Studien zur exacten Logik und Grammatik.

(Fortsetzung.)

II. Exacte Grammatik.

Analog der exacten Logik bezeichne ich mit dem Ausdrucke „exacte Grammatik“ diejenige Wissenschaft, die sich zur Darstellung der sprachlichen Erscheinungen der exacten, mathematischen Methode bedient. Dass dies irgendwie durch geeignete organische Weiterentwicklung der bisherigen mathematischen Darstellungsmittel ausführbar sein muss, das macht schon die enge Verwandtschaft der Grammatik und Logik wahrscheinlich, ja es scheint dies der einzig mögliche Weg einer exacten Behandlung des Gegenstandes zu sein. Denn das Verhältnis zwischen Grammatik und Mathematik beruht, wie ich gleich im nachstehenden zeigen will, nicht bloß auf äußerlichen Analogien, sondern scheint im Wesen der beiden Wissensgebiete begründet zu sein. Sobald ich nämlich beweise, dass sich die Elemente der Grammatik (Wörter, Namen, Begriffe) auf Zahlen zurückführen lassen, so sind sie dadurch unmittelbar zu Elementen der Mathematik geworden.

D. Die „Numeralisierung“ der Wortarten, zunächst der Nomina.

Beim Vergleichen der analytischen Darstellungen räumlicher Gebilde (Kreis, Ellipse, Linie, Punkt), die ja auch „Namen“ sind, mit andern Namen wie: Eisen, Baum, Mensch, werden wir bald gewahr, dass sich die letztern von den erstern nur durch größere Compliciertheit und infolge dessen durch eine größere Anzahl von Bestimmungsstücken unterscheiden. So sind, um mit dem Einfachsten zu beginnen, die Bestimmungsstücke eines Punktes in der Ebene oder im Raume bekanntlich 2, resp. 3 Coordinaten (etwa $x = 3$, $y = 5$, $z = -2$), Kreis, Ellipse, Linie u. a. Complexe von Punkten haben dieselben Coordinaten, nur bleiben einige darunter unbestimmt, variabel, andere hingegen sind

Functionen dieser Variablen (etwa $x = \xi$, $y = \varphi(\xi)$, $z = 4$). Bei „Dingnamen und abstracten Begriffen“ kommen zu den räumlichen Eigenschaften noch andere Bestimmungsstücke (Merkmale) dazu, etwa Dichte (d), Gewicht (p), Härte (h), Farbe (c), Temperatur (w), Zeit (t), u. a., die wieder besondere Zahlen, Functionen, Limitationen, Disjunctionen oder Namen sein können, die selbst wieder auf Zahlen zurückführbar sind. So ist z. B. beim Eisen: $h = 4{\cdot}5$, d (unter gewöhnlichen Umständen) $= 7 \lessgtr 7{\cdot}8$, sonst, $d = \varphi(w, p)$, $c = \langle$grau, schwarz$\rangle$.

Die Numeralisierung der Ausdrücke: grau, schwarz, roth, blau u. a. geschieht einfach durch Abmessen der Abscise eines Einheitsspectrums oder durch Berechnung der Schwingungszahl. Bei Fortsetzung und genauer Durchführung solcher Vergleiche überzeugt man sich bald, dass in der That die Art und Weise der Zugehörigkeit der Eigenschaften (Merkmale) zu einem Dinge sich in nichts unterscheidet von der Art und Weise der Zugehörigkeit der Coordinaten zu einem Punkte.

Es entsprechen genau 2 Punkte derselben Dimension 2 conträren Merkmalen, 2 Punkte verschiedener Dimensionen 2 disparaten Merkmalen.

Was ist also natürlicher, als den Ausdruck Dimension auch auf nichträumliche Verhältnisse (correcter: andere als Lagenverhältnisse) zu übertragen umsomehr als man zum Zwecke genauer Bestimmung von Eigenschaften (Kräften, Wirkungen) gezwungen ist, dieselben mittels Messinstrumente in wirkliche Dimensionen umzuformen (Wagen-, Thermometerscala, Spectrum, Zifferblatt u. a.)

Ich nenne also eine Dimension im allgemeinsten Sinne des Wortes jede durch gleiche Art des Vergleichens und Messens gewonnene Größe. Durch das Vergleichen zweier Objecte ergeben sich immer zwei Punkte, durch die die Dimension festgelegt wird. Bei der Wahl einer andern Art des Messens ändern sich auch Einheit und Richtung der Dimensionen, die jedoch durch Gleichungen miteinander verknüpft, sich gegenseitig ersetzen lassen. (Transformation der Coordinaten: Parallel-, Polarcoordinaten, Thermometerscala des Celsius, Reaumur, Fahrenheit u. a).

Nachdem es nun Wallis gelungen ist, zwei Dimensionen zu einer (complexen) Zahl zu vereinigen, ($x = a + bi$), und Hamilton dieses Verfahren auf drei Dimensionen ausgedehnt hat, ($\alpha = a\,k + bi + c\,j$), so liegt der Gedanke nahe, in derselben Weise auch mehrere Dimensionen zu einem Ausdrucke zu verbinden. Ich schreibe einen solchen Ausdruck von n Dimensionen, die offenbar gleichbedeutend sind mit einem Begriffe von n Merkmalen, folgendermaßen: $g^{\cdot n} = q = {}^{x}a + {}^{y}b + {}^{z}c + \ldots . {}^{u}n$ (102), wobei x, y, z ... u Dimensionen, a, b, c, ... n ihre nummerischen Werte bedeuten mögen.

Die Berechtigung, diesen Ausdruck eine Zahl zu nennen (ich nenne sie eine n-dimensionale Zahl) ist evident. Denn es lassen sich einerseits alle mathematischen Regeln auf ihn anwenden, andererseits gibt es keinen Begriff, keinen Namen, bei dem die fortgesetzte Analyse seines Inhaltes nicht zu einer oder mehreren Dimensionen und in ihren Endergebnissen zu besondern Zahlen führen würde. Eine weitere Besonderung und Analyse darüber hinaus ist undenkbar.

N-dimensionale Zahlen. Ein Glied des obigen Ausdruckes (102) kann auch durch einen Buchstaben bezeichnet werden, etwa ${}^{x}a = \alpha$, ${}^{y}b = \beta$, ${}^{z}c = \gamma$ u. s. w. Diese Größen kann man nach dem Vorgange Hamiltons Vectoren (im weiteren Sinne des Wortes) nennen.

Ist ξ der Einheitsvector der Dim. x, η der Einheitsvector der Dim. y, u. s. f., so ist dann offenbar $\alpha = a\,\xi$, $\beta = b\,\eta$ u. s. f. Man sieht, dass dann analog der Hamilton'schen Regel, dass bei nichtcomplanaren Vectoren α, β, γ eine Vectorgleichung $\varrho = \varpi$, oder $a\alpha + b\beta + c\gamma = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma$ die drei Gleichungen $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ zur Folge hat, auch aus einer Gleichung $g^{\cdot n} = p^{\cdot n}$, etwa ${}^{x}a + {}^{y}b + {}^{z}c + \ldots {}^{u}n = {}^{x'}a' + {}^{y'}b' + {}^{z'}c' + \ldots {}^{u'}n'$ . . . . (103)
oder $a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta + \ldots, n\,v = a'\,\xi + b'\,\eta + c'\,\zeta + \ldots n'\,v$, (denn offenbar haben ${}^{x}a$ und ${}^{x'}a'$ denselben Einheitsvector) die n Gleichungen sich ergeben müssen: $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, ... $n = n'$ . . (104)

Die Gleichung (103) ist also *gbm.* (= gleichbedeutend mit) den Gleichungen (104) . . . . (105)

Die Bedingung dafür ist die Nichtcomplanarität der Dimensionen, bei „nichträumlichen" Dimensionen ist der Satz in den folgenden umzuformen: „Die einen Ausdruck $g^{\cdot n}$ zusammensetzenden Dimensionen müssen so beschaffen sein, dass keine derselben durch eine andere oder durch eine Combination mehrerer andern ersetzt werden kann und sich also $g^{\cdot n}$ nur in einer Weise durch dieselben zusammensetzen lässt" (106)

Ich nenne solche Dimensionen constitutive, (bestimmende, unabhängige), denn sie entsprechen den constitutiven Merkmalen des Begriffes $g^{\cdot n}$.

Enthält die Größe $g^{\cdot n}$ mehr als n Vectoren, so lässt sie sich, wie aus der *Fig. 22.* hervorgeht, in mehrfacher Weise zusammenlegen, speciell in unserm Beispiele: $g^{\cdot 2} = {}^{x}a + {}^{y}b + {}^{z}c = {}^{x'}a' + {}^{y'}b' + c'$; und es folgt daraus nicht: $a = a'$ u. s. w.

Umgekehrt kann man aus der Giltigkeit, resp. Ungiltigkeit des Satzes (105) die Anzahl der constit. Dim. erschließen.

Die consecutiven (mitbestimmten, abhängigen) Merkmale sind nichts anderes als Functionen der constitutiven. So ist beispielsweise die Geschwindigkeit (c) eine consec. Dim., abgeleitet aus den constit.

Dim. des Weges (s) und der Zeit (t); $c = \frac{s}{t}$. So lässt sich ferner das Volumen aus den den Körper constituierenden Raumdimensionen ableiten. Das spec. Gewicht s ist $= \frac{p}{v}$, (p = pondus, v = volumen) u. s. f.

Natürlich ist das Verhältnis zwischen constit. und consec. Dim. in manchen Fällen nur ein relatives. Denn durch Umkehrung der Gleichungen $x = \varphi(x', y', \ldots)$, $y = \chi(x', y', \ldots)$ etc., werden die consec. zu constit. Dim., wenn sie die im Satze (106) ausgesprochenen Bedingungen erfüllen und umgekehrt, also $x' = \varphi'(x, y, \ldots)$, $y' = \chi'(x, y, \ldots)$ etc.

Darauf beruht die Transformation der Coordinaten und Dim.

Andere Operationsregeln für n-dimensionale Zahlen ergeben sich aus der Bezeichnungsweise selbst und brauchen keines Beweises. So ist klar, dass ${}^{x}(a + b) = {}^{x}a + {}^{x}b$ und ${}^{x}(a \times b) = a \times {}^{x}b$ . . (107)

Daraus ${}^{x}a = a \times {}^{x}1$, oder wenn ich den Einheitsvector ${}^{x}1$ mit x^{I} od ξ bezeichne, ${}^{x}a = a \,.\, x^{I} = a\,\xi$.

Man kann also die Größen ${}^{x}a$, ${}^{y}b$, ... in (102) bald als Vectoren, bald als Coordinaten betrachten. Im letztern Falle ergeben sich, aus der Gleichung (102) ohneweiters folgende Gleichungen: $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots u = n$, und aus der Gleichung (103) außerdem: $x' = a'$, $y' = b'$, u. s. w. . . . . (108)

Es entspricht also $g^{\cdot n}$ n voneinander unabhängigen Gleichungen mit n Unbekannten (constit. Dim.). Jede weitere Gleichung bei unveränderter Anzahl der Variablen ist *gbm.* einer consec. Dim.

Weiteres darüber siehe unter (112) bis (117)!

N-dimensionale Zahlen und die Complexionen. Die Zusammengehörigkeit oder Association. Es gehört zu unserer Methode, die verschiedenen Wissensgebiete durch exacten Ausdruck ihres gegenseitigen Verhältnisses untereinander zu verbinden und zu überbrücken. So wollen wir nun das Verhältnis zwischen den n-dimensionalen Zahlen und den Complexionen einer genauern Betrachtung unterziehen. Zu diesem Behufe ist eine eingehende Erörterung des Begriffes der „Zusammengehörigkeit" oder der Association nothwendig.

Wenn die Glieder zweier oder mehrerer Reihen oder Gruppen nicht alle in demselben Verhältnisse zueinander stehen, sondern immer je n Glieder, etwa a, b, c in gleicher Weise miteinander verbunden sind, so sagt man, sie gehören zusammen, und ich bezeichne dieses Verhältnis mit $a \circ b \circ c$ . . . . (109)

Beispiele: Besitzer ∘ Besitzthum, Winkel ∘ Arcus ∘ Sinus ∘ Cosinus ∘ Tangente ∘ Segment etc.

In den Gruppen $a + b = c$ und $m + n = p$ gehören $a \circ b \circ c$, andererseits $m \circ n \circ p$ zusammen.

Mit der Aenderung des einen Gliedes ändern sich oft auch alle andern oder einige von ihnen.

Nicht anders ist das Verhältnis zwischen den Coordinaten eines Punktes, resp. einer Größe $g^{\cdot n}$ sowie zwischen den Gliedern einer Complexion!

Die Bedeutung einer Complexion a . b . c haben wir durch den Satz definiert, dass a, b und c zugleich giltig sind. Nun gehört das „Zugleichgeltende" zueinander und das Zusammengehörende ist „zugleich giltig". Es besteht also kein wesentlicher Unterschied zwischen dem Zusammengehörigkeits- und dem Complexionszeichen.

Daraus ergeben sich unmittelbar folgende Bezeichnungen:

$g^{\cdot 3} = {}^{x}a + {}^{y}b + {}^{z}c = {}^{x}a \circ {}^{y}b \circ {}^{z}c = (x = a) . (y = b) . (z = c) = \alpha . \beta . \gamma$. (110)

und entsprechend $g^{\cdot n}$.

