Studien zur exacten Logik und Grammatik.

Exacte Logik, exacte Grammatik! Was ist überhaupt exacte Wissenschaft? Gewöhnlich versteht man darunter einfach die angewandte Mathematik. Doch eine vage Definition genügt nicht, wir müssen tiefer in das Wesen des Begriffes eindringen. Welches sind die specifischen Merkmale, durch die sich die exacten von den nicht exacten, rein verbalen Wissenschaften unterscheiden? Der positive Gegensatz zu „exact“, „verbal“, ist geeignet die Vorstellung zu erwecken, dass die exacten Wissenschaften im Gegensatze zu den die gewöhnliche Wortsprache anwendenden Wissenschaften wohl diejenigen sein mögen, die sich zur Darstellung ihres Gegenstandes irgendeiner Formelsprache bedienen. Doch in dieser Allgemeinheit kann der Satz nicht richtig sein. Das lehrt gleich die traditionelle Logik, die sich ja auch gewisser Formeln bedient, wie: *SaP*, *SiP* etc., die jedoch in keiner Hinsicht den Charakter der Exactheit an sich tragen. Ich glaube nun, den Grund für diese Nicht-Exactheit der traditionellen logischen Formeln darin zu finden, dass sie keine Gleichungen sind. Die Gleichungen wären demnach das erste, wesentlichste Kennzeichen einer Formelsprache, die die Bezeichnung „exact“ verdient, und zwar, wie ich im voraus betonen will, die Gleichungen im wahren, eigentlichen Sinne des Wortes, (nicht: Identitäten, Subsumtionen, Congruenzen u. a., worauf wir übrigens später zurückkommen). Und in der That, die Richtigkeit dieses Satzes ist nicht schwer einzusehen. Bedenken wir nur, dass jede Wissenschaft nicht ein einziges Element, (denn sonst entfiele ja die Veranlassung zum Forschen und Vergleichen), sondern mehrere u. zw. vergleichbare Elemente zu ihrem Gegenstande haben muss. Diese sind nun entweder gleich oder verschieden. Sind sie verschieden, so ist diese Verschiedenheit wieder nur erfassbar und darstellbar durch — Gleichung und (durch Angabe der Differenz, d. h.) die Zahl; denn ich muss zum Gleichen noch die Differenz hinzufügen, um zum zweiten Elemente zu gelangen. In beiden Fällen ist es also das Gleiche, welches als unmittelbar evident den forschenden und erkennenden Geist zu befriedigen vermag. (Nebenbei bemerkt, ist das „Identische“ nicht voraussetzungsloser und einfacher als das „Gleiche“). Im zweiten Falle kommt dazu noch die Zahl u. zw. die Zahl im weitesten Sinne des Wortes: ich meine nicht nur die natürliche Zahlenreihe, sondern auch die complexen (oder wie ich sie nennen will: die 2-dimensionalen) und — mehrdimensionalen Zahlen. Wir werden später sehen, dass sich jeder Begriff auf eine mehrdimensionale Zahl zurückführen lässt, nur muss er „vollkommen definiert“, d. h. nach allen benachbarten Gebieten genau abgegrenzt sein. Die vollkommene Abgrenzung der Begriffe ist also ein zweites Erfordernis und Kennzeichen der Exactheit. Alle anderen Begriffe sind für exact-wissenschaftliche Behandlung ungeeignet; denn nur so ist es möglich, dass ein Begriff durch eine längere Abhandlung hindurch dieselbe Bedeutung unverändert beibehält. Wie ist es aber mit den durch Worte vermittelten Begriffen bestellt? Wie fließend und verschwommen sind nicht ihre Grenzen? Wie viele Seiten ihres Inhaltes lassen sie ganz unbestimmt!

Ich erwähne beispielsweise den Begriff „Wald“. Wie groß darf der Abstand der einzelnen Bäume voneinander sein, damit dem ganzen Complexe noch die Bezeichnung „Wald“ zukomme? — Doch es bedarf keiner weitern Beispiele. Es kann niemandem, der sich nur einigermaßen mit diesem Gegenstande beschäftigt hat, das Verhältnis zwischen den vagen Wortbegriffen und den von der exacten Wissenschaft geforderten „vollkommen definierten“ Begriffen verborgen geblieben sein. Vorzüglich illustriert hat dieses Verhältnis Schröder (Vorlesungen über die Algebra der Logik) durch den Hinweis auf die Schwierigkeiten, auf die die moderne Gesetzgebung bei der Definierung der verfälschten Lebensmittel stößt, da sie von der Wortsprache diesbezüglich vollkommen im Stiche gelassen wird.

Es ist mir zwar nicht unbekannt, dass gewisse Gelehrte gerade hierin einen Mangel der exacten Wissenschaften sehen wollen: ihre Elemente seien gar nicht der Wirklichkeit entnommen, sondern seien vom denkenden Geiste erst geschaffen. Das ist vorschnell geurtheilt! Ein Blick auf die großartigen Erfolge der exacten Methode hätte sie davon abhalten können, den Samen zu tadeln, aus dem so vortreffliche Früchte gediehen! Diese Gelehrten verwechseln offenbar das erst mit dem Verstande zu erfassende (die Wirklichkeit) mit den Werkzeugen des Verstandes, den „wohl definierten“ Begriffen. Diese Begriffe sind zwar nicht ein Abbild der Wirklichkeit, damit ist aber nicht gesagt, dass sie ihr in keinem Falle entsprechen könnten oder dass sie ihr gar widersprechen müssten! Sie sind zwar vom menschlichen Geiste geschaffen, aber nicht willkürlich, sondern nach dem Dictate der Nothwendigkeit. Gerade in ihrer „genauen Definierung“, ich möchte sagen, „Starrheit“ und Einfachheit dieser Begriffe liegt ihr Vorzug. Denn man muss vom Einfachen zum Complicierteren fortschreiten, nicht umgekehrt; und so ist durch Heranziehung von einer immer größern Anzahl von Factoren und durch Gestaltung immer complicierterer Ausdrücke und Formeln die Möglichkeit gegeben, der manigfaltigen Wirklichkeit näher zukommen, um sie endlich in beliebig enge Grenzen einzuschließen. Diese Möglichkeit geht den verbalen Wissenschaften ab und zwar gerade so, wie es unmöglich ist, einen sich fortwährend verändernden Gegenstand (die mannigfaltige, lebendige Wirklichkeit) an einem diesem Gegenstande zwar ähnlichen, ebenfalls fortwährenden, aber andern, unregelmäßigen Schwingungen und Veränderungen unterworfenen Messstabe (die Wortbegriffe!) zu messen. Je starrer der Messstab, desto vorzüglicher. Und wie viel der fruchtbarsten und wichtigsten Begriffe, wie viele der unentbehrlichsten Vehikel der Wissenschaft sind erst durch die exacte Methode möglich geworden! Ich weise nur hin auf den Begriff der „lebendigen Kraft“, „der Spannkraft“, „der Energie“ in der Physik u. a. m.

Mit den specifischen Eigenschaften der exacten Wissenschaften sind zugleich ihr Wert und ihre Vorzüge gegeben. Sie lassen sich kurz bezeichnen als: Übersichtlichkeit, Vollständigkeit, Allgemeinheit. Sie gewähren eine durch andere Mittel unerreichbare Sicherheit, dass man nicht den geringsten Theil des von der Formel umfassten Gebietes ausgelassen oder übersehen habe, und enthalten die ihnen subsumierten Glieder nicht unvermittelt, in einem ungeordneten Aggregate, sondern in einer ununterbrochenen, geordneten Reihe mit allmählichem Übergange des einen Gebildes in das andere. Man denke beispielsweise an die geometrischen Gebilde und ihren analytischen Ausdruck, oder an die großartigen Resultate der Geometrie des unendlichen und endlichen Raumes, wo die Formeln der einen in die Formeln der andern einfach durch Umwandlung einer Constanten k in ki übergehen und die gewöhnliche (euclidische) Geometrie nur als Übergangsfall der beiden Geometrien betrachtet werden muss, indem der Übergang der Constanten $\frac{1}{k}$ in $\frac{1}{ki}$ durch Null geschieht!

Auch die Allgemeinheit haben wir einen Vorzug der exacten Wissenschaften genannt, genauer: die Möglichkeit des Fortschreitens von weniger allgemeinen zu allgemeinern Ausdrücken.

Je allgemeiner eine Formel, desto größer ihr Wert. Denn je allgemeiner, ein um so größeres Gebiet umspannt sie. Die allgemeinen Formeln enthalten aber in einer ganz andern Weise die speciellen Fälle, wie die allgemeinen Sätze der Wortsprache. Dort braucht man nur Zahlen, die primitivsten, einfachsten, zugänglichsten Begriffe, einzusetzen, um die Einzelfälle in der größten Ordnung und Vollständigkeit, (da außerhalb der Reihe $-\infty$ bis $+\infty$ nichts existiert) zu erhalten. Hier aber gelangt man zu den Einzelfällen durch Substituierung gewisser Merkmale, die selbst wieder erst einer genauern Bestimmung (durch Zurückführung auf die Zahl) bedürfen.

Angesichts dieser Thatsachen kann man sich nicht der Überzeugung verschließen, dass nur exacte Methode zum wahren, sichern Wissen führe. Dass bisher die Mathematik fast nur auf Raumverhältnisse und Verwandtes angewendet worden ist, der Grund dafür ist nicht in der Unmöglichkeit ihrer Anwendung auf andere Gebiete (ich meine speciell: Logik, Grammatik, Psychologie) zu suchen, sondern in der Compliciertheit der Probleme dieser letztern Wissenschaften. So leicht allerdings ist die Sache nicht, aber möglich und erreichbar. Und dabei kann man immer sicher sein, dass der geringste Schritt nach vorwärts auf dem kleinsten Gebiete der exacten Wissenschaft unter allen Umständen e t w a s, während oft die umfangreichsten Bände einer „Wissenschaft“ nichtexacter Methode mit ihren nicht selten unfruchtbaren Variationen zweck- und planlos aufgestellter Begriffe nicht nur n i c h t s bedeuten, sondern geradezu ein Hemmnis für den Fortschritt bilden können.

Auf den besprochenen Principien der exacten Methode fußend will ich nun im nachstehenden zunächst die logischen Probleme, speciell die Syllogistik, analytisch zu behandeln und sodann, soweit es der knappe Raum zulässt, die Elemente einer exacten Grammatik darzustellen versuchen.

A. Exacte Logik: Analytik der Euler'schen Diagramme. Disjunctionen-, Complexionen- und Strecken-Algorithmus. Die allgemeine Formel der Syllogismen.

Die von Leonhard E u l e r zuerst in seinen „Briefen an eine deutsche Prinzessin“ angewandten Diagramme sind vollkommen geeignet die logischen Verhältnisse zu versinnlichen. Es wird hier unsere Aufgabe nur sein, diese Diagramme ähnlich wie die geometrischen Figuren in der Analytik, in Formeln, jedoch nicht von der Art wie *SaP*, *SiP*, *SeP*, *SoP*, sondern in solche Formeln zu fassen, die exacte mathematische Operationen zulassen d. h. in Gleichungen. Von allen bisher bekannten mathematischen Methoden könnten sich nur die von Sir W. H a m i l t o n erfundenen Quaternionen dazu eignen, die logischen Verhältnisse in Formeln zu fassen; denn durch sie lassen sich nicht nur Linien in der Ebene und Linien sowie Flächen im Raume, sondern auch begrenzte Flächen in der Ebene, sowie Kugeln und andere Körper im Raume darstellen. Ich habe eine Zeitlang auch an eine unabhängig variable Größe zwischen — 1 und + 1 gedacht, etwa ε, was ja gestattet sein muss, da man durch eine passende Function, etwa sin oder cos, immer die Strecke von $-\infty$ bis $+\infty$ in ein engeres Gebiet, (bei sin zwischen — 1 und + 1) verengen kann. Dann ließe sich der Umfang oder besser gesagt: das Gebiet des Begriffes x darstellen durch die Kreisfläche: $x = a + r\,\varepsilon$ *(Fig. 1.)* Die logische Operation der Negierung würde dann leicht folgendermaßen ausgedrückt werden: Nicht-$x = x_I = a + r.\frac{1}{\varepsilon}$, also durch dieselbe Gleichung mit Ersetzung der unabhängig Variablen durch ihren reciproken Wert. Doch hat diese Methode den Fehler, dass ihre Formeln mehr enthalten, als sie ausdrücken sollen, z. B. die Größe a, und sich infolge dessen bei Erweiterungen und Verallgemeinerungen derselben äußerst compliciert gestalten müssten.

Nach reiflicher Erwägung aller Umstände, (unter anderm auch der äußern Form der Formeln, was sehr wichtig ist!) und bei tieferm Eindringen in das Wesen der Sache erschien mir das folgende Verfahren am zweckmäßigsten.

Das zweien Gebieten a und b gemeinsame Gebiet ab *(Fig. 2.)* fasse ich als Function einer Function auf u. zw.: als das Gebiet (Symbol: G) einer Complexion (Bezeichnungsweise: a . b, — Punkt an der Linie!). Die vollständige Form dieses Ausdruckes ist also: G (a . b); nur in den Fällen, wo eine Verwechslung mit der Multiplication nicht zu befürchten ist, kann man schreiben: G. ab oder noch einfacher: ab. . . . (1)

Ich bezeichne weiters ein Glied oder einen Punkt aus der sich ununterbrochen von c bis d erstreckenden Reihe, wenn allgemein $x' > x$ (2)
und $x_{\iota} < x$, ... (3)
folgendermaßen:

1.) $c <> d$, ... (4)

lies: Erstreckung oder Limitation von inclusive c bis inclusive d.

2.) $c' <> d$ . . . Erstreckung von exclusive c bis inclusive d.

3.) $c <> d_{\iota}$ . . . „ von inclusive c bis exclusive d.

4.) $c' <> d_{\iota}$ . . . „ von exclusive c bis exclusive d.

Ferner mag, wenn $c < d < e < f$ u. s. w., die kleinste dieser Größen durch min $(c, d, e, f) = c$, oder einfacher durch $(c, d, e, f) = c$ (5)
und die größte durch max (c, d, e, f) oder einfach durch $[c, d, e, f] = f$ (6)
wiedergegeben werden. Dann können wir statt der traditionellen Formeln, (wenn $S = a$, $P = b$):

1.) S a P = alle S sind P *(Fig. 2.)* schreiben: $ab = a$; . . (7)
lies: Gebiet ab = Geb. a, und umgekehrt statt: P a S = alle P sind S *(Fig. 3.)*: $ab = b$; . . . . (8)
lies: Gebiet ab = Geb. b.

2.) S e P = **kein S** ist P. *(Fig. 4.)*: ab = 0 . . . . (9
lies: Gebiet ab = Null u. s. f.

