Fortſetzung

der

Potenzlehre.

Vorbericht.

Ich habe im Programme 1836 einen Leitfaden der Potenzlehre entworfen, welcher den Schülern in die Hände gegeben, mir den Unterricht in dieſem Zweige erleichtern ſoll, und zu gleichem Zwecke erfolgt hier die Fortſetzung derſelben.

Klupsz.

---

§ 6.

Um aus dem Ausdrucke $\alpha^n = p$, $\alpha = \sqrt[n]{p}$ für alle Fälle zu finden (vergleiche § 3.), brauchen wir den binomiſchen Lehrſatz mit poſitiven ganzen Exponenten:

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{n-3} b^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} a^{n-4} b^4 + \text{u. ſ. w.}$$

Beweis. Wir fanden (§ 1 Zuſatz 6) $(a+b)^1 = a + b$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ u. ſ. w., welche Ausdrücke aus dem obigen allgemeineren hervorgehen, wenn wir reſp. $n=1$, $n=2$, $n=3$ u. ſ. w. ſetzen. Es wird nämlich für $n=1$, $(a+b)^1 = a^1 + 1 a^{1-1} b + \frac{1.0}{1.2} a^{1-2} b^2 +$ ꝛc., wo das 3^te^ und alle folgenden Glieder den Faktor 0 enthalten und folglich wegfallen, und da $a^0 = 1$ (§ 1. Zuſ. 3.), ſo wird $(a+b)^1 = a + b$; mithin der Lehrſatz richtig für $n=1$. Ebenſo erhalten wir für $n=2$, $(a+b)^2 = a^2 + 2a^{2-1} b + \frac{2.1}{1.2} a^{2-2} b^2 + \frac{2.1.0}{1.2.3} a^{2-3} b^3 +$ ꝛc. $= a^2 + 2ab + b^2$; es iſt demnach der Lehrſatz richtig für $n=2$. Auch gibt die binomiſche Formel für $n=3$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^{3-1} b + \frac{3.2\, a^{3-2}}{1.2} b^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3} a^{3-3} b^3$

$+\frac{3.2.1.0}{1.2.3.4}a^{3-4}b^4 + \text{ꝛc.} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Auf dieſe Weiſe könnten wir für jede folgende Potenz die Richtigkeit des Lehrſatzes nachweiſen; es würde aber daraus auf keine Weiſe die Allgemeinheit des Satzes hervorgehen. Um dieſe Allgemeinheit zu erzielen, wollen wir beweiſen, daß der Lehrſatz für jede folgende Potenz richtig ſein müſſe, wenn er für die vorhergehende richtig iſt. Es ſei demnach $n = l$ ein ſolcher ſpecielle Fall, für welchen die Formel bereits bewieſen iſt, ſo ſteht es uns frei $(a+b)^l = a^l + l a^{l-1} b + \frac{l(l-1)}{1.2}a^{l-2}b^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}a^{l-3}b^3 + \frac{l.(l-1)(l-2)(l-3)}{1.2.3.4}a^{l-4}b\ \text{ꝛc.}$ zu ſetzen. Man multipliire jetzt beide Seiten mit $a+b$ ſo haben wir

$$(a+b)^{l+1} = \left\{\begin{array}{l} a^{l+1} + l a b + \frac{l(l-1)}{1.2}a^{l-1}b^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}a^{l-2}b^3 + \text{ꝛc.} \\ \qquad + a^l b + \qquad l a^{l-1} b^2 + \frac{l(l-1)}{1.2}a^{l-2}b^3 + \text{ꝛc.} \end{array}\right\} \text{oder}$$

$$(\ +b)^{l+1} = a^{l+1} + a^l b(l+1) + l a^{l-1} b^2\left(\frac{l-1}{2}+1\right) + \frac{l.(l-1)}{1.2}a^{l-2}b^3\left(\frac{l-2}{3}+1\right)$$

$+ \text{ꝛc.}$ Bringt man $\frac{l-1}{2}+1, \frac{l-2}{3}+1, \frac{l-3}{4}+1$ u. ſ. w., auf gleiche Benennung:

$$\frac{l-1+2}{2} = \frac{l+1}{2}, \frac{l-2}{3}+1 = \frac{l-2+3}{3} = \frac{l+1}{3}, \frac{l-3}{4}+1 = \frac{l-3+4}{4}$$

$= \frac{l+1}{4}$ u. ſ. w. ſo wird $(a+b)^{l+1} = a^{l+1} + (l+1)a^l b + \frac{(l+1)l.a^{l-1}b^2}{1.2}$

$$+ \frac{(l+1)l.(l-1)}{1.2.3}a^{l-2}b^3 + \frac{(l+1)l.(l-1)(l-2)}{1.2.3.4}a^{l-3}b^4\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Was wir offenbar erhalten, wenn wir in den Ausdruck für $(a+b)^l$ anſtatt l überall $l+1$ ſetzen; es iſt demnach der Lehrſatz für die $(l+1)$te Potenz richtig, wenn er für die $l$te richtig iſt. Da er nun für die 1ſte (auch zum Ueberfluß für die 2te und 3te) bereits bewieſen iſt, ſo muß er für alle folgenden Potenzen richtig ſein w. z. b. w.

Zuſatz 1. Setzt man für b, —b ſo werden alle geraden Potenzen von b poſitiv und alle ungeraden negativ (§ 1, Zuſatz 2.), folglich:

$$(a+b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \text{ꝛc.}$$

Zuſatz 2, Setzt man $a=1$, ſo wird $(1 \pm b)a^n = 1 \pm nb + \frac{n(n-1)}{1.2}b^2$

$\pm \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{1 . 2 . 3}$ + ꝛc., eine bloß nach den Potenzen von b fortſchreitende Reihe.

§ 7.

Anwendung dieſer Formel zur Berechnung des α im Ausdrucke $\alpha = \sqrt[n]{p}$. Es ſei zuerſt $n = 2$; oder $\alpha = \sqrt{p}$. Da $1^2 = 1$, $10^2 = 100$, $100^2 = 10000$, $1000^2 = 1000000$ u. ſ. w. ſo iſt umgekehrt $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{10000} = 100$, $\sqrt{1000000} = 1000$ und folglich die Quadratwurzel einer ein- und zweiziffrigen Zahl eine einziffrige, die Quadratwurzel einer 3 oder 4ziffrigen Zahl, eine zweiziffrige, einer 5 oder 6ziffrigen Zahl, eine 3ziffrige u. ſ. w. Wenn man folglich die gegebene Zahl p, zu welcher die Quadratwurzel geſucht werden ſoll — die ich der Kürze halber das Quadrat nennen will — von der Rechten zur Linken in Kolonnen zu zwei Ziffern eintheilt, ſo enthält die Quadratwurzel ſo viel Ziffern, als p Kolonnen hat, z. B. gibt $\sqrt{9|90|36|09}$ vier Ziffern und es kommt nur darauf an, dieſe Ziffern mit Sicherheit zu finden.

Auch hier kann man nur ſtufenweiſe fortſchreitend zu Werke gehen. Es ſei p, 1ſtens ein vollſtändiges Quadrat und eine ganze Zahl (vergl. § 3). Beſteht p aus einer Kolonne, ſo iſt die Quadratwurzel leicht zu finden, denn ſie iſt diejenige Zahl, welche zum Quadrat erhoben, p gibt. Beſteht ſie aus 2 Kolonnen, ſo kann ſie als ein aus 2 Ziffern entſtandenes Quadrat betrachtet werden, dem Zehner = a und dem Einer = b, und da $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ſo müſſen dieſe 3 Glieder in p enthalten ſein.

Man ſuche zuerſt a aus der erſten Kolonne d. h. diejenige Zahl, welche zum Quadrat erhoben der erſten Kolonne am nächſten kommt; ſo z. B. iſt in $\sqrt{7|84|}$ die erſte Ziffer = 2, oder ihrem Range nach = 20; denn $20^2 = 400$, 30^2 aber würde = 900, mithin zu viel geben. Zieht man $a^2 = 400$ von $p = 784$ ab, ſo bleibt der Reſt $384 = 2ab + b^2$. Da nun b^2 gegen $2ab$ klein iſt, ſo findet man b, wenn man den Reſt $= R = 2ab$ folglich $b = \frac{R}{2a} = \frac{384}{40} = \frac{38,4}{4}$ ſetzt. Hier muß jedoch b nur ſo groß angenommen werden, daß außer $2ab$, auch noch b^2 abgezogen werden könne; es kann mithin b nicht = 9 ſein, weil $2ab + b^2 = (2a + b)\ b = 49.\ 9 = 441$, mithin zu viel geben würde. Aber $b = 8$ gibt $2ab + b^2 = (2a + b)\ b = 48.\ 8 = 384$. Man ſieht leicht ein, daß in a^2 die 2 Nullen weggelaſſen werden können, wenn ihre Stellen nur leer bleiben, ebenſo in $2a$ die eine Null, da $2a$ ohnehin ſeinen Rang (als Zehner) wieder erhält, wenn die 2te Ziffer b hinzu kommt. Es muß aber, wenn man in $2a$ die Null wegläßt, im Reſt von der Rechten zur Linken eine Ziffer abgeſchnitten werden, um b zu beſtimmen d. h. man nimmt hier $\frac{R}{2a}$ anſtatt $\frac{384}{40}$, $\frac{38,4.}{4}$ Man rechnet demnach nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{7\,|\,84\,|} = \overset{a}{2}\,\overset{b}{8} \\ a^2 = 4 & \\ \hline 2a+b=48 & 384 \\ 2ab+b^2= & 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{53\,|\,29} = \overset{a}{7}\,\overset{b}{3} \\ & 49 \\ \hline 143 & 429 \\ & 429 \end{array}$$

Enthält das Quadrat p 3 Kolonnen, ſo ſucht man zuerſt, wie zuvor, aus den beiden erſten Kolonnen die beiden erſten Ziffern der Wurzel, welche nun als erſter Theil des Binoms = a angenommen werden, und die 3te Ziffer ſtellt b vor. Auf ähnliche Weiſe verfährt man bei 4, 5 u. ſ. w. Kolonnen z. B.