Den Satz (105) können wir nun in der Form schreiben:

$({}^{x}a + {}^{y}b + \ldots = {}^{x'}a' + {}^{y'}b' + \ldots) = (a = a') \circ (b = b') \circ \ldots (n = n')$.

Bekannte Sätze aus der analytischen Geometrie (Coordinaten-Transformationen) und der Algebra erhalten nun folgende Gestalt:

1.) $(2x + 5y = 9) \circ (7z + 4x = -13) \circ (3y - z = 6) = (x = 2) \circ (y = 1) \circ (z = -3)$ oder

2.) ${}^{2x+5y}9 + {}^{7z+4x}(-13) + {}^{3y-z}6 = {}^{x}2 + {}^{y}1 + {}^{z}(-3)$.

3.) Daher, da ${}^{2x}2a$ eine consec. Dim. von ${}^{x}a$ ist, ${}^{x}a + {}^{2x}2a = {}^{x}a$; denn Geb. $(x = a) \circ (2x = 2a) =$ Geb. $(x = a)$ d. h. das Gebiet einer Größe $g^{\cdot n}$ wird durch eine consec. Dim. weder verengt noch erweitert.

Ebenso $({}^{x}a + {}^{y}b) \circ {}^{x+y}(a + b) = {}^{x}a + {}^{y}b$ *gbm.* mit der Complexionsgleichung (7): a . b = a.

Enthalten die Größen $g^{\cdot n}$ auch Limitationen, so stellen sie Strecken, Bögen, abgegrenzte Flächen und Körper dar. So wird in der *Figur 23.*, wenn $y = \varphi(x)$ die Gleichung der Geraden AB, und $y = \varphi'(x)$ die Gleichung des Kreises K ist und p eine positive Zahl bedeutet, die Strecke PQ ausgedrückt durch $[y = \varphi(x)] \circ (x = x_1 \triangleright x_2)$ und arc. MN durch $[y = \varphi'(x)] \circ (x = x_1 \triangleright x_2) \circ (y = p)$.

5.) $(x = x_1 \triangleright x_2) \circ (y = y_1 \triangleright y_2)$ ist die Fläche eines Parallelogrammes, und ${}^{x}a \triangleright b + {}^{y}c \triangleright d + {}^{z}g \triangleright h$ stellt ein Parallelepiped dar.

6.) $(a + b) \circ ({}^{a}3 + {}^{b}5) = 3 + 5 = 8$.

7.) $(a \times b) \circ ({}^{a}3 + {}^{b}5) = 3 \times 5 = 15$ . . . . (111)

Dagegen ist $({}^{a}3 + {}^{b}5)$ nicht ohneweiters $= (3 + 5) = 8$; denn G . 8 = G $[{}^{a}z + {}^{b}(8 - z)]$ d. h. 8 enthält die Möglichkeiten $0 + 8, 1 + 7, 2 + 7, 3 + 5$ u. s. w., in denen $3 + 5$ als Theilgebiet enthalten ist . . . . . (112)

Es kann also auch der Ausdruck ${}^{x}a + {}^{y}b$ nicht gleich sein dem Ausdrucke ${}^{x+y}a + b$, denn es würde dies den Verlust einer der n Glei-

chungen bei n Unbekannten bedeuten. Wohl aber ${}^{x}a + {}^{y}b = {}^{x+y}a + b + {}^{x-y}a - b$ oder ${}^{x+yi}a + b\,i$.
Allgemein: ${}^{x}a = {}^{\varphi(x)}\varphi(a)$, dagegen nicht ohneweiters ${}^{x}a + {}^{y}b + {}^{z}c + \ldots = {}^{\varphi(x, y, z, \ldots)}\varphi(a, b, c, \ldots)$ . . . . (113)
wohl aber $= {}^{\varphi(x, y, z, \ldots)}\varphi(a, b, c, ..) + {}^{\varphi'(x, y, z, \ldots)}\varphi'(a, b, c, ..) \ldots$ (n Glieder) . . . . (114)

Der Satz (113) gilt nur dann, wenn $\varphi(x, y, z, \ldots)$ selbst wieder eine n-dimensionale Zahl, d. h. wenn ich die dieser Dim. entsprechenden Gleichungen vorher mit bestimmten Zahlen, die ich separierende Factoren nenne, multipliciert habe. Solche Factoren können sein: $i = \sqrt{-1}$, die Hamilton'schen Vectoren i. j. k oder endlich der algebraischen Methode der unbestimmten Coofficienten entsprechend weitere variable Zahlen. (115)

${}^{x}a + {}^{y}b$ ist auch $= {}^{x+yi}ci'$ *(Fig. 24.)*, dagegen nicht $= {}^{zi'}c\,i'$, weil dann ${}^{zi'}c\,i' = {}^{z}c$, also der Ausdruck $g^{\cdot 2}$ zu $g^{\cdot 1}$ würde . . (116)

Ohneweiters können dagegen zwei oder mehrere Dim. zasammengezogen werden, wenn sie a n S t e l l e einer constit. Dim. stehen („indirect bestimmende Dimensionen“). Beispiel: Die Gleichung eines Kreises ist $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, und $p = p' + p''$. Dann sind p, q, r direct bestimmende, p', p'' indirect bestimmende Dimensionen; daher $[(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2] \circ ({}^{p}p' + p'' + {}^{q}3 + {}^{r}2) \circ ({}^{p'}5 + {}^{p''}4)$ oder $[(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2] \circ ({}^{p'}5 + {}^{p''}4 + {}^{q}3 + {}^{r}2) = [(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2] \circ ({}^{p}9 + {}^{q}3 + {}^{r}2) = [(x - 9)^2 + (y - 3)^2 = 4]$ . . . . . (117)

Das allgemeine Verhältnis. Die Function. Die allgemeine Proportion. Vergleiche ich zwei ein- oder mehrdimensionale Größen a und b miteinander, so geschieht dies in der Weise, dass ich mich frage, welche Veränderungen muss die eine Größe erleiden, um der andern gleich zu werden. Für die Veränderung einer Größe existiert in der Mathematik bereits ein allgemeiner Ausdruck; es ist das der Operator $\varphi(x)$ d. h. Function von x, wobei umgekehrt x das Argument der Function genannt wird. Das allgemeine Verhältnis zwischen den Größen a und b lässt sich also ausdrücken durch $a = \varphi(b)$, d. h. man gelangt von b auf dem Wege φ zu a oder b wird gleich a, indem mit b eine gewisse Aenderung φ vorgenommen wird, oder umgekehrt: $b = \varphi^{-1}(a)$, wobei ich consequenterweise mit dem Ausdrucke wieder die Vorstellung zu verbinden habe: ich gelange von a zu b auf dem entgegengesetzten Wege φ^{-1}, oder a wird zu b, indem mit a die umgekehrte Aenderung φ^{-1} vorgenommen wird.

G l e i c h e u n d u n g l e i c h e V e r h ä l t n i s s e. V e r h ä l t n i s - S t r e c k e n. P r o g r e s s i o n e n. S t r e c k e n - S y s t e m e. Man kann von einer gegebenen Größe zu einer andern im allgemeinen auf vielerlei Wegen gelangen, d. h. $b = \varphi(a), = \varphi'(a) = \varphi''(a)$ u. s. f. So gelangt man

z. B. von 2 bis 6, indem man entweder zu z w e i v i e r addiert oder indem 2 mit 3 multipliciert wird. Ist der Weg von a bis b der gleiche, wie von b bis c, ebenso der Weg von c bis d u. s. f. d. h. $b = \varphi(a)$, $c = \varphi(a)$, $d = \varphi(c)$ etc., so bilden die Glieder a, b, c, d, ... bekanntlich eine Progression. Nun entspricht der Auffassung eines Verhältnisses oder einer Function als „Weg" die Vorstellung der Zahlenreihe oder der arithmetischen Progression unter dem geometrischen Bilde der Zahlenlinie oder der Zahlenstrecke. *(Fig. 26.)* Man kann dieses Verfahren verallgemeinern und jedes Verhältnis durch eine Strecke ausdrücken, wenn man die Strecke von der natürlichen Zahlenlinie durch ein diakritisches Zeichen unterscheidet. Die gleiche Art des Fortschreitens von einem Gliede zum andern wird durch die gleiche Länge der Strecke bezeichnet. So lässt sich beispielsweise die geometrische Reihe 3, 6, 12, 24, ... durch die *Fig. 27.* darstellen. Der dieser graphischen Darstellung adäquate analytische Ausdruck wird gewonnen, wenn man die Strecke durch das entsprechende S y m b o l ersetzt. *Fig. 27.* ist also *gbm.* $a \, \varphi\!\triangleright \, b \, \varphi\!\triangleright \, c \, \varphi\!\triangleright \, d \ldots$ (118) worin φ als diakritisches Zeichen zum Symbole $\triangleright$ gehört. In gleicher Weise ließe sich φ auch mit dem Gleichheitszeichen zu einem S y m b o l e verbinden; wir erhalten so: (118) *gbm.* $a \langle \varphi = \rangle \, b \langle \varphi = \rangle \, c \langle \varphi = \rangle \, d \ldots$ . . . . (119)

Bedeutet $\circ_n$ außer der Association auch die Art derselben, so dass darunter auch alle Operationszeichen: $+$, $-$, $\times$, :, log, ... subsumiert werden können, so lässt sich jede Function $a = \varphi(b)$ auch in der Form schreiben: $a = b \circ_n e$, worin „$\circ_n e$" auch aus mehreren Gliedern etwa: $\circ_p e' \circ_q e'' \circ_r e''' \ldots$ zusammmengezogen sein kann. Dann sind die Ausdrücke (118) und (119) auch darstellbar durch $a \langle \circ_n e = \rangle \, b \langle \circ_n e = \rangle \, c \ldots$, resp. $a \langle \circ_p e' \circ_q e'' \circ_r e''' \ldots \rangle \, b \ldots$ . . . . (120) oder durch Ersetzung des complicierten durch ein einfacheres Zeichen: $a \circ' b \circ' c \circ' d$ . . . . (121)

Soll nicht die Strecke selbst, sondern nur die Länge (Quantität) derselben hervorgehoben werden, so schreibe ich: $a [\varphi =] \, b$ *gbm.* $Q. \, a \langle \varphi = \rangle \, b$, $a [\varphi \triangleright] \, b$ *gbm.* $Q. \, a \, \varphi \triangleright b$, $a [\circ_n e =] \, b$ *gbm.* $a \, {}'\!\circ \, b$, ... (122) und wenn nur die Association d. h. nicht das Verhältnis der Glieder, sondern die im Verhältnis miteinander verbundenen Glieder betont werden sollen, so kann man schreiben: $a (\varphi =) \, b$ *gbm.* $a (\circ_n e =) \, b$ *gbm.* $a (\varphi \triangleright) \, b$ *gbm.* $a \circ b$ . . . . (123)

Das Associationszeichen kann also den verschiedensten Verbindungszeichen aequivalent sein, so dass $a \circ b \circ c \circ d = a \circ_x b \circ_y c \circ_z d$. (124)

Die Ausdrücke (118), (119) und (120) sind also gleichbedeutend und stellen nach Functionen benannte Reihen, Strecken oder auch ganze Systeme dar, die man kurz φ-, χ-, ψ-Reihen, φ-, χ-, ψ-Strecken, φ-, χ-,

ψ-Systeme nennen kann. Die Streckensymbole enthalten zugleich einen Hinweis auf die Entstehung des einen Gliedes aus dem andern, so dass mit demselben zugleich die einzelnen Gleichungen: $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = c$, $\varphi(c) = d, \ldots$ resp. $a \circ_n e = b$, $b \circ_n e = c, \ldots$ gesetzt sind. . . (125)

Ein Unterschied zwischen den 3 Symbolen besteht nur darin, dass (119) und (120) außer der Strecke zugleich die Richtung derselben angeben, bei (121) dagegen wegen seiner Symmetrie die Richtung unbezeichnet bleibt, $a \circ' b$ also *gbm.* $\langle \varphi(a) = b$ o d e r $\varphi^{-1}(b) = a \rangle$.

Sind 2 Verhältnisse (Verhältnisstrecken) in Bezug auf ihre Länge (Quantität) einander gleich, so bilden sie, einander gleich gesetzt, eine allgemeine Proportion z. B. $a \,{}'\!\circ\, b = c \,{}'\!\circ\, d$ . . . . (126)

Solche allgemeine Proportionen sind: „Das Schwert verhält sich zum Stahl, wie das Geformte zur Materie". Aus dem Satze: „Im Jahre 1892 wurde Amerika entdeckt" lässt sich die Proportion ableiten: „Die Entdeckung Amerikas $'\!\circ$ J. 1492 = Geburt Christi $'\!\circ$ Jahr 1." u. a.

Diese allgemeinen Proportionen gehen in speciellen Fällen in gewöhnliche über. So ist die arithmetische Proportion $Q.a \triangleright b = Q.c \triangleright d$ *gbm.* $b - a = c - d$, vgl. (62), die geometrische Proportion $a [\times e =] b = c [\times e =] d$ *gbm.* $b : a = d : c$.

Aber auch ungleiche Verhältnisse (Strecken) lassen sich zu einem System vereinigen, auch so, dass von einem Gliede mehrere Strecken abzweigen. *Fig. 28.*

Solche Systeme sind: Stammbäume verschiedenster Gattungen (der Menschen, Thiere, Codices), die sogenannten Satzbilder der herkömmlichen Grammatiken (vgl. *Fig. 29.)*, die Constitutionsformeln der Chemie u. a.

