenseiten des Vierecks seien

$$A_1 A_2 \equiv a_1 \text{ und } A_3 A_4 \equiv a_3,$$

sodass die Punkte A_1 und A_3 derselben Asymptote angehören (Fig. 15). Alsdann ist wegen der Unerreichbarkeit der Berührungspunkte der Asymptoten $\beta_2 = \beta_4 = 0$, daher liefert die Anwendung des allgemeinen Satzes (§ 7) die bemerkenswerte Beziehung

$$(13) \quad a_1 \sin \beta_1 = a_3 \sin \beta_3$$

Ist insbesondere $A_3 A_4$ die eine Scheiteltangente der Hyperbel, deren zwischen den Asymptoten gelegener Teil ich in üblicher Weise durch $2b$ bezeichne (Länge der imaginären Axe), so folgt, weil dann $\beta_3 = 90^\circ$ ist, $a_1 \sin \beta_1 = 2b$

d. h.: Die Projektion des durch die Asymptoten begrenzten Stücks einer Hyperbeltangente (d. i. der Länge eines imaginären Durchmessers) auf eine zum Brennstrahl des Berührungspunktes senkrechte Gerade ist konstant, nämlich gleich der imaginären Axe.

Nicht ebenso unmittelbar ergibt sich die verwandte auf die Ellipsendurchmesser bezügliche Eigenschaft. Ehe wir dieselbe herleiten, wollen wir noch einige andere Folgerungen aus der eben betrachteten Figur ziehen.

Die beiden Tangenten A_1A_2 und A_3A_4 bilden mit den Asymptoten noch zwei einfache Vierecke OA_2VA_4 und OA_3VA_1 , wobei O den Schnittpunkt der Asymptoten, V den Schnittpunkt (A_1A_2, A_3A_4) bedeutet (Figur 15). Wenden wir auch auf diese Vierecke den allgemeinen Satz (§ 7) an, so erhalten wir die Beziehungen

$$(14) \quad \begin{cases} A_2V \sin \beta_1 = A_4V \sin \beta_3, \\ A_3V \sin \beta_3 = A_1V \sin \beta_1, \end{cases}$$

welche, durch Multiplikation und Division verknüpft, zu zwei bekannten Sätzen führen.

Die zuletzt genannte Operation liefert die Proportion

$$A_2V : A_3V = A_4V : A_1V,$$

und daraus folgt

$$A_2A_4 \parallel A_1A_3$$

d. h.: Die Schnittpunkte zweier Hyperbeltangenten mit den Asymptoten bilden die Eckpunkte eines Trapezes.

Multiplizieren wir die obigen Gleichungen (14) mit einander, so entsteht die Gleichung

$$A_2V \cdot A_3V = A_4V \cdot A_1V,$$

folglich ist

$$\triangle A_2VA_3 = A_4VA_1,$$

also auch

$$\triangle OA_4A_3 = OA_1A_2$$

d. h. Jede Hyperbeltangente schliesst mit den Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalt ein.

Lässt man ferner die beiden Tangenten A_1A_2 und A_3A_4 sich unbegrenzt nahe kommen, so liefern die Gleichungen (14) einen neuen Beweis dafür, dass der durch die Asymptoten begrenzte Teil jeder Hyperbeltangente durch den Berührungspunkt gehälfet wird.

3. Bezeichnen wir den Flächeninhalt eines einfachen Tangentenvierecks durch f , die nach den Berührungspunkten B_1, B_2, B_3, B_4 gehenden Brennstrahlen beziehungsweise durch r_1, r_2, r_3, r_4 , so erhalten wir, je nachdem der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist,

$$f = \frac{1}{2} (a_1 r_1 \sin \beta_1 \pm a_2 r_2 \sin \beta_2 \pm a_3 r_3 \sin \beta_3 + a_4 r_4 \sin \beta_4).^{1)}$$

Ist insbesondere das Viereck ein Parallelogramm, so hat man nach Nr. 1 dieses Paragraphen

$$a_1 \sin \beta_1 = a_2 \sin \beta_2 = a_3 \sin \beta_3 = a_4 \sin \beta_4.$$

Ausserdem ist

$$r_1 \pm r_3 = r_4 \pm r_2 = 2a,^{1)}$$

wobei $2a$ die Länge der Kegelschnittsaxe, auf welcher die Brennpunkte liegen, bedeutet. Hieraus folgt in jedem Falle, mag die Kurve eine Ellipse oder Hyperbel sein,

$$f = 2aa_1 \sin \beta_1 = 2aa_2 \sin \beta_2 = 2aa_3 \sin \beta_3 = 2aa_4 \sin \beta_4$$

d. h.: Stellt man ein Tangentenparallelogramm eines Kegelschnitts (Ellipse oder Hyperbel) dar als Rechteck über der Brennpunktsaxe, so ist die Höhe des letzteren gleich der Projektion jeder Parallelogrammseite auf eine zum Brennstrahl ihres Berührungspunktes senkrechte Gerade.