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{9\,|\,90\,|\,36\,|\,09} = \overbrace{\overbrace{\overset{a}{3}\,\overset{b}{1}}^{a}\,\overset{b}{4}}^{a}\,\overset{b}{7}; \\ a^2 = 9 & \\ \hline 2a+b=61 & 90 \\ 2ab+b^2= & 61 \\ \hline 2a+b=624 & 2936 \\ 2ab+b^2= & 2496 \\ \hline 2a+b=6287 & 44009 \\ 2ab+b^2= & 44009 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{10\,|\,09\,|\,14\,|\,22\,|\,89\,|} = 31767 \\ & 9 \\ \hline 61 & 109 \\ & 61 \\ \hline 627 & 4814 \\ & 4389 \\ \hline 6346 & 42522 \\ & 38076 \\ \hline 63527 & 444689 \\ & 444689 \end{array}$$

§ 8.

Es ſei 2tens p kein vollſtändiges Quadrat, oder nach § 3 die Quadratwurzel irrational, ſo iſt α (des Ausdrucks $\alpha^n = p$) oder $\sqrt{p}$ weder eine ganze Zahl noch ein Bruch, und wir finden den Näherungswerth der Quadratwurzel, wenn wir an das gegebene Quadrat p zwei Nullen anhängen, wodurch p 100 Mal und die Quadratwurzel 10 Mal zu groß wird, und man muß folglich die Quadratwurzel mit 10 dividiren, d. h. von der Rechten zur Linken eine Ziffer abſchneiden. Ebenſo kann man ein 2tes, 3tes u. ſ. w. Paar Nullen anhängen, und von der Quadratwurzel reſp. 2, 3 u. ſ. w. Ziffern abſchneiden, und ſo die Rechnung bis ins Unendliche fortſetzen.

§ 9.

Es beſtehe 3tens p aus einer ganzen Zahl und einem Dezimalbruch, ſo denke man ſich das Komma 2, 4, 6 u. ſ. w. Stellen zur Rechten weiter geſchoben, wodurch das Quadrat p, 100, 10000, 1000000 u. ſ. w. Mal und die Quadratwurzel, α reſp. 10, 100, 1000, u. ſ. w. Mal zu groß wird, und man erhält den wahren Werth der Quadratwurzel, wenn man zur Rechten reſp. 1, 2, 3 u. ſ. w. Dezimalen abſchneidet. Man theile folglich die ganzen Ziffern vom Komma ab, von der Rechten zur Linken, und die Dezimalen von der Linken zur Rechten in Kolonnen zu 2 Ziffern ein, und rechne wie gewöhnlich, ſchneide aber von der Quadratwurzel zur Rechten ſo viel Dezimalen ab, als man Dezimal-Kolonnen genommen hat. **Beiſpiele zum 2ten und 3ten Fall:**

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{10}=3{,}162277\ldots}\\
 & 9\\ \cline{2-2}
61 & 100\\
 & 61\\ \cline{2-2}
626 & 3900\\
 & 3756\\ \cline{2-2}
6322 & 14400\\
 & 12644\\ \cline{2-2}
63242 & 175600\\
 & 126484\\ \cline{2-2}
632447 & 4911600\\
 & 4427129\\ \cline{2-2}
6324547 & 48447100\\
 & 44271829\\ \cline{2-2}
\multicolumn{2}{c}{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{3\,|\,47\,|\,76,\,|\,23\,|\,76\,|\,34\;..}=186{,}483\ldots}\\
 & 1\\ \cline{2-2}
28 & 247\\
 & 224\\ \cline{2-2}
366 & 2376\\
 & 2196\\ \cline{2-2}
3724 & 18023\\
 & 14896\\ \cline{2-2}
37288 & 314776\\
 & 298304\\ \cline{2-2}
372963 & 1447234\\
 & 1418889\\ \cline{2-2}
\multicolumn{2}{c}{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot}
\end{array}$$

Anmerkung. Würde man an das gegebene Quadrat p eine Null anhängen, ſo müßte man die Quadratwurzel durch $\sqrt{10}$ dividiren. Ebenſo müßte man, wenn man 3, 5 u. ſ. w. Nullen anhängen möchte, durch $\sqrt{1000}$, $\sqrt{100000}$, u. ſ. w., welche ebenfalls irrational ſind, dividiren. Daſſelbe gilt, wenn man 1, 3, 5, u. ſ. w. Dezimalen zu den Ganzen hinzurechnen würde.

§ 10.

Abgekürztes Verfahren. Da bei irrationalen Wurzeln die Rechnung nie abbricht, und da überhaupt nur ſo viel Dezimalen berechnet werden dürfen, als zur genauen Beſtimmung der Sache erforderlich ſind, und da ferner die 1ſte und 2te Ziffer des Quadrats p die 1ſte Ziffer des α und ebenſo die 2te und 3te, 3te und 4te, 5te u. ſ. w. des p reſp. die 1ſte, 2te, 3te, 4te u. ſ. w. Ziffer des α genau beſtimmen, ſo hat man von dem Quadrat nur $n+1$ Ziffern in Rechnung zu bringen, wenn α, n Ziffern enthalten ſoll — die Rechnung nach § 8 und 9 wäre folglich eine reine Zeitverſchwendung. — Aus der Anzahl der Kolonnen der ganzen Ziffern des p kennt man nämlich die Anzahl der ganzen Ziffern des α, und die Anzahl der zu berechnenden Dezimalen richtet ſich entweder nach dem Werthe der Dinge, oder nach den Rechnungsoperationen, welche fernerhin mit der Quadratwurzel vorgenommen werden ſollen — man kennt demnach unter allen Umſtänden die Anzahl der zu berechnenden Ziffern des α — . Man nehme nun die $n+1$ erſten Ziffern des p, ohne Rückſicht auf das Komma, nach vorhergegangener Eintheilung in Kolonnen, ſtreiche die übrigen durch, wenn nämlich α nur n Ziffern enthalten ſoll, rechne ſo lange wie gewöhnlich fort, als die $n+1$ Ziffern ausreichen, und von nun an fängt das abgekürzte Verfahren erſt an. Fehlt nämlich in der zunächſt herunter zulaſſenden Kolonne eine Ziffer, ſo ſtreiche man in $2a+b$ die letzte Ziffer durch, und nehme in das Produkt $(2a+b)b$, wenn b^2 unter 4, 14, 24, 34, u. ſ. w. iſt, von der durchgeſtrichnen Ziffer den Zehner reſp. 0, 1, 2, 3, 4, u. ſ. w. zu dem Produkt der folgenden Ziffer hinzu; wenn aber b^2 5, 15, 25, 35, 45 und darüber beträgt, ſo nimmt man zu der folgenden Ziffer den Zehner reſp. 1, 2, 3, 4, 5, u ſ. w., hinzu. Gehören beide Ziffern der zunächſt herunterzulaſſenden Kolonne zu den durchgeſtrichnen, ſo ſtreicht man in $2a+b$ die beiden letzten Ziffern durch, und rechnet wie zuvor. Bei der Berechnung der nächſtfolgenden Ziffer des α darf man nur in dem Diviſor $2a+b$, da alle Ziffern bis auf die beiden letzten ſtets wiederkehren, nur die nächſtfolgende Ziffer durchſtreichen, und wie zuvor rechnen und ſo lange fortfahren bis in $2a+b$ keine Ziffer mehr vorhanden iſt. Es ſei z. B. $\alpha = \sqrt{p} = \sqrt{2|37|63|76|73,\ 12|34|5}$ bis auf 2 Dezimalen zu berechnen, ſo muß die Quadratwurzel α 5 ganze Ziffern und 2 Dezimalen, mithin 7 Ziffern enthalten, und man hat demnach vom gegebenen Quadrat p nur die 8 erſten Ziffern nöthig und rechnet wie folgt:

$$\sqrt{2\,|\,37\,|\,63\,|\,76\,|\,73,12345\,|} = 5415{,}50\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\ \hline
25 & 137 \\
 & 125 \\ \hline
304 & 1263 \\
 & 1216 \\ \hline
3081 & 4776 \\
 & 3081 \\ \hline
30825 & 16957,. \\
 & 15413 \\ \hline
30839 & 1544..,. \\
 & 1542 \\ \hline
 & 2
\end{array}$$

Anmerkung. Iſt p eine ganze Zahl oder auch ein endlicher Dezimalbruch und kein vollſtändiges Quadrat und die Anzahl der Ziffern des p reicht zur Berechnung einer beſtimmten Anzahl Dezimalen nicht hin, ſo fülle man die fehlenden Stellen mit Nullen aus. Es ſei z. B. $\sqrt{7938}$ bis auf 5 Dezimalen zu berechnen, ſo enthält die Quadratwurzel 2 ganze Ziffern und 5 Dezimalen, alſo im Ganzen 7 Ziffern und wir brauchen im Quadrat p 8 Ziffern, es müſſen demnach noch 4 Nullen angehängt werden. Wenn aber p keine ganze Ziffer und hinter dem Komma noch mehrere Nullen enthält, ſo gibt jedes Nullenpaar nur eine Dezimale, und es müſſen im p außer den Nullen, noch $n+1$

Dezimalen genommen werden, wenn, außer den Nullen des α, n Dezimalen berechnet werden ſollen. Beiſpiele für beide Fälle:

$\sqrt{7938,0000|} = 89,09546.$ $\sqrt{0,00\,|\,00\,|\,76\,|\,35\,|\,43\,|} = 0,0087381$

	64		64
169	1538	167	1235
	1521		1169
17809	170000	1743	6643
	160281		5229
178185	9719..	17468	1414.,.
	8909		1397
17848	810	17468	17
	713		17
178	97		.

§ 11.