3.) S i P = einige S sind P *(Fig. 5.)*: ab = 0' <> (a, b) . (10)

4.) S o P = einige S $\underbrace{\text{sind nicht}}$ P *(Fig. 5)*: ab = 0 <> (a_{ι}, b), (11)
und umgekehrt P o S = einige P $\underbrace{\text{sind nicht}}$ S *(Fig. 5)*: ab = o <> a, b_{ι}) . . . . (12)

Mann könnte nun fragen, wozu diese Änderungen! Die Folge wird lehren, dass erst durch Aufstellung dieser Formeln, die wir *logische Grundgleichungen* nennen wollen, die Möglichkeit einer Rechnung mit logischen Größen gegeben ist. Denn nur durch *Gleichungen* verbundene Größen lassen Substitutionen und allerhand Operationen und, wie wir später sehen werden, auch Zurückführung auf besondere Zahlen zu. Unsere vornehmste Aufgabe soll aber in erster Linie die Auffindung der allgemeinen Formel des Syllogismus bilden. Doch bevor wir zu diesem Probleme schreiten, sind einige einleitende und elementare Bemerkungen und grundsätzliche Theoreme über das Rechnen mit logischen Größen vorauszuschicken.

Das ganze Gebiet der Begriffe, also das Gebiet für den Begriff „alles“, „alle Dinge“, versinnlicht durch eine unbegrenzte (unendliche oder endliche*) Ebene (im weitesten Sinne des Wortes) drücke ich aus durch ъ; das Gebiet des Begriffes A durch a. Dann ist die Quantität des Nicht-A jedenfalls (ъ — a); wir können daher kurz durch (ъ — a) oder a_{I} . . . . (13)
das *Gebiet* des Begriffes Nicht-A ausdrücken. ъ setzt sich demnach zusammen aus a und a_{I}; also ъ = a + a_{I} . . . . (14)
Ein dritter Summand ist ausgeschlossen. Eine directe Folge davon ist, dass ъ — a_{I} = a . . . . (15)
d. h. Nicht-Nicht-A = A oder: zwei Negationen heben sich auf. Durch zwei Begriffe a und b kann das All-Gebiet zerfallen in: ъ = ab + a_{I}b + ab_{I} + $a_{\mathrm{I}}b_{\mathrm{I}}$, *(Fig. 5.)* . . . . (16)
von denen einige Glieder auch fehlen können. Die höchste Zahl, in welche ъ durch n Begriffe zerfällt werden kann, ist also 2^n.

Das Gebiet der Summe zweier Begriffe und seine Grenzbestimmungen. Lassen wir zwei verschieden große Begriffsgebiete a und b nach und nach verschiedene Lagen einnehmen, dann ist sofort klar, dass das kleinste Gebiet von beiden dann eingeschlossen wird, wenn das kleinere Begriffsgebiet ganz im größern enthalten, das größte Gebiet jedoch dann eingenommen wird, wenn sich beide Begriffe ausschließen. Das einemal ist G (a + b) = [Ga, Gb] das anderemal G (a + b) = (Ga + Gb) oder,

*) Vgl. Elemente der absoluten Geometrie von Dr. J. Frischauf, pag. 105. ff,

wenn wir das Gebiet Ga einfach durch a, sowie wir Gab durch ab bezeichnet haben, und G (a + b) immer durch {a + b} ausdrücken:
$\{a + b\} = [a, b] <> (a + b)$. . . . . (17)

Die Größe $\{a + b\}$ lässt sich noch anders ausdrücken. Beachten wir, dass im allgemeinsten Falle, wo sich die Begriffe kreuzen, in Ga + Gb das gemeinsame Gebiet ab zweimal vorkommt, d. i. $G\,a + G\,b = G\,a\,b_{\mathrm{I}} + 2\,G\,a\,b + G\,a_{\mathrm{I}}\,b$, so findet man allgemein: $G\,(a + b) = G\,a + G\,b - G\,a\,b$ oder: $\{a + b\} = a + b - a\,b$. . . . . (18)

Die Richtigkeit der Formel wird man einsehen, wenn man bedenkt, dass im Falle des Minimums *(Fig. 2.* oder *3.)* $a\,b = (a, b)$, demnach $\{a + b\} = a + b - (a, b) = [a, b]$; denn es ist klar, dass, wenn ich von einer Summe $a + b$ den kleinern Summanden: (a, b) subtrahiere, der größere: $[a, b]$ zurückbleibt. Im Falle des Maximums *(Fig. 4.)* ist $ab = 0$, also $\{a + b\} = a + b - a\,b = a + b$; demnach unter allen Umständen: $\{a + b\} = [a, b] <> (a + b)$.

Das Gebiet der Complexionen (entsprechend der Multiplication in der Arithmetik). Bei drei Begriffen ist das Maximum der Felder, in die ъ zerfällt, $= 2^3 = 8$ u. zw. $ъ = abc + a_{\mathrm{I}}bc + ab_{\mathrm{I}}c + abc_{\mathrm{I}} + ab_{\mathrm{I}}c_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{I}}bc_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{I}}b_{\mathrm{I}}c + a_{\mathrm{I}}b_{\mathrm{I}}c_{\mathrm{I}}$, *(Fig. 6.)* . . . . (19)
u. ä. bei vier und mehr Elementen. Es wird nun schon zur Genüge klar sein, dass man sich unter einer Complexion logischer Größen wesentlich dasselbe vorzustellen hat wie in der Combinationslehre, (deren Verwandschaft mit der Multiplication bekannt ist). Ich bezeichne und benenne die einzelnen Complexionen folgendermaßen: a.b oder ab . . . 2-namige Complexion (oder Complexion 2^ter^ Ordnung), abc . . . 3-namige Complexion (oder Complexion 3^ter^ Ordnung) u. s. w. Demnach ist eine Complexion 1^ter^ Ordnung ein einzelner Name z. B, a. Und wie Ga = a, ebenso $G\,ab = ab$; daraus $G\,(a\,.\,b) = Ga\,.\,Gb. = ab$. . . . . (20)
Nicht so bei der Addition, da „Summe der Gebiete" verschieden ist von „Gebiet der Summe", denn G (a + b) ist verschieden von (Ga + Gb).

Grenzbestimmungen einer 2-namigen Complexion. Wie für die Summe, so sind zunächst nun auch für die Complexion (entsprechend dem Product in der Arithmetik) die äußersten Grenzen (die man als die „untere" und die „obere" oder „erste" und „zweite" oder sonstwie benennen kann) zu bestimmen. Die äußersten Fälle sind auch hier dieselben wie bei der Addition: 1.) Die Kreise schließen sich aus; das gemeinsame Gebiet ab = 0; 2.) die Kreise schließen sich ein; das gemeinsame Gebiet ist gleich dem kleinern der beiden Gebiete, also $ab = (a, b)$. Doch ist der erstere Ansatz nicht so ohneweiters allgemein giltig. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass bei endlichem ъ die Summe der Begriffe $a + b > ъ$; dann ist offenbar die untere Grenze der Complexion nicht mehr = 0, sondern eine positive Größe u. zw. der Überschuss der Summe über das All-Gebiet, also $= a + b - ъ$. Andererseits hat aber ein negatives Gebiet ab keinen Sinn; denn es ist, sobald sich die Kreise ausschließen, in jedem Falle ohne Rücksicht auf ihre Lage $ab = 0$. Die untere Grenze von ab ist deshalb $= [0, a + b - ъ]$ und demnach allgemein:

$ab = [0, a + b - ъ] <> (a, b)$ . . . . (21)

Ich komme nun auf die Formel $\{a + b\} = [a, b] <> (a + b)$ zurück. Es zeigt sich jetzt, dass diese Formel nur für den Fall giltig ist, dass $ъ = \infty$ oder $a + b \leqq ъ$. Ich will diese Formel erst jetzt richtigstellen, um zu zeigen, wie in den exacten Wissenschaften alle Formeln im vollkommenen Einklange miteinander stehen müssen, und jede vollkommenere Formel mit Nothwendigkeit darauf führt, die weniger vollkommenen (in dem Sinne, dass man in ihnen einige seltene Umstände und Einzelfälle unberücksichtigt gelassen hat) zu rectificieren und schärfer zu fassen. Berücksichtigt man nun auch den Fall, dass zwar $\{a + b\}$ nur $\leqq ъ$, aber $(a + b)$ auch $> ъ$ sein kann, so ist dann die obere Grenze von $\{a + b\}$ nicht mehr $(a + b)$, sondern $(ъ, a + b)$ und demnach die rectificierte, absolut giltige Formel von $G (a + b)$:

$\{a + b\} = [a, b] <> (ъ, a + b)$, ... (22)

in Worten, wenn wir $[a, b]$ das unbestimmte Maximum der Elemente a und b, und (a, b) das unbestimmte Minimum der Elemente a und b nennen: Das Gebiet der Summe zweier Elemente ist gleich einer Erstreckung (Limitation) von (incl.) dem unbestimmten Max. der Elemente a und b bis (incl.) zum unbestimmten Min. der Elemente ъ und der Summe $(a + b)$.

Man findet die Formel auch aus der Substitution von (21) in die Formel (18). Wir erhalten: $\{a + b\} = a + b - ab = a + b - [0, a + b - ъ] <> (a, b) = (a + b - [0, a + b - ъ]) <> (a + b - (a, b))$. Denn es geht aus dem Begriffe der „Erstreckung" hervor, dass — worauf wir später zurückkommen werden — eine Erstreckung zu einer Größe addiert oder subtrahiert wird, indem man jede Grenze derselben zu der Größe addiert oder subtrahiert. Die erstere Grenze ist nun $= (ъ, a + b)$; denn ist in $[0, a + b - ъ]$ Null das größere Element, dann bleibt nach der Subtraction $a + b - 0 = a + b$ als das kleinere zurück, ist aber $a + b - ъ$ das größere Element, dann ist $a + b - (a + b - ъ) = ъ$ das kleinere. Die zweite Grenze ist $(a + b - (a, b)) = [a, b]$ aus demselben Grunde; also $\{a + b\} = (ъ, a + b) <> [a, b] = [a, b] <> (ъ, a + b)$, wie oben.

Noch in einer andern Hinsicht kann man den Ausdrücken $\{a + b\}$ und $a . b$ eine allgemeinere Gestalt verleihen. Es kann nämlich die Bedingung dazutreten, dass das Gebiet $\{a + b\}$ eine bestimmte Größe p

nicht überschreite und ebenso nicht kleiner werde als q. Dann ist zu setzen: $ab = [0, a + b - p] <> (a + b - q)$ . . . . (23)
und $\{a + b\} = [a, b] <> (p, a + b)$ . . . . (24)

Wir werden die Bedeutung dieser Formeln bei ihrer Anwendung auf einige

E i n z e l f ä l l e kennen lernen. Dabei muss besonders auf den Umstand als eventuelle Quelle grober Fehler aufmerksam gemacht werden, dass p nicht größer genommen werden darf als die höchste erreichbare Grenze des Gebietes $\{a + b\}$. Diese oberste Grenze ist bei verschiedenen Elementen (bei unbestimmt gelassener Quantität und Lage) natürlich p = ъ. Daher die Formel (22). Anders ist es im nachstehenden besondern Falle:

1.) $\{ab + bc\} \leqq b$ . . . . (25)

Dies folgt aus der Betrachtung des Diagrammes *(Fig. 6.)* sowie aus dem Begriffe des Symbols G; denn sowohl ab als auch bc ist in b eingeschlossen und es kann das Gebiet eines Begriffes nicht größer sein als der Begriff; deshalb haben wir auch $Ga = a$ gesetzt. Daraus ist ohneweiters klar, dass das Gebiet einer Summe von Complexionen nicht größer sein kann, als das Gebiet des größten gemeinsamen Gliedes (Maßes) der Summanden. Wir wollen der Deutlickeit halber eine diesbezügliche Aufgabe lösen:

$\{abcd + bc + abc + bce\} \leqq bc$ . . . . (26)

u. s. w. Auch mit diesem Satze steht die Formel (24) im Einklange; denn wir haben, für „a" „ab" und für „b" „bc" gesetzt, und mit Rücksicht auf $p = b$: $\{ab + bc\} = [ab, bc] <> (b, ab + bc)$ . . . (27)
denn sowohl $[ab, bc]$ als auch $(b, ab + bc) \leqq b$.

Indem wir zu den Complexionen übergehen und in der Formel (23) an die Stelle der Complexionen erster Ordnung solche zweiter Ordnung setzen, erhalten wir: $ab \,.\, bc = [0, ab + bc - b] <> (ab + bc - q)$, und für q, wie in diesem Falle, $= [ab, bc]$:
$ab \,.\, bc = [0, ab + bc - b] <> (ab, bc)$ . . . . (28)

2.) $abcd \ldots \leqq abc \leqq ab \leqq a, \leqq b$ . . . . (29)
$abcd \ldots \leqq abd \leqq ad \leqq a, \leqq d$ u. s. w.

Denn nach unserer Annahme (1) wird ab sowohl von a als auch von b eingeschlossen. Allgemein in Worten: Eine Complexion n^{ter} Ordnung ist $\leqq$ als jede beliebige Complexion einer niederern Ordnung derselben Elemente. Andererseits ist $\{abcd + abc\} = abc$, $\{abc + ab\} = ab$, $\{ab + a\} = a$ (30) u. s. f. d. h. das Gebiet mehrerer Complexionen verschiedener Ordnungen und derselben*) Elemente kann nicht kleiner sein als der Summand, der in allen andern Summanden als gemeinsames Maß enthalten ist. Dies

*) Sind die Complexionen aus verschiedenen Elementen zusammengesetzt, dann gilt als gemeinsames Masz: ƀ, wie weiter unten aus (34) hervorgeht.

geht nicht nur aus dem Diagramme, sondern auch aus der Formel (24) hervor, wenn wir schreiben (wobei natürlich $p = a$): $\{ab + a\} = [ab, a] <> (a, ab + a) = a <> a = a$ u. s. f.

3.) Aus der Annahme $ab = [0, a + b - ъ] <> (a, b)$ folgt nothwendig die Annahme $a = 0 <> ъ$, und $b = 0 <> ъ$ . . . . . (31) denn ist $ab = a$, also $a \leqq b$, dann folgt aus der Umkehrung der obigen Gleichung: a entweder $= 0$ oder $a = a + b - ъ$, d. h. $b = ъ$. Ist dagegen $ab = b$, also $b \leqq a$, dann ist b entweder 0 oder $b = a + b - ъ$, d. h. $a = ъ$. Es sind also negative Gebiete aus unserm Rechnungssystem ausgeschlossen, die obere Grenze ergibt sich aus dem Begriffe des ъ.

4.) Nun ist auch $a . a = a^{(2)} = a$ . . . . (32) leicht zu beweisen. Nach (23) und (28) ist $a . a = [0, a + a - a] <> (a, a) = a <> a = a$, also allgemein $a^{(m)} . b^{(n)} . c^{(p)} = abc$. Ebenso leicht ergibt sich aus $a . b = [0, a + b - p] <> (a, b) = [0, b + a - p] <> (b, a) = b . a$ . . . . (33)

5.) $ъ\, a = a$ . . . . (34)
Beweis: a muss jedenfalls von ъ eingeschlossen sein; denn es geht aus dem Begriffe des ъ hervor, dass kein Gebiet größer sein kann als ъ; also $Gx \leqq ъ$. Ich mache besonders darauf aufmerksam, dass sich daraus natürlich auch ergibt $G\,(a + b) \leqq ъ$, ... (35) nicht aber $(G\,a + G\,b) \leqq ъ$. Ist aber von zwei beliebigen Größen c, d die eine z. B. $c \leqq d$ und d von c eingeschlossen, dann ist nach (7) und (8) $cd =$ dem kleinern Elemente d; also ist in unserm Falle $ъa = a$. Übrigens muss sich der Satz auch aus der allgemeinen Formel (21) sofort ergeben, indem wir setzen: $ъ\, a = [0, ъ + a - ъ] <> (ъ, a) = a <> a = a$. daher auch $ъ . 0 = 0$.