Analytisch ließe sich das in der *Fig. 28.* dargestellte System etwa folgendermaßen ausdrücken:

$a \circ' b \circ'' c, \circ''' d_{,,} \circ^{\sim} e_{,,} \circ^{\cdot} f_{,,,} \circ^{\nu} g_{,,,} \circ^{\pi} h, \circ^{\mu} i, \circ^{\varrho} k$ . . . . (127)

Natürlich lässt sich jedes solche System auch durch ein System von G l e i c h u n g e n ersetzen. Das System *(Fig. 26, 27.)* ist offenbar *gbm.* $\varphi\varphi\varphi(a) = \varphi\varphi(b) = \varphi(c) = d$, und *Fig. 28.* *gbm.* $\varphi'''\varphi''\varphi'(a) = \varphi'''\varphi''(b) = \varphi'''(c), = d = \ldots$ . . . . (128)
was unmittelbar aus den Gleichungen: $\varphi'(a) = b$, $\varphi''(b) = c$, $\varphi'''(c) = d, \ldots$ folgt.

Wie nun 2 oder 3 Dimensionen mit einem bestimmten Anfangspunkt ein Coordinaten-System bilden, so hindert nichts, auch e i n e Dimension, ja auch jedes beliebige Streckensystem (etwa *Fig. 28.)* als Coordinaten-System aufzufassen, wofern man einen Anfangspunkt (Null-Punkt) bestimmt, auf den alle im System enthaltenen Glieder bezogen werden.

Was ist nun der Anfangspunkt eines Streckensystems?

Wir haben oben gesehen, dass man in einem Verhältnisse $b = \varphi(a)$, als Strecke aufgefasst, immer von a auszugehen hat, um zu b zu gelangen, und habe ich so b erreicht, so kann ich b wieder als Ausgangspunct für andere neu zu bestimmende Glieder betrachten, d. h. ich habe den Null-Punkt von a nach b verlegt. J e d e G l e i c h u n g i s t a l s o d e r A u s d r u c k e i n e s a b g e s c h l o s s e n e n V e r g l e i c h e n s und *gbm.* m i t e i n e r V e r l e g u n g d e s C o o r d i n a t e n - A n f a n g s p u n k t e s. Dieser neue Coordinaten-Anfangspunkt ist immer das vom Functionszeichen freie Glied oder die N u l l - F u n c t i o n einer Größe, mag man nun in einem Streckensystem alle Glieder durch Functionen d e s s e l b e n Arguments ersetzen oder i n e i n e m S y s t e m v o n G l e i c h u n g e n das Anfangsglied durch Functionen der andern Glieder bestimmt sein lassen.

Bezeichne ich also in einem allgemeinen Verhältnis $a \circ' b =$
$\langle \varphi(a) = b,\ a = \varphi^{-1}(b) \rangle$ . . . . (129)
mit „$x._0$“ den Anfangspunkt, so ist $a._0 \circ' b$ *gbm.* $\varphi(a) = b$, und $a \circ' b._0$ *gbm.* $\varphi^{-1} = a$ . . . . (130)

$a \circ' b._0 \circ'' c \circ''' d$ *gbm.* $\varphi^{-1}(b) \circ' b \circ'' \chi(b) \circ''' \psi\chi(b)$ und entspricht den Gleichungen $\varphi(a) = b = \chi^{-1}(c) = \chi^{-1}\psi^{-1}(d)$; dagegen $a \circ' b \circ'' c._0 \circ''' d$ *gbm.* $\varphi^{-1}\chi^{-1}(c) \circ' \chi^{-1}(c) \circ'' c \circ''' \psi(c)$ und entspricht den Gleichungen: $\chi\varphi(a) = \chi(b) = c = \psi^{-1}(d)$ u. s. f. . . . . (131)
wie aus den einzelnen Gleichungen: $\varphi(a) = b$, $\chi(b) = c$, $\psi(c) = d$ hervorgeht.

Ich will schon jetzt bemerken, dass diesem Verfahren auf grammatischem Gebiete genau die Zusammenziehung mehrerer Sätze in ein Satzganzes entspricht. Z. B. 1.) Satz: „Es wurde etwas entdeckt“, 2.) Satz: „Der Entdecker war Columbus“, 3.) Satz: „Der Gegenstand der Entdeckung war Amerika“, 4.) Satz: „Die Zeit der Entdeckung war das Jahr 1492“. Aus diesen vier Sätzen lässt sich ein Satzganzes bilden, etwa a.) „Columbus hat im Jahre 1892 Amerika entdeckt“, b.) „Von Columbus wurde im Jahre 1492 Amerika entdeckt“, c.) „Das Jahr der Entdeckung Amerika's durch Columbus war 1492“. Der „Anfangspunpt“ in allen diesen Sätzen ist jedesmal das S u b j e c t.

Wir haben schon oben, (102), einen Ausdruck für die Vereinigung mehrerer Gleichungen gefunden.

In welchem Verhältnis stehen nun die Ausdrücke (102) und (118) bis (120) zueinander? Bei (102) wird mehr der durch die Gleichungen (Dimensionen) näher bestimmte Begriff, also die in einem Verhältnis, resp. Verhältnissystem enthaltenen Glieder hervorgehoben, während in (118) bis (120) das Verhältnis (Strecke) selbst betont wird.

Nach dem Gesagten verstehen sich die folgenden Gleichungen von selbst.

1.) ${}^{x}a\,._{0} + {}^{y}b + {}^{z}c = {}^{x}a + {}^{\varphi(x)}b + {}^{\varphi'\varphi(x)}c = {}^{x}a + {}^{y}\varphi(a) + {}^{z}\varphi'\varphi(a) = a \circ \varphi(a) \circ \varphi'\varphi(a) = a\,._{0}\,(\varphi =)\, b\, (\varphi' =)\, c \ldots$ *gbm.* den Gleichungen: $x = a$, $y = b$, $z = c$, $\varphi(x) = y$, $\varphi'(y) = z$.

2.) ${}^{x}a + {}^{y}b\,._{0} + {}^{z}c = {}^{x}\varphi^{-1}(b) + {}^{y}b + {}^{z}\varphi'(b) \ldots$ u. s. f. . . (132)

Complicierter werden die Formeln, wenn die Glieder des Streckensystems Größen von mehr als einer Dimension sind, von denen (Dim.) alle oder nur einige durch Gleichungen miteinander verknüpft, die andern unabhängig sein können und an die betreffenden Glieder nur associiert sind. Man kann natürlich diese Dimensionen selbst als das Coordinaten-System auffassen, dann erscheint das Streckensystem als Gebilde dieses letztern.

Eindeutig umkehrbare und nicht umkehrbare Functionen. Ich nenne eindeutige Functionen, die durch Umkehrung wieder eindeutige Functionen liefern, eindeutig umkehrbar und bezeichne sie folgendermaßen: $y = \varphi(x^{\cdot 1})$. Durch Umkehrung erhält man: $x = \varphi^{-1}(y^{\cdot 1})$. Soll dagegen eine Gleichung ein Gebilde, wie es in der *Fig. 30.* dargestellt ist, ausdrücken, so schreibe ich: $y = \varphi(x^{\cdot n})$, ... (133) d. h. ein bestimmtes x liefert ein bestimmtes y, dagegen ergeben sich bei der Umkehrung der Gleichung: $x^{\cdot n} = \varphi^{-1}(y^{\cdot 1})$ aus einem x mehrere $(= n)$ y. Eine solche Gleichung ist nicht eindeutig umkehrbar. Dieser Unterschied ist von Wichtigkeit bei hypothetischen Schlüssen, wobei natürlich der Grund dem Argument, die Folge der Function gleichzusetzen ist.

Der Ausdruck einer Veränderung oder die Mutation. Man kann in einer Reihe $a \circ' \varphi(a) \circ' \varphi\varphi(a) \ldots$ die Gleichung φ auch durch die Gleichung des allgemeinen, n^{ten} Gliedes ersetzen: $\chi(n)$. Ich schreibe dann $a_1\, \chi\cdot\triangleright\, a_m$ resp. $a_1 \circ\cdot\reflectbox{χ}\, a_m$ u. s. f. . . . . . . (134) und es ist dann $a_1 = \chi(1)$, $a_m = \chi(m)$.

Der Anfangspunkt des Systems ist dann $a = \chi(0)$.

Ist nun das Argument der Function χ die Zeit $(= t)$, so schreibe ich statt $a(\chi\cdot\triangleright)b$ oder $a(\circ\reflectbox{$\chi$})b$ abgekürzt $a \therefore b$ . . . . (135) und nenne den Ausdruck eine Mutation. $a \therefore b$ ist also *gbm.* $({}^{x}a + {}^{t}n) \triangleright [{}^{x}b + {}^{t}(n + m)]$. Ein Beispiel: Bedeutet l (= locus) die Lage eines Punktes P, so bedeutet $(l' \therefore l'' \therefore l''')$ eine Ortsveränderung oder Bewegung des Punktes P.

Definiens und Definiendum. Hebe ich in einer beliebigen Association oder Gruppe ein Glied in der Weise heraus, dass nur dieses Glied gemeint sein soll (Definiendum), so werden alle andern Glieder zu nähern Bestimmungen oder Determinanten (Definientia) des einen Gliedes degradiert. Ich bezeichne dieses Verhältnis so, dass ich das Definiendum durch » « hervorhebe oder alle andern Glieder in eckige Klammern setze.

Es ist also 1.) »a« $\circ\, b \circ c = a\,[\circ\, b \circ c]$, 2.) $a +$ »b« $\times\, q = [a +]\, b\, [\times\, q] = b\, [\times\, q + a]$ . . . . (136)

Bezeichne ich die Association mit e i n e m Buchstaben, so wird das Definiens zu einer Gleichung. $a\,[\circ\, b \circ c]$ ist dann *gbm.* $a\,[a \circ b \circ c = d]$, und in 2.) $b\,[\times\, q + a] = b\,[a + b \times q = c] = b\,[= \frac{c-a}{q}]$ . . . (137)

Das Symbol » « enthält demnach zugleich eine Anweisung, wie eine Gleichung aufzulösen ist, nämlich so, dass das Definiendum zur Null-Function wird. Ich kann also statt » « auch das Symbol des Coordinaten-Anfangspunktes gebrauchen, und es ist dann beispielsweise: $(b\,x + a\,y._0{}^2 = c)$ *gbm.* $y\,[= \sqrt{\frac{c - bx}{a}}\,]$. Man sieht, dass auf diese Weise ein Ausdruck gowonnen wird, mittels dessen bei der Lösung einer Anzahl gegebener Gleichungen auch der G a n g der Rechnung genau vorgezeichnet werden kann.

Ich will gleich hier, damit man schon jetzt die Ausdrücke grammatisch richtig deuten könne, bemerken, dass ein determinierender, d. h. in eckige Klammern gesetzter Ausdruck, wenn er e i n Name ist, einem Attribut aequivalent ist, wenn er eine Gleichung enthält, einem Nebensatze entspricht. Eine nicht eingeklammerte Gleichung ist *gbm.* mit einem Hauptsatze.

Es ist also im obigen Ausdrucke (137) $b\,[= \frac{c-a}{q}] =$ 1.) $b\,[= \varphi\,(a)]$ oder weiter = 2.) $b\,[b = \varphi\,(a)] =$ 3.) $b\,[a]$ zu setzen, nicht 4.) $b = \varphi\,(a)$; (138) denn die ersteren Ausdrücke 1.), 2.), 3.) stellen einen durch a näher bestimmten Begriff b vor, — zu lesen etwa im Falle 3.) „das mit a versehene b", im Falle 2.) „b, welches mit a versehen ist = welches a enthält", während die nicht eingeklammerte Gleichung *gbm.* einem Urtheile ist, etwa „b ist mit a versehen", „b hat a", „b enthält a".

Aus dem Gesagten folgt ferner, dass ein Ausdruck $b\,[a]$ immer eine Gleichung voraussetzt, sei es dass sie ausdrücklich gegeben ist oder aus einem aequivalenten Satze (einer „Thatsache") erst erschlossen werden muss. Es ist also allgemein $y\,[x] = y\,[= \varphi\,(x)] = y\,[x = \varphi^{-1}\,(y)] = y\,[\chi\,(x, y)]$ u. s. f. . . . . (139)

Umgekehrt bedeutet eine eingeklammerte Gleichung $[y = \psi\,(x)]$ die Unificierung zweier oder mehrerer Größen (Begriffe) und ist dem Ausdrucke e i n e s Begriffes, also e i n e m Buchstaben aequivalent.

Dieser Buchstabe, ein Name, etwa z, kann als Definiendum immer zum Definiens hinzugefügt werden, ohne dass das Gebiet der so entstandenen Complexion erweitert oder verengt wird, dann ist $[y = \psi\,(x)] = z$, so ist $G.\,z\,[y = \psi\,(x)] = G\,z^{(2)} = z$. Vgl. (32).