Berechnung der Kubikwurzel. Da $1^3 = 1$, $10^3 = 1000$, $100^3 = 1000000$, $1000^3 = 1000000000$ u. ſ. w., ſo gibt jede 1, 2, oder 3ziffrige Zahl des gegebnen p, (des Ausdrucks $\alpha = \sqrt[3]{p}$) eine 1ziffrige Zahl für die Kubikwurzel α. Ebenſo gibt jede 4, 5 und 6; 7, 8 und 9; u. ſ. w. ziffrige Zahl des p für α reſp. eine 2, 3 u. ſ. w ziffrige Zahl. Man theile demnach das p von der Rechten zur Linken, und wenn p Dezimalen enthält, dieſe von der Linken zur Rechten, in Kolonnen zu 3 Ziffern. Indem man nun das p als aus dem Kubus einer 2theiligen Größe entſtanden betrachtet, ſo hat man die Kubikwurzel nach der Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, zu berechnen, wo a und b auf eine dem vorigen Verfahren ganz ähnliche Weiſe berechnet werden. Man ſuche nämlich aus der erſten Kolonne die höchſte Ziffer der Kubikwurzel, ziehe a^3 ab, ſetze den Reſt mit der nächſt folgenden Kolonne $= R = 3a^2b$ und folglich $b = \frac{R.}{3a^2}$ Dieſes b muß jedoch nur ſo groß genommen werden, daß außer $3a^2b$ auch noch $3ab^2 + b^3$ abgezogen werden können. Man betrachte nun die beiden erſten Ziffern als a und die 3te Ziffer als b, ſo iſt der Reſt mit der heruntergelaſſenen 3en Kolonne wiederum $= 3a^2b$ zu ſetzen und wie vor das b zu beſtimmen. Hier iſt zu erwägen, daß a, ſeinem Range nach, ein Zehner iſt und folglich $3a^2$, 2 Nullen am Ende haben ſollte. Nimmt man alſo dieſe Nullen nicht, ſo iſt der Diviſor $3a^2$, 100 Mal zu groß und folglich muß R 100 Mal kleiner gemacht werden. Man ſchneidet demnach von dem R von der Rechten zur Linken die beiden letzten Ziffern ab, um das b zu finden, läßt in $3a^2b$ die beiden letzten und in $3ab^2$ die letzte Stelle offen. Der Kürze halber will ich hier nur das Schema geben, nach welchem beim nicht abgekürzten Verfahren gerechnet werden kann:

$$\sqrt[3]{2\,|\,460\,|\,375\,|} = \begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{a\ \ b}^{a}} & b \\ 1 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
a^8 & = & 1 \\
3a^2 & = & 3 \;|\; 14{,}60 \\
3a^2 b & = & 9.. \\
3ab^2 & = & 27. \\
b^3 & = & 27 \\
\hline
3a^2 b + 3ab^2 + b^5 & = & 1197 \\
\hline
3a^2 & = & 507 \;|\; 263375 \\
3a^2 b & = & |\; 2535.. \\
\hline
3ab^2 & = & 975. \\
b^5 & = & 125 \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = 263375}
\end{array}$$

§ 12.

Abgekürztes Verfahren. Auch hier hat man im Kubus p nur höchſtens n + 2 Ziffern zu nehmen, wenn die Kubikwurzel n Ziffern enthalten ſoll (vergl. § 10) und rechnet ſo lange wie gewöhnlich, bis keine Ziffer mehr herunterzulaſſen iſt. Nun aber läßt man in den Produkten $3a^2$, $3a^2b$, $3ab$ und b^5, ſo viel Ziffern zur Rechten weg, als durch das Nichtherunterlaſſen der folgenden Kolonnen vernachläßigt worden ſind. Da jedoch im Diviſor $3a^2$ die beiden letzten Ziffern fehlen und $3a^2$ noch mit b multiplicirt werden muß, ſo muß man im $3a^2$, 3 weniger vernachläßigen, als durch das Weglaſſen der folgenden Kolonnen vernachläßigt worden ſind; die letzte Ziffer des $3a^2$ wird jedoch durchgeſtrichen, und im Produkt $3a\ b$ nur ihr Zehner zum Produkt der folgenden Ziffer hinzugenommen. In $3ab^2$ fehlt nur eine Ziffer und es wird demnach nur eine weniger vernachläßigt, als durch das Nichtherunterlaſſen vernachläßigt worden ſind. In b^3 wird keine abgerechnet, weil in b^3 keine Stelle leer gelaſſen wird. Sind z. B. n Ziffern durch das Nichtherunterlaſſen neuer Kolonnen vernachläßigt, ſo berechnet man $3a^2$ ſo, daß n—3 Ziffern vernachläßigt werden, ſtreicht aber die letzte durch, um in $3a^2b$ nur n—2 zu vernachläßigen. In $3ab^2$ vernachläßigt man n—1 und in b^3 n Ziffern zur Rechten. Um nun die zu vernachläßigenden Ziffern nicht unnöthigerweiſe zu berechnen, um ſie nachher wegzulaſſen, rechnet man wie folgt, man multiplicire 3a mit a, indem man mit der höchſten Ziffer des a zur Linken die Multiplication beginnt. Hier müßte man bei vollſtändiger Multiplication die Ziffern der 2ten und jeder folgenden Reihe um eine Stelle zur Rechten herausrücken und dieſe herausgerückten Ziffern können als die letzten Ziffern, vernachläßigt werden. Hat z. B. der Multiplicator a, k Ziffern, ſo können durch das Nichtherausrükken k—1 Ziffern vernachläßigt worden; reicht aber die Anzahl der vernachläßigten Ziffern noch nicht aus, ſo werden im Multiplicandus (3a) noch ſo viel Ziffern zur Rechten durchgeſtrichen, als fehlen. Auf gleiche Weiſe berechnet man $3ab^2$, indem man 3a mit b-multiplicirt. Da b nie größer als $9^3 = 729$ ſein kann, ſo wird b^3 nur berechnet, wenn weniger als 3 Ziffern zu vernachläßigen ſind und man läßt eine, zwei oder alle drei Ziffern weg, je nachdem durch das Nichtherunterlaſſen reſp. 1, 2, 3 und mehr Ziffern vernachläßigt worden ſind. Iſt die höchſte der vernachläßigten Ziffer unter 5, ſo wird ſie nicht weiter berückſichtigt, iſt ſie aber 5 und darüber, ſo wird zur folgenden Ziffer, der größern Genauigkeit wegen, eine Einheit hinzugenommen. Da wo das eigentlich abgekürzte Verfahren erſt beginnt, muß man ſo lange die Produkte $3a^2$, $3a^2b$ vollſtändig berechnen, als es die Anzahl der zu vernachläßigenden Ziffern erfordert, d. h. ſollen z. B. in $3a^2$ nur die beiden letzten Ziffern vernachläßigt werden, und a enthält 5 Ziffern, ſo wird bei der Multiplication des $3a$ mit a bei der 2ten und 3ten Ziffer in dieſen Reihen noch zurückgerückt und erſt bei der 4ten und 5ten ꝛc. das Zurückrücken unterlaſſen. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß die Ziffer, die nicht herausgerückt werden ſoll, auch nicht berechnet werden muß, was geſchieht, indem man die letzte des Multiplicandus $3a$ durchſtreicht; es wird jedoch ihr Zehner zur folgenden Ziffer hinzugenommen. Wenn p keine ganze Ziffern und hinter dem Komma eine oder mehrere Nullen enthält, ſo gibt jede Kolonne Nullen nur 1 Null im α und es müſſen demnach außer den Nullen des p noch $n + 2$ Dezimalen genommen werden, wenn α, außer den Nullen, noch n Dezimalen enthalten ſoll. Folgende Beiſpiele werden die Sache klar machen. Es ſei $\sqrt[3]{144,09546..}$, bis auf 5 und $\sqrt[5]{0,000\,000\,176\,1234}$ bis auf 7 Dezimalen zu berechnen.

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{\overset{a}{\overbrace{a\,b}}\,b}^{a}\,b}^{a}\,b}^{a}\;b$$

$$\sqrt[3]{144,09546\ldots} = 5,2426\,4.$$

$$\begin{array}{rl}
a^3 = & 125 \\
\hline
3a^2 = 75.. & |\ 19095 \\
\hline
3a^2b = & 150.. \\
3ab^2 = & 60. \\
b^3 = & 8 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 15608 \\
\hline
3a^2 = 8112.. & |\ 34874,6. \\
\hline
3a^2b = & 32448.. \\
3ab^2 = & 2496. \\
b^3 = & 6. \\
\hline
3a^3b + 3ab^2 + b^3 = & 326982.... \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
3a = & 15 \\
a = & 5 \\
\hline
3a^2 = & 75
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
3a = & 15 \\
b^2 = & 4 \\
\hline
3ab^2 = & 60
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
3a = & 156 \\
a = & 52 \\
\hline
 & 780 \\
 & 312 \\
\hline
3a^2 = & 8112
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
3a = & 156 \\
b = & 16 \\
\hline
 & 156 \\
 & 936 \\
\hline
3ab^2 = & 2496
\end{array}$$

$3a^2 = 82373 \mid 21764$
$3a^2b = 16475$
$3ab^2 = 6$
$3a^2b + 3ab^2 = 16481$
$3a^2 = 8244 \mid 5283$
$3a^2b = 4946$
$3a^2 = 8244 \mid 337$
$3a^2b = 330$
7

$3a = 1572$
$a = 524$
7860
3144
$629.$
$3a^2 = 82373.$

$3a = 15..$
$b^2 = 4$
$3ab^2 = 66...$

$3a = 15726$
$a = 5242$
$7863.$
$315.$
63
3
$3a^2 = 8244$

$\sqrt{0{,}000 \mid 000 \mid 176 \mid 123 \mid 4..} = 0{,}0056053..$
125
$3a^2 = 75.. \mid 51123$
$3a^2b = 450..$
$3ab^2 = 540.$
$b^3 = 216$
50616
$3a^2 = 9408 \mid 5074.....$
$3a^2b = 4704$
$3ab^2 = 4$
4708
$3a^2 = 9468 \mid 366$

§ 13.

Auf ganz gleiche Weiſe kann man die 4te, 5te u. ſ. w. Wurzel berechnen, wenn man p reſp. in Kolonnen zu 4, 5 u. ſ. w., die ganzen Ziffern von der Rechten zur Linken, und die Dezimalen von der Linken zur Rechten eintheilt und nach den Formeln $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, und $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ u. ſ. w. die Rechnung ausführt. Man hat hier mit den Diviſoren reſp. $4a^3$, $5a^4$ u. ſ. w. in den Reſt hineinzudividiren, um b zu finden. Auch könnte man auf eine ganz ähnliche Weiſe wie bei der Kubik- und Quadratwurzel, abgekürzt rechnen, wenn man es nicht vorzieht, dieſe Wurzeln logarithmiſch zu berechnen. (Vergl. die Logarithmentheorie.)

§ 14.