6.) $a . a_{\mathrm{I}} = o$, (das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten) . (36) Der Beweis fließt aus der Definition des Begriffes Nicht-a. Wir haben nun Mittel genug, diesen Begriff mit der größten Akribie zu definieren. Die Definition lautet: $a + a_{\mathrm{I}} = \{a + a_{\mathrm{I}}\} = ъ$; d. h. die Summe von a und Nicht-a kann nicht größer und nicht kleiner sein als ъ, und ist = dem Gebiete der Summe beider $= \{a + a_{\mathrm{I}}\}$. Daher sind in der Formel (23) sowohl p als auch $q = ъ$ zu setzen. Man bekommt daraus: $aa_{\mathrm{I}} = [0, a + a_{\mathrm{I}} - ъ] <> (a + a_{\mathrm{I}} - ъ) = 0$. Aber auch aus der Formel (18) ergibt sich, da $(a + a_{\mathrm{I}}) = \{a + a_{\mathrm{I}}\}$, $aa_{\mathrm{I}} = \{a + a_{\mathrm{I}}\} - (a + a_{\mathrm{I}}) = 0$. Daher $ъ . ъ_{\mathrm{I}} = 0$. Es ist also $ъ_{\mathrm{I}}$ nicht = Nicht-alles, was soviel bedeuten würde wie „einiges", sondern = „Nicht-Gebiet aller Dinge. Bei andern von einander unabhängigen Begriffen wie: a, b, ist natürlich $q = [a, b]$; dann geht $(a + b - q)$ über in (a, b) und die Formel (23) in $ab = [0, a + b - p] <> (a, b)$ . . . . (37)

7.) **Es muss natürlich gestattet sein, eine Complexion auch nur anzuzeigen.** Deshalb kann man schreiben für $a . b + a . c = a . (b + c)$ (38)
Für $c = b_{\mathrm{I}}$ ist dann $a (b + b_{\mathrm{I}}) = a\,ъ = a$. Demnach bleibt eine Größe a unverändert, wenn man mit ihr nacheinander x und x_{I} verbindet und die Ausdrücke addiert; also $a = ax + ax_{\mathrm{I}}$ . . . . (39)
(Princip der Elimination). Ebenso $\{ab + ac\} = a\,\{b + c\}$; denn nach (18) und (32) ist $\{ab + ac\} = ab + ac - abc = a\,(b + c - bc) = a\,\{b + c\}$. Daraus folgt $a_{\mathrm{I}}b = (ъ - a)\,b = ъb - ab = b - ab$ und ebenso $ab_{\mathrm{I}} = a - ab$ . . . . (40)
$a_{\mathrm{I}}b_{\mathrm{I}} = (ъ - a).(ъ - b) = ъ.ъ - ъa - ъb + (-a).(-b) =$
$ъ - (a + b) + (-a).(-b)$. Andrerseits $a_{\mathrm{I}}b_{\mathrm{I}} = ъ - \{a + b\}$ *(Fig. 5.)*. Nach (18) weiter $= ъ - (a + b) + ab$. Also ist
$(-a).(-b) = ab$ . . . . (41)
Es bleibt also das Resultat unverändert, wenn man das Multiplications- und Complexionszeichen vor und nach der Operation miteinander vertauscht.

8.) **Die Negation der Complexion.** Die Bedutung des Nicht-ab oder $(ab)_{\mathrm{I}}$ folgt aus der Gleichung: $ъ = ab + a_{\mathrm{I}}b + ab_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{I}}b_{\mathrm{I}}$. Man findet daraus für „Nicht-ab" oder (ъ—ab) sofort: $(ъ - ab) = a_{\mathrm{I}}b + ab_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{I}}b_{\mathrm{I}}$ . . . . (42)
d. h.: Ist der Fall, dass a und b zugleich gelten, ausgeschlossen, dann gilt entweder b und Nicht-a oder a und Nicht-b oder Nicht-a und Nicht-b. Aus derselben Gleichung folgt für $a_{\mathrm{I}}b = 0$; $ъ = ab + ab_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{I}}b_{\mathrm{I}} = ab + (a + a_{\mathrm{I}})\,b_{\mathrm{I}} = ab + b_{\mathrm{I}}$; daraus $ъ - b_{\mathrm{I}} = b = ab$. Also sind die Ausdrücke $a_{\mathrm{I}}b = 0$ und $ab = b$ identisch. Ebenso ist leicht zu beweisen, dass $ab_{\mathrm{I}} = 0$ identisch ist mit $ab = a$.

Dies war nothwendig vorauszuschicken theils, um die Eigenartigkeit der ganz neuen Rechnungsweise zu zeigen, theils als Vorbedingung der Syllogistik, zu der wir nun schreiten wollen.

Syllogismus. Nach der Umformung der traditionellen Formeln: 1.) S a P, 2.) S e P, 3.) S i P, 4.) S o P (wenn $S = a$, $P = b$), in die logischen Grundgleichungen: 1.) $ab = a$, 2.) $ab = 0$, 3.) $ab = 0' <> (a, b)$, 4.) $ab = 0 <> (a_{\mathrm{I}}, b)$, wobei zu beachten ist, dass nach (29) in 1.) das Größenverhältnis $a \leqq b$ mit enthalten ist, wird man leicht einsehen, dass nach Analogie der algebraischen Gleichungen das Problem des Syllogismus einfach auf der Elimination des 2 Gleichungen $ab = x$ und $bc = y$ gemeinsamen Elementes (des Mittelbegriffes) b aus der Complexion $x . y$ beruht. Schreiben wir nun ganz allgemein die beiden Prämissen: $ab = x$, $bc = y$; so ist $ac = z$ der Schlusssatz, und es erscheint bei unserer Rechnungsweise die Eintheilung der Schlüsse nach den verschiedenen Schlussfiguren als ganz überflüssig. Schon darin zeigt sich deutlich die Inferiorität der verbalen gegenüber der exacten Logik. Wir haben außerdem die Mittel, dieses Problem ganz allgemein, durch eine einzige, allgemeine Formel zu lösen.

Beweisführung. Aus dem Diagramme *(Fig. 6.)* ersieht man, dass ac in die beiden Gebiete $abc + ab_{\mathrm{I}}c$ zerfällt. Nach (28) und (32) ist $abc = ab\,.\,bc = [0, ab + bc - b] \Diamond (ab, bc)$, und $ab_{\mathrm{I}}c = ab_{\mathrm{I}}\,.\,b_{\mathrm{I}}c = [0, ab_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{I}}c - b_{\mathrm{I}}] \Diamond (ab_{\mathrm{I}}, bc_{\mathrm{I}})$. Nun ist $b_{\mathrm{I}} = \text{ъ} - b$, daher nach (40) $ab_{\mathrm{I}} = a - ab$, ebenso $b_{\mathrm{I}}c = c - bc$; und wir erhalten die allgemeine Formel des Syllogismus: $ac = ab\,.\,bc + (a - ab).\,(c - bc)$, d. i.

$z = xy + (a-x).\,(c - y)$ . . . . (43)

oder: $ac = [0, ab + bc - b] \Diamond (ab, bc) + [0, a + b + c - ab - bc - \text{ъ}] \Diamond (a - ab, c - bc)$ d. i.: $z = [0, x + y - b] \Diamond (x, y) + [0, a + b + c - x - y - \text{ъ}] \Diamond (a - x, c - y)$ . . . . (44)

Für den gewöhnlichen Fall, dass $\text{ъ} = \infty$ und a, b, c endliche Größen sind, vereinfacht sich die Formel zu: $z = [0, x + y - b] \Diamond (x, y) + 0 \Diamond (a - x, c - y)$ . . . . (45)

Um die Brauchbarkeit und den Nutzen dieser Formel zu erproben, werden wir die einzelnen in der traditionellen Logik als giltig bezeichneten Schlüsse einzeln durchgehen und werden dabei sehen, wie oft wir die Resultate der traditionellen Logik richtigzustellen haben und welche neuen Perspectiven sich uns dabei eröffnen werden. Es soll in allen folgenden Beispielen $P = a$, $M = b$, $S = c$, $ab = x$, $bc = y$, $ac = z$ sein. Dann ist:

1.) (Schluss Barbara) M a P . . . $ab = x = b$, wobei zu beachten ist, dass nach (29) daraus folgt: $b \leqq a$; S a M . . . $bc = y = c$, woraus ebenfalls folgt $c \leqq b$. Schlusssatz: $ac = z = [0, b + c - b] \Diamond (b, c) + [0, a + b + c - b - c - \text{ъ}] \Diamond (a - b, c - c) = [0, c] \Diamond (b, c) + [0, a - \text{ъ}] \Diamond (a - b, 0) = c \Diamond c + 0 \Diamond 0 = c$. d. i. S a P. Beachte, dass $[0, a - \text{ъ}]$ in jedem Falle $= 0$, ob $a = \text{ъ}$ — größer kann es nicht sein nach (31) — oder $a < \text{ъ}$. Ebenso folgt aus den Prämissen: $a - b \geqq 0$ und $c \leqq b$.

2.) (Celarent). M e P . . . $a\,b = x = 0$,
S a M . . . $bc = y = c$. Nach (29): $c \leqq b$.

Schlusssatz: $ac = z = [0, c - b] \Diamond (0, c) + [0, a + b + c - 0 - c - \text{ъ}] \Diamond (a - 0, c - c) = 0 \Diamond 0 + [0, a + b - \text{ъ}] \Diamond (a, 0) = 0 \Diamond 0 + 0 \Diamond 0 = 0$, d. i. S e P. Zu beachten ist, dass in jedem Falle $[0, a + b - \text{ъ}] = 0$, denn nach (18) ist $a + b = \{a + b\} + ab = \{a + b\}$; also nach (35): $\{a + b\} - \text{ъ} \leqq 0$.

3.) (Cesare). P e M . . . $ab = 0$
S a M . . . $bc = c$, also mit Celarent identisch.

4.) (Camestres). P a M . . . $ab = a$; daher $a \leqq b$.
S e M . . . $bc = 0$.

Schlusssatz: $ac = [0, a - b] <> (a, 0) + [0, a + b + c - a - \text{ъ}] <> (0, c) = 0 <> 0 + [0, b + c - \text{ъ}] <> 0 = 0$, d. i. S e P. Es ist wieder zu beachten, dass $b + c = \{b + c\} + bc = \{b + c\}$; also $b + c - \text{ъ} \lesseqgtr 0$.

Bevor wir in der Besprechung der speciellen Fälle fortfahren, ist es angezeigt, den Disjunctionen- und Limitationen-Algorithmus sowie den Strecken-Calcul einzuschalten. Ich nenne nämlich den Ausdruck: a, b, c, d . . . (durch Beistriche getrennte Größen ohne Klammern) oder $\langle a, b, c \ldots \rangle$ in Ermanglung einer bessern Bezeichnung eine Disjunction. (a, b, c, d . . .) bedeutet dann das Minimum, und [a, b, c, d . . .] das Maximum einer Disjunction. Weiters möge, wie schon oben, $p <> q$ eine Limitation (oder Erstreckung) genannt werden. Sie enthält zwei Grenzen, die wir die „untere" und die „obere" oder besser einfach die „erste" und die „zweite" nennen wollen. Dabei ist jedoch ausdrücklich hervorzuheben, dass eine Limitation nicht die ganze Strecke, sondern nur einen beliebigen Punkt dieser Strecke bezeichnet. Dieser Calcul ist es, durch den sich meine Darstellung der exacten Logik von allen andern ähnlichen Versuchen, soweit sie mir bekannt sind, wesentlich unterscheidet, eine ganz eigenartige Rechnungsart, die auch auf andere Gebiete angewendet werden könnte. Im nachstehenden stelle ich kurz die wichtigsten Principien dieses Algorithmus zusammen, die der Leser selbst wird in Worte fassen können:

Maxima und Minima von Disjunctionen. 1.) $(a, b) \mp c = (a \mp c, b \mp c)$. Daher: $(a, b) - (a + b) = (-a, -b)$; $(a, b) - a = (0, b - a)$ u. s. w. Ebenso: $[a, b] \mp c = [a \mp c, b \mp c]$. . . . . (46)

2.) $c - (a, b) = [c - a, c - b]$, und $c - [a, b] = (c - a, c - b)$. Daher $a + b - (a, b) = [a, b]$ und $a + b - [a, b] = (a, b)$ . . (47) Bei drei Elementen erhalten wir dementsprechend: $3 + 4 + 5 - (3, 4) - (3, 5) - (4, 5) + (3, 4, 5) = [3, 4, 5]$; und umgekehrt: $3 + 4 + 5 - [3, 4] - [3, 5] - [4, 5] + [3, 4, 5] = (3, 4, 5)$. Ebenso ist bei vier Elementen leicht zu beweisen, dass: $a + b + c + d - (a, b) - (a, c) - (a, d) - (b, c) - (b, d) - (c, d) + (a, b, c) + (a, b, d) + (a, c, d) + (b, c, d) - (a, b, c, d) = [a, b, c, d]$ und umgekehrt; also allgemein bei n Elementen: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, wenn wir die Summe der Minima aller Combinationen von Disjunctionen r^{ter} Ordnung durch $\Sigma D^r (a_1, a_2, \ldots a_n]$ und die Maxima dementsprechend durch $\Sigma D^r [a_1, a_2, \ldots a_n]$ ausdrücken: $\Sigma (D^1 - D^2 + D^3 - \ldots, (-1)^{n-1} D^n) (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n) = [a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ und umgekehrt: $\Sigma (D^1 - D^2 + D^3 - \ldots (1)^{n-1} D^n) [a_1, a_2, \ldots a_n] = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ . . . . (48)

3.) $(a, b) + (c, d,) = (a + c, b + c, a + d, b + d)$ und $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + c, a + d, b + d]$.

4.) $(a, b) - [c, d] = (a - c, b - c, a - d, b - d)$. Ebenso $[a, b] - (c, d) = [a - c, b - c, a - d, b - d]$ . . . . (49)

5.) Für $p \geqq 0$, $(a, b) \times p = (a \times p, b \times p)$, und $[a, b] \times p = [a \times p, b \times p]$. Für $q \leqq 0$, $(a, b) \times q = [a \times q, b \times q]$, und $[a, b] \times q = (a \times q, b \times q)$ . . . . (50)

6.) $\left.\begin{array}{l} ((2, 3), 5) = (2, 5) = 2 \\ ((2, 5), 3) = (2, 3) = 2; \\ ((3, 5), 2) = (3, 2) = 2. \end{array}\right\}$ Daraus: $((a, b), c) = (a, b, c)$ und $[[a, b], c] = [a, b, c]$. . . . . (51)

7.) $\left.\begin{array}{l} [(2, 3), 5] = [2, 5] = 5, \\ [(2, 5), 3] = [2, 3] = 3, \\ [(3, 5), 2] = [3, 2] = 3. \end{array}\right\}$ Daraus: $[(a, b), c] = [a, b, c]^{[2]}$; zu lesen: eines von den 2 größten Elementen, oder $= (a, b, c)^{\mathrm{I}}$ = das kleinste ausgeschlossen.