¹⁾ Die Bezeichnung kann stets so gewählt werden, dass bei der Hyperbel die Minuszeichen in dieser Weise auftreten.

Machen wir noch die nur bei der Ellipse zutreffende Voraussetzung, dass die Seiten des Parallelogramms zwei konjugierten Durchmessern des Kegelschnitts parallel laufen, so ist sein Inhalt bekanntlich konstant, nämlich

$$f = 4ab$$

(2b Länge der kleinen Axe). Daraus folgt

$$a_1 \sin \beta_1 = 2b \text{ oder}$$

$$B_2 B_3 \sin \beta_1 = 2b$$

d. h.: Die Projektion eines Ellipsendurchmessers auf eine Gerade, welche einen zum Berührungspunkt der parallelen Tangenten gehenden Brennstrahl senkrecht schneidet, ist konstant, nämlich gleich der kleinen Axe.

Dieser Satz gestattet eine Übertragung der den konjugierten Durchmessern der Ellipse eigentümlichen metrischen Beziehungen auf zwei in ähnlicher Weise verwandte Brennstrahl-Tangentenwinkel. Ordnen wir je zwei Tangenten, deren jede dem Berührungsdurchmesser der andern parallel ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, welche zwei konjugierten Durchmessern parallel laufen, einander zu, bezeichnen wir ferner ihre in diesem Sinne »konjugierten Brennstrahl-Tangentenwinkel« durch β_1 und β_2 , den Schnittwinkel der Tangenten durch φ und die nach den Berührungspunkten gehenden Halbmesser der Ellipse durch c_1 und c_2 , so bestehen die vier Gleichungen

$$c_1 \sin \beta_1 = c_2 \sin \beta_2 = b$$

$$c_1^2 + c_2^2 = a^2 + b^2$$

$$c_1 c_2 \sin \varphi = ab,$$

aus denen durch Elimination von c_1 und c_2 folgt

$$\frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin \varphi} = \frac{b}{a} \text{ und}$$

$$\frac{1}{\sin \beta_1^2} + \frac{1}{\sin \beta_2^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2}.$$

Führen wir für 1 die Summen $\sin \beta_1^2 + \cos \beta_1^2$ beziehungsweise $\sin \beta_2^2 + \cos \beta_2^2$ ein, so nimmt die zweite Formel die Gestalt an

$$\text{ctg } \beta_1^2 + \text{ctg } \beta_2^2 = \frac{e^2}{b^2},$$

wobei e die lineare Excentricität der Ellipse bedeutet.

Die letzten Ergebnisse können wir in die Worte fassen:

Das Produkt der Sinus zweier konjugierten Brennstrahl-Tangentenwinkel der Ellipse steht zum Sinus des Schnittwinkels der Tangenten in einem konstanten Verhältnis, nämlich in demselben Verhältnis, wie die kleine Halbaxe zur grossen.

Für zwei konjugierte Brennstrahl-Tangentenwinkel der Ellipse ist die Summe der Quadrate ihrer Kotangenten konstant, nämlich gleich dem Verhältnis der Quadrate der Excentricität und der kleinen Halbaxe.

¹⁾ Vergl. Crelle's Journal f. Math., Band 37, S. 161 oder Steiner's Werke, Band 2, S. 396.



Machen wir noch die nur
des Parallelogramms zwei konjugie
sein Inhalt bekanntlich konstant, n

(2b Länge der kleinen Axe). Dar

d. h.: Die Projektion eines E
zum Berührungspunkt der pa
schneidet, ist konstant, nämli

Dieser Satz gestattet eine
eigentümlichen metrischen Beziehu
Tangentenwinkel. Ordnen wir j
der andern parallel ist, oder, was
messern parallel laufen, einander
Brennstahl-Tangentenwinkel« dure
die nach den Berührungspunkten
stehen die vier Gleichungen

aus denen durch Elimination von

Führen wir für 1 die Summen si
die zweite Formel die Gestalt a

wobei e die lineare Excentricität

Die letzten Ergebniss
Das Produkt der Sin
der Ellipse steht zum Sinn
stanten Verhältnis, nämlich
grossen.

Für zwei konjugier
Summe der Quadrate ihrer
der Quadrate der Excentric

¹⁾ Vergl. Crelle's Journal

zung, dass die Seiten
parallel laufen, so ist

erade, welche einen
Brennstrahl senkrecht

Durchmessern der Ellipse
verwandte Brennstrahl-
Berührungsdurchmesser
zwei konjugierten Durch-
sem Sinne »konjugierten
Tangenten durch φ und
durch c_1 und c_2 , so be-

$^2 + \cos \beta_2^2$ ein, so nimmt

Strahl-Tangentenwinkel
Tangenten in einem kon-
die kleine Halbaxe zur

der Ellipse ist die
gleich dem Verhältnis

Verke, Band 2, S. 396.