Ganz analog dem vorigen Verfahren berechnet man die Quadrat-, Kubik- u. ſ. w. Wurzel aus algebraiſchen Größen. Man ordnet nämlich die Ausdrücke, aus welchen die Wurzel gezogen werden ſoll, nach den ſteigenden oder fallenden Potenzen der Buchſtaben und betrachtet bei der Quadrat-Wurzel das höchſte Glied als a^2, und dividirt das nächſte Glied durch $2a$, um b zu finden, zieht nun die Produkte $2ab + b^2$, von den entſprechenden Gliedern ab, und betrachtet nun die beiden erſten Glieder der Wurzel als a, dividirt wieder mit $2a$ in das höchſte Glied des Reſtes und findet ſo das 3te Glied der Wurzel $= b$, zieht von den entſprechenden Gliedern $2ab + b^2$, ab, und betrachtet die 3 erſten Glieder der Wurzel als a und rechnet ſo lange fort, bis keine Glieder mehr vorhanden ſind. z. B.

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{4} + 3x + \tfrac{35}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{193}{16}x^4 - x^5 + 4x^6\right)} = \overbrace{\overline{\overset{a}{\tfrac{1}{2}} + \overset{b}{3x}}^{a} \overset{b}{- \tfrac{1}{4}x^2}}^{a} \overset{b}{+ 2x^3}.$$

$$a^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$2a = 1 \mid + 3x$$

$$2ab = + 3x$$

$$\mid + \tfrac{35}{4}x^2$$

$$b^2 = 9x^2$$

$$2a = 1 + 6x \mid - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3$$

$$2ab = - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{2}x^3$$

$$+ 2x^3 + \tfrac{195}{16}x^4$$

$$b^2 = \tfrac{1}{16}x^4$$

$$2a = 1 + 6x - \tfrac{1}{2}x^2 \mid 2x^3 + 12x^4 - x^5$$

$$2ab = 2x^3 + 12x^4 - x^5$$

$$+ 4x^6$$

$$b^2 = + 4x^6$$

§ 15.

Auf gleiche Weiſe kann man die 3te, 4te u. ſ. w. Wurzel aus algebraiſchen Ausdrücken ausziehen. Bei unvollſtändigen Quadraten, Kuben u. ſ. w. erhält man unendliche Reihen, welche nach den Potenzen der Größe fortſchreiten, nach welchen p geordnet iſt. So z. B. gibt:

$$\sqrt{1+c} = 1 + \frac{c}{2} - \frac{c^2}{8} + \frac{c^3}{16} - \frac{5c^4}{128} \text{ ꝛc.}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \overline{1} \\
2 & + c \\
 & c + \frac{c^2}{4} \\ \hline
2 + c & - \frac{c^2}{4} \\
 & - \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{8} + \frac{c^4}{64} \\ \hline
2 + c - \frac{c^2}{4} & + \frac{c^3}{8} - \frac{c^4}{64} \\
 & + \frac{c^3}{8} + \frac{c^4}{16} - \frac{c^5}{64} + \frac{c^6}{256} \\ \hline
2 + c - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{8} & - \frac{5c^4}{64} + \frac{c^5}{64} - \frac{c^6}{256}.
\end{array}$$

Bei höheren Wurzeln iſt die Rechnung, genau genommen, nicht ſchwieriger, wol aber weitläuftiger.

§ 16.

Um aus dem Ausdruck $\alpha^n = p$, n zu finden, wenn α und p gegeben iſt, brauchen wir zunächſt den binomiſchen Lehrſatz mit negativen ganzen Exponenten. Da wir $(a+b)^{-n}$ in $a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$ verwandeln können, ſo haben wir blos $1+\frac{b}{a}$ zur $-n^{\text{ten}}$ Potenz zu erheben, und wenn wir $\frac{b}{a} = c$ ſetzen, ſo iſt $(1+c)^{-n}$ zu entwickeln. Wir wollen nun beweiſen, daß der entwickelte Ausdruck für $(1+c)^{-n}$ aus dem Ausdruck $(1+c)^n$ hervorgehe, wenn wir für n die Größe $-n$ ſetzen, oder es bleibt zu beweiſen, daß $(1+c)^{-n}$

$$= 1 - n.c - \frac{n(-n-1)}{1 \cdot 2} \cdot c^2 - \frac{n(-n-1)(-n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot c^3 - \frac{n(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ ꝛc.}$$

$$= 1 - nc + \frac{n(n+1)}{1.2} c^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} c^3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4} c^4 - \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

ſein müſſe.

Beweis. Es iſt $(1+c)^{-1} = \frac{1}{1+c}$ (§ 2). Dividirt man mit $1+c$ in 1 hinein, ſo gibt die Diviſion $1 - c + c^2 - c^3 + c^4 -$ ꝛc. ꝛc. Die obige binomiſche Formel gibt für $n = 1$:

$$(1+c)^{-1} = 1 - 1.c + \frac{1.2}{1.2} c^2 - \frac{1.2.3}{1.2.3} c^3 + \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} c^4 - \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

$$= 1 - c + c^2 - c^3 + c^4 - \text{ ꝛc. ꝛc. wie vorher.}$$

Es iſt demnach der binomiſche Lehrſatz richtig für die — 1^{te} Potenz. Auf gleiche Weiſe könnte man ſie für die — 2^{te}, — 3^{te} u. ſ. w. Potenz beweiſen; es wird jedoch die Richtigkeit der Formel für alle negativen Potenzen von ſelbſt einleuchten, wenn wir beweiſen, daß ſie für jede nächſt höhere negative Potenz richtig ſein müſſe, wenn ſie für die nächſt vorhergehende richtig iſt, d. h. wenn ſie für die — l^{te} richtig iſt, ſie auch für die — $l - 1^{te}$ richtig ſein müſſe. Unter dieſer Vorausſetzung iſt:

$$(1+c)^{-l}=1-lc+\frac{l(l+1}{1.2}c^2-\frac{l(l+1)(l+2)}{1\,.\,2\,.\,3}c^3+\frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}c^4-\text{ꝛc.}$$

Nun iſt $(1+c^{-l-1}=\frac{1}{(1+c)}\,l+1$ (§ 2). Entwickelt man $(1+c)^{l+1}$ nach der binomiſchen Formel für poſitive ganze Exponenten, ſo erhalten wir eine Reihe, die fortſchreitet nach den Potenzen von c, und es iſt klar, daß, wenn wir mit dieſer Reihe in die 1 hineindividiren, wir wiederum eine nach den Potenzen von c fortſchreitende Reihe erhalten müſſen. Es ſteht uns demnach frei $(1+c)^{-l-1}=1+Ac+Bc^2+Cc^3+Dc^4$ u. ſ. w. zu ſetzen, wo die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. noch zu beſtimmen ſind. Multiplicirt man beide Seiten dieſer Gleichung mit $1+c$, ſo erhalten wir:

$$(1+c)^{-l}=\left\{\begin{array}{l}1+Ac+Bc^2+Cc^3+Dc^4\text{ ꝛc.}\\ \quad+\;c+Ac^2+Bc\;+Cc^4\text{ ꝛc.}\end{array}\right\}$$

oder $(1+c)^{-l}=1+(A+1)c+(B+A)c^2+(C+B)c^3+(D+C)c^4$ ꝛc. ꝛc. Nun war nach obiger Vorausſetzung:

$$(1+c)^{-l}=1-lc+\frac{l(l+1)}{1.2}c^2-\frac{l(l+1)(l+2)}{1\,.\,2\,.\,3}c^3+\frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}c^4-\text{ꝛc.}$$

wir haben demnach 2 identiſche Reihen, die nach den Potenzen einer willkürlichen Größe c fortſchreiten, und wir können ſie Glied für Glied einander gleich ſetzen. Denn es iſt $1+(A+1)c+(B+A)c^2+(C+B)c^3+(D+C)c^4$ u. $=1-lc+\frac{l(l+1)}{1.2}c^2-\frac{l(l+1)(l+2)}{1\,.\,2\,.\,3}c^3+\frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}c^4$ ꝛc. ꝛc. Von beiden Seiten 1 abgezogen und beide Seiten durch c dividirt, gibt: $A+1+(B+A)c+(C+B)c^2+(D+C)c^3$ u. $=-l+\frac{l(l+1)}{1.2}c-\frac{l(l+1)(l+2)}{1\,.\,2\,.\,3}c^2+\frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}c^3$ ꝛc.

Da nun dieſe beiden Seiten der Gleichung für jedes willkürliche c einander gleich ſein müſſen, ſo ſind ſie es auch für $c=0$. Setzt man aber $c=0$, ſo fallen alle, von c abhängigen, Glieder weg, und es wird $A+1=-l$ oder $A=-l-1$. Dieſen Werth hat nun A nicht blos für $c=0$, ſondern auch für jeden andern Werth; weil A von c unabhängig iſt. Da nun $A+1$ immer $-l$, ſo erhalten wir aus der letzten Gleichung, wenn wir dieſe Größen abziehen und durch c dividiren: $B+A+(C+B)c+(D+C)c^2$ ꝛc. $=\frac{l(l+1)}{1.2}-\frac{l(l+1)(l+2)}{1.2.3}c+\frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4}c^2$ ꝛc. Dieſe beiden Reihen ſind nun wiederum für jedes willkürliche c, alſo auch für $c=0$ einander gleich, und es muß unter allen Umſtänden $B+A=\frac{l(l+1)}{1.2}$; oder $B=\frac{l(l+1)}{1.2}-A=\frac{l(l+1)}{1.2}+(l+1)=(l+1)\left(\frac{l}{2}+1\right)=\frac{(l+1)(l+2)}{1.2}$. Durch gleiches Raiſonnement erhalten wir: $C+B=-\frac{l(l+1)(l+2)}{1.2.3}$ oder $C=-\frac{l(l+1)((l+2)}{1.2.3}-\frac{(l+1)(l+2)}{1.2}=-\frac{(l+1)(l+2)}{1.2}\left(\frac{l}{3}+1\right)=-\frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3}$. Ebenſo $D+C=\frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4}$ oder $D=\frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4}+\frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3}=\frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3}\left(\frac{l}{4}+1\right)$ $=\frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{1.2.3.4}$ u. ſ. w.