$\left.\begin{array}{l} ([2, 3], 5) = (3, 5) = 3 \\ ([2, 5], 3) = (5, 3) = 3 \\ ([3, 5], 2) = (5, 2) = 2 \end{array}\right\}$ Daraus: $([a, b], c) = (a, b, c)^{[2]}$, d. h. eines von den 2 kleinsten Elementen, oder $= [a, b, c]^{\mathrm{I}}$ = das größte ausgenommen. U. s. f. . . . . (52)

Limitationen (Erstreckungen) und Strecken. 1.) $a \Diamond b \mp c = (a \mp c) \Diamond (b \mp c)$ und $c \mp a \Diamond b = (c \mp a) \Diamond (c \mp b)$.
Daher: $a + b - a \Diamond b = b \Diamond a = a \Diamond b$ . . . . (53)

2.) $a \Diamond b \mp c \Diamond d = (a \mp c \Diamond d) \Diamond (b \mp c \Diamond d) = ((a \mp c) \Diamond (a \mp d)) \Diamond ((b \mp c) \Diamond (b \mp d))$ . . . . (54)
und umgekehrt. Daher $a \Diamond b - a \Diamond b$ im allgemeinen d. h. wenn es identisch ist mit $G_1\ a \Diamond b - G_2\ a \Diamond b$, nicht $= 0$, sondern $= ((a - a) \Diamond b) \Diamond ((b - a) \Diamond b) = (0 \Diamond (a - b)) \Diamond ((b - a) \Diamond 0) = (a - b) \Diamond 0 \Diamond (b - a) = (a - b) \Diamond (b - a)$. Dagegen $G_1\ a \Diamond b - G_1\ a \Diamond b$ allerdings $= 0$ . . . . (55)
Daher: $2 \Diamond 5 + 20 \Diamond 30 = 22 \Diamond 35$. Man kann infolgedessen auch schreiben: $a \Diamond b + c \Diamond d = (a + c, b + c, a + d, b + d) \Diamond [a + c, b + c, a + d, b + d]$ . . . . (56)
Für $a \leqq b$ vereinfacht sich die Formel zu:
$(a + c, a + d) \Diamond [b + c, b + d]$, ... (57)
und tritt dazu noch die Bedingung $c \leqq d$, so erhalten wir: $a \Diamond b + c \Diamond d = (a + b) \Diamond (c + d)$. Nun ist bei der entwickelten Form zweier Complexionen $a \,.\, b = [0, a + b - \text{ъ}] \Diamond (a, b)$ und $c \,.\, d = [0, c + d - \text{ъ}] \Diamond (c, d)$ immer $[0, a + b - \text{ъ}] \leqq (a, b)$ und entsprechend bei $c \,.\, d$. Denn ist $a \leqq b$, so gilt entweder $a = 0$, oder $a + b - \text{ъ} = a$ d. h. $b = \text{ъ}$, wie natürlich, da ein Gebiet a oder b nicht negativ und nicht größer als ъ sein kann; also $a = 0 \Diamond \text{ъ}$.
$[0, a + b - \text{ъ}] \Diamond (a, b) + [0, c + d - \text{ъ}] \Diamond (c, d)$ ist demnach $= ([0, a + b - \text{ъ}] + [0, c + d - \text{ъ}]) \Diamond ((a, b) + (c, d)) = [0, c + d - \text{ъ}, a + b - \text{ъ}, a + b + c + d - 2\text{ъ}] \Diamond (a + c, b + c, a + d, b + d)$.

3.) $(a <> b) \times c = (a \times c) <> (b \times c)$ . . . . (58)

4.) Complexion: $(a <> b) . c = a . c <> b . c$ . . . . . (59)

5.) Complexion zweier Limitationen: $a <> b . c <> d = (a . c <> d) <> (b.c <> d) = (ac <> ad) <> (bc <> bd)$ . . . . (60)

Für specielle Werte ist nun zu beachten, dass $a . b = [0, a + b - ъ] <> (a, b)$, also $5 . 8 = [0, 13 - ъ] <> (5, 8) = [0, 13 - ъ] <> 5$. Ist $a + b \leqq ъ$, so ist $5 . 8 = 0 <> 5$. Für ъ etwa $= 10$ hätten wir $5 . 8 = 3 <> 5$ u. s. w. Genauer müsste man schreiben $G_1\, 5 . G_2\, 8$, um anzudeuten, dass es zwei verschiedene Gebiete sind, etwa Ga und Gb.

Um den Begriff der Complexion bei besondern Zahlen noch schärfer zu definieren, ist es nothwendig einen neuen Begriff, den der Strecke einzuführen. Denken wir uns für einen Augenblick statt der Gebiete-Fläche eine Linie, so erscheinen uns nun die Gebiete als Strecken. In diesem Falle lässt sich nun ein Gebiet nicht nur der Quantität und der relativen Lage nach wie bisher, sondern auch der absoluten Lage nach bestimmen. Ist also ein G a eine Strecke *(Fig. 7.)*, so können wir schreiben R a oder $a = a_1 \triangleright a_2$ . . . . (61)

R b oder $b = b_1 \triangleright b_2$, u. s. w. Es ist demnach die Strecke eine „zweizahlige" oder zweiwertige Größe, während die Gebiete, obgleich auch der Lage nach sich voneinander unterscheidend, doch nur der Quantität nach bezeichnet, also einwertig sind. Ist demnach Q die reine Quantität des Gebietes oder der Strecke, so ist $Q\,a = a_2 - a_1$, ... (62)

und $a_2 = a_1 + Q\,a$. Daraus $R\,a = a = a_1 \triangleright (a_1 + Q\,a) = (a_2 - Q\,a) \triangleright a_2$. Will man das zweiwertige R a in das einwertige G a überführen, so hat man in R a die bestimmte, vom Abscissenanfangspunkte zu zählende Grenze a_1 (auch $L_1\, a$) oder a_2 (auch $L_2\, a$) durch ein unbestimmtes x zu ersetzen, und man erhält: $G\,a = x \triangleright (x + Q\,a) = (x' - Q\,a) \triangleright x'$; $G\,b = y \triangleright (y + Q\,b)$ u. s. w. Also allgemein $R\,a -' x = G\,a$ . . (63)

wobei $-'$, respective $\times'$ den Sinn hat, dass sich die durch das Operationszeichen verbundene Größe auf die Grenze (Abscisse) in R a, nicht auf die Quantität bezieht. Denn wir erhalten: $R\,a -' x = a_1 \triangleright a_2 - x = (a_1 - x) \triangleright (a_2 - x) = (a_1 - x) \triangleright (a_1 + Q\,a - x)$; und für $x = x' - a_1$ weiter $G\,a = x' \triangleright (x' + Q\,a)$. Nun ist aber $Q\,a = a_2 - a_1 = x' + Q\,a - x'$; $G\,Q\,a = G\,a = a = G\,(a_2 - a_1)$, bei welch letzterem Ausdruck jedoch, um Complicationen zu vermeiden, das Symbol G nicht wegzulassen ist.

Bemerkt sei noch, dass die Quantität immer zwischen den Grenzen 0 und ъ eingeschlossen bleibt, so dass, wenn in „n G ъ" p vollständige Umwindungen und ein Rest r enthalten ist, (denn offenbar hat man sich, wie bei den Euler'schen Diagrammen bei endlichem ъ die Fläche G r als geschlossen, am besten als Kugeloberfläche zu betrachten ist, so entsprechend auh hier unter $G\,ъ = R\,ъ$ eine geschlossene Linie, am besten einen

Kreis zu denken) dieser Rest r durch $a_1 \triangleright a_2$ wiedergegeben werden kann; der ganze Ausdruck: $n\,G\,ъ = p\,ъ + a_1 \triangleright a_2$. Eine Folge davon ist, dass a_1 durch jedes $x \equiv a_1 \pmod{ъ}$, und ebenso a_2 durch $y \equiv a_2 \pmod{ъ}$ ersetzt werden kann, ohne dass Q a dabei eine Änderung erleidet . . . (64)

Nach diesen nothwendigen Fixierungen ist es nun leicht, folgende **Principien des Streckencalcüls** zu deuten:

1.) $2 \triangleright 5 + 7 \triangleright 11 = G_1(5-2) + G_2(11-7)$, dagegen: $2 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 11 = 2 \triangleright 11 = G(11-2)$; $2 \triangleright 7 + 5 \triangleright 11 = 2 \triangleright 5 + 2 \times 5 \triangleright 7 + 7 \triangleright 11$. . . . . (65)

2.) $2 \triangleright 7 = a_1 \triangleright a_2 = G(a_2 - a_1) = G\,a$; dagegen $7 \triangleright 2 = a_2 \triangleright a_1 = a \triangleright (a_1 + ъ)$ nach (64), $= G(a_1 + ъ - a_2) = G(ъ - (a_2 - a_1)) = G(ъ - a) = G\,a_1$. Also $2 \triangleright 7 + 7 \triangleright 2 = ъ$ (66)

3.) Kehre ich das Zeichen $\triangleright$ um, dann bedeutet $a_1 \triangleleft a_2$ das Fortschreiten von a_1 in negativer Richtung bis a_2, jedoch wieder mit dem Vorbehalte, dass der absolute Wert der Quantität der Strecke die Grenzen 0 bis ъ nicht überschreite. Ist $a_2 \triangleright a_1 = G\,a'$, so ist $a_1 \triangleright a_2 = -G\,a'$, und die Quantität zwischen 0 und ъ eingeschlossen. Folgerung: $2 \triangleright 7 + 7 \triangleleft 2 = a - a = o$; dagegen $2 \triangleright 7 + 7 \triangleright 2 = a + a_1 = a + (ъ - a) = ъ$ . . . . (67)

4.) Bedeutet das Zeichen $c +'$, resp. $-'c$, $c -'$, dass sich die Operation nur auf die Abscisse bezieht, dann ist: $c +' a_1 \triangleright a_2 = (c + a_1) \triangleright (c + a_2)$ und $a_1 \triangleright a_2 -' c = (a_1 - c) \triangleright (a_2 - c)$ d. h. $\mathrm{R}\,a +' (\mp)\, c = \mathrm{R}\,a' \ldots$ eine andere Strecke mit anderer Lage, aber von derselben Quantität. Da ein Gebiet auch aus mehrern getrennten Theilen bestehen kann, so ist $d +' (a_1 \triangleright a_2 + b_1 \triangleright b_2 - c_1 \triangleright c_2) = (a_1 + d) \triangleright (a_2 + d) + (b_1 + d) \triangleright (b_2 + d) - (c_1 + d) \triangleright (c_2 + d)$ u. s. w. . . . . (68)

5.) $p \times (a_1 \triangleright a_2)$ ist nicht ohneweiters $= (p \times a_1) \triangleright (p \times a_2)$; denn $3 \times G(a_2 - a_1)$ bedeutet z. B. dreimal die Strecke a *(Fig. 8.)*, und ihre Lage und Quantität bleibt unverändert. Der Ausdruck $p \times G(a_2 - a_1)$ oder $p \times \mathrm{R}(a_2 - a_1)$ ist auch zu unterscheiden von $G(p \times G(a_2 - a_1))$; denn dieses letztere ist nach dem Principe (32): $a^{(n)} = a$ identisch mit $G(a_2 - a_1)$. Unterscheide ich aber $\times'$ vom Multiplicationszeichen durch einen diakritischen Strich in dem Sinne, dass nun mit $p \times'$ nur die Abscisse, nicht die ganze Strecke zu multiplicieren sei, dann ist:
$p \times' (a_1 \triangleright a_2) = (p \times a_1) \triangleright (p \times a_2)$, ... (69)
also, falls $p \lesseqgtr 1$, eine Strecke mit veränderter Lage und veränderter Quantität. Der Operator $p \times$ cumuliert also (häuft), während $p \times'$ streckt.

Die Ausdrücke $c +'$ und $p \times'$ spielen demnach im Streckencalcül eine ähnliche Rolle, wie der Versor und Tensor in den Hamilton'schen Quaternionen. Man könnte den Operator $c \times'$ „Verschieber", und den

Operator $p \times'$ den „S t r e c k e r" nennen. Denn wie sich in der Quaternionenrechnung durch den Versor und Tensor einer Quaternion d. h. durch Drehung und Ausdehnung jeder Vector in einen beliebigen andern, z. B. α in β überführen lässt, wobei eine parallele Verschiebung nicht in Betracht kommt, so auch hier, nur dass umgekehrt nicht eine Drehung, sondern eine parallele Verschiebung stattfindet. Sind nämlich zwei Strecken gegeben: 1) $m \triangleright (m + q)$, 2) $n \triangleright (n + r)$, so ist $(n - \frac{r}{q} m) +' \frac{r}{q} \times'$
$(m \triangleright (m + q)) = n \triangleright (n + r)$ . . . . (70)
oder $\frac{r}{q} \times' ((\frac{q}{r} n - m) +' m \triangleright (m + q)) = n \triangleright (n + r)$ . . . . (71)

Der Strecken-Algorithmus ist also das Gegenstück zum Quaternionen-Calcül, und beide ergänzen sich gegenseitig zu einer höhern, allgemeinen Strecken-Rechnung, worin jede Veränderung einer Strecke, sowohl eine Drehung und Ausdehnung als auch eine parallele Verschiebung ihren mathematischen Ausdruck findet. Und in der That, nehmen wir mit l_x, m_y, n_z drei Coordinaten an, wobei die Indices eine beliebige Richtung im Raume, etwa drei aufeinander senkrecht stehende Coordinaten, andeuten mögen, dann gehen die Ausdrücke $l_x \triangleright (l_x + q) + m_y \triangleright (m_y + r) + n_z \triangleright (n_z + s)$, wenn l_x, m_y, n_z auch nummerisch ganz b e l i e b i g e Größen vorstellen und nur der Bedingung unterworfen sind, dass das Gebiet der Summe immer = ist der Summe der Gebiete, also $\{l_x \triangleright (l_x + q) + m_y \triangleright (m_y + r) + n_z \triangleright (n_z + s)\} = (l_x \triangleright (l_x + q) + m_y \triangleright (m_y + r) + n_z \triangleright (n_z + s))$, sofort über in Vectoren im Sinne H a m i l t o n s. Dadurch ist der Anschluss der exacten Logik auch an diesen Zweig der mathematischen Wissenschaft gefunden, und es lassen sich alle Regeln der Quaternionen-Rechnung auch auf unsere Strecken anwenden. Es ist dann beispielsweise das Product zweier parallelen Vectoren = einer r e i n e n Zahl (Scalar), und das Product zweier senkrecht aufeinander stehenden Einheitsvectoren = einem dritten, auf den beiden senkrechten Einheitsvector; also: $m_y \triangleright (m_y + 1) \times l_x \triangleright (l_x + 1) = n_z \triangleright (n_z + 1)$; dagegen, da hier die Factoren nicht beliebig vertauscht werden können: $l_x \triangleright (l_x + 1) \times m_y \triangleright (m_y + 1) = - n_z \triangleright (n_z + 1)$. Ferner $(l_x \triangleright (l_x + 1))^2 = - 1$, u. s. w. Es geht unter anderm daraus hervor, dass man die Multiplication mit der Complexion nicht verwechseln darf.