Allerdings kann man mit einem und demselben Definiens verschiedene Vorstellungen verbinden. So kann beispielsweise $\varrho = x\,\alpha + y\,\beta + z\,\gamma$, eigentlich $\varrho\,[= x\,\alpha + y\,\beta + z\,\gamma]$ nur den Endpunkt des Vectors ϱ vorstellen, also P $[\varrho]$, oder den ganzen Vector V $[\varrho]$. Was also im ersten Falle ein Punkt (Linie) ist, ist im zweiten eine Linie (Fläche) u. s. w. Daraus geht aber nur hervor, dass oft zu einem Definiens ein Definiendum hinzugedacht werden muss und nicht ausdrücklich gesetzt zu werden braucht, wenn man durch die ganze Rechnung oder Abhandlung mit dem Ausdrucke dieselbe Vorstellung verbindet. Diese Verbindung kann natürlich nicht mit einer besondern Zahl stattfinden, sondern gehört zur Dimension.

Wir werden nun auch die unter (113) besprochene Regel schärfer fassen können. Es ist vor allem daran zu erinnern, dass die Gleichung des Kreises einen Kreis, also einen Begriff vorstellt und deshalb eigentlich in Klammern zu setzen ist. Der Ausdruck ist dann mit dem Namen K (Kreis) identisch. Ich kann also statt $[(x-p)^2+(y-q)^2=r^2]$ auch schreiben: K. Die Formel kann auch geschrieben werden: $[({}^{p}(p'+p'')+{}^{q}3+{}^{r}2)$ $[{}^{p'}5+{}^{p''}4]]$, wobei die Art der Einklammerung andeuten soll, dass p' und p'' indirect bestimmende Dim. sind. In diesem Falle können p' und p'' zu e i n e m Ausdrucke contrahiert werden, und wir erhalten nach Einsetzung der speciellen Werte: $K[{}^{p}9+{}^{q}3+{}^{r}2]=K'=[(x-9)^2+(y-3)^2=4]$, wobei natürlich K' dem K subsumiert erscheint, also Geb. $K.K'=K'$.

Wäre im genannten Ausdrucke nicht K, sondern eine abgeleitete Dim., etwa d (Durchmesser $=2r$) oder der Mittelpunkt c $[{}^{x}p+{}^{y}q]$ oder die Entfernung des Mittelpunktes vom Anfangspunkte e $[=\sqrt{p^2+q^2}]$ etc. das Definiendum, so wäre die Formel entsprechend umzuformen, für d etwa wie folgt: $d[d=2r]\circ[(x-p)^2+(y-q)^2=r^2]\circ[{}^{p}9+{}^{q}3+{}^{r}2]=d[K'][r=2]=d'[r=2]=d'[=2r][r=2]={}^{d'}4$.

Beispiele aus der Grammatik. In zusammengesetzten Wörtern verhält sich das Bestimmungswort zum Grundwort wie Definiens zum Definiendum. Die Composita: Silberbergwerk, Kirchhofmauer, Eisenbahnwartsaal sind demnach, wenn wir ihre Elemente der Reihe nach mit s, b, w, k, h, m, e, b', w', s' bezeichnen, zu schreiben:

$[s].([b].w)$, $[[k]h].m$, $[[e]b']([w']s')$ . . . . (140)

Dieselben Wörter können durch die Streckensysteme *Fig. 29.* dargestellt werden, analytisch: $w._{o}$, $\circ^{m}b$, $\circ^{n}s$, $m._{o}\circ^{p}h\circ^{q}k$, $s'._{o}$, $\circ^{\alpha}w'$, $\circ^{\beta}b\circ^{\gamma}e$, wobei die Verhältnissymbole, etwa: $\circ^{p}$, $\circ^{\alpha}$ . . . bedeuten: (Mauer) um den (Hof), (Saal) zum (Warten) u. s. f. . . . . (141)

Genau so verhalten sich: das Suffix zum Stamm, die Präposition zum Casus obliquus, eine Zahl zum Index, nämlich wie das Definiendum zum Definiens. Denn es ist klar, dass die Präpositional-Ausdrücke: im Garten, außerhalb des Gartens, vor dem Garten u. s. f., nicht den Garten selbst, sondern einen Gegenstand in demselben, außerhalb desselben, vor demselben ... bedeuten. Ihr analytischer Ausdruck ist also eine Function, allgemein: $\varphi(g)$, $\chi(g)$, $\psi(g)$ oder $[g]$, $[g]'$, $[g]'' = x[g]$, $x[g]'$, $x[g]''$, im besondern etwa: $x[x.g = x] = \varphi(g)$, $x[x.g = 0]$ oder $x[x = x.g_1] = \chi(g)$. ψ wäre, wenn l (= locus) = eine 3-dimensionale Größe: x, y, z, x durch den Beobachter und den betreffenden Gegenstand gelegt, etwa so auszudrücken: $x[l = l[g] - {}^x a]$ u. s. w. . . . . (142)

In allen diesen Ausdrücken ist g das Argument d. h. das Definiens, und x die Functionsgröße oder die Null-Function, d. i. das Definiendum. Dabei ist natürlich j e d e i r g e n d w i e bezeichnete Größe als Function zu betrachten: $a' = \varphi(a)$, a_1 = Nicht-a $= \varphi'(a)$, $a_1 \therefore a = \varphi''(a)$, ebenso $+a$, $-a$, $\varphi \rhd a$, $\circ' a \therefore a$ u. s. f. lauter Functionen von a. Desgleichen braucht kaum daran erinnert zu werden, dass im Ausdrucke [g] auch Functionen von Functionen enthalten sein können, sowie endlich, dass die nach der Functionsgröße aufzulösende Function nicht ausgeführt zu werden braucht, sondern oft nur angezeigt werden kann, wie im obigen Beispiele $x[x = x.g_1]$ u. s. f. . . . . (143)

Projections - Coordinaten. Es erübrigt nur noch, die sub (109) begrifflich identificierten Ausdrücke auch in ihren geometrischen Bildern miteinander zu vermitteln, d. h. durch eine bestimmte Lagenveränderung die Gebilde der Parallel-Coordinaten in die Euler'schen Diagramme überzuführen. Dies kann in der Weise geschehen, dass ich, um mich auf den einfachsten Fall zu beschränken, *Fig. 30.*, die Ordinate um 90° drehe und dass ich mir, indem ich sie mit einer ideellen Elasticität ausstatte, ihre Punkte derart verschoben denke, dass die durch die Gleichung der Linie AB: $y = \varphi(x)$ bestimmten und sich entsprechenden Punkte genau übereinander zu stehen kommen. Dadurch ist die d o p p e l t e Projection der Parallel-Coordinaten, etwa MB und NB, auf die e i n f a c h e MN zurückgeführt. Nun wird unter anderm klar, dass in den Euler'schen Diagrammen auch Wiederholungen i d e n t i s c h e r Punkte, beispielsweise für die Strecke DE des Punktes P, anderseits Häufungen verschiedener Punkte, beispielsweise des Punktes Q für die Strecke EF, denkbar sind. Bei der Umkehrung der obigen Gleichung: $x = \varphi^{-1}(y)$ haben wir uns natürlich die Abscisse gedreht und in entsprechender Weise gestreckt, resp. verkürzt zu denken. Da nichts hindert, das Verfahren auf n Dimensionen auszudehnen und statt der eindimensionalen Coordinaten (der Abscisse und der Ordinate) uns 2-dimensionale Flächen vorzustellen, so ist evident, dass die herkömmliche Vorstellungsart der Euler'schen Diagramme in nachstehender Weise zu vervollständigen ist:

Jedem Begriff ist eine ganze Dimension (Fläche) als zugehörig zu betrachten, so dass ein Begriff a mit seiner Negation a_1 die ganze Dim. einnimmt. Diese Dimensionen sind parallel aufeinander gelegt zu denken, von denen eine als Anfangs-Dim., gleichsam als Standpunkt des Messenden und Vergleichenden, der Null-Function einer Dim. entspricht, auf welche die andern Dim. „bezogen“ oder projiciert werden können. Diese Dimensionen der Euler'schen Diagramme bilden demnach ebenfalls ein Coordinatensystem, welches man zum Unterschied von den bisherigen Coordinaten Projections-Coordinaten nennen kann. Ist demnach x die Anfangs-Dim., so sind die Projectionen darauf von der Dim. y, z, . . . u der Reihe nach zu bezeichnen mit: $x[y], x[z], \ldots x[u]$, ... (144) was im Einklang steht mit (130); denn $x[y]$ *gbm.* $x[= \varphi(y)]$ d. h. x = die Anfangs-Dim.

Ohne Betonung der Anfangs-Dim. bezeichne ich 2 sich d e c k e n d e Punkte (Strecken, Gebiete), etwa a und b, gemäß (109), da sie offenbar zu einander gehören, durch den Ausdruck $a \circ b$. Doch kann bei verschiedenen besondern Zahlen, etwa 2 und 7, die P [2] und P [7] bedeuten, nun nicht ohneweiters nach (77) $2 \circ 7 = 2 . 7 = 0$ gesetzt werden, da die Zahlen auch verschiedenen Dim. angehören können. Man kann zwischen dem Associations- und dem Complexionszeichen den Unterschied statuieren, dass man $2 \circ 7$ *gbm.* ${}^{x}2 \circ {}^{y}7$ *gbm.* $(x = 2) \circ (y = 7)$ annimmt, dagegen bei $2 . 7$ auch gleiche Dim. zulässt, also ${}^{x}2 \circ {}^{x}7 = 0$. (145)

Integration von Limitationen. Da auf sprachlichem Gebiete selten einnamige, specielle Zahlen vorkommen und die Namen gewöhnlich limitative Bestimmungen enthalten, so entsteht die Frage: was bedeutet beispielsweise $2 \triangleright 7 [12 \triangleright 33]$ oder die daraus folgende Gleichung $2 \triangleright 7 = \varphi(12 \triangleright 33)$? . . . . (146)

Dass die Gleichung nicht *gbm.* ${}^{x}2 \triangleright 7 \circ {}^{y}12 \triangleright 33 \ldots 1)$ sein kann, erhellt daraus, dass die letztere eine Fläche, die erstere dagegen offenbar eine Strecke darstellt. Dagegen ist bei einzahligen Größen, etwa ${}^{x}2, {}^{y}12$, allerdings $2 = \varphi(12)$ *gbm.* ${}^{x}2 \circ {}^{y}12 \ldots . 2)$ Dies rührt daher, dass ich mir 2 Punkte immer auf irgendeinem Wege: $\varphi, \chi \ldots$ miteinander verbunden denken kann, ohne dass dadurch die Zweidimensionalität verloren geht, wenn ich beide Dim. besonders bezeichne. (${}^{x}2 \circ {}^{6x}12$ würde allerdings $= {}^{x}2$ sein, nicht dagegen ${}^{x}2 \circ {}^{y = 6x}12$). Sodann ist der Ausdruck 1.) nur ein abgekürzter Ausdruck für ${}^{x'}2 \triangleright {}^{x''}7 \circ {}^{y'}12 \triangleright {}^{y''}33$, und ich kann mir die verschiedenen Punkte der durch den Ausdruck dargestellten Fläche auch hier durch v e r s c h i e d e n e Gleichungen verbunden denken, etwa ${}^{x'}2 \triangleright {}^{x''}7 \circ {}^{y' = \varphi(x')}12 \triangleright {}^{y'' = \chi(x'')}33$. Daher ist der Ausdruck (146) von 2.) verschieden und besagt, dass zwar ${}^{x'}2 \circ {}^{y'}12$ und ${}^{x''}7 \circ {}^{y''}33$, dass jedoch unbestimmt bleibt, in welcher Art die Zwischenpunkte zur Deckung gelangen. Mit andern Worten: es besteht neben den beiden Gleichungen gleicher Function: $y' = \varphi(x')$ und $y'' = \varphi(x'')$ noch eine allgemeine Gleichung $y = \varphi(x)$ . . . . . . (147)

Die Ermittlung dieser letztern nenne ich eine Limitations-Integration. Sie ist der gewöhnliche Weg zur Gewinnung allgemeiner Regeln und Gesetze.

Nach den vorstehenden Erweiterungen der mathematischen Darstellungsmittel wird es nun möglich sein im folgenden, wo ich von speciellen grammatischen Erscheinungen handeln will, nur das Wichtigste einer eingehendern Erörterung zu unterziehen, im übrigen mich jedoch nur auf Andeutungen zu beschränken, ohne der Verständlichkeit Eintrag zu thun.

Substantiva. Die concreten Substantiva sind n-dimensionale Zahlen, die unter andern immer auch die Dim. m d. i. Materie enthalten muss, sei es empirische oder bloß ideelle, wozu auch die sogenannte Immaterialität (als conträrer Gegensatz zur Materie) gehört. Beispiele: Eisen, Mensch, Haus; Kreis, Juppiter. Die Numeralisierung der Materie geschieht auf verschiedene Weise, am einfachsten durch Angabe des Atomgewichtes, wobei m bei chemisch zusammengesetzten Stoffen auch mehrdimensional sein kann.

Bezeichnet man die Nomina concreta mit einem großen Buchstaben, etwa A, so ist A immer $= [{}^m a] = {}^m a + {}^x b + {}^y c_1 \triangleright c_2 + {}^z \xi + \ldots$, (148) wobei einige Dim. bestimmte, etwa a, b, $c = c_1 \triangleright c_2$ andere, etwa ξ, unbestimmte, variable Zahlen sein können.

Die bestimmten sind die *wesentlichen*, die unbestimmten die „unwesentlichen“ Merkmale.