Die Rechnung darf hier nicht weiter fortgeſetzt werden, weil das Geſetz, nach welchem dieſe Coefficienten fortſchreiten müſſen, einleuchtet. Setzt man nun die gefundenen Werthe für A, P, C, D ꝛc. in die Reihe $(1+c)^{-l-1}=1+Ac+Bc^2+Cc^3+Dc^4$ ꝛc. ſo wird $(1+c)^{-l-1}=1-(l+1)c+\frac{(l+1)(l+2)}{1.2}c^2-\frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3}c^3$ $+\frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{1.2.3.4}c^4$ ꝛc., welche Reihe wir offenbar erhalten, wenn wir in die Reihe für $(1+c)^{-l}$ anſtatt $-l$ überall $-l-1$ ſetzen. Es iſt demnach der Lehrſatz für die $-l-1^{\text{te}}$ Potenz richtig, wenn er für die $-l^{\text{te}}$ richtig iſt. Nun war aber der Lehrſatz für die $-1^{\text{ſte}}$ richtig, ſo muß er auch für die nächſt höhere negative Potenz d. h. für die -2^{te} richtig ſein, und da er für die -2^{te} richtig iſt, ſo iſt er auch für die -3^{te} u. ſ. w. richtig: w. z. b. w.

Zuſatz. Es war $(a+b)^{-n}=a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}=a^{-n}(1+c)^{-n}=$

$$a^{-n}\left\{1-nc+\frac{n(n+1)}{1.2}c^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}c^5\ \text{ꝛc.}\right\}$$

$$=a^{-n}\left\{1-n\frac{b}{a}+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{b^5}{a^5}\ \text{ꝛc.}\right\}$$

$$=a^{-n}-na^{-n-1}b+\frac{n(n+1)}{1.2}a^{-n-2}b^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}a^{-n-3}b^5$$ ꝛc.; es gilt

demnach die binomiſche Formel für $(a+b)^{-n}$. Ebenſo wird:

$$(a-b)^{-n} = a^{-n} + na^{-n-1}b + \frac{n(n+1)}{1.2}a^{-n-2}b^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}a^{-n-3}b^3 + \text{ꝛc.}$$

§ 17.

Beweis der binomiſchen Formel für poſitive und negative gebrochene Exponenten d. h. es ſoll:

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}.a^{\frac{p}{q}-1}.b + \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)}{1.2}a^{\frac{p}{q}-2}b^2 +$$

$$+ \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)(\frac{p}{q}-2)}{1.2.3}a^{\frac{p}{q}-3}b^3 \text{ ꝛc.}$$ wo $\frac{p}{q}$ ± d. h. p ± ſein kann. (§ 5. III.)

Man ſetze wiederum $a+b=a(1+\frac{b}{a}) = a(1+c)$ und folglich $(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}(1+c)^{\frac{p}{q}}$; wir haben demnach nur $(1+c)^{\frac{p}{q}}$ zu entwickeln. Nun iſt $(1+c)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+c)^p} = \sqrt[q]{}(1+pc+\frac{p(p-1)}{1.2}c^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}c^3$ u. ſ. w.) Da jede Wurzel aus einer Reihe, welche fortſchreitet nach den Potenzen von c, wiederum eine nach den Potenzen von c fortſchreitende Reihe ſein muß (§ 15.), ſo ſteht es uns frei $\sqrt[q]{(1+c)^p}$ oder $(1+c)^{\frac{p}{q}} = 1 + Ac + Bc^2 + Cc^3 +$ ꝛc. zu ſetzen, und es ſind jetzt nur noch die Coefficienten A, B, C u. ſ. w. zu beſtimmen. Da c eine willkürliche Größe iſt, ſo können wir $c = x + y$ ſetzen, und wir haben $(1+x+y)^{\frac{p}{q}} = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 +$ ꝛc. Man erhebe jetzt beide Seiten der Gleichung zur q^{ten} Potenz, ſo wird $(1+x+y)^p = (1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + \text{ꝛc.})^q$. Jetzt entwickle man beide Seiten nach den Potenzen von y, indem man auf der linken Seite $1+x$ als den erſten und y als den zweiten Theil des Binoms betrachtet, und es wird die linke Seite folglich:

$\left\{(1+x)+y\right\}^p = (1+x)^p + p(1+x)^{p-1}.y + Y$, wo Y alle höhere Potenzen von y

y^2 incl., vorſtellen ſoll. Auf der rechten Seite entwickle man innerhalb der Parentheſe alle Glieder nach den Potenzen von y bis zur 1ſten Potenz incl., indem man die von y unabhängigen Glieder voranſetzt, die Glieder, welche y in der 1ſten Potenz enthalten, nachfolgen läßt, und die höhern Potenzen von y durch Y′ bezeichnet. Es wird demnach die rechte Seite

$$\left\{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.} + y\,(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{ꝛc.} + Y')\right\}^q.$$

Jetzt entwickle man die qte Potenz dieſes Ausdrucks wiederum nach den Potenzen von y bis zur 1ſten Potenz incl., indem man alle von y unabhängigen Glieder als den 1ſten und alle von y abhängigen Glieder, als den 2ten Theil des Binoms betrachtet, wo Y′ unbeachtet bleiben darf, weil es nur höhere Potenzen von y enthält. Es wird demnach der letztere Ausdruck:

$(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.})^q + q(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.})^{q-1}\,(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{ꝛc.}) + Y$. Setzt man nun dieſe Reihe der obigen der linken Seite $(1+x)^p + p\,(1+x)^{p-1}\,y + Y$ gleich, ſo haben wir 2 identiſche Reihen, welche nach den Potenzen der willkürlichen Größe y fortſchreiten, und wir können ſie Glied für Glied einander gleich ſetzen (vergl. § 16): es wird demnach $(1+x)^p = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.})^q$ und $p\,(1+x)^{p-1} = q\,(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.})^{q-1}\cdot(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{ꝛc.})$

Da nun, Gleiches mit Gleichem dividirt, Gleiches gibt, ſo wird $\dfrac{p\,(1+x)^{p-1}}{(1+x)^p}$

$$= \frac{q\,(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.})^{q-1}.\,(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{ꝛc.})}{(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.})^q} \text{ oder}$$

$\dfrac{p}{1+x} = \dfrac{q\,(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3\ \text{ꝛc.})}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.}}$ od. $p\,(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ꝛc.}) = q\,(1+x).$ $(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{ꝛc.})$. Dividirt man beide Seiten durch q und entwickelt wiederum dieſelben nach den Potenzen von x, ſo wird:

$$\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\,Ax + \frac{p}{q}\,Bx^2 + \frac{p}{q}\,Cx^3 + \text{ꝛc.} = \left\{\begin{array}{l} A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{ꝛc.} \\ \quad + Ax + 2\,Bx^2 + 3\,Cx^3 + \text{ꝛc.} \end{array}\right\} =$$

$A + (2\,B + A)\,x + (3\,C + 2\,B)\,x^2 + (4\,D + 3\,C)\,x^3 + \text{ꝛc.}$ Da nun dieſe beiden identiſchen Reihen wiederum fortſchreiten nach den Potenzen der willkürlichen Größe x, ſo kann man ſie Glied für Glied einander gleich ſetzen, und es iſt folglich $\frac{p}{q} = A$, $\frac{p}{q}A = 2\,B + A$, $\frac{p}{q}B = 3\,C + 2\,B$, $\frac{p}{q}C = 4\,D + 3\,C$ u. ſ. w. folglich $2\,B = \frac{p}{q}A - A = A\left(\frac{p}{q} - 1\right) = \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)$ oder

$$B = \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)}{1\,.\,2};\ 3\,C = \frac{p}{q}B - 2B = B\left(\frac{p}{q} - 2\right) = \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)}{1\,.\,2}\left(\frac{p}{q} - 2\right) \text{ oder}$$

$$C = \frac{\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{p}{q}-1\right)\cdot\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3.};\; 4\,D = \frac{p}{q}\,C - 3C = C\left(\frac{p}{q}-3\right)$$

$$= \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)\left(\frac{p}{q}-3\right)}{1\;.\;2\;.\;3} \text{ oder } D = \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)\left(\frac{p}{q}-3\right)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4} \text{ ꝛc.}$$

Da das Geſetz, nach welchen ſich dieſe und die folgenden Coefficienten geſtalten, einleuchtet, ſo iſt die Entwicklung der Coefficienten E, F u. ſ. w. übrig. Setzt man nun die gefundenen Werthe für A, B, C, D u. ſ. w. in die Gleichung

$(1+c)^{\frac{p}{q}} = 1 + Ac + Bc^2 + Cc^3 + \text{ꝛc.}$ ein, ſo wird:

$$(1+c)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}c + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\;.\;2}c^2 + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3}c^3 + \text{ꝛc.}$$ und da

$(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}(1+c)^{\frac{p}{q}}$, ſo wird $(a+b)^{\frac{p}{q}} =$

$$a^{\frac{p}{q}}\left\{1 + \frac{p}{q}c + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\;.\;2}c^2 + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3}c^3 + \text{ꝛc.}\right\};\; c = \frac{b}{a} \text{ geſetzt,}$$

die Parentheſe aufgelöſt, gibt: $(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}a^{\frac{p}{q}}\frac{b}{a} + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\;.\;2}a^{\frac{p}{q}}\frac{b^2}{a^2}$

$$+ \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3}a^{\frac{p}{q}}\frac{b^3}{a^3} + \text{ꝛc.} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}a^{\frac{p}{q}-1}b + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\;.\;2}a^{\frac{p}{q}-2}b^2$$

$$+ \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3}a^{\frac{p}{q}-3}b^3 + \text{ꝛc. w. z. b. w.}$$

Logarithmen-Theorie.

§ 18.

Es iſt in dem Ausdruck $\alpha^n = p$, wenn α und p gegeben iſt, n zu finden, wo n der Logarithme von p desjenigen Syſtems iſt, deſſen Grundzahl $= \alpha$. (Vergl. § 4.) Eben ſo iſt in $\alpha^m = r$, $m = \log. r$ desjenigen Syſtems, deſſen Grundzahl $= \alpha$. Hieraus folgt

1. $\alpha^n . \alpha^m = \alpha^{n+m} = p.r$ oder $n + m = \log. p + \log. r = \log. p. r.$

1. $\alpha^n : \alpha^m = \alpha^{n-m} = p:r$ oder $n - m = \log. p - \log. r = \log. (p:r) = \log \frac{p}{r}$

3. $(\alpha^n)^s = \alpha^{sn} = p^s$ oder $s.n = s. \log. p = \log. p^s.$

4. $\sqrt[s]{\alpha^n} = \alpha^{\frac{n}{s}} = \sqrt[s]{p}$ oder $\frac{n}{s} = \frac{\log. p}{s} = \log. \sqrt[s]{p}.$

Man ſindet demnach für jedes beliebige Logarithmenſyſtem:

1ſtens Den Logarithmen eines Produkts, wenn man die Logarithmen der einzelnen Factoren addirt.