6.) In $c - (a_1 \triangleright a_2)$ kann das Minuszeichen nicht als Operations-, sondern nur als Vorzeichen gelten, und man bekommt $c - (a_1 \triangleright a_2) = c +' (- a_1 \triangleright a_2) = c +' a_2 \triangleleft a_1 = (c + a_2) \triangleleft (c + a_1) = - (c + a_1) \triangleright (c + a_2)$ . . . . (72)
Dagegen ist $c -' a_1 \triangleright a_2 = (c - a_1) \triangleleft (c - a_2)$, ... (73)
nicht $= (c - a_1) \triangleright (c - a_2)$. Beweis:

Da $-'$ als Operationszeichen nur den Sinn haben kann, dass $c -' R a = c +' (- 1) \times' R a = c +' (- 1) \times' (a_1 \triangleright (a_1 + Q a)) = c +'$

$(-a_1) \lhd, \rhd (-a_1 - Q\,a)$, d. i. da man vom Abscissenpunkte $c - a_1$ zum Punkte $c - a_2$ in positiver Richtung nicht gelangen kann, ohne die Quantität zu ändern, $= (c - a_1) \lhd (c - a_1 - Q\,a) = (c - a_1) \lhd (c - a_2)$. Es ist also

7.) α) $2 \rhd 7 = G\,a = G\,(a_2 - a_1) = G\,5$; β) $7 \rhd 2 = G a_I = G\,(2 - 7) = G\,(-5) = G\,(\text{Nicht-}G\,5)$; also allgemein: $G\,(-x) = G\,x_I = G\,(\text{ъ} - x)$; χ) $7 \lhd 2 = G'\,a = G'\,(2 - 7) = G'\,(-5) = -G\,5$; also allgemein: $G'\,(-x) = -G\,x$; δ) $2 \rhd 7 = G'\,(7 - 2) = G'\,.\,5 = G' - (-5) = -G\,(-5) = -G\,(\text{Nicht-}G\,.\,5)$; also allgemein: $G'\,x = G' - (-x) = -G\,(-x) = -G\,x_I = -G\,(\text{ъ} - x)$.

$x \rhd x$ ist daher, da $x \equiv (x + \text{ъ}) \pmod{\text{ъ}}$, zweideutig; es kann $= 0$ oder ъ sein. Zur genauern Unterscheidung dieser beiden Größen muss man schreiben: $x \rhd (x + Q\,0)$ resp. $x \rhd (x + Q\,\text{ъ})$. Ebenso ist $x \lhd x$ aus demselben Grunde entweder $= 0$ oder $= -\text{ъ}$. Zur genauern Unterscheidung ist zu schreiben: $x \lhd (x - Q\,o)$ resp. $x \lhd (x - Q\,\text{ъ})$.

Bezeichnet man mit ${}_{,}a$ die Abscisse a mit Ausschluss des Endpunktes (a ist also = Abscisse mit Einschluss des Endpunktes), wenn ferner $P\,x$ das Gebiet (die Strecke) des Endpunktes der Abscisse x bedeutet, so dass $({}_{,}a + Q\,P\,a) = a$, dann ist ${}_{,}a \rhd a = P\,a$, $a \rhd {}_{,}a = G\,({}_{,}a - a) = G\,(-Q\,P\,a) = \text{Nicht-}P\,a =$ der ganze Umkreis mit Ausnahme des Punktes $P\,a$; ${}_{,}a \lhd a = G'\,(a - {}_{,}a) = G' - (-Q\,P\,a) = -G\,(\text{Nicht-}P\,a) = -G\,(\text{ъ} - P\,a) = -\text{ъ} + P\,a$, d. h. der ganze Umkreis in negativer Richtung mit Ausnahme des Punktes Pa.

8.) *Complexionen und Gebiete der Summe von Strecken.* Complexionen bedeuten nach (1) den den Strecken gemeinsamen Theil; es ist also: $2 \rhd 7\,.\,3 \rhd 5 = 3 \rhd 5$; $2 \rhd 7\,.\,6 \rhd 11 = 6 \rhd 7$; $2 \rhd 7\,.\,10 \rhd 13 = 0$; $2 \rhd 7\,.\,5 \rhd 3 = 5 \rhd 7 + 2 \rhd 3$; $2 \rhd 7\,.\,11 \rhd 6 = 2 \rhd 6$; $2 \rhd 7\,.\,13 \rhd 10 = 2 \rhd 7$; $7 \rhd 2\,.\,3 \rhd 5 = 0$ u. s. f. Um nun die *allgemeine Formel* für die Complexion zweier Strecken zu gewinnen, ist ein neuer Begriff: die *relativen Disjunctionen* einzuführen. Ist nämlich allgemein der Sinn des Ausdruckes: $x, y_{,}, z_{,,}, t_{,,,}, u\,; v\,;_{,} w$ u. s. f. (74)
folgender: „In erster Linie kommt x in Betracht; gilt x nicht, so kommt y in Betracht; gilt y nicht, so kommt z in Betracht u. s. w."; ferner möge der Ausdruck $(\langle a \rangle, b)$ . . . . (75)
den Sinn haben: „In Betracht kommt nur die in $\langle\,\rangle$ eingeschlossene Größe; sie gilt aber nur dann, wenn sie kleiner ist als b"; dementsprechend bedeutet $[\langle a \rangle], b]$: „In Betracht kommt nur a, es gilt jedoch nur dann, wenn es größer ist als b"; der Ausdruck „$(\langle a \rangle, b)\,.\,[\langle a \rangle, c], x$" bedeutet dann: „a gilt, wenn es kleiner als b und zugleich größer als c ist; in jedem andern Falle gilt x". Es möge ferner in (d) $(x_1 \equiv a \pmod{\text{ъ}}$, $x_2 \equiv b \pmod{\text{ъ}}\ x_3 \equiv c \pmod{\text{ъ}})$ . . . . (76)

das Symbol (d) links oben andeuten, dass unter den verschiedenen Werten von $x_1, x_2, x_3 \ldots$ nur die zwischen d und $(d + \text{ъ})$ liegenden zu wählen sind. Es ist dann beispielsweise, wenn wir $\text{ъ} = 100$ annehmen: ${}^{(12)}(\langle 3 \rangle, 2) = (\langle 103 \rangle, 102)$ d. i. zwischen 12 und 112; ${}^{(20)}[9, 36] = [109, 36]$ d. i. zwischen 20 und 120; ${}^{(10)}(\langle 2 \rangle, 12) . [\langle 2 \rangle, 16] = (\langle 102 \rangle, 12) . [\langle 102 \rangle, 16]$; also zwischen 10 und 110 u. s. w.

Ein genauer Vergleich aller speciellen Fälle lehrt dann die Richtigkeit der folgenden allgemeinen Formel: $a_1 \triangleright a_2 . b_1 \triangleright b_2 =$
$${}^{(a_1)}[a_1, \langle b_1 \rangle] . (\langle b_1 \rangle, a_2) \triangleright {}^{(b_1)}(a_2, b_2), 0 +$$
$${}^{(b_1)}[b_1, \langle a_1 \rangle] . (\langle a_1 \rangle, b_2) \triangleright {}^{(a_1)}(a_2, b_2), 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Als Beispiel nehmen wir zwei specielle Fälle:

1.) *(Fig. 9.)* $2 \triangleright 7 . 5 \triangleright 3$. Nach der Substitution der speciellen Werte: $a_1 = 2, a_2 = 7, b_1 = 5, b_2 = 3$ in die allgemeine Formel bekommen wir:
${}^{(2)}[2, \langle 5 \rangle) . (\langle 5 \rangle, 7) \triangleright {}^{(5)}(7, 3), 0 + {}^{(5)}[5, \langle 2 \rangle] . (\langle 2 \rangle, 3) \triangleright {}^{(2)}(7, 3), 0 = [2, \langle 5 \rangle] . (\langle 5 \rangle, 7) \triangleright (7, 3 + \text{ъ}), 0 + [5, \langle 2 + \text{ъ} \rangle] . (\langle 2 + \text{ъ} \rangle, 3 + \text{ъ}) \triangleright (7, 3), 0 = 5 \triangleright 7 + (2 + \text{ъ}) \triangleright 3$, und wegen $(2 + \text{ъ}) \equiv 2 \pmod{\text{ъ}}$ weiter $= 5 \triangleright 7 + 2 \triangleright 3$.

2.) *(Fig. 10.)* $7 \triangleright 2 . 12 \triangleright 8$. Da hier $a_1 = 7, a_2 = 2, b_1 = 12, b_2 = 8$ ist, erhält man:
${}^{(7)}[7, \langle 12 \rangle] . (\langle 12 \rangle, 2) \triangleright {}^{(12)}(2, 8), 0 + {}^{(12)}[12, \langle 7 \rangle] . (\langle 7 \rangle, 8) \triangleright {}^{(7)}(2, 8), 0 = [7, \langle 12 \rangle] . (\langle 12 \rangle, 2 + \text{ъ}) \triangleright (2 + \text{ъ}, 8 + \text{ъ}), 0 + [12, \langle 7 + \text{ъ} \rangle] . (\langle 7 + \text{ъ} \rangle, 8 + \text{ъ}) \triangleright (2 + \text{ъ}, 8), 0 = 12 \triangleright (2 + \text{ъ}) + (7 + \text{ъ}) \triangleright 8 = 12 \triangleright 2 + 7 \triangleright 8$.

Nach diesen Darlegungen ist erst der Unterschied zwischen $2 \diamond 7 . 3 \diamond 5$ und $2 \triangleright 7 . 3 \triangleright 5$ völlig klar geworden. Nun ist es evident, dass die beiden Ausdrücke nicht identisch sein können und dass $2 \diamond 7 . 3 \diamond 5$ nur $= x \triangleright (x + 2 \diamond 7) . y \triangleright (y + 3 \diamond 5)$ gesetzt werden kann.

Aus dem obigen ergibt sich ohneweiters auch
$\{2 \triangleright 7 + 3 \triangleright 5\} = 2 \triangleright 7$; $\{2 \triangleright 7 + 6 \triangleright 11\} = 2 \triangleright 11$;
$\{2 \triangleright 7 + 10 \triangleright 13\} = 2 \triangleright 7 + 10 \triangleright 13$; $\{2 \triangleright 7 + 5 \triangleright 3\} = \text{ъ}$;
$\{2 \triangleright 7 + 11 \triangleright 6\} = 11 \triangleright 7$; $\{2 \triangleright 7 + 13 \triangleright 10\} = 13 \triangleright 10$ u. s. w.
Allgemein nach (18) und (77): $\{a_1 \triangleright a_2 + b_1 \triangleright b_2\} = a_1 \triangleright a_2 + b_1 \triangleright b_2 - a_1 \triangleright a_2 . b_1 \triangleright b_2$.

Discussion von Gleichungen mit mehrern Unbekannten und ihre Umkehrungen. Im allgemeinen lässt sich sagen, dass Limitationsgleichungen zu einer Analytik führen, worin gebrochene Linien, begrenzte Flächen (z. B. Rhomboide) resp. begrenzte Körper zur Darstellung gelangen, was durch die bisherigen mathematischen Mittel nicht möglich war, und dass ferner das allgemeine Princip der Behandlung von Gleichungen, wonach mit gleichen Größen gleiche Veränderungen welcher Art immer vorgenommen werden können, auch für die Limitationsgleichungen gelten muss, dass demnach Complexionen von zwei gleichen Größen auch gleich sein müssen, und dass dieselbe Zahl, gleichen Größen disjunctiv hinzugefügt, gleiche Minima resp. Maxima auf beiden Seiten liefert.

D. h. $\begin{array}{c} a = b \\ c = d \\ \hline a \,.\, c = b \,.\, d \end{array}$ und $\begin{array}{c} a = b \\ x = x \\ \hline (a, x) = (b, x) \end{array}$ resp. $[a, x] = [b, x]$. u. s. w.

Doch es würde uns zuweit führen, wollten wir alle Einzelheiten besprechen. Wir begnügen uns mit der Discussion folgender Gleichung:
$y = p + [0, x - q] \Diamond (x - r, s)$ . . . . (78)

Ist $r < s < (s + r) < q$ und sind alle Größen positiv, so stellt die Gleichung das in der *Fig. 11.* zwischen den gebrochenen Linien $A' B B'$ und $D' D C'$ eingeschlossene Gebiet vor.
Es ist für $x = 0$; $y = p + 0 \Diamond (-r) = p \Diamond (p - r)$;
für $0 < x < r$; $y = y_1 \Diamond y_2$, wobei $y_1 = p, p > y_2 > (p - r)$;
für $x = r$; $y = p$;
für $r < x < (r + s)$; $y_1 = p, p < y_2 < (p + s)$;
für $(r + s) \gtreqqless x \gtreqqless q$; $y = p \Diamond (p + s)$;
für $q < x < (q + s)$; $p < y_1 < (p + s), y_2 = (p + s)$;
für $x = (q + s)$; $y = (p + s)$
und für $x > (q + s)$; $y_1 = (p + s), y_2 > (p + s)$.

Fügen wir zu der obigen Gleichung die Bedingung hinzu, dass $x = r \Diamond (q + s)$, dann entspricht diesen Bedingungen das Rhomboid $A B C D$.

Die Umkehrung der Gleichung, d. h. x ist durch y auszudrücken. Wie die Gleichung lehrt, ist für $(x - q) \geqq 0$ oder $(y - p) \geqq 0$ die eine Grenze: $y = p + x - q$, und für $(x - r) \leqq s$ oder $(y - p) \leqq s$, die andere Grenze: $y = p + x - r$, d. h. für $p \leqq y \leqq (p + s)$ oder $y = p \Diamond (p + s)$ ist $x = (y - p + q) \Diamond (y - p + r) =$ die Umkehrung von (78) . . . . (79)
Nun stellt, wie man sich leicht überzeugen kann, die Gleichung (79) den zwischen den Linien $D' D''$ und $B'' B'$ eingeschlosssenen Streifen und in Verbindung mit der Bedingung $y = p \Diamond (p + s)$ das Rhomboid $A B C D$ vor, wie oben.

Diese partielle Lösung des Problems genügt für alle logischen Aufgaben. Eine vollständige Lösung ist schwieriger, aber mit Zuhilfenahme der relativen Disjunctionen immer ausführbar. Sie lautet für die vorstehende Gleichung: $x = (\langle y \rangle, p + s) - p + r, \text{ъ} \Diamond [\langle y \rangle, p] - p + q, - \text{ъ}$ (80)
Folgerungen. $ab = x = [0, a + \text{ƀ} - \text{ъ}] \Diamond (a, b)$; daraus durch Umkehrung: $a = x \Diamond (x + \text{ъ} - b)$ für $b \geqq x \geqq 0$ oder $x = 0 \Diamond b$, und $b = x \Diamond (x + \text{ъ} - a)$ für $a \geqq x \geqq 0$ oder $x = 0 \Diamond a$ . . . . (81)
Daher für $ab = a$ *(Fig. 2.)*: $b = a \Diamond \text{ъ}$ und für $ab = b$ *(Fig. 3.)*:

$a = b \Diamond \text{ъ}$. Für $ab = 0$ *(Fig. 4.)*: $a = 0 \Diamond (\text{ъ} - b)$ und $b = 0 \Diamond (\text{ъ} - a)$.

Von andern in der Formel: $y = [kx + p, lx + q]) \Diamond (mx + r, nx + s)$ enthaltenen Gleichungen mögen nur noch diejenigen eine Erwähnung finden, bei denen sich die Umkehrung sehr einfach gestaltet. Es sind dies:

1.) $y = [x - p, x - q] \Diamond (x - r, x - s)$. Die Gleichung stellt für $p = 2$, $q = 3$, $r = 4$, $s = 7$ den Streifen ABCD *(Fig. 12.)* vor. Beide Theile von x subtrahiert, geben: $x - y = (p, q) \Diamond [r, s]$. Zu beiden Theilen y addiert, gibt: $x = (y + p, y + q) \Diamond [y + r, y + s]$.