Es ist selbstverständlich Geb. $A = G\,[{}^m a] = G\,.\,({}^m a + {}^x b + \ldots) = G\,({}^m a\,.\,{}^x b\,.\,{}^y c_1 \triangleright c_2\,.\,{}^z \xi \ldots)$, und da $G\,{}^z \xi = \text{ъ}$, ... (149) denn ξ kann alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, so ist nach (34) GA weiter $= G\,{}^m a\,.\,{}^x b\,.\,{}^y c\,.\,\text{ъ} = G\,{}^m a\,.\,{}^x b\,.\,{}^y c$. Dadurch ist der ganze Streit der Nominalisten und Realisten ins richtige Licht gerückt. Nur im Falle, dass die Namen als Gebiete verstanden werden, können die unwesentlichen Merkmale vernachlässigt werden, sonst nicht; denn ich kann mir den Gegenstand irgend eines generellen Namens, beispielsweise einen Vogel, nicht ohne die unwesentlichen Merkmale, etwa des Ortes, vorstellen. Darnach ist $A = {}^m a + {}^x b + {}^y c + {}^z \xi + \ldots$ nicht etwa $= {}^m a + {}^x b + {}^y c$; denn ${}^z \xi$ nicht $= 0$, sondern eine variable Größe. . . . (150)

Ebenso leicht lassen sich andere Functionen von A berechnen, z. B. die logische Function der Negierung. $A_{\mathrm{I}} =$ Nicht-A (A als Gebiet zu verstehen) $= ({}^m a + {}^x b + {}^y c)_{\mathrm{I}} = \text{ъ} - G\,{}^m a_{\mathrm{I}}\,{}^x b\,{}^y c - G\,{}^m a\,{}^x b_{\mathrm{I}}\,{}^y c - \ldots G\,{}^m a_{\mathrm{I}}\,{}^x b_{\mathrm{I}}\,{}^y c_2 \triangleright c_1$. Bei der Multiplication von A mit reinen Zahlen (Cardinalzahlen), etwa $n \times A$, ist jedoch auf die Multiplication von Strecken zurückzugreifen.

Individual-Namen. Zählbarkeit. Wir haben sub (69) die Bedeutung des Operators $p\times$ und $p\times'$ kennen gelernt. Noch allgemeiner bezeichne ich mit dem Operator $p\times,$, dass sich die Multiplication nur auf die Quantität mit beliebig veränderlicher Lage bezieht, also allgemein, für $a = x \rhd (x + 5)$, $3\times, (x \rhd (x + 5)) = x_1 \rhd (x_1 + 5) + x_2 \rhd (x_2 + 5) + x_3 \rhd (x_3 + 5)$ . . . . (151)

Der Ausdruck kann in besondern Fällen in e i n e neue Strecke übergehen, etwa $= x' \rhd (x' + 3 \times 5)$. Man kann dies andeuten durch $3\times . a$ . . . . (152)
In jedem Falle ist $Q\ 3 \times (x \rhd (x + 5)) = 3 \times Q\ (x \rhd (x + 5))$. (153)

Es ist im allgemeinen also $3\times, a = a' + a'' + a'''$, . . . (154)
so dass $Q\,3 \times a = 3 \times Q\,a$.

Wir haben unter (61) eine Strecke s eine 2-dimensionale Größe genannt, die nun, nachdem wir die Mittel dazu haben, auch als solche darstellbar ist. Bedeutet nämlich a den Anfangspunkt, e den Endpunkt, q die Quantität der Strecke, dann ist $s = x \rhd (x + 5)$ *gbm.* ${}^{a}x + {}^{q}5 = {}^{e}y + {}^{q}5$ *gbm.* ${}^{a}x + {}^{e}(x + 5) = {}^{a}(y - 5) + {}^{e}y$ . . . . (155)

$3\times$, ist dann $= 3\times, ({}^{a}x + {}^{q}5) = {}^{a}x', x'', x''' + {}^{q'=3\times q}15$. (156)

Der „Multiplicator", eigentlich der Operator $\times$, oder der Z ä h l e r eines Namens oder einer n-dim. Zahl macht also die unwesentlichen Merkmale zu n-deutigen, im allgemeinen nicht zusammenziehbaren, also n-dim. Größen. Die wesentlichen Merkmale bleiben auch nach einer ev. Multiplication unverändert, denn es ist beispielsweise $3 \times {}^{x}5 = {}^{3x}15 = {}^{x}5$; und es gibt im allgemeinen nur e i n e Dim. (q = Quantität, allgemeiner n = Anzahl), mit der der Multiplicator (Zähler) zusammenziehbar ist, und die, wenn sie nicht bereits im Namen enthalten ist, durch den Multiplicator selbst als n e u e Dim. hinzugefügt wird. Ich nenne sie die Zähldimension. Es ist also unter „$3 \times [{}^{x}5]$" zunächst zu verstehen $3\times, [{}^{x}5]$, und dieses $= {}^{q}3 + {}^{x}5 + \ldots$ resp. ${}^{n}3 + {}^{x}5 +$ . . . . (157)
oder $= [{}^{x}5]' + [{}^{x}5]'' + [{}^{x}5]'''$. In einer andern Form: „$3 \times A$" $= 3\times, A = ({}^{n}3) \circ A$ oder auch, wenn ich $n[A]$ zu einer n e u e n Dim.: (A) erhebe, $= {}^{(A)}3$ . . . . (158)

Z ä h l b a r sind nur Individual-Namen. Diese enthalten eine besondere Dim., die ich die individualisierende nenne und mit i bezeichne. Diese umfasst oft außer einer bestimmten Quantität eine b e s t i m m t e Form (f), wozu noch eine bestimmte Organisation (v) treten kann. (Das einfachste Maß einer Organisation oder Organisationsstufe ist die Anzahl der differenzierten Theile oder Organe). Bedeutet γ eine bestimmte, γ_I eine unbestimmte oder variable Zahl, so ist ein Individual-Name I auszudrücken durch $[{}^{i}\gamma] = [{}^{q}\xi + {}^{f}\eta + {}^{v}\vartheta + \ldots]$ . . . . (159)

Die Dim. q, auch f, ev. in Verbindung mit v u. a. Merkmalen, bedingen einzeln oder in ihrer Gesammtheit i d. h. die Individualität, welche ihrerseits die E i n h e i t der Zähldimension bestimmt. Ein Beispiel wird die Sache erläutern.

Bedeutet K „Kreis“, r „Radius“, so ist $K = [^{r}a]$, wozu als Definiendum $^{i}\gamma$ zu denken ist. „Drei Kreise“ $= 3\times, K = K' + K'' + K''' = [^{r}a]' + [^{r}a]'' + [^{r}a]''' = [^{r'}a'] + [^{r''}a''] + [^{r'''}a''']$. Für alle diese K gilt als Definiendum, das ev. hinzugefügt werden kann, derselbe Ausdruck: $i = f = {}^{(x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2}0$ *(Fig. 31.)*. Die Zähldimension $Z'Z = n$ kann immer so gewählt werden, dass $OO' = O'O'' = O''O''' = {}^{n}1$, also $OO''' = {}^{n}3$. Ich kann also, da n von i bedingt wird, ohne die Bedeutung zu ändern, auch schreiben $K = [^{r}a + {}_{n}1]$ und $3\times, K = [^{3\times,r}3\times, a + {}^{3\times\cdot n}3]$.

„Drei gleiche Kreise“ ist auszudrücken durch $(3\times, K)[r = a] = [^{r}a]'[^{r}a] + [^{r}a]''[^{r}a] + [^{r}a]'''[^{r}a]$, etwa $[^{p}p' + {}^{r}a] + [^{p}p'' + {}^{r}a] + [^{p}p''' + {}^{r}a]$ u. s. f.

Bei einem I ist selbstverständlich $n \times I$ immer als $n\times, I$ zu verstehen. $^{3\times\cdot r}3\times a$ würde einen neuen Kreis von 3-fachem Radius, also ein neues Gebilde von derselben Individualität i bedeuten. Auch $^{r'=3\times,r}(a' + a'' + a''')$ würde e i n e n Kreis vorstellen. Will man auch die Nicht-Zusammenziehbarkeit mehrerer Theildim. zu einem neuen Gebilde gleicher Individualität besonders bezeichnen, so kann man bei e i n e r Dim. etwa schreiben: $3\times_{,} r$, so dass $[3\times_{,} r]$ *gbm.* $3\times_{,}[r] = \times_{,} K$, (160) oder wegen der besondern Individualität des K auch $= 3\times, K = 3\times K$; denn $3\times K$, kann n i e zu einem neuen Gebilde d e r s e l b e n Individualität zusammengefasst werden, etwa $[3\times K] = K'$. Dagegen ist bei andern Individualitäten, beispielsweise bei Strecken S (und 1-dim. Größen) $3\times_{,} S$ nicht *gbm.* $3\times, S$, denn $[3\times, S] = 3\times . S$ kann wieder eine neue Strecke bilden, etwa S'.

Doch kann $3\times_{,} K$ zur Einheit einer n e u e n Individualität zusammengefasst werden, was man mit $[3\times_{,} K]$ bezeichnen kann (161) wobei die neue Individualität i', in unserm Falle *(Fig. 31.)*, gleich ist dem analytischen Ausdruck für 3 sich berührende Kreise. Auf die Art gelangen wir zu den S a m m e l n a m e n. Ist $n = \gamma$, eine bestimmte Zahl, so werden die Collectiva zu Individualnamen höherer Ordnung . . . 1.), bleibt $n = \gamma_1$, unbestimmt, so werden sie Stoffnamen höherer Ordnung . . . 2.). Beispiele: 1.) Wald, Regiment; 2.) Laub. Die erstern sind zählbar, die letztern nicht.

S t o f f n a m e n sind also „Concreta $\circ[^{i}\gamma_1]$“. Sie werden zählbar, wenn zu ihnen ein „individualisierender“ Name hinzugefügt wird. Diese letztern füllen eine Lücke in der herkömmlichen Eintheilung der Nomina aus. Bezeichnet man sie allgemein mit J und die Stoffnamen mit M,

so ist $J \circ M = I$. . . . . (162)
Beispiel: Ein Liter Wasser.

Nun stehen uns genug Mittel zur Verfügung, alle Stoffe, auch die chemisch zusammengesetzten, analytisch auszudrücken. Ist g = Atomgewicht, so ist $H = [{}^{g}1]$, $O = [{}^{g}16]$, und da ich allgemein $[{}^{x}a + {}^{y}3]$ zu einer neuen Dim.: ${}^{(x)}3$ resp. ${}^{(y)}a$ zusammenfassen kann, so ist „Wasser", $= H_2O$, auszudrücken durch: $[{}^{2}\times{}^{,g}2] + [{}^{g}16] = [{}^{g}1 + {}^{n}2] = [{}^{g}16 + {}^{n}1] = {}^{(H)}2 + {}^{(O)}1 = {}^{(H)}2 \circ {}^{(O)}1$, ... (163)
womit die chemischen Formeln mit unserer Ausdrucksweise vermittelt erscheinen.

Die Abstracta sind eindimensionale Zahlen: Eigenschaften, Zustände, oder Zahlen von wenigen Dim.: Verhältnisse, oder Mutationen solcher: Handlungen. Ich bezeichne sie gewöhnlich mit einem kleinen Buchstaben. Beispiele: Höhe, Länge, Krankheit; ist g = grün, so ist $g_I \therefore g$ = das Grünen, Grünwerden, s = Sein, $s_I \therefore s$ das Werden, $s \therefore s_I$ das Vergehen, k Krankheit, $k_I \therefore k$ Erkranken, $k \therefore k_I$ Genesen, h haben, $h_I \therefore h$ Erhalten, $h \therefore h_I$ Verlieren, $h \therefore h$ Behalten, $s \therefore s$ Bleiben u. s. f. (164)

Auch bei den Abstractis gibt es Individual- und Nicht-Individualnamen (den Stoffnamen entsprechend). Beispiel: der Sprung, das Springen. Die erstern sind zählbar, die letztern nicht. Die individualisierenden Namen sind hier Ausdrücke für eine bestimmte Zeitdauer. Beispiel: 3 Jahre Ehrverlust.

Die Adjectiva bezeichnen nicht die Eigenschaften, wie es in den herkömmlichen Grammatiken gewöhnlich heißt, sondern sie sind nur Definientia zu einem unbestimmten Definiendum, das wieder concret oder abstract sein kann. (Es ist also nicht nöthig, eine „Verschiebung" von Kategorien anzunehmen). Ist e irgendeine Eigenschaft, so ist das Adjectiv auszudrücken durch: $X[e] = [e]'$ . . . . (164)
Verbindet man mit X noch die Dim. des grammatischen Geschlechtes: $g = \langle m, f, n\rangle$, oder des natürlichen Geschlechtes: $g' = m', f', n'$ $(= m'_I . f'_I)$, und setzt $X[m] = M$, $X[f] = F$, $X[n] = N$, $X[m' + f'] = P$, Person im grammatischen Sinne, $X[n'] = R$ (res) so sind dadurch die Ausdrücke für die Motion der Adjectiva gewonnen: $M[e]$, $F[e]$, u. s. f. (165)

Das Umgekehrte, ein bestimmtes Definiendum mit einem unbestimmten Definiens, ist der Ausdruck eines relativen Namens. Beispiele: Sohn, Vater, $\arcsin x = a[\circ s = x]$, $\sin\operatorname{arctang} x = s[\circ t = x]$ u. s. f. (166)

Haben wir in einer Association, Gleichung, Ungleichung u. a.: $a \circ b_0 \circ c$ . ., mit b_0 das Definiendum bezeichnet, so bedeutet consequenterweise dasselbe Zeichen in einem Definiens das directe Argument. Beispiele: $[n-2, (n-1)._0, n, n+1]$ bedeutet $[n'-1, n', n'+1, n'+2]$, und $[y = x._0 + 4] = [x = y - 4]$ u. s. f. . . . . (167)

Darnach ist ein Comparativ auszudrücken durch $[e._0 > e']$, und ein Superlativ durch $[e._0 > e', e'', e''', \ldots]$ . . . . (168)

Vom Verbum infinitum ist der Infinitiv ein Nomen abstractum, zu dem als weitere Bestimmungen die Zeit (t), ev. auch die Diathesis (d) und die Construction eines Verb. fin. dazu kommt. Das Particip ist ein Verbaladjectiv. Der allgemeine Ausdruck des Infinitivs ist daher $(a + {}_t b + {}_d c + \ldots) = a'$, und des entsprechenden Particips: $X[a']$ (169)

Wie die Pronomina zu behandeln sind, mag durch einige Beispiele nur angedeutet werden. Ist e die Entfernung zwischen dem Beobachter (dem Redenden) und einem Objecte, und ist $e' > e''$, so ist $X[e'] = d \ldots$ dieser, $X[e''] = j \ldots$ jener, $d_I =$ die andern.