2tens Den Logarithmen eines Quotienten, wenn man den Logarithmen des Diviſors vom Logarithmen des Dividendus abzieht.

3tens Den Logarithmen einer Potenz, wenn man den Logarithmen der Grundzahl mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt.

4tens Den Logarithmen einer Wurzelgröße, wenn man den Logarithmen der Zahl unterm Wurzelzeichen mit dem Exponenten der Wurzel dividirt.

Wir wollen jetzt in den folgenden Paragraphen drei populäre Methoden, die Logarithmen zu berechnen, liefern, die aber, ihrer Weitläuftigkeit wegen, der 4ten weit nachſtehen.

§ 19.

Erſte Methode. Man berechne, wenn $\alpha = 10$ iſt, verſchiedene Potenzen von 10; nämlich: $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ ꝛc., ebenſo $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{10}}$, $10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$ u. ſ. w. und ſetze aus dieſen berechneten Zahlen durch Multiplication neue zuſammen, ſo erhält man neue Potenzen von 10, zu welchen der Logarithme bekannt iſt z. B. $10^1 . 10^{\frac{1}{2}} . 10^{\frac{1}{4}} = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 10^{\frac{7}{4}} = 10. \sqrt{10}. \sqrt{\sqrt{10}}.$ Es ſei dieſes Produkt $= p$, ſo iſt $\frac{7}{4} = \log p.$ Es iſt nun die Aufgabe zu zeigen, wie man zu jeder beliebigen Zahl p den Logarithmen finden kann.

Man berechne zuerſt $\sqrt{10} = 3{,}1622777$, dann $\sqrt{\sqrt{10}} = 1{,}7782794$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 1{,}3335214$ und ſo fort, bis man auf 1,0000001 kommt, ſo ſind die dazu gehörigen Logarithmen resp. $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{1}{8} = 0{,}125$ u. ſ. w.

Folgende Tabelle enthält ſämmtliche Wurzeln und die dazu gehörenden Logarithmen bis auf 7 Dezimalen:

Zahlen.	**Logarithmen.**	**Zahlen.**	**Logarithmen.**
3,1622777	0,5000000	1,0002811	0,0001221
1,7782794	0,2500000	1,0001406	0,0000610
1,3335214	0,1250000	1,0000703	0,0000305
1,1547820	0,0625000	1,0000351	0,0000153
1,0746078	0,0312500	1,0000176	0,0000076
1,0366329	0,0156250	1,0000088	0,0000038
1,0181517	0,0078125	1,0000044	0,0000019
1,0090350	0,0039063	1,0000022	0,0000010
1,0045074	0,0019531	1,0000011	0,0000005
1,0022512	0,0009766	1,0000005	0,0000002
1,0011249	0,0004883	1,0000003	0,0000001
1,0005623	0,0002441	1,0000001	0,0000001

Nun wähle man aus dieſer Tabelle diejenigen beiden Zahlen, nehme nöthigenfalls 10, 100 u. ſ. w. dazu, deren Produkt der gegebenen Zahl p am nächſten kommt, jedoch kleiner als p wird; jetzt multiplicire man dieſes Produkt mit derjenigen Zahl, welche ein dem p ſich mehr näherndes Produkt gibt, und fahre ſo lange fort, bis man entweder auf die Zahl p ſelbſt, oder ihr ſo nahe kommt, daß das letzte Produkt mit p verwechſelt werden kann. Iſt z. B. log. 7 zu berechnen, ſo multiplicire man 3,1622777 mit 1,7782794 auf abgekürztem Wege, und erhält das Produkt 5,6234134. Nun multiplicire man 5,6234134 mit 1,1547820, ſo erhält man das Produkt 6,4938166, dieſes wiederum mit 1,0746078 multiplicirt, gibt 6,9783061 und fährt auf dieſe Weiſe ſo lange fort, bis man auf 6,9999999 kommt; ſo iſt der log. 7 = der Summe aller Logarithmen derjenigen Factoren, welche multiplicirt worden ſind: alſo hier log. 7 = 0,5 + 0,25 + 0,03125 + ꝛc. 1 0,0625 Dieſe Methode iſt unbequem, weil man nicht immer gleich die Zahl herausfindet, mit welcher multiplicirt werden muß, um nicht mehr als p zu erhalten. Dagegen iſt folgende Methode etwas bequemer.

§ 20

2te Methode. Man dividire p durch die nächſt kleinere Zahl der vorigen Tabelle und nöthigenfalls durch 10, 100 u. ſ. w. Dieſer Quotient ſei = A, nun dividire man A wieder durch die Zahl, welche A am nächſten kommt, der Quotient ſei = B. Nun dividire man wiederum B durch die nächſt kleinere Zahl und fahre ſo lange fort, bis man 1,0000000 erhält. Da nun dieſe Diviſoren Potenzen von 10 ſind, ſo will ich ſie durch 10^{α}, 10^{β}

10^{γ}, u. ſ. w. vorgeſtellt wiſſen und es iſt $\frac{p}{10^{\alpha}} = A. \frac{A}{10^{\beta}} = C, \frac{B}{10^{\gamma}} = C$ u. ſ. w. und folglich $p = 10^{\alpha}. A = 10^{\alpha}. 10^{\beta}. B = 10^{\alpha}. 10^{\beta}. 10^{\gamma}. C$ u. ſ. w. bis $p = 10^{\gamma}. 10^{\beta}. 10^{\gamma} \ldots . 1. = 10^{\alpha + \beta + \gamma + \text{ꝛc.}}$ und folglich $\alpha + \beta + \gamma +$ ꝛc. $=$ log. p d. h. die Summe der Logarithmen ſämmtlicher Diviſoren $=$ log p.

§ 21.

3e Methode. Man wähle unter den bekannten Potenzen von 10, nämlich: $10^{1} = 10, 10^{2} = 100, 10^{3} = 1000$ u. ſ. w. und den Zahlen der vorigen Tabelle $10^{\frac{1}{2}} = 3{,}1622777$, $10^{\frac{1}{4}} = 1{,}7782794$ u. ſ. w. diejenigen beiden Potenzen heraus, zwiſchen welchen p am nächſten liegt, und ſuche zu denſelben das geometriſche Mittel, ſo iſt der Logarithme deſſelben das arithmetiſche Mittel beider genommenen Zahlen. Denn es ſeien dieſe beiden Potenzen 10^{α} und 10^{β} und x das geometriſche Mittel, ſo iſt $10^{\alpha} : x = x : 10^{\beta}$, folglich $x^2 = 10^{\alpha}. \quad 10^{\beta} = 10^{\alpha + \beta}$ und $x = 10^{\frac{\alpha + \beta}{2}}$; mithin $\frac{\alpha + \beta}{2} = \log x$, und da aus der arithmetiſchen Proportion $\alpha - y = y - \beta$, $2y = \alpha + \beta$ oder $y = \frac{\alpha + \beta}{2}$ folgt, ſo iſt das arithmetiſche Mittel zwiſchen α und $\beta = \log x$, wie oben. Es ſei $10^{\alpha} = A.$ und $10^{\beta} = B$, ſo iſt $x^2 = A. B$ und $x = \sqrt{A B}$. Zu dieſem x und derjenigen Potenz von 10, zwiſchen welchen p am nächſten liegt, ſuche man wiederum das geometriſche und zu ihren Logarithmen das arithmetiſche Mittel und fahre ſo lange fort bis das geometriſche Mittel dem p ſo nahe gekommen iſt, daß man es mit p verwechſeln kann, und das arithmetiſche Mittel der Logarithmen der beiden letzten Zahlen iſt log p. Die beſte, am kürzeſten zum Ziele führende, Methode iſt die durch unendliche Reihen:

§ 22.

4te Methode. Man kann, bei gegebenem α, 1tens p durch eine, nach den Potenzen von n und 2tens umgekehrt n durch eine, nach den Potenzen von p fortſchreitende, Reihe ausdrücken. Um 1tens p durch eine, nach den Potenzen von n fortſchreitende, Reihe auszudrücken, muß man eine Potenz eines Binoms finden, in welchem n im 2ten Theile vorkommt, und der erſte Theil von n unabhängig iſt. Es ſei $p = (m + k. n)^q$ wo m, k und q vom Logarithmen n unabhängige Größen vorſtellen ſollen. Da nun $p = \alpha^n$ dem angenommenen Ausdruck $(m + k. n)^q$, für jedes willkürliche p und den dazu gehörenden Logarithmen n, gleich ſein ſoll, ſo muß auch, für $n = o$, $p = \alpha^n = (m + k. n)^q$ od. $p = \alpha^o = m^q$ oder $1 = m^q$, was offenbar der Fall iſt, wenn $m = 1$ iſt, und es muß, da m von p und n unabhängig iſt, m immer $= 1$ ſein. Man ſetze daher $p = \alpha^n = (1+k.n)^q$ $= 1 + q.\,k.\,n. + \frac{q.(q-1)}{1.2}\,k^2.\,n^2 + \frac{q.(q-1).(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,k^3\,n^3 +$ ꝛc. Um nun k und q zu finden, erhebe man beiden Seiten der Gleichung $\alpha^n = (1+k.n)^q$ zur l^{ten} Potenz und es wird $(\alpha^n)^l = \alpha^{n.l} = (1+k.n)^{l.q} = 1 + l.\,q.\,k.\,n + \frac{l.\,q.\,(l.\,q-1)}{1\,.\,2}\,k^2.\,n^2 +$ $+ \frac{l.\,q.\,(l.q-1)(l.\,q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,k^3.\,n^3 +$ ꝛc. Daſſelbe müſſen wir aber auch erhalten, wenn wir in den obigen Ausdruck $l.n$ für n ſetzen, und es wird $\alpha^{l.\,n} = (1+k.l.n)^q = 1 + q.k.l.n$ $+ \frac{q\,(q-1)}{1\,.\,2}\,k^2.l^2.n^2 + \frac{q.(q-1).(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,q^3.\,l^3.\,n^3 +$ ꝛc. Wir haben nun wiederum zwei identiſche Reihen, welche nach den Potenzen der willkürlichen Größe n fortſchreiten; man kann ſie daher auch Glied für Glied einander gleich ſetzen. Die erſten beiden Glieder $1 = 1$, $l.\,q.\,k.\,n = q.\,k.\,l.\,n$ führen zu keinem Reſultat; aber die 3 Glieder geben $\frac{l\,q\,\,(l\,q-1)}{1\,.\,2}\,k^2.\,n^2 = \frac{q.\,(q-1)}{1\,.\,2}\,k^2.\,l^2.\,n^2$ oder $l\,q - 1 = (q-1).\,l$, was offenbar nur der Fall ſein kann, wenn entweder $l = 1$, oder $q = \infty$ (unendlich groß) iſt. Nun ſtellt l den Exponenten der Potenz vor, zu welcher α^n erhoben werden ſoll, ſo kann l nicht $= 1$ ſein; weil der Exponent 1 den Grundfactor nicht verändert und es iſt daher $q = \infty$ zu ſetzen. Wenn aber $q = \infty$, ſo geht in der obigen Reihe $p = \alpha^n = (1 + k.\,n)^q =$ $= 1 + q.\,k.\,n + \frac{q.\,(q-1)}{1\,.\,2}\,k^2.\,n^2 + \frac{q.\,(q-1)\,(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,k^3.\,n^3 +$ ꝛc., $\frac{q-1}{2}$ in $\frac{q}{2}$, $\frac{q-2}{3}$ in $\frac{q}{3}$ u. ſ. w. über, und es wird $p = \alpha^n = (1 + k.\,n)^q = 1 + q.\,k.\,n + \frac{q^2.\,k^2.\,n^2}{1\,.\,2}$ $+ \frac{q^3.\,k^3.\,n^3}{1.2.3} +$ ꝛc. Da p jede endliche Zahl vorſtellt, ſo muß die Summe aller dieſer Glieder endlich, und, da $q = \infty$, k nothwendig unendlich klein und $q.k$ endlich ſein. Man ſetze daher $q.k = b$, ſo wird $p = \alpha^n = 1 + b.n + \frac{b^2.\,n^2}{1.2} + \frac{b^3.\,n^3}{1.2.3} +$ ꝛc. Die Zahl p iſt ſowol vom Logarithmen n, als von der Grundzahl α abhängig, und da hier p von n und b abhängig iſt, ſo muß b eine Function von α ſein, wie es ſich auch ſpäter zeigen wird. Dieſe Function heißt der Modulus des Logarithmenſyſtems.