2.) $y = [x - p, x - q] \Diamond (r - x, s - x)$. Für $p = 2$, $q = 3$, $r = 1$, $s = 5$ gelten in der *Fig. 13.* die Felder A und B, d. h. die zwischen den Geraden $y = x - p$ und $y = r - x$ enthaltenen Felder. Die Coordinaten des Kreuzungspunktes sind dann: $x = \frac{p + r}{2}$ und $y = \frac{r - p}{2}$. Nun sind aber auch die Felder C und D von denselben Geraden eingeschlossen. Um nun auch diese Felder analytisch auszudrücken, schreiben wir

3.) $y = [x - p, x - q] \bowtie (r - x, s - x)$ d. h. = die ganze Ordinate von $-\text{ъ} \Diamond + \text{ъ}$ mit Ausnahme der endlichen $[x - p, x - q] \lhd, \rhd (r - x, s - x)$.

Dann ist die Umkehrung von 2): $x = (p + y, q + y) \bowtie (r - y, s - y)$ und die Umkehrung von 3.): $x = (p + y, q + y) \Diamond (r - y, s - y)$ u. s. f.

Fortsetzung der Syllogismen. Es lässt sich im vorhinein sagen, dass ein Resultat von der Form $ac = [o, a + c - \text{ъ}] \Diamond (a, c)$ keinen Schluss ergibt; denn es hat die Bedeutung einer „identischen" Gleichung, wie etwa in der gewöhnlichen Algebra: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ist aber das Resultalt ein von der obigen Gleichung abweichendes, dann liegt immer ein giltiger Schluss vor, mag er mit den traditionellen Ausdrücken: SaP, SeP, SiP und SoP übereinstimmen oder nicht. Als oberstes Princip bei der Beurtheilung der Giltigkeit der Schlüsse muss gelten, dass aus den Prämissen weder zuviel noch zuwenig geschlossen werde. Das eine wie das andere wäre incorrect oder besser f a l s c h, denn es kann keine partiell richtigen Schlüsse geben; dies ist ein Postulat der exacten Methode.

Die Richtigkeit der noch zu besprechenden Syllogismen: Darii, Ferio, Festino, Baroco, Disamis und Bocardo lässt sich am einfachsten aus der allgemeinen Formel (43) ableiten. Es lässt sich nämlich, wenn wir die genaue Angabe b e i d e r Grenzen außeracht lassen, $S (= a)\, i\, P (= b)$ einfach durch $ab = 0'$ ausdrücken. Der vollständige Ausdruck wäre $ab = [0', a + b - \text{ъ}] \Diamond (a, b)$. SoP wäre dann wiederzugeben durch: $ab = a_{,}$, vollständig: $ab = [0, a + b - \text{ъ}] \Diamond (a_{,}, b)$. PoS wäre dann: $ab = b_{,}$, vollständig: $ab = [0, a + b - \text{ъ}] \Diamond (a, b_{,})$.

Sind demnach die Prämissen $ab = x$, $bc = y$, so ist der Schluss nach der Formel $ac = z = xy + (a - x).(c = y)$ in Schluss 1.) Barbara, wo $x = b = a, a_{,}$, $y = c = b, b_{,}$; $z = bc + (a - b).(c - c)$. Nun ist $b = c$ oder c'; in beiden Fällen ist also nach dem Absatz unter (34): $z = c$. 2.) Celarent: $x = 0, y = c$; $ac = 0 . c + a . (c - c) = 0$. 4.) Camestres: $x = a, y = 0$; $ac = a . 0 + (a - a) . c = 0$. 5.) Darii: $x = b = a, a_{,}$, $y = 0'$; $ac = 0' . b + (a - b) . (c - 0') = 0'$. Zu beachten ist, dass nach dem vollständigen Ausdrucke $0'$ nicht größer als c, und b auch nicht größer als a sein kann. 6.) Ferio: $x = 0, y = 0'$; $ac = 0 . 0' + (a - 0) . (c - 0') = a . c_{,} = (a, c_{,})$. 7.) Festino: $x = 0, y = 0'$; identisch mit 6.). 8.) Baroco: $x = a, y = c_{,}$; $ac = ac_{,} + (a - a) . (c - c_{,}) = a . c_{,}$. 9.) Disamis: $x = 0'$, $y = c = b, b_{,}$; $ac = 0' . c + (a - 0')(c - c) = 0'$. 10.) Bocardo: $x = b_{,}$, $y = b = c, c_{,}$; $ac = b_{,}b + (a - b_{,})(c - b)$, und wenn wir nur die obere Grenze in Betracht ziehen, da dann allgemein: $u + p . q = (u + p).(u + q)$, weiter $= (a - b_{,} + bb_{,}) . (c - b + bb_{,}) = a . c_{,}$.

Die Resultate sind vielfach dadurch zustande gekommen, dass wir bald die untere bald die obere Grenze vernachlässigt haben. Nun ist aber das nur ein unvollkommenes Auskunftsmittel, wie schon daraus hervorgeht, dass der Übergang von den allgemeinen zu speciellen Werten die unentwickelte Form der Gleichung (43) nicht gestattet. Mit voller Exactheit lassen sich die Beweise nur unter Anwendung der entwickelten (Limitations-) Formel (44) liefern, was wir an einigen Beispielen erweisen wollen.

Schluss 5.) Darii M a P . . . $ab = x = b$; daraus $b = a, a_{,}$,
S i M . . . $bc = y = [0', b + c - \text{ъ}] \diamond (b, c)$.

Schlusssatz: $ac = [0, b + y - b] \diamond (b, y) + [0, a + b + c - b - y - \text{ъ}] \diamond (a - b, c - y)$.

Da aus der zweiten Prämisse folgt, dass y nicht größer sein kann als b, so erhalten wir weiter: $ac = y \diamond y + [0, a + c - y - \text{ъ}] \diamond (a - b, c - y)$; ferner $y \diamond y = y$ zur untern und obern Grenze addiert, $= [y, a + c - \text{ъ}] \diamond (a - b + y, c)$. Nun ist $a - b + y$, für y die entwickelte (Limitations-) Form substituiert, nach (57) daraus $ac = [0', b + c - \text{ъ}, a + c - \text{ъ}] \diamond (a - b + b, a - b + c, c)$ oder da $b = a, a_{,}$, daraus $a - b = \langle a - a, a - a_{,} \rangle$, weiter $= [0', a + c - \text{ъ}] \diamond (a, c)$ d. i. S i P.

Schluss 9.) Disamis: M i P . . . $ab = x = [0', a + b - \text{ъ}] \diamond (a, b)$
M a S . . . $bc = y = b$; daraus $b \leqq c$;

Schlusssatz: $ac = [0, x + b - b] \diamond (x, b) + [0, a + b + c - x - b - \text{ъ}] \diamond (a - x, c - b) = x \diamond (x, b) + [0, a + c - x - \text{ъ}] \diamond (a - x, c - b)$ und nach (57) $= [x, a + c + x - x - \text{ъ}] \diamond (a, c - b + x, a - x + b, c)$; für x die Grenzen eingesetzt, weiter $= [0', a + b - \text{ъ}]\ a + c - \text{ъ}] \diamond$

$(a, c - b + a, c - b + b, a + b - (a, b), c)$, und da $b \leqq c$, weiter $= [0', a + c - \text{ъ}] \lozenge (a, c, [a, b])$ d. h. da, wenn in „$[a, b]$“ $b > a$, in „$(a, c, [a, b])$ doch a gelten muss, weiter $ac = [0', a + c - \text{ъ}] \lozenge (a, c)$ d. i. S i P.

Schluss 10.) Bocardo. M o P ... $ab = x = [0, a + b - \text{ъ}] \lozenge (a, b_{,})$

M a P ... $bc = y = b$; daraus $b \leqq c$;

also $ac = [0, x + b - b] \lozenge (x, b) + [0, a + c - x - \text{ъ}] \lozenge (a - x, c - b) = [x, a + c - \text{ъ}] \lozenge (a, x + c - b, a - x + b, c)$ oder für x die Grenzen eingesetzt, $ac = [0, a + b - \text{ъ}, a + c - \text{ъ}] \lozenge (a, a + c - b, b + c - b, a + b - (a, b_{,}), c)$; und da $b \leqq c$, weiter $= [0, a + c - \text{ъ}] \lozenge (a, c_{,}, [b, a + b - b_{,}], c)$. Da in beiden Fällen, mag in „$[b, a + b - b_{,}]$ der eine oder der andere Wert gelten, im Ausdruck „$(a, c_{,}, [b, a + b - b_{,}], c)$ der Wert a gelten muss, ist ac weiter $= [0, a + c - \text{ъ}] \lozenge (a, c_{,})$ d. i. S o P. u. s. f.

Da sich die vierte Schlussfigur, die Galen den drei von Aristoteles aufgestellten hinzugefügt hat, bereits in der traditionellen Logik als überflüssig erweist, indem sich die Schlüsse derselben auf die erste Figur zurückführen lassen, so bleiben nur noch die Syllogismen Darapti und Felapton übrig.

Schluss 11.) Darapti. M a P ... $ab = x = b$

M a S ... $bc = y = b$.

Schlusssatz: $ac = [0, b + b - b] \lozenge (b, b) + [0, a + b + c - b - b - \text{ъ}] \lozenge (a - b, c - b) = b \lozenge b + [0, a + c - b - \text{ъ}] \lozenge (a - b, c - b) = [b, a + c - \text{ъ}] \lozenge (a, c)$ d. h. für $b > 0$, $=$ S i P; dagegen ergibt sich für $b \leqq 0$ kein Schluss. Die traditionelle Logik behauptet, der Schluss sei S i P. Ist sie dazu berechtigt? Aus den Prämissen folgt dies nicht; denn $b = 0$ widerspricht nicht den Urtheilen $ab = b$ und $bc = b$; denn nach dem Absatz unter (34) ist $a . 0 = 0$, ebenso $c . 0 = 0$. Der Schluss S i P besagt also in diesem Falle offenbar zuviel. Umgekehrt, hat b einen speciellen Wert, etwa 5, so besagt der Schluss S i P wieder zu wenig. Der Schluss Darapti ist also f a l s c h.

Dies geht auch aus der folgenden Betrachtung hervor. Schön hat Mr. P e i r c e (nach Schröder, II. Bd. S. 89) dieses Verhältnis veranschaulicht, indem er zeigt, dass für den Satz„ Alle Striche sind vertical“ $=$ S a P das II. u n d I. Quadrat *(Fig. 14.)* gilt. Für den Satz: „Einige Striche sind vertical“ $=$ S i P, gelten ebenfalls zwei Quadrate: II und III. Für den Satz: „Kein Strich ist vertical“ $=$ S e P gelten die Quadrate IV und I, und für den Satz: „Einige Striche sind nicht vertical“ $=$ S o P gilt wiederum das III. und IV. Quadrat. Doch es ist ebensowenig correct zu behaupten, dass aus den Prämissen M a P und M a S überhaupt kein Schluss ableitbar ist. Denn sobald sich das Resultat von der identischen Gleichung $ac = [0, a + c - \text{ъ}] \lozenge (a, c)$ unterscheidet, gilt der Schluss, obgleich er

†

durch die traditionellen Formen SaP, SeP, SiP und SoP nicht dargestellt werden kann. Wir werden später darauf zurückkommen.

Aus demselben Grunde wie Darapti ist der Schluss 12.) Felapton falsch; denn wir erhalten: MeP . . . $ab = 0$

MaS . . . $bc = b$; daraus $b \leqq c$.

$ac = [0, b - b] <> (0, b) + [0, a + b + c - b - ъ] <> (a, c - b) = 0 <> 0 + [0, a + c - ъ] <> (a, c - b)$. Hier ist wiederum für $b = 0$ das Resultat eine identische Gleichung; und nur unter der Bedingung $b > 0$ folgt $ac = [0, a + c - ъ] <> (a, c_i)$ d. i. SoP.

Die hypothetischen und disjunctiven Schlüsse. Dass unsere Schlussformel auch auf diese Syllogismen angewendet werden kann, ergibt sich aus folgendem:

ъ haben wir als das Gebiet des Begriffes „alles" oder „irgend etwas" definiert, dabei wurde ganz unbestimmt gelassen, ob dieses „irgend etwas" etwas Reelles oder Nicht-Reelles (Imaginäres) sei. Wenn wir also für das Gebiet des Reellen das Zeichen ε einführen, so braucht ъ mit ε nicht zusammenzufallen.

Auch der Satz: „Wenn a existiert, so existiert auch b" ist durch die bisherigen Mittel darstellbar. Nur zwingt uns die exacte Methode, den obigen, in einer gewissen Hinsicht zweideutigen Satz vollkommen zu definieren. Der Satz kann nämlich bedeuten: 1.) „Gibt es a, so gibt es immer auch b" d. i. soviel als: „Wenn irgendein a existiert, so existiert immer auch ein b". Dann ist er wiederzugeben durch $ab = a$. Oder er bedeutet: 2.) „Wenn alle a existieren, so existieren auch alle b" oder „Ist das ganze a-Gebiet reell, so ist auch das ganze b-Gebiet reell". Dann ist der Satz auszudrücken durch $ab = b$. Dementsprechend bedeutet der Satz: „Wenn b existiert, so existiert auch a" entweder soviel als 1.) „Gibt es b, so gibt es immer auch a", darzustellen durch $ab = b$, oder, wenn er soviel bedeutet wie: 2.) „Wenn das ganze b-Gebiet reell ist, so ist auch das ganze a-Gebiet reell", durch $ab = a$.

Wir erhalten demnach beispielsweise für den Schluss: α) „Gibt es a, so gibt es auch b" . . . $ab = a$; β) „Es gibt a" oder „Wenigstens einige a sind reell" . . . $a\varepsilon = [0', a + \varepsilon - ъ] <> (a, \varepsilon)$ . . . . . . (82) daraus nach Schluss Darii: $b\varepsilon = [0', b + \varepsilon - ъ] <> (b, \varepsilon)$ d. i. „dann gibt es auch b".

Abweichend davon ist der Schluss: α) „Wenn das ganze a-Gebiet reell ist, so ist das ganze b-Gebiet reell" . . . $ab = b$, β) „Das ganze a-Gebiet ist reell" . . . $a\varepsilon = a$; also nach Schluss Barbara $b\varepsilon = b$, d. h. das ganze b-Gebiet ist reell". Dagegen liefern die Prämissen α') „Wenn das ganze a-Gebiet reell ist, so ist das ganze b-Gebiet reell" . . . $ab = x = b$; daraus $a \geqq b$ und β.) „Es gibt a" . . . $a\varepsilon = y = [0', a + \varepsilon - ъ]$

$<>$ (a, ε), keinen Schluss; denn $b\varepsilon = [0, b + y - a] <> (b, y) + [0, a + b + \varepsilon - b - y - \text{ъ}] <> (b - b, \varepsilon - y) = [0, a + \varepsilon - y - \text{ъ}, b + y - a, b + \varepsilon - \text{ъ}] <> (b, \varepsilon - y + b, y, \varepsilon)$, und für y die beiden Grenzen eingesetzt unter Berücksichtigung des $a \geqq b$ weiter $b\varepsilon = [0, b + \varepsilon - \text{ъ}] <> (b, \varepsilon) \ldots$ eine identische Gleichung!