C o m p l e x i o n e n v o n Q u a n t i t ä t e n u n d G e b i e t e n. Man kann den Ausdruck $Q\,a$ (Quantität des Gebietes a) auch auffassen als eine Größe mit bestimmter Quantität und unbestimmten Gebiete; also $Q\,a = Q\,a . G\,x$. Dann ist $Q\,a\;Ga = Ga = a$; dagegen bedeutet $Q\,a\;G\,b$ *(Fig. 32.)* ein Gebiet von der Quantität a, — wenn $Q\,a < Q\,b$, irgendwo innerhalb des bestimmten Gebietes b, ... (170)
— wenn $Qa \geqq Qb$, $Qa\,Gb = Gb$. Es ist nun möglich unter der Bedingung, dass $Qa \leqq Qb$, die Complexion in ein Product zu verwandeln, denn $Qa . Gb$ ist offenbar $= \frac{Qa}{Gb} \times' Gb = \alpha \times' b$ . . . . (171)
${}^{\alpha}1 = \pi$ bedeutet dann „alle" und ist $= (a_1 + a_2 + \ldots a_n)._0 = (n' = n)[n]$, ${}^{\alpha}m \circ (m > 0) = \mu =$ „einige" $= (a_1 + a_2 + \ldots a_m)._0 + a_{m+1} + \ldots a_n = (n' = m)[n]$, ${}^{\alpha}0 = \varkappa =$ „keiner" $= 0._0 + a$ . . . . (172)

$Q\,1 . G\,x = \iota =$ „irgendeiner, einer", $\iota . d_I$ bedeutet dann „ein anderer". Ist $x =$ „er, irgendeiner", dann ist auch $\iota . x_I =$ ein anderer, $(\iota . x_I)_I =$ nicht ein anderer = selber, ipse, und $x . (\iota\,x_I)_I =$ „er selber". Es wird dadurch x besonders hevorgehoben. Dagegen $(x + \iota\,x_I) . Q\,2 =$ er u n d ein anderer, $(x + \iota\,x_I) . Q\,1 =$ er o d e r ein anderer, $((x + \iota\,x_I) . Q\,2)_I =$ „nicht: er u n d ein anderer", und $x . ((x + \iota\,x_I)\,Q\,2)_I =$ er allein, solus, u. s. f. . . . . (173)

Dadurch sind zugleich einige Conjunctionen und namentlich die Frage erledigt, wann „+" als „und" und wann als „oder" zu lesen ist.

Ich habe bereits bemerkt, dass in „$[a._0, b, c]$" a das directe Argument bedeutet, d. h. $[a._0, b, c] = [a = \chi(b, c)]$. Ist zum obigen Definiens als Definiendum etwa x zu denken, so ist nach (139) $x[a = \chi(b, c)] = x[= \varphi(a) = \varphi\,\chi(b, c)]$, und schreibt man für „$\varphi(a) = \varphi(a._0)$" $a_{(0)}$, so ist klar, dass damit das in einem Definiens enthaltene Definiendum bezeichnet wird.

Der Ausdruck eignet sich deshalb zur Darstellung der relativen Pronomina, wenn man mit dem Buchstaben τ in $[\tau_{(0)}]$ zugleich den Sinn verbindet, dass in „$[x = \tau_{(0)}] = \chi^0(\tau) = \tau]$" φ die specielle Function χ^0

bedeute. Es ist dann immer $x[x] = x$, d. h. eine Größe, durch sich selbst definiert, bleibt sich selbst gleich. Es ist also in „$x[\psi(a, b, \tau_{(0)1} \ldots)]$“ $\tau = x$, in „$y[\psi'(c, \tau_{(0)}, d, \ldots)]$“ $\tau = y$, in „$z[\psi''(\tau_{(0)}, e \ldots)]$“ $\tau = z$ . . . d. h. ein und derselbe Name (beispielsweise im Lateinischen qui, quæ, quod) bezeichnet immer etwas Verschiedenes, immer das jeweilige Definiendum.

Das Verbum finitum ist ein Satz. Die Adverbia (die relativen *gbm.* den subordinierenden Conjunctionen, die demonstrativen *gbm.* coord. Conj.) sind Casus-Verhältnisse (meistens von Pronominal-Begriffen), die Präpositional-Ausdrücke sind umschriebene Casus obliqui; alles das siehe unter E!

Von den Cardinalzahlen war schon die Rede, es erübrigt nur noch ein Wort über die Ordnungszahlen zu sagen. Ich beginne mit einem speciellen Beispiele: „Das 3^{te} (= dritte) Jahr“. Da der Ausdruck „3^{te}“ dadurch entstanden zu denken ist, dass zu „3“ eine Bezeichnung, das Suffix „te“, dazutritt, so ist 3 nach (143) als Argument einer Function aufzufassen, und die Functionsgröße oder das Definiendum ist das Jahr, also eine Einheit. Ich kann also dafür screiben $J[3] =$ „das Jahr drei“. Die Ordnungszahl hat also den Wert eines Index. Lässt sich aus den durch sie bestimmten Individuen (in unsrem Falle = Jahre) eine continuierliche Dim. zusammensetzen, so ist das Individuum eine Strecke. Die dafür in der Geometrie übliche Bezeichnung sind bekanntlich, da eine Strecke durch 2 Punkte definiert wird, 2 Punkte: der Anfangs- und der Endpunkt, beispielsweise: Strecke AB. Um diesen Ausdruck mit unserm analytischen sowie mit dem grammatischen zu vermitteln, ist zu schreiben: Strecke $[A, B]'$, in unserm Falle: $J[2, 3]'$ (vgl. die Zahlenlinie), allgemein: „das n^{te} Jahr“ $= J[n-1, n]'$, oder das directe Argument n nur einmal gesetzt, $= J[n]$, wie oben. (174)

Alle diese Ausdrücke sind also einander äquivalent. Auf deductivem Wege erhält man sehr einfah für $n = 0, n = -2$, u. s. w. den Begriff der „nullte“ sowie den der negativen Ordnungszahlen. Das „nullte“ Jahr $= J[0] = J[-1, 0]'$, und das „minus zwei“-te $= J[-2] = [-3, -2]'$, welche Zählungsart bekanntlich in der Astronomie gebräuchlich ist. Die Grammatik kennt dagegen nur positive Zahlen. Die Sprache ändert deshalb für negative Ordnungszahlen die Richtung des Zählens und bezeichnet diese Aenderung besonders durch Ausdrücke wie: „vor Christi Geburt“, „unter Null“ u. a. Das „erste Jahr vor Chr. Geb.“ ist also *gbm.* $J[-1, 0]'$, und allgemein: „das n^{te} Jahr vor Chr. Geb.“ $= J[n]'' = J[-n, -(n-1)]' = J[-(n-1)]$ . . . . (175)
Das „erste Jahrzehnt“ $= J[0, 10]' = J[0 \times 10, 1 \times 10]' = 10 \times J[0, 1]' = D[0, 1]'$ und enthält die Jahre „das erste“ $\triangleright$ „zehnte“ $= J[0, 1]' \triangleright \triangleright J[9, 10]'$. Das „erste Jahrhundert“ $= J[0, 100]' = J[0 \times 100, 1 \times 100]'$

$= H[0, 1]'$ und umfasst die Jahre: $J[0, 1]' \triangleright J[99, 100]'$. Allgemein enthält die Strecke $[a, b]'$ die Einheiten $[a, a + 1]' \triangleright [b-1, b]'$. (176) Das „zwanzigste Jahrhundert" ist demnach $= H[19, 20]' = J[1900, 2000]'$ und umfasst die Jahre: $J[1900, 1901]' \triangleright J[1999, 2000]'$ d. h. das 1001te bis incl. 2000ste Jahr.

Wie selbstverständlich auch einem die Resultate der vorstehenden Erörterung dünken mögen, sie sind es nicht, wie die in Bezug auf ihre Endergebnisse allerdings recht absonderliche Zeitungspolemik über den Beginn des 20. Jahrhunderts beweist.

E. Urtheile. Sätze.

Da die verschiedenen Arten der Sätze (Frage-, Befehlsätze), was ihre Form betrifft, auf Behauptungssätze zurückgeführt werden können („thue das!" *gbm.* „ich befehle dir, das zu thun", „hast du das gethan?" *gbm.* „ich frage, ob du das gethan hast"), soll hier nur von diesen die Rede sein. Ich definiere positiv und ohne Anwendung von Disjunctionen ein Urtheil oder einen Satz (= Hauptsatz) als Ausdruck des Abschlusses eines (einactigen) Vergleichens (Messens). Führt dieses Vergleichen zu einem Resultat (g), so erleidet der jeweilige Wissensinhalt (h) des Vergleichenden eine Aenderung und umgekehrt, jede einactige Veränderung des Wissensinhaltes geschieht durch ein Urtheil. Diese Veränderung $h \therefore h'$ ist entweder *gbm.* Bereicherung, $h' = h + p$ (positive Behauptungssätze) oder mit einer Verminderung des h, $h' = h - p$, (negative Sätze), oder er bleibt unverändert, erfährt also eine Bestätigung, $h' = h$, d. i. $h \therefore h$. Ist das Vergleichen resultatlos, so ist der Ausdruck desselben ein Fragesatz, $h \therefore (h + x)$ . . . . (177)

Der Ausdruck eines Satzes ist demnach als Resultat eines einactigen Vergleichens eine (nicht mehrere, u. zw. eine nicht eingeklammerte) Gleichung, resp. ein mit einer Gleichung äquivalenter Ausdruck.

Der Begriff, von dem man beim Vergleichen (Messen) ausgeht, also das zu Vergleichende, zu Messende, ist das Subject, also durch $a._0$ zu bezeichnen. Der Begriff, mit dem man den Subjectsbegriff vergleicht (misst), ist das Prädicativ, etwa b. Man kann demnach einen Satz auch als Complexion mit einem Anfangsgliede bezeichnen und schreiben $a._0 \circ b$ *gbm.* $a = \varphi(b)$ . . . . (178)
Alles Uebrige einer Gleichung außer dem Subject ist das Prädicat (im weitern Sinne d. h. Präd. mit oder ohne Definientia). Der Ausdruck „$= \varphi(b)$" *gbm.* „$\circ b$" . . . . (179)

ist also Prädicat. Dieses ist entweder ein Wort, dann ist es das Verb. fin. irgendeines selbständigen Zeitwortes. Oder es besteht aus der „Copula + Prädicativ"; dann ist die Copula das Verb. fin. eines „copulativen" Zeitwortes. Es sind das Zeitwörter, welche irgend ein Sein bedeuten, etwa s (= sein), $s_1 \therefore s$ = werden, $s \therefore s$ = bleiben, s [N] = in Bezug auf den Namen sein = genannt werden, u. s. f.

Beispiele: „Der Berg ist hoch" = $B ._0 \circ h$. Nach (148) ist $B = {}^xa + {}^yb + \ldots {}^z\xi$, „hoch" h nach (164) = $X[h] = {}^x\xi' + {}^y\xi'' + \ldots {}^zh$;. Daraus $B = X[h]$ *gbm.* ${}^xa + {}^yb + \ldots {}^z\xi = {}^x\xi' + {}^y\xi'' + \ldots {}^zh$, woraus nach (104) die Gleichungen folgen: $(a = \xi', b = \xi'')$, $\xi = h$. Aber auch aus $B \circ h = ({}^xa + {}^yb + \ldots {}^zh) \circ ({}^x\xi' + {}^y\xi'' + \ldots {}^zh)$ würde folgen: ${}^xa + {}^yb + \ldots {}^zh$ . . . . (180)

Dieser Operation auf dem Papiere entspricht genau ein adäquater psychischer Vorgang, die Apperception des h an die bereits bekannten a, b, . . ., und das Resultat derselben ist ein neuer Begriff, nämlich ${}^xa + {}^yb + \ldots {}^zh$. Ist τ die Zeit, die seit einer Apperception verflossen ist, so könnte man zu einer nicht eingeklammerten Gleichung, also einem Satz als Definiens hinzufügen $[\tau = 0]$. Das Definiens $[{}^\tau p]$, p eine positive Größe, würde einen Hauptsatz, d. i. eine Gleichung $(a = \varphi(b))[{}^\tau p]$ zu einem Begriff, d. h. einem Nebensatz degradieren. Denn der Nebensatz ist nur ein Theil eines Satzes, einem Begriffe äquivalent, und ist einer eingeklammerten Gleichung gleich zu setzen, also $(a = \varphi(b))[{}^\tau p]$ $= [a = \varphi(b)]$ . . . . (181)

Eine unbestimmte Größe x eines fragenden Hauptsatzes (= Pronomen oder Adverb. interrogat.) wird durch Einklammerung zu einem Pronom. resp. Adverb. relativum, und da man das Definiens $[\tau]$ anstatt zur ganzen Gleichung auch zu einem Theile derselben hinzufügen kann, so verhält sich Interrogativum $\circ'$ Relativum $= x[{}^\tau 0] \circ' x[{}^\tau p]$. . (882)

Während die meisten Sprachen dasselbe Wort als Interrog. und Relat. gebrauchen, wird beispielsweise im Neuslovenischen das Definiens $[{}^\tau p]$ durch —r (= altsloven. že) in Wörtern wie: kdo-r, kako-r u. a ausgedrückt.