Es ſei 2^{tens} n durch eine, nach den Potenzen von p fortſchreitende, Reihe auszudrücken. Es war $p = (1 + k.\,n)^q$, folglich $p^{\frac{1}{q}} = 1 + k.\,n = 1 + \frac{b.\,n}{q}$ und folglich

$p^{\frac{1}{q}} - 1 = \frac{b.n}{q}$ oder $q.(p^{\frac{1}{q}} - 1) = b.n.$ Um nun eine nach den Potenzen von p fortſchreitende Reihe zu haben, ſetze man $p^{\frac{1}{q}} = (1 + p - 1)^{\frac{1}{q}}$ und folglich:

$$bn = q\ \left((1+p-1)^{\frac{1}{q}} - 1\right) = q\left\{1 + \frac{1}{q}(p-1) + \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)}{1\ .\ 2}(p-1)^2\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)(\frac{1}{q}-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(p-1)^3 + \text{ꝛc.} - 1\right\}$$

$$= q\left\{\frac{1}{q}(p-1) + \frac{\frac{1}{q}\ (\frac{1}{q}-1)}{1\ .\ 2}(p-1)^2 + \frac{\frac{1}{q}\ (\frac{1}{q}-1)\ (\frac{1}{q}-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(p-1)^3 + \text{ꝛc.}\right\}$$

$= p - 1 + \frac{(\frac{1}{q}-1)}{1\ .\ 2}(p-1)^2 + \frac{(\frac{1}{q}-1)\ (\frac{1}{q}-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(p-1)^3 + \text{ꝛc.}$ Da nun $q = \infty$, ſo iſt $\frac{1}{q} = \frac{1}{\infty}$ oder unendlich klein; folglich kann man $\frac{\frac{1}{q}-1}{2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{q}-2}{3} = -{}^2/_3$ u. ſ. w. ſetzen, oder $bn = p - 1 - {}^1/_2(p-1)^2 + {}^1/_3(p-1)^3 - {}^1/_4(p-1)^4 + \text{ꝛc.}$ und $n = \log.p = \frac{1}{b}\left(p - 1 - {}^1/_2(p-1)^2 + {}^1/_3(p-1)^3 - {}^1/_4(p-1)^4 + \text{ꝛc.}\right)$ (vergleiche § 25.) wo der Logarithme n durch die Zahl p und den Modulus b ausgedrückt iſt. Man denke ſich nun ein ſolches Syſtem, in welchem $b = 1$ iſt, welches das natürliche, hyperboliſche, auch logiſtiſche Syſtem genannt wird, ſo iſt $n = \log.\text{nat}.p = p - 1 - {}^1/_2\ (p-1) + {}^1/_3\ (p-1)^3 - {}^1/_4\ (p-1)^4 + \text{ꝛc.}$ Setzt man in der Reihe $bn = p - 1 - {}^1/_2(p-1) + {}^1/_3(p-1)^3 - {}^1/_4(p-1)^4 + \text{ꝛc.}$, $n = 1$, ſo geht $\alpha^n = p$ in $\alpha = p$ über, und wir finden b durch die Reihe $b = \alpha - 1 - \frac{1}{2}(\alpha-1)^2 + \frac{1}{3}(\alpha-1)^3 - \frac{1}{4}(\alpha-1)^4 + \text{ꝛc.}$ und es iſt folglich $b = \text{lognat}\ \alpha$. Es iſt nicht unintereſſant die Grundzahl (basis) des natürlichen Syſtems zu kennen. Es war $\alpha^n = 1 + b.n + \frac{b^2.n^2}{1.2} + \frac{b^3.n^3}{1.2.3} + \frac{b^4\ n^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$ und da für das natürliche Syſtem $b = 1$ iſt, ſo wird:

$\alpha^n = 1 + n + \frac{n^2}{1.2} + \frac{n^3}{1.2.3} + \frac{n^4}{1.2.3.4} +$ ꝛc., wo n jeden willkürlichen Logarithmen vorſtellt. Setzt man nun $n = 1$, ſo wird $\alpha = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ ꝛc.

Wir wollen dieſes α bis auf 7 Dezimalen berechnen:

$2 = 2$

$\frac{1}{1.2} = 0{,}5$

$\frac{1}{1.2.3} = 0{,}1666667$

$\frac{1}{1.2.3.4} = 0{,}0416667$

$\frac{1}{1.2.3.4.5} = 0{,}0083333$

$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} = 0{,}0013889$

$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = 0{,}0001984$

$\frac{1}{1.2\ldots.8} = 0{,}0000248$

$\frac{1}{1.2\ldots9} = 0{,}0000028$

$\frac{1}{1.2..10} = 0{,}0000003$

$\frac{1}{1.2..11} = 0{,}0000000$

$\alpha = 2{,}7182819$

richtiger $\alpha = 2{,}7182818$

Die Reihe $\log.\text{nat}.\,p = p - 1 - \frac{1}{2}(p-1)^2 + \frac{1}{3}(p-1)^3 - \frac{1}{4}(p-1)^4 +$ ꝛc. würde hinreichend convergiren für < 2 und > 1 und namentlich für $p = {}^2/_3\ {}^4/_3,\ {}^5/_4$ u. ſ. w. Es wird z. B. $\log.\text{nat}\ {}^3/_2 = {}^1/_2 - {}^1/_2\,({}^1/_2)^2 + {}^1/_3\,({}^1/_2)^3 - {}^1/_4\,({}^1/_2)^4 +$ ꝛc.; eben ſo $\log.\text{nat}\ {}^4/_3 = {}^1/ - {}^1/_2\,({}^1/_3)^2 + {}^1/_3\,({}^1/_3)^3 - {}^1/_4\,({}^1/_3)^4 +$ ꝛc., und hieraus finden wir $\log.\text{nat}\ {}^3/ + \log.\text{nat}\ {}^4/_3 = \log.\text{nat}\ ({}^3/_2 \,.\, {}^4/_3) = \log.\text{nat}\ 2$. Wir finden aber auf folgendem Wege eine bequemere Reihe, die Logarithmen dieſer Brüche zu berechnen. Man ſetze für p die Größe $1 + p$ und nachher $1 - p$, ſo wird

$\log.\text{nat}\ 1 + p = p - {}^1/_2\,p^2 + {}^1/_3\,p^3 - {}^1/_4\,p^4 + {}^1/_5\,p^5 -$ ꝛc. und
$\log.\text{nat}\ 1 - p = -p - {}^1/_2\,p^2 - {}^1/_3\,p - {}^1/_4\,p^4 - {}^1/_5\,p^5 -$ ꝛc. und folglich
$\log.\text{nat}\,(1 + p) - \log.\text{nat}\,(1 - p) = 2p + {}^2/_3\,p^3 + {}^2/_5\,p^5 +$ ꝛc. oder
$\log.\text{nat}\ \frac{1+p}{1-p} = 2\left\{p + \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} + \text{ꝛc.}\right\}$ Setzt man nun $\frac{1+p}{1-p} = z$, ſo wird

$1 + p = z - zp$ und $p = \frac{z-1}{z+1}$ und demnach

$\log.\text{nat}\ z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + {}^1/_3\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^3 + {}^1/_5\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^5 + \text{ꝛc.}\right\}$, welche Reihe weit ſtärker, als die vorhergehende, convergirt.