Wie die hypothetischen, so lassen sich auch die disjunctiven Schlüsse auf die besprochenen Syllogismen zurückführen, wir brauchen im Satze $ab = a$ die Größe b nur durch $\{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\}$ zu ersetzen. Die Gleichung $a\{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\} = a$ . . . . . . (83) hat dann offenbar die Bedeutung: „a ist entweder b_1 oder b_2 oder b_3 u. s. w., wobei der Begriff „entweder — oder" im allgemeinsten Sinne zu fassen ist, d. h. $b_1 b_2 = 0$, $b_1 b_3 = 0$ etc. oder auch $b_1 b_2 > 0$ u. s. w. d. i. die einzelnen Prädicatsbegriffe können einander ausschließen oder auch nicht.

Würde die Bedingung dazu treten, dass die einzelnen Prädicatsbegriffe einander ausschließen, so wäre die Bedingung auszudrücken durch: $\{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\} = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$

Dementsprechend bedeutet $a\{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\} = 0$ . . (84) „a ist weder b_1 noch b_2 noch b_3 u. s. f.

Erweiterte Syllogistik. Während sich die vorstehenden Resultate auch durch andere exacte Methoden erzielen lassen, kommen wir nun zu einem Punkte, wo sich die wahre Bedeutung und der volle Wert unserer Fundamental-Schlussformel zeigen wird. Es lässt sich nämlich die Frage aufwerfen, ob nur die von Aristoteles aufgestellten Syllogismen möglich sind, oder ob sich aus zwei Prämissen nicht auch andere Schlüsse ableiten lassen. Ich glaube, das letztere bejahen zu müssen. Es ist zwar bisher allgemein das gerade Gegentheil davon behauptet worden, aber ich hoffe im folgenden nicht nur zeigen zu können, von einem wie beschränkten Standpunkte aus die traditionelle Logik die Syllogistik bisher behandelt hat, sondern auch darzuthun, wie sich in Wirklickeit schon durch den Übergang von den allgemeinen zu speciellen Werten der Aufgabenkreis der Syllogistik ganz bedeutend erweitern lässt. Ich beginne mit einem einfachen Beispiele. Ein in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beliebtes Thema ist folgendes: „In einer Urne sind 100 Kugeln. Davon sind 20 roth, 18 grün und 31 violett bezeichnet, wobei eine doppelte oder dreifache Bezeichnung der Kugel nicht ausgeschlossen ist. 11 rothe Kugeln sind zugleich grün, und 15 grüne zugleich violett bezeichnet". Schon aus diesen einfachsten Bedingungen ergeben sich eine Menge von Aufgaben. ъ ist dabei immer = 100.

1.) Wie viele roth bezeichnete Kugeln sind zugleich violett? — Wenn man das Gebiet der rothen, grünen und violetten Kugeln der Reihe nach durch G_r, G_g, G_v ausdrückt, so erhalten wir nachstehenden Syllogismus:

$G_r\,20 . G_g\,18 = 11$ und $G_g\,18 . G_v\,31 = 15$. Daraus der Schlusssatz $G_r\,20 . G_v\,31 = z = [0, 11 + 15 - 18] \Diamond (11, 15) + [0, 20 + 18 + 31 - 11 - 15 - 100] \Diamond (20 - 11, 31 - 15) = 8 \Diamond 11 + 0 \Diamond 9 = (8 + 0) \Diamond (11 + 9) = 8 \Diamond 20$, also ein von der identischen Gleichung $G_r\,20 . G_v\,31 = [0, 20 + 31 - 100] \Diamond (20, 31) = 0 \Diamond 20$ abweichendes Resultat. Also ist der Syllogismus giltig. Man könnte nun dagegen einwenden, dass dieser Schluss aus mehrern Prämissen gewonnen wurde, indem die obigen Data eigentlich zu schreiben wären: $r . g = x$, $g . v = y$, $Q\,r = 20$, $Qg = 18$, $Qv = 31$, $x = 11$, $y = 15$ und ъ $= 100$, also 8 Prämissen!

Dies aber ist gerade so unberechtigt, als wollte man behaupten, das aus den algebraischen Gleichungen $\frac{x}{y} = 11$, $\frac{y}{z} = 15$ abgeleitete Resultat $\frac{x}{z} = 11 . 15$ sei nicht aus 2, sondern aus 4 Gleichungen: $\frac{x}{y} = a$, $\frac{y}{z} = b$, $a = 11$, $b = 15$ ermittelt worden. Die Anzahl dieser Gleichungen könnte mann ja auf diese Weise beliebig vermehren, man brauchte nur zu schreiben $\frac{x}{y} = a$, $a = b$, $b = c$, $c = 11$ u. s. f. Man sieht, dass dies zu nichts führen kann. Vielmehr haben wir es in Wirklichkeit nur mit 2 Prämissen zu thun. Denn wie in der Algebra die Gleichung, die das Verhältnis (im weitern Sinne) zwischen 2 Variablen ausdrückt, außer der beiden Variablen noch eine Größe (allgemein oder speciell) oder mehrere Größen enthält, von denen entweder alle allgemein oder alle besondere Zahlen oder auch einige allgemeine, die andern specielle Werte vorstellen; so muss es auch in der exacten Logik gestattet sein, dass die das Verhältnis zweier Begriffe ausdrückende Gleichung außer diesen Begriffen noch eine oder mehrere, specielle oder allgemeine Größen enthalte.

Es stellt also $G_r\,20 . G_g\,p = 5 + a$, $G_1\,x . G_2\,y = a$, $G_1\,x . G_2\,p = 5$ geradeso je eine Gleichung vor wie in der Algebra die Gleichungen: $y = a$, $y = 5$, $y = ax + 5\,x^2 + c\,x^3 + 3\,x^n$. Es ist eben kein Grund vorhanden, etwa die Gleichung $y = ax + 5\,x^2 + c\,x^3 + 3\,x^n$.. beispielsweise in 3 Gleichungen $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^n$, $b = 5$, $d = 3$ aufzulösen. Um die Richtigkeit dieses Vergleiches zu erkennen, mag noch einmal darauf hingewiesen werden, dass $G_r\,20$ einer variablen Größe entspricht. Denn die Größe $G_r\,20$ ist nur der Quantität nach bestimmt, während das relative Lagenverhältnis darin unbestimmt variabel bleibt. Vgl. (63). Dass an diesem Resultate auch die in den Prämissen nicht enthaltene Größe ъ $= 100$ nichts ändern kann, erhellt daraus, dass dann auch die Syllogismen: Barbara, Celarent u. a. als aus 3 Prämissen abgeleitet gelten müssten, denn die Größe ъ kommt auch bei diesen Schlüssen in den Prämissen nicht vor. Übrigens lässt sich diese Größe leicht in eine Prämisse hineinfügen, sobald wir den Begriff negativ ausdrücken, z. B. wenn wir in der obigen Aufgabe die Prämisse $G_r 20 . G_g 18 = 11$ durch $G(100 - G_r 20) . G_g 18 = 18 - 11$ ersetzen.

Nach diesen Erörterungen wird nun wohl schon der beschränkte Standpunkt der traditionellen Syllogistik klar geworden sein. Sie operiert außer der Negation nur mit zwei indefiniten Zahlen: „alle“ und „einige“. Das sind nur zwei Punkte der Zahlenlinie. Alle andern zwischen diesen oder außerhalb dieser Punkte enthaltenen indefiniten Zahlen, wie: „viele“, „wenige“, „die Mehrzahl“, „die Minderzahl“ u. a. und alle besondern Zahlen lässt sie ganz beiseite. Es ist das derselbe Standpunkt, als wollte man die ganze Algebra nur aus zwei Zahlen aufbauen.

Es ist schon im vorstehenden vielfach angedeutet worden, nach welchen Richtungen hin sich die Syllogistik weiter entwickeln lässt. Wir stellen nun einige weitern der sich neu ergebenden Schlüsse im folgenden zusammen; denn alle Möglichkeiten durchzugehen, würde uns zuweit führen. Es genüge, die neuen Probleme angedeutet und die Mittel zur Lösung derselben gegeben zu haben.

2.) Einige Bestimmungsgrößen des Gebiete-Verhältnisses sind specielle, andere allgemeine Zahlen.

$G_r 20 . G_g 18 = 11$, $G_g 18 . v = 15$. Schluss: $G_r 20 . v = z = [0, 11 + 15 - 18] \diamond (11, 15) + [0, 20 + 18 + v - 11 - 15 - 100] \diamond (20 - 11, v - 15) = 8 \diamond 11 + [0, v - 88] \diamond (9, v - 15)$. Die Bedeutung dieses Resultates wird sofort klar, wenn wir uns v als Abscisse, z als Ordinate denken, wie wir es schon oben *Fig. 11.* dargelegt haben.

Daraus ergibt sich zugleich eine dritte Aufgabe:

3.) Die Umkehrung der Gleichung. Die Lösung dieser Aufgabe ist durch die Formel (79) gegeben. Sie lässt sich aber auch unmittelbar aus dem Diagramme *(Fig. 6.)* erschließen. G_r ist $= a$, $G_g = b$ und G_v oder $v = c$ zu setzen. Es ist daraus leicht zu ersehen, dass das Gebiet c aus zwei Theilen besteht: 1.) aus $\{ac + bc\}$ und 2.) aus dem Reste, d. i. $a_I b_I c$. Dieses Gebiet aber ist offenbar in die Grenzen $0 \diamond (\text{ъ} - \{a + b\})$ eingeschlossen; es ist also $c = \{ac + bc\} + 0 \diamond (\text{ъ} - \{a + b\})$, und da $ac . bc = abc = ab . bc$, c weiter $= ac + bc - ab . bc + 0 \diamond (\text{ъ} - a - b + ab) = (ac + bc - ab . bc) \diamond (ac + bc + ab - ab . bc + \text{ъ} - a - b) = (z + 15 - 8 \diamond 11) \diamond (z + 15 + 11 - 8 \diamond 11 + 100 - 20 - 18) = (z + 7 \diamond 4) \diamond (z + 80 \diamond 77)$, genau der Umkehrung der obigen Gleichung $z = 8 \diamond 11 + [0, v - 88] \diamond (9, v - 15)$ entsprechend.

4.) Wie viele Kugeln sind zugleich roth, grün und violett bezeichnet? Antwort: $z = abc = ab . bc = [0, ab + bc - b] \diamond (ab, bc) = [0, 11 + 15 - 18] \diamond (11, 15) = 8 \diamond 11$ = dem ersten Summanden im Schlusssatze der 1. Aufgabe.

5.) Wie viele von den Kugeln sind roth und violett, aber nicht grün bezeichnet? Antwort: $z = ab_{\mathrm{I}}c = ab_{\mathrm{I}} . b_{\mathrm{I}}c = 0 <> 9 =$ dem zweiten Summanden im Schlusssatze der 1. Aufgabe. U. s. f.

E i n f ü h r u n g v o n a n d e r n i n d e f i n i t e n Z a h l e n i n d i e S y l l o g i s t i k. Ich wähle von den vielen möglichen Beispielen das einfachste:

6.) α) Die Mehrzahl von b ist a ... $ab > \frac{b}{2}$ oder $ab = \frac{1}{2} b + p$, wenn $0 < p \leqq \frac{b}{2}$. β) Die Mehrzahl von b ist c ... $bc > \frac{b}{2}$ oder $bc = \frac{1}{2} b + q$, wenn $0 < q \leqq \frac{b}{2}$ . . . . (85)
Daraus $ac = [0, \frac{1}{2} b + p + \frac{1}{2} b + q - b] <> (\frac{1}{2} b + p, \frac{1}{2} b + q) + [0, a + b + c - \frac{1}{2} b - p - \frac{1}{2} b - q - \text{ъ}] <> (a - \frac{1}{2} b - p, c - \frac{1}{2} b - q) = (p + q) <> (\frac{1}{2} b + p, \frac{1}{2} b + q) + [0, a + c - p - q - \text{ъ}] <> (a - \frac{1}{2} b - p, c - \frac{1}{2} b - q)$, nach (57) weiter $= [p + q, a + c - \text{ъ}] <> (a, c + p - q, a + q - p, c)$, ein von der identischen Gleichung $ac = [0, a + c - \text{ъ}] <> (a, c)$ abweichendes, also giltiges Resultat. U. a. m.

B. Stellungnahme gegen andere exacte Methoden der Logik.

Ich habe die vorstehenden Notizen im wesentlichen in derselben Form veröffentlicht, in der sie abgefasst wurden, bevor ich Kenntnis von der Existenz einer Litteratur auf diesem Gebiete hatte. Dies erheischt angesichts der glänzenden Leistungen anderer Forscher auf diesem Felde eine Rechtfertigung resp. Stellungnahme gegen dieselben. Es liegen mir drei Werke vor, die ich in möglichster Kürze besprechen und charakterisieren will, doch sei schon im vorhinein ewähnt, dass sich alle diese Methoden von der meinigen dadurch unterscheiden, dass ihnen der Disjunctionen-, Limitationen- und Strecken-Calcül gänzlich fehlt, und infolgedessen die Einführung der indefiniten Zahlen (mit Ausnahme von: „alle“ und „einige“) und der besondern Zahlen in die Syllogistik sowie die Weiterentwicklung derselben nach der grammatischen Seite hin nicht möglich ist.

Im besondern habe ich zu erwähnen:

1.) Das Werk von George Boole: An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London 1854. Sein System lässt sich kurz folgendermaßen charakterisieren. Er nimmt $\text{ъ} = 1$ an und identificiert die Complexion mit der Multiplication. Dadurch gewinnt er den Vortheil, dass die mathematischen Regeln über Multiplication und Division, ja jede mögliche Function sofort auf die logischen Größen angewendet werden können, doch ist er gezwungen, nur die beiden Grenzfälle von x: 0 und 1 zu-

zulassen, andere Werte sind ausgeschlossen, d. h. er muss die Gleichung $x^2 = x$ als Grundbedingung jeder logischen Interpretation algebraischer Gleichungen annehmen. In einer andern Form lautet die Gleichung $x^2 - x = x(x-1) = x(1-x) = 0$ d. i. das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten. Unter dieser Bedingung ist wirklich jede mathematische Function logisch interpretabel, nur muss sie durch „Entwicklung“ (development) auf eine gewisse Form gebracht werden, die in unserm System den Gleichungen (14), (16), (19) etc. enspricht. Die Art dieser Entwicklung ist durch die Gleichungen gegeben: $f(x) = f(1)\,x + f(0)(1-x)$ und $f(x, y) = f(1, 1)\,xy + f(1, 0)\,x(1-y) + f(0, 1)(1-x)\,y + f(0, 0)(1-x)(1-y)$ u. s. w., deren Berechtigung sich aus der Interpretation des Taylor'schen Theorems sofort ergibt. Es ist nach Taylor bekanntlich jede Function $f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{1.2} + f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$ und wegen $x^2 = x$, $f(x) = f(0) + (f'(0) + \frac{f''(0)}{1.2} + \frac{f'''(0)}{1.2.3.} + \ldots)\,x$. Daraus $f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{1.2} + \frac{f'''(0)}{1.2.3} + \ldots$ oder $f'(0) + \frac{f''(0)}{1.2} + \ldots = f(1) - f(0)$. Dies in die obige Gleichung $f(x)$ substituiert, gibt: $f(x) = f(0) + (f(1) - f(0))\,x = f(1)\,x + f(0)(1-x)$.