Das Satzgebiet und die Satzrealität. Das Gebiet eines Satzes ist das Gebiet seines Subjectes, also $G(a = \varphi(b)) = Ga$; . . . . (183) denn das Maß richtet sich nach dem zu Messenden, nicht umgekehrt, und das Gebiet des Prädicativs wird nur soweit bestimmt, als das Subjectsgebiet reicht. Vgl. das unter (93) Gesagte! Hebt man durch gestrichelte Linien das Subjectsgebiet (= ϱ) hervor, so ist $(\varrho . a) ._0 \circ b$ *(Fig. 30.) gbm.* „einige a sind b"; — es kann also das Gebiet des Subjectes kleiner sein, als das Gebiet des Subject-Allgemeinbegriffs, $\varrho < a$, — und $(\varrho . a) ._0 \circ b$ *(Fig. 32.) gbm.* „alle a sind b". In beiden Fällen ist das Gebiet des Satzes

ϱ ab $= \varrho =$ dem Gebiete des Subjectes ϱ a. Im zweiten Falle ist ϱ a $=$ π a $=$ a nach (172), also ab $=$ a übereinstimmend mit (7), im ersten Falle ist ϱ a $= \mu$ a $= \mu$ ab > 0.

Dabei wird über die Existenz oder Nicht-Existenz des in den Figu-32, und 33 schraffierten Gebietes nichts ausgesagt, dieses Gebiet kann auch $= 0$ sein.

Dies wird von den Gegnern der exacten Methode entweder vollständig außeracht gelassen oder nicht verstanden, die, um die Unzulänglichkeit (!) graphischer Behelfe darzuthun, behaupten, das Diagramm des Satzes „der Himmel ist blau“ 1.), müsse gelesen werden: „Der Himmel gehört zu den blauen Dingen“ 2.). Erstens kann der Satz $H ._0 \circ b$ ebensogut gelesen werden: „Der Himmel hat (das Merkmal der) Bläue; denn die im Ausdruck angedeutete Projection der Dim. des b auf H braucht nicht ausgeführt zu werden; thäte man das, so müsste man schreiben: $H ._0 \circ X [b]$ oder $H = X [b]$; zweitens bedeutet $H = X [b]$ durchaus nicht Geb. $H < G (b)$, was der Satz 2.) voraussetzt, sondern vielmehr Geb. $H \lesseqgtr G (b)$.

Die Satzrealität (die sogenannte Qualität) ist die durch Bejahung und Verneinung des Satzes festgelegte Dim. und ist gleich dem Quotienten: $\frac{ab}{a} = \frac{\varrho}{a} = w$. Vgl. (93). Dieser Quotient kann bald zum Subject gezogen werden, bald als Qualität mit dem Prädicate verbunden sein. Im erstern Falle ist (für den Fall, dass dieser Quotient von 1 verschieden, = einem echten Bruche) das Satzgebiet kleiner als das Gebiet des Subjects-Allgemeinbegriffes, $\varrho < a$ *(Fig. 33.)*, und die Realität $= 1$, d. h. „es ist gewiss, dass einige „a“ b sind“; im letztern Falle ist das Satzgebiet mit dem Subjects-Allgemeinbegriffe identisch, $\varrho = a$, und dafür die Realität (Wahrscheinlichkeit) ein echter Bruch, d. h. „a ist wahrscheinlich b“ oder, wenn man den Begriff „wahrscheinlich“ zum Verb. fin. erhebt, „a kann b sein“ *(Fig. 34.)* . . . . . . (184)

Bezeichnet man die Satzrealität mit ε, so ist beispielsweise der Satz: Ἐγὼ τυγχάνω ποιῶν, wenn die den Wörtern zugrunde liegenden Begriffe der Reihe nach $= E$, t, p gesetzt werden, im Griechischen zu schreiben: $E ._0 \circ (t\, \varepsilon)\, p$, im Deutschen: $E ._0\, \varepsilon \circ t (p\, \varepsilon)$ .. „ich thue etwas zufällig“. (185)

Satzbetonung. Ich schreibe für $\varepsilon = 1$ .. „ist“: ϑ und für $\varepsilon = 0$ ... „ist nicht“: ϑ_1, für ein betontes Satzglied x! und trenne (resp. verbinde) Subject und Prädicativ, da letzteres durch ϑ genügend gekennzeichnet ist, anstatt durch das Complexions- und Nullpunktsymbol einfach durch einen verticalen Strich; der Sinn der Satzbetonung kann dann aus folgenden Gleichungen entnommen werden: $\varrho\, a \,|\, \vartheta\, b$ *gbm.* $\varrho\, ab = \varrho$, $\varrho\, a \,|\, \vartheta_1\, b$ *gbm.* $\varrho\, ab_1 = \varrho$, $\varrho\, a \,|\, \vartheta_1\, b . c$ *gbm.* $\varrho\, a\, (bc)_1 = \varrho = \varrho\, a\, (b_1\, c + bc_1 +$

$b_1\, c_1)$, $\varrho\, a \mid \vartheta_1\, b!c$ *gbm.* $\varrho\, a\, b_1\, c = \varrho$, $\varrho\, a \mid \vartheta_1\, bc!$ *gbm.* $\varrho\, a\, b\, c_1 = \varrho$, $\varrho\, a \mid \vartheta_1\, b!c!d$ *gbm.* $\varrho\, a\, b_1\, e_1\, d = \varrho$, $\varrho\, a \mid \vartheta\, b!c$ *gbm.* $\varrho\, a \mid \vartheta_1\, b_1\, c$ u. s. f. . (186)

Existential-Sätze und die subjectlosen Sätze. Wir haben oben, Formel (82), einen Existentialsatz: „es gibt a" mit $a\,\epsilon = 0'$ ... oder in abgekürzter Form a d. h. Geb. $a > 0$ bezeichnet. Während also der Satz $ab = a$ auch die Möglichkeit $a = 0$ einschließt und, in hypothetischer Form gelesen, „wenn a ist, so ist b" *gb.* ist mit „alle a sind b", bedeutet dagegen ein Existentialsatz immer: $a > 0$. Ein Blick auf die *Fig. 2.* zeigt uns die Richtigkeit des Modus ponens und des Modus tollens der hypothetischen Schlüsse als unmittelbar einleuchtend. Denn es ist klar, dass, wenn $a > 0$, auch $b > 0$ sein muss, und umgekehrt, ist $b = 0$, so muss auch $a = 0$ sein. Was den Inhalt betrifft, sind die Existential-, die hypothetischen und kategorischen Sätze voneinander nicht verschieden, sondern nur der Form nach, und es ist unbegreiflich, wie einige Logiker dazu kommen konnten, die Existentialsätze (subjectlosen Sätze) nur als Sätze, nicht als Urtheile gelten zu lassen, da sich doch jeder Existenzialsatz in einen äquivalenten kategorischen, und jeder kategorische in einen äquivalenten hypothetischen verwandeln lässt und umgekehrt. „Alle A sind B" ist *gbm.* „Wenn A ist, so ist B" und *gbm.* „Es ist der Fall, dass alle „A" B sind", oder „Es ist der Fall, dass, wenn A ist, dann auch B ist". „Es regnet" *gbm.* „der Regen ist wirklich" u. s. f. Es entsteht nun die Frage, wie die verschiedenen grammatischen Formen eines Satzgebildes auch analytisch auszudrücken sind. Antwort: Der hypothetische Nebensatz ist als Satzglied eine Function u. zw. eine Function der Satzrealität. Der Satz: „Wenn „a" b ist, so ist „c" d" ist also auszudrücken durch: $\varphi\,(\epsilon\,[a\,._0\circ b\,\epsilon]) = \epsilon'\,[c\,._0\circ d\,\epsilon']$ oder $c\,._0\circ d\,\epsilon'\,[\circ\,\epsilon = \varphi\,(\epsilon\,[a\,._0\circ b\,\epsilon])]$, ... (187)
der Satz „Es ist der Fall, dass „a" b ist" $= \epsilon\,[a\,._0\circ b] = 1$, und „Es ist der Fall, dass a ist" = „Es gibt a" $= \epsilon\,[a > 0] = 1$ *gbm.* $a = 0'$ *gbm.* $a > 0$, u. s. f. . . . . (188)

Immer ist ein Urtheil äquivalent mit einer (nicht eingeklammerten) Gleichung. Das lateinische „pluit" (ein subjectloser Satz) $= p \circ {}^{\epsilon}1$, nach (185) ein Verb. finitum ohne Subject. Zum deutschen „Es regnet" ist ъ als Subject hinzuzufügen, also ъ $\mid p\, {}^{\epsilon}1$; den offenbar ist das Gebiet des deutschen „es" ganz unbestimmt, also = ъ. Das stimmt mit (34) überein, wonach $p\, {}^{\epsilon}1 =$ ъ $p\, {}^{\epsilon}1$, sowie mit der Thatsache, dass die „subjectlosen" Sätze zumeist Witterungsverhältnisse betreffen, in welchen Fällen ъ (vgl. Anmerk. S. VIII) das ganze jeweilige Gesichtsfeld vorstellt.

Begriffsrealität. Stellt nun $a\,\epsilon$ oder $a\,\vartheta$ resp. $a\,\vartheta_1$ ein Verb. fin. oder einen Satz vor, so wird mit $a\,[\vartheta]$ resp. $a\,[\vartheta_1]$ offenbar die Realität eines Begriffes ausgedrückt, und $a\,[\vartheta] = a$, $a\,[\vartheta_1] = a_1$ . . . . (189)

Ist $x \equiv \xi \pmod 2$, $y = \eta \pmod 2$, $z = \zeta \pmod 2$ …, und schreibt man für $a[{}^{\vartheta}\xi] = a_x$ u. s. f., so können wir für $ab + a_\iota b + ab_\iota + a_\iota b_\iota$ viel kürzer schreiben: $a_x b_y$. Dann bedeutet $a_x b_x = ab + a_\iota b_\iota$ die Aequipollenz der Begriffe, $a_x b_{x+\iota}$ den contradictorischen und $a_x b_y \circ [1 = x(1-y) + (1-y)(1-x) + y(1-x)]$ den conträren Gegensatz. (190) Daraus $xy = 0$, also $x = \frac{0}{y}$, $y = \frac{0}{x}$, d. h. für $y = 1$ wird $x = 0$ und für $y = 0$, $x = \frac{0}{0}$ d. i. 0 oder 1.

Der contradictorische Gegensatz könnte auch dargestellt werden durch $a_x b_y \circ [1 = x(1-y) + y(1-x)]$ u. s. w. Ueberhaupt sind unter den vorstehenden Modificationen alle George Boole'schen Formeln anwendbar.

Satzglieder. Casuslehre. Alle Casus sind als Satzglieder Functionen der Nomina, u. zw. ist, wenn man mit A^n, A^g, A^d, A^a, A^l, … der Reihe nach den Nominativ, Genetiv, Dativ, Accusativ, Local, … eines Nomens A bezeichnet, der Nominativ als Casus des Subjectes die Nullfunction, d. h. $A^n = \varphi^0(A) = A$. Der Genetiv ist Definiens eines Substantivs, also $A^g = S[\circ A]$, die Bedeutung des Dativs und Accusativs ist aus nachstehenden Erwägungen ersichtlich.