Setzt man $z = \frac{3}{2}$, ſo wird $\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{5}$ und folglich lognat $\frac{3}{2} =$ $(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}(\frac{1}{5})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{5})^5$ ꝛc.); ebenſo lognat $\frac{4}{3} = 2\,(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}(\frac{1}{7})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{7})^5$ ꝛc.) Nun iſt:

$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{7} = 0{,}1428571$	$\frac{1}{7} = 0{,}1428571$
$(\frac{1}{5})^2 = 0{,}04$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{5})^3 = 0{,}0026667$	$(\frac{1}{7})^2 = 0{,}0204082$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{7})^3 = 0{,}0009718$
$(\frac{1}{5})^3 = 0{,}008$	$\frac{1}{5}(\frac{1}{5})^5 = 0{,}0000640$	$(\frac{1}{7})^3 = 0{,}0029155$	$\frac{1}{5}(\frac{1}{7})^5 = 0{,}0000119$
$(\frac{1}{5})^5 = 0{,}00032$	$\frac{1}{7}(\frac{1}{5})^7 = 0{,}0000018$	$(\frac{1}{7})^5 = 0{,}0000595$	$\frac{1}{7}(\frac{1}{7})^7 = 0{,}0000002$
$(\frac{1}{5})^7 = 0{,}0000128$	$\frac{1}{9}(\frac{1}{5})^9 = 0{,}0000001$	$(\frac{1}{7})^7 = 0{,}0000012$	$0{,}1438410$
$(\frac{1}{5})^9 = 0{,}0000005$	$0{,}2027326$	$(\frac{1}{7})^9 = 0{,}0000000$	$0{,}2876820$
$(\frac{1}{5})^{11} = 0{,}0000000$	$0{,}4054652$		

folglich lognat $\frac{3}{2} = 0{,}4054652$, genauer $= 0{,}4054651$; lognat $\frac{4}{3} = 0{,}2876820$, genauer $= 0{,}2876821$. Wollte man die 7te Dezimale ganz genau haben, ſo müßte man auch die 8te berechnen. Es iſt nun ferner (§ 18) log nat $\frac{3}{2}$ + log nat $\frac{4}{3}$ = log nat 2 = 0,6931472; log nat 3 = log nat $\frac{3}{2}$ + + log nat 2 = 1,0986123; log nat 4 = 2 log nat 2 = 1,3862944; log nat 6 = lognat 3 + lognat 2 = 1,7917595; lognat 8 = 3 lognat 2 = 2,0794416, genauer 2,0793415; lognat 9 = 2 lognat 3 = 2,1972246; lognat 12 = lognat 4 + lognat 3 = 2,4849067 u. ſ. w. Es iſt offenbar, daß wir aus den Logarithmen der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 u. ſ. w. die Logarithmen aller übrigen Zahlen zuſammenſetzen können: wir haben demnach zunächſt lognat 5, lognat 7, lognat 11, lognat 13 u. ſ. w. zu berechnen. Dieſe Logarithmen könnten wir nun gleichfalls durch die Reihe lognat z $= 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^3 + \frac{1}{5}\left[\frac{z-1}{z-1}\right]^5 \text{ ꝛc. }\right\}$, $z = \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{11}{10}, \frac{13}{12}$ ꝛc. geſetzt, finden; folgende Methode führt jedoch raſcher zum Ziele.

§ 23.

Man ſetze $x^2 = \frac{x^2}{x^2-1}\,(x-1)\,(x+1)$, ſo wird log. $x^2 = 2$ log. $x =$ log. $\frac{x^2}{x^2-1}$ + log. $(x-1)$ + log. $(x+1)$. Setzt man nun in die obige Reihe $z = \frac{x^2}{x^2-1}$, ſo wird $\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2x^2-1}$, alſo lognat $\frac{x^2}{x^2-1} = 2\left\{\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5 \text{ ꝛc. }\right\}$ + lognat $(x-1)$ + lognat $(x+1)$ oder

$$\text{lognat } x = \frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2x^2-1}\right]^3 + \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2x^2-1}\right]^5 \text{ ꝛc. } + \tfrac{1}{2}\left(\text{lognat}(x-1) + \text{lognat}\,(x+1)\right).$$

Iſt nun x eine Primzahl > 3 z. B. 5, 7, 11 ꝛc., ſo ſind $x-1$, $x+1$ keine Primzahlen d. h. aus kleineren Primzahlen durch Multiplication zuſammenſetzbare Zahlen und es wird z. B.

lognat $5 = {}^1/_{49} + {}^1/_5({}^1/_{49})^3 + {}^1/_5({}^1/_{49})^5$ ꝛc. $+ {}^1/_2$(lognat 4 + lognat 6).

Dieſe Reihe convergirt weit ſtärker, als die Reihe lognat $\frac{5}{4} = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5\right.$ ꝛc.), und da lognat 4, lognat 6 bereits bekannt ſind, ſo finden wir lognat 5 auf kürzerem Wege, als es durch die letztere Reihe geſchehen würde. Es iſt:

$\frac{1}{49} = 0{,}0204082$	$\frac{1}{49} = 0{,}0204082$	lognat $4 = 1{,}3862944$
$(\frac{1}{49})^2 = 0{,}0004165.$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{49})^3 = 0{,}0000028$	lognat $6 = 1{,}7917595$
$(\frac{1}{49})^3 = 0{,}0000085$	0,0204110.	3,1780539
$(\frac{1}{49})^5 = 0{,}0000000$	1,5890269	1,5890269
	1,6094379 = lognat 5.	

Aus lognat 5 finden wir lognat 10 = lognat 5 + lognat 2 = 1,6094379 + 0,6931472 = 2,3025851; lognat 15 = lognat 5 + lognat 3 = 1,6094379 + 1,0986123 = 2,7080502 u. ſ. w.

Anmerkung. Je größer x angenommen wird, deſto convergirender wird die Reihe: $\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5$ ꝛc., und die Rechnung wird demnach immer kürzer, je größer x iſt z. B. für $x = 7, 9, 11, 13$ ꝛc. Da nun für große Primzahlen die letztere Methode ſehr bequem iſt, ſo iſt man darauf bedacht geweſen, eine Methode zu erfinden, welche auch für die kleinſten Primzahlen 2, 3, 5 gleiche Rechnungsvortheile gewähre, und hat zu dieſem Behufe folgende Methode in Vorſchlag gebracht, welche aber, nach meiner Meinung, nicht ſchneller als die des § 22 und 23 zum Ziele führt.

§ 24.

Geſetzt es wäre lognat 2, 3 und 5 zu berechnen, ſo ſuche man zwei aufeinander folgende möglichſt große Zahlen, welche nur die Factoren 2, 3 und 5 enthalten. Solche ſind 8 und 9, 9 und 10, 15 und 16, 24 und 25, 80 und 81 ꝛc. Man ſuche

lognat $\frac{16}{15} = a$, lognat $\frac{25}{24} = b$, lognat $\frac{81}{80} = c$, ſo iſt nach § 18., wenn wir

lognat $2 = x$, lognat $3 = y$, lognat $5 = z$ ſetzen:

I. $4x - y - z = a$ oder $4x - y - z = a.$

II. $2z - 3x - y = b.$ $-3x - y + 2z = b.$

III. $4y - 4x - z = c$ $-4x + 4y - z = c.$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. und III. gibt } 8x - 5y = a - c \text{ oder } 24x - 15y = 3a - 3c \\ \text{I. und II. } 5x - 3y = 2a + b \quad 25x - 15y = 10a + 5b\end{array}\right\} \text{alſo } x = 7a + 5b + 3c$$

und folglich $5y = 8x - a + c = 55a + 40b + 25c$ oder $y = 11a + 8b + 5c$

und nach I. $z = 4x - y - a = 16a + 12b + 7c.$

§ 25.

Es bleibt nun noch zu zeigen, wie man, aus den bereits berechneten natürlichen Logarithmen, die eines jeden andern Syſtems oder die künſtlichen (log. artificiales) berechnet. Es ſei e die Grundzahl des natürlichen, α des künſtlichen Syſtems,

und $e^x = p$, $\alpha^n = p$ oder $x = \text{log nat}\, p$, $n = \text{log art}\, p$, ſo iſt $e^x = \alpha^n$ und folglich

$x \,\text{log nat}\, e = n \,\text{log nat}\, \alpha$ und da $\text{log nat}\, e = 1$, ſo iſt $x = n \,\text{log nat}\, \alpha$ oder $n = \dfrac{x}{\text{log nat}\, \alpha}$

d. h. $\text{log art}\, p = \dfrac{\text{log nat}\, p}{\text{log nat}\, \alpha}$ (vergl. § 22. S. 22). Iſt $\alpha = 10$, die Grundzahl des Briggſchen Syſtems, ſo iſt $\text{log brigg}\, p = \dfrac{\text{log nat}\, p}{\text{log nat}\, 10} = \dfrac{\text{log nat}\, p}{2{,}3025851} = \text{log nat}\, p.\ 0{,}4342945.$

Es wird demnach $\text{log brigg}\ 2 = 0{,}6931472.\ 0{,}4342945 = 0{,}3010300$;

$\text{log brigg}\ 3 = 1{,}0986123.\ 0{,}4342945 = 0{,}4771212$ genauer $0{,}4771213$.

$\text{log brigg}\ 5 = 1{,}6094379.\ 0{,}4342945 = 0{,}6989700$. u. ſ. w.

Anmerkung. Da $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ u. ſ. w. und $10^0 = 1$, $10^{-1} = 0{,}1$, $10^{-2} = 0{,}01$, $10^{-3} = 0{,}001$ u. ſ. w., ſo haben alle Zahlen > 1 poſitive Logarithmen von 0 bis ∞ und alle Zahlen < 1 negative Logarithmen von 0 bis $-\infty$ und die Logarithmen der negativen Zahlen können daher weder poſitiv noch negativ ſein, und ſind folglich unmöglich. Dieſes gilt nicht nur fürs Briggſche, ſondern für alle Syſteme.

(Fortſetzung folgt.)

Es bleibt nun s berechneten natürlichen
Logarithmen, die eines je (log. artificiales) berech-
net. Es ſei e die Grun Syſtems,

und $e^x = p$, $\alpha^n = p$ ode $= \alpha^n$ und folglich

$x \log nat\, e = n \log nat\, \alpha$ at α oder $n = \frac{x}{\log nat\, \alpha}$

d. h. $\log art\, p = \frac{\log na}{\log na}$ die Grundzahl des Brigg-

ſchen Syſtems, ſo iſt lo $= \log nat\, p.\ 0{,}4342945.$

Es wird demnach log bri 0300;
log br 1212 genauer 0,4771213.
log bri 9700. u. ſ. w.

Anmerkung. $10^3 = 1000$ u. ſ. w. und
$10^0 = 1$, $10^{-1} = 0, 1$, ſo haben alle Zahlen > 1
poſitive Logarithmen vo gative Logarithmen von
0 bis $- \infty$ und die daher weder poſitiv noch
negativ ſein, und ſind f fürs Briggſche, ſondern
für alle Syſteme.