$A \circ B$ kann bedeuten „A hat B" oder „B hat A". Den letztern Satz allein kann man durch $B \circ [A]$ ausdrücken. $B \circ [A] \therefore C \circ [A] = (B \therefore C) \circ [A]$ bedeutet dann offenbar den Uebergang des A aus dem Besitze des B in den Besitz des C. Ist u die durch das Subject und das directe Object festgelegte Dim., eine Art Causalitäts-Dim., so kann man auch schreiben: $B^n = B[u = 0]$, $A^a = A[u = 1]$, und wenn $t =$ Zeit, so unterscheidet sich der Nominativ vom Dativ, wie folgt:

$B^n = B[u = 0, t = 0]'$, $C^d = C[u = 0, t = 1]'$ . . . . . . (191)

Verlegte man den Anfangspunkt von B nach A, so würde dies der Umwandlung des Activs ins Passiv gleichkommen. Man würde dann erhalten: $A[u = 0]$, und $B[u = -1]$, dieses letztere als Präpositionalausdruck zu lesen: „von B" . . . . (192)

Andere Präpositional-Ausdrücke wurden bereits sub (142) behandelt. Noch einige Beispiele: „Nach A" bedeutet eine Bewegung $= l_m \therefore l_n[n = A]$, „von A" $= l_m \therefore l_n[m = A]$, „durch A" $= l_m \therefore l_n \therefore l_p[n = A]$ u. s. f. (193)

Schriebe man statt „$l_m \therefore l_n$" $l_{n-1} \therefore l_n$ d. h. würde n zum directen Argument, so würde $l_{n-1} \therefore l_n$ das latainische „petere" bedeuten, und $[n = A] = A^a$. Liest man $l_m \therefore l_n \therefore l_p$ „ich wandere", so ist $(l_m \therefore l_n \therefore l_p)[n = A]$ *gbm.* „durch A", und $(l_m \therefore l_n \therefore l_p) \circ (l_m \therefore l_n \therefore l_p)[n = A] = (l_m \therefore l_n \therefore l_p)^{(2)}[n = A] =$ „ich wandere durch A", dagegen $l_{n-1} \therefore l_n \therefore l_{n+1} = [m = n - 1, p = n + 1] . (l_m \therefore l_n \therefore l_p) =$ „ich durchwandere", und $[n = A] =$ directes Object. . . . . (194)

„In Bezug auf A", $= [T[B_{-0}] = A]$. . . . . (195), wenn $T =$ Theil, und B_{-0} in Einklammerungen das absolute Definiendum bedeutet, d. h. $[a, b_{-0}, c\,..] = b\,[a, b, c\,...]$, während $[a, b_{\cdot 0}, c\,...] = x\,[b = \varphi\,(a, c, \ldots)]$ . . . . (196)

So wie die Glieder eines Satzes eine (einer Gleichung äquivalente) Complexion bilden, so bilden die Sätze einer Abhandlung oder eines ganzen wissenschaftlichen Systems als Glieder höherer Ordnung selbst wieder eine vielgliedrige Complexion, denn sie sollen ja alle zugleich giltig sein. Immer aber ist ein Satz nur einer Gleichung aequivalent und das Anfangsglied der jeweiligen Complexion ist das Subject. Darnach ist Dr. Stöhr's*) Darstellung des Satzes: „Ein Vogel singt auf einem Baume" (S. 65) in folgender Weise richtigzustellen.

Dr. Stöhr setzt a^1 = Vogel, a^2 = Vorgang des Singens, a^3 = Baum, a^4 = Wirkliches, a^5 = jetzt, a^6 = hier, und schreibt $i^4\,a^1 * a^2 * o^{44}\,a^3 * a^4 * a^5 * a^6$, was in unsere Schreibweise etwa so zu transscribieren wäre: $\varphi\,(a^1) = a^2 = \chi\,(a^3) = \psi'\,(a^4) = \psi''\,(a^5) = \psi'''\,(a^6)$. Offenbar ist der Ausdruck fünf Sätzen äquivalent. Um den Satz „Ein Vogel singt auf einem Baume" in exacter Weise darzustellen, ist die vorstehende Gleichung mit φ^{-1} zu multiplicieren und die Gleichungen bis auf eine einzuklammern, wodurch sie zu Definientien des Prädicates werden, d. i. wegen $\varphi^{-1}\,\varphi\,(a^1) = \varphi^0\,(a^1) = a^1$:

$a^1 \underbrace{= \varphi^{-1}\,(a^2)}\,.\,[= \varphi^{-1}\,\chi\,(a^3)]\,.\,[= \varphi^{-1}\,\psi'\,(a^4)]\,.\,[= \varphi^{-1}\,\psi''\,(a^5)]\,.\,[= \varphi^{-1}\,\psi'''\,(a^6)]$ . . . . (197)

F. System der Begriffe. Variation grammatischer Ausdrücke.

Die im vorstehenden entwickelten Bezeichnungsweisen ermöglichen es, aus wenigen Elementen (constit. Dim.) ein ganzes System von Begriffen abzuleiten. Ich beschränke mich auf einige wenige Beispiele. Bedeutet w den Willen des Stärkern, Befehlenden, und v den Willen des Schwächern, Gehorchenden, und g den Gegenstand des v, so ist $[w_{(0)}\,g]$ = Prädicativ des Satzes: „Ich will das thun" *gbm.* $[w_{I(0)}\,g_I]$ = Präd. des Satzes (ich will es nicht unterlassen) $= [w_{x(0)}\,g_{x\cdot}]$.
$[w_{(0)}\,v]$ ist dann = erlauben, $[w\,.\,v_{(0)}]$ = dürfen, $[w_{(0)}\,v_I]$ = befehlen, $[w\,v_{I(0)}]$ = müssen, $[w_{I(0)}\,v]$ = verbieten, $[w_I\,v_{(0)}]$ = nicht dürfen, $[w_{I(0)}\,v_I]$ = erlassen, $[w_I\,v_{I(0)}]$ nicht müssen, u. s. f. . . . . (198).

Dabei ist, wenn d = dürfen, m = müssen, $w_x\,v_y\,g_z = d_p\,g_q = m_r\,g_s$, u. s. f., wobei p und q, resp. r und s Functionen von x, y, z bedeuten.

Das Verhältnis dieser Realitäts-Indices wird aus folgenden Gleichungen klar, die natürlich nur in Bezug auf die Negation giltig und

*) Dr. Adolf Stöhr, Algebra der Grammatik. Ein Beitrag zur Philosophie der Formenlehre und Syntax. Leipzig und Wien. 1898.

deutbar sind, wobei n = nicht = $n \times n \times n = n^3 = n^5 = \ldots$, und $n^2 = 1 = n^4 = n^6 = \ldots$

1.) $\frac{w}{g} + \frac{v}{g}$ = ich will das, was er will; $= \frac{w+v}{g}$ = ich erlaube es, er darf es thun, $= \frac{nw+nv}{ng}$ = ich erlasse das Nicht-Thun, er muss es nicht unterlassen. 2.) $\frac{nw+v}{g}$ = ich will nicht, was er will; ich verbiete das Thun, er darf es nicht thun, $= \frac{n \times n \times w + nv}{ng} = \frac{w+nv}{ng}$ = ich befehle, es zu unterlassen; er muss es unterlassen. 3.) $\frac{w+nv}{g}$ = ich befehle, es zu thun; er muss es thun $= \frac{nw+v}{ng}$ = ich verbiete, es zuunterlassen; er darf es nicht unterlassen. 4.) $\frac{nw+nv}{g}$ = ich erlasse das Thun, er muss es nicht thun, $= \frac{w+v}{ng}$ = ich erlaube das Unterlassen, er darf es unterlassen . . . . (199)

Das lateinische „legendum est“ (= man muss lesen) ist zu schreiben: $\frac{w+v(0)}{1}$, und „non est legendum“ $= n . \frac{w+nv(0)}{1} = \frac{nw+n \times nv}{1} = \frac{nw+v}{1}$ = „man darf nicht lesen“, u. s. f. . . . . (200)

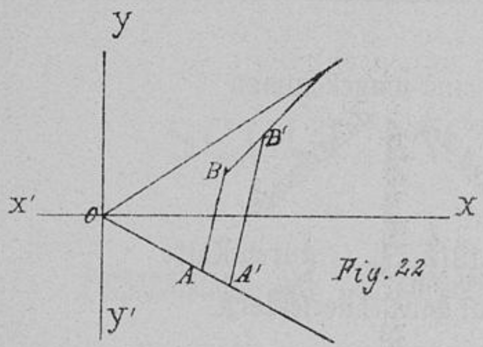
Die Rechnung mit grammatisch-analytischen Ausdrücken besteht hauptsächlich in der Variation derselben. Eine eingehendere Ausführung dieser Lehre hätte folgende Capitel zu umfassen:

1. Verlegung des Coordinaten-Anfangspunktes (Transformation der Coordinaten), wobei die Ausdrücke wechseln, das Gebilde unverändert bleibt. Ein specieller Fall dieser Transformationen ist die Verwandlung des Activs ins Passiv und umgekehrt.

Schema: $a ._0 \circ b, \circ c \circ d \circ \ldots \because a \circ b, \circ c_0 \circ d \circ \ldots$ . . . . . . (201)

2.) Interpolationen. Ist G e . c = c, so kann e vor c eingefügt werden; also $a ._0 \circ b, \circ c \circ d$ *gbm.* $a ._0 \circ b, \circ e \circ c \circ d \circ \ldots$ . . . . . (202)

3.) Zusammenfassungen (= Contractionen) und Auflösungen dieser = Umschreibungen. Man kann beispielsweise für $c \circ d = g$ schreiben, und der Ausdruck $a ._0 \circ b, \circ c \circ d \circ \ldots$ geht über in $a ._0 \circ b, \circ g \circ \ldots$ u. s. f. (203)



$AB \parallel A'B'$, $OC = p^{(2)}$

$OA = {}^{x}a$, $AB = {}^{y}b$, $BC = {}^{z}c$,

$OA' = {}^{x'}a'$, $A'B' = {}^{y'}b'$, $B'C = {}^{z'}c'$

Fig. 22

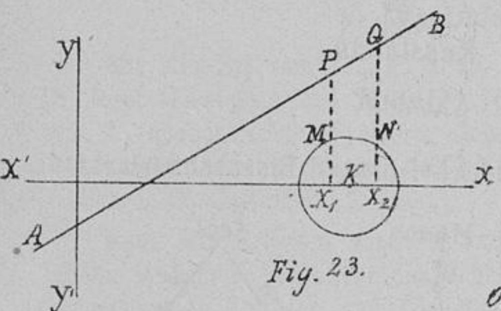
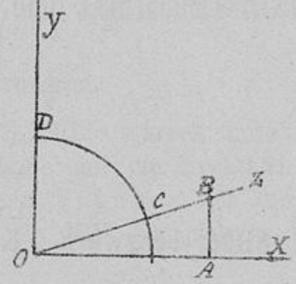


Fig. 23.



$OA = a$, $AB = b$

$OB = \sqrt{a^2+b^2} = c$, $OZ = \sqrt{x^2+y^2} = z$

$OD = i$, $OC = i'$

Fig. 24.

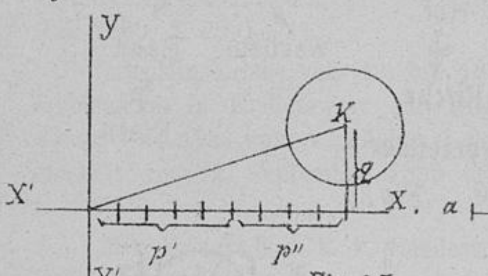
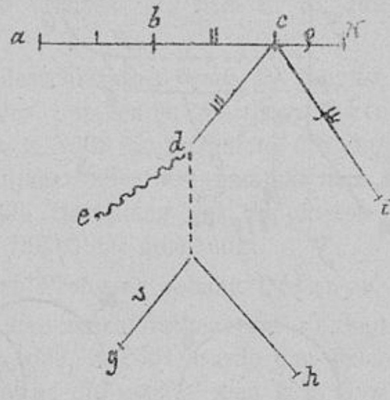
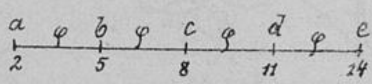
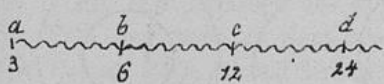


Fig. 25.





$b = \varphi(a) = a + 3$ d.i. $5 = 2 + 3$.



$b = \varphi(a) = a \times 2$

$c = \varphi(b) = b \times 2$

- - - - - - - - - - -

Fig. 27.

Fig. 28.

Soldaten — sind umgekommen

Attr. → viele

Adv.d.Zeit → im Jahre 1812

Adv.d.Ortes → auf den Schneefeldern

Attr. → Russlands

Adv.d.Grundes → durch Kalte

Satzbild

Silber=bergwerk Kirchhof=mauer Eisenbahn=Wartsaal

Werk $\xrightarrow{m}$ Berg; Werk $\xrightarrow{n}$ Silber

Mauer $\xrightarrow{a}$ Hof $\xrightarrow{a}$ Kirche

Saal $\xrightarrow{\alpha}$ Wart(en); Saal $\xrightarrow{\beta}$ Bahn $\xrightarrow{\delta}$ Eisen

Wortbilder

Fig 29.

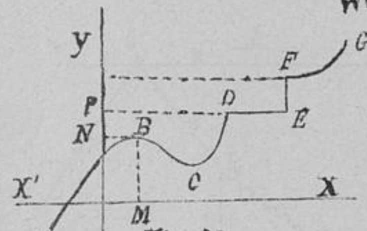


Fig. 30.

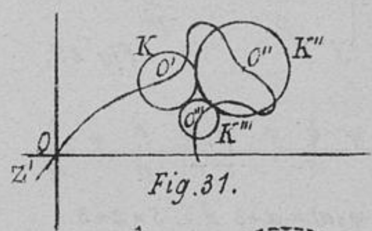


Fig. 31.

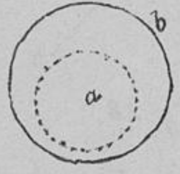


Fig. 32

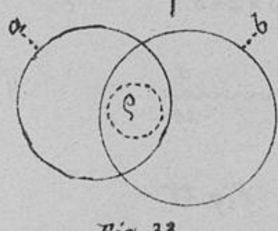


Fig. 33.

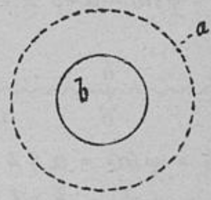


Fig. 34.