Doch ist Boole gezwungen, alle Coefficienten, die dem Fundamentalgesetz $x^2 = x$ nicht Genüge leisten, wie $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{0}$ u. s. w. für ungiltig ($= 0$) zu erklären, eine Consequenz der Verwechslung der Complexion mit dem Product. Es gelingt auf diese Weise Boole aus den compliciertesten Sätzen durch Ruducierung aller Gleichungen auf die 0-Form und Elimination beliebiger Größen daraus auf die einfachste Weise die Relation zweier beliebiger Begriffe zu finden; doch gelangt er nicht zu einer allgemeinen Formel des Syllogismus, sondern ist gezwungen nicht weniger als 6 allgemeine (!) Formeln aufzustellen. Ich führe sie des Vergleiches halber hier an. Boole setzt nämlich für „alle Y sind X“ ... $y = vx$, „kein Y ist X“ ... $y = v(1-y)$, „einige Y sind X“ ... $vy = vx$, und für „einige Y sind Nicht-X“ ... $vy = v(1-x)$; ferner für „alle Nicht-Y sind X“ ... $1 - y = vx$, „kein Nicht-Y ist X“ ... $1 - y = v(1-x)$, „einige Nicht-Y sind X“ ... $v(1-y) = vx$, und für „einige Nicht-Y sind Nicht-X“ ... $v(1-v) = v(1-x)$.

Lauten demnach die Prämissen allgemein: $vx = v'y$ und $wz = w'y$, so bekommt er 3 „allgemeine“ Formeln (S. 233):

I. $x = [vv'ww' + \frac{0}{0}\{vv'(1-w)(1-w') + ww'(1-v)(1-v') + (1-v)(1-w)\}]\,z + \frac{0}{0}\{vv'(1-w') + 1 - v\}(1-z)$.

II. $1 - x = [v(1-v')\{ww' + (1-w)(1-w')\} + v(1-w)w' + \frac{0}{0}\{vv'(1-w)(1-w') + ww'(1-v)(1-v') + (1-v)(1-w)\}]\,z + [v(1-w)w' + \frac{0}{0}\{vv'(1-w') + 1 - v\}](1-z)$.

III. $vx = \{vv'ww' + \frac{0}{0}vv'(1-w)(1-w')\}\,z + \frac{0}{0}(1-w')(1-z)$.

Für die Prämissen $vx = v' y$ und $wz + w'(1-y)$ ergeben sich weitere 3 Gleichungen:

IV. $x = [vv'(1-w)w' + \frac{0}{0}\{ww'(1-v) + (1-v)(1-v')(1-w) + v'(1-w)(1-w')\}]z + [vv'w' + \frac{0}{0}\{(1-v)(1-v') + v'(1-w')\}](1-z)$.

V. $1-x = [ww'v + v(1-v')(1-w) + \frac{0}{0}\{ww'(1-v) + (1-v)(1-v')(1-w) + v'(1-w)(1-w')\}]z + [v(1-v') + \frac{0}{0}\{v'(1-w') + (1-v)(1-v')\}](1-z)$.

VI. $vx = \{vv'(1-w)w' + \frac{0}{0}vv'(1-w)(1-w')\}z + \{vv'w' + \frac{0}{0}vv'(1-w')\}(1-z)$.

Die Complicirtheit dieser Formeln im Vergleich zu unserer Fundamental-Gleichung (44) springt in die Augen. Außerdem scheint mir die Aufstellung von sechs statt einer allgemeinen Gleichung keine correcte Lösung des Problems zu sein abgesehen davon, dass die Boole'schen Formeln für specielle Werte nicht benutzt werden können.

2.) Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logik) von Dr. Ernst Schröder. Leipzig 1890—92.

Im Schröder'schen System entspricht unserer Gleichung $ab = a$ die „Subsumtion" $a \Subset b$, d. h. a wird von b eingeschlossen, so dass $a \leqq b$. Auch Schröder kommt zu keiner scharfen Scheidung der Complexion und des Productes, indem er, obgleich er sie begrifflich unterscheidet, doch statt eines Complexions- das Multiplicationszeichen verwendet. Das Product hat dann den Sinn, wie in unserm System die Complexion, dass beide Elemente zugleich Geltung haben sollen. Ferner sind dem Schröder'schen sowie dem Boole'schen System Elemente 2ter Ordnung eigen, d. h. er fasst „Urtheile" selbst wieder als Einheiten höherer Ordnung auf und wendet auf sie dieselben Gesetze an wie auf die Einheiten erster Ordnung, die Begriffe. In unserm System ist dies, wie wir gesehen haben, durch die Einführung der Größe ε (Gebiet des Reellen) überflüssig. Schröder leitet alle Theoreme von dem Fundamentalsatz: $(b \Subset a)(c \Subset b) \Subset (c \Subset a)$ ab, d. h. er kann den Schluss Barbara nicht beweisen, er gilt ihm selbst als Axiom. Noch ist zu bemerken, dass Schröder den Begriff Nicht-a durch a_1 und die Negierung eines Satzes durch einen verticalen Strich quer durch das Gleichheits- resp. Subsumtionszeichen ausdrückt. Auf dieser Grundlage ist es Miss Ladd, einer „brilliant young lady-mathematician", nunmehr Frau Prof. Fabian Franklin gelungen, die 15 (?) giltigen Syllogismen auf einen gemeinsamen Ausdruck gebracht zu haben. Es ist dies die Subsumtion: $(\alpha\beta = 0)(\beta_1\gamma = 0) \Subset (\alpha\gamma = 0)$, resp. die Incosistenz: $(\alpha\beta = 0)(\beta_1\gamma = 0)(\alpha\gamma \neq 0) = 0$. Wenn nun Schröder zu dieser Formel bemerkt: „Ich hege die Überzeugung, dass es nicht möglich sein wird, die Syllogistik jemals in schönerer Weise zu erklären, als es durch

Miss Ladd begründet ist; in weniger als eine Formel lassen die Syllogismen sich zuverlässig nicht comprimieren, und dabei an Durchsichtigkeit und Einfachheit die Miss Ladd'sche Formel noch zu übertreffen, erscheint undenkbar"; so sind diese Worte ganz geeignet, von ähnlichen Versuchen abzuschrecken. Trotzdem glaube ich, dass meiner Schlussformel der Vorzug gebüre, u. zw. aus folgenden Gründen:

a) Die Miss Ladd'sche Formel schließt nur die 4 Punkte SaP, SeP, SiP und SoP in sich, während alle andern Prämissen ausgeschlossen sind, und auch dies in einer Form, die sich zur Lösung von Aufgaben nicht eignet. Denn in der Ladd'schen Formel muss erst durch mannigfache Operationen wie: Umstellungen, Substitutionen anderer Größen untersucht werden, ob 2 gegebene Prämissen darin enthalten sind oder nicht. Eine Erweiterung der Syllogistik durch Einführung von andern indefiniten Zahlen sowie der besondern Zahlen ist also auch hier nicht möglich. In diesem Sinne glaube ich meiner Formel den Charakter größerer Allgemeinheit und Brauchbarkeit zuschreiben zu müssen, da sie alle erdenklichen Prämissen, also nicht nur 4 Punkte, sondern die gesammte Zahlenlinie in sich begreift in einer Form, die zugleich die vollständige Lösung jedes beliebigen syllogistischen Problems (bei 2 Prämissen) darstellt.

Dabei ergibt sich zugleich die vollständige Elimination des Mittelbegriffes b (d. h. nicht nur die Entfernung desselben aus der Combination einer höhern Ordnung, sondern das Verschwinden desselben auch in der Form einer Complexion der 1. Ordnung) in allen Fällen, wo es überhaupt möglich ist, einfach durch Reducierung nach Einsetzung der speciellen Werte der Prämissen.

b) Setzt meine Formel eine bedeutend geringere Anzahl von Theoremen voraus, — Schröder behandelt die Syllogistik im 2. Bande seiner Vorlesungen, Seite 239 ff., — so dass sich meine Methode besser als irgendeine andere zum Schulgebrauche eignen dürfte. Denn abgesehen von dem beschränkten Standpunkte der traditionellen Syllogistik erscheint die Einführung einer exacten Methode in die Schulen schon aus dem Grunde geboten, da sich dadurch eine Verbindung der bisher getrennten Gebiete der Mathematik und Logik herstellen ließe.

3.) Dr. Gottlob Frege's Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle a. S. 1879.

Frege's System ist ein Mittelding zwischen graphischer Darstellung und Analytik. Er bezeichnet durch die *Fig. 15.*, dass unter den 4 Möglichkeiten: „1.) a wird bejaht und b wird bejaht, 2.) a wird bejaht und b wird verneint, 3.) a wird verneint und b wird bejaht, 4.) a wird verneint und b wird verneint" die 3. dieser Möglichkeiten nicht stattfinde. *Fig. 15.* entspricht also unserm Nicht-$a_1 b = (\text{ъ} - a_1 b) = \varepsilon = ab + ab_1 +$

$a_I b_I$. Denn aus der *Fig. 5.* geht hervor, dass bei sich durchkreuzenden Gebieten im allgemeinen 4 Möglichkeiten vorhanden sind. Punkt 1. bedeutet beispielsweise einen Fall, wo a und b bejaht sind, Punkt 2. die 2[te], Punkt 3. die 3[te] und Punkt 4. die 4[te] Möglichkeit. Für den Fall, dass $\varepsilon = \text{ъ}$, ergibt sich sofort: $\text{ъ} - a_I b = \text{ъ}$, $a_I b = 0$ und $\text{ъ} = ab + ab_I + a_I b_I = ab + (a + a_I)\, b_I = ab + b_I$; daher $\text{ъ} - b_I = ab$, d. i. $ab = b$. Demnach bedeutet das Frege'sche Diagramm *(Fig. 16.)*: unser „Nicht-(c Nicht-Nicht-$a_I b$)" $= \text{ъ} - c\,(\text{ъ} - (\text{ъ} - a_I b)) = \text{ъ} - a_I bc = \varepsilon$, d. h. der Fall wird geleugnet, wo a verneint, b und c bejaht würden. Ähnlich ist das Frege'sche Diagramm *(Fig. 17.)* in unserer Formelsprache auszudrücken: $\text{ъ} - c_I \,.\, a_I b = \varepsilon$ d. h. der Ausdruck leugnet den Fall, wo b bejaht wird, a und c aber verneint werden.

Auch die Verneinung, die Frege durch Anbringung eines kleinen senkrechten Striches an der untern Seite des wagrechten oder „Inhaltsstriches" bezeichnet, lässt sich einfacher in unserm System ausdrücken. *Fig. 18.*, welche bedeutet, „dass der Fall, wo b zu bejahen und die Verneinung von a zu verneinen ist, nicht stattfindet", ist in unserer Formelsprache auszudrücken durch: $\text{ъ} - (\text{ъ} - a_I)\, b = \text{ъ} - ab = a_I b + ab_I + a_I b_I = \varepsilon$. Ebenso ist *Fig. 19.* in unserer Formelsprache $= \text{ъ} - a_I b_I = ab + a_I b + ab_I = \varepsilon$. d. h. „beide, a und b, können nicht verneint werden". Es bleibt nur die Möglichkeit übrig: 1.) a wird bejaht und b wird bejaht, 2.) a wird bejaht und b wird verneint, 3.) a wird verneint und b wird bejaht. U. s. w.

Zu einer einheitlichen allgemeinen Schlussformel gelangt Frege nicht.

C. Weitere Verallgemeinerungen. Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Bisher war die Rede von zwei, höchstens drei Begriffen. Es ist nun ein Vorzug der exacten Methode, dass sie mit Nothwendigkeit zu weitern Verallgemeinerungen führt. Wir geben im folgenden die 2 wichtigsten Principien unseres Systems: Das Gebiet der Summe von n Elementen und die Limitationsformel für die Complexion von n Elementen. Für 3 Elemente erhalten wir nach (18):

$$\{a + b + c\} = \{\{a + b\} + c\} = \{a + b\} + c - \{a + b\}\, c = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)\, c = a + b + c - ab - ac - bc + abc \quad . \quad (86)$$

Für 4 Elemente folgt daraus: $\{a + b + c + d\} = \{\{a + b + c\} + d\} = \{a + b + c\} + d - \{a + b + c\}\, d = a + b + c + d - ab - ac - bc + abc - ad - bd - cd + abd + acd + bcd - abcd$.

Auf diese Weise ist leicht zu beweisen, dass allgemein: $\{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n\} = \Sigma (C^1 - C^2 + C^3 - \ldots (-1)^{n-1} C^n) \langle a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \rangle$ (87)

Die Limitationsformel ist dann entsprechend der Formel (24): $\{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n\} = [a_1, a_2, a_3, \ldots a_n] <> (\text{ъ}, a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n)$ (88)

Die Limitationsformel für die Complexion dreier Elemente ergibt sich aus folgender Betrachtung: Ist in *Fig. 20.* p = das Gebiet des Kreises, das das Gebiet von $\{a + b + c\}$ nicht überschreiten darf, also $p = 1. + 2. + 3.$, und ist ferner $a = 2. + 3.$, $b = 3. + 1.$, $c = 1. + 2.$, dann bewirkt die geringste Vergrößerung irgendeines der Elemente a, b, c ein positives $a\,b\,c > 0$. Nun folgt aus den obigen 3 Gleichungen: $a + b + c = 2\,(1. + 2. + 3.) = 2\,p$; also $abc = [0, a + b + c - 2\,p] <> (a, b, c)$, und ohne Einschränkung auf ein bestimmtes Gebiet p: $abc = [0, a + b + c - 2\,\text{ъ}] <> (a, b, c)$ . . . . (89)

Aus der *Fig. 20* ist ferner zu entnehmen, dass $1. = bc$, $2. = ac$, $3. = ab$. Es ist also $a + b + c = 2\,(ab + ac + bc)$; daraus $\{a + b + c\} = 2\,(ab + ac + bc) - (ab + ac + bc) + abc = p + abc$, übereinstimmend mit unserer Voraussetzung, dass für $abc = 0$, $p = \{a + b + c\}$.

Man kann die Formel (89) auch direct aus den Formeln (86) und (88), oder umgekehrt die Formel (88) (hier für 3 Elemente) aus (86) und (89) herleiten.

Es ist nämlich $\{a + b + c\} = a + b + c - ab - bc - ac + abc$ (in Limitationsform) $= a + b + c - [0, a + b - \text{ъ}] <> (a, b) - [0, a + c - \text{ъ}] <> (a, c) - [0, b + c - \text{ъ}] <> (b, c) + [0, a + b + c - 2\,\text{ъ}] <> (a, b, c)$. Reducieren wir die Gleichung auf eine einzige Limitation nach (57), so erhalten wir als obere Grenze nach (48): $a + b + c - (a, b) - (a, c) - (b, c) + (a, b, c) = [a, b, c]$, als untere Grenze $a + b + c - [0, 2a + 2b + 2\,c - 3\text{ъ}] + [0, a + b + c - 2\text{ъ}.]$ Wenn wir beachten, dass für $a + b - \text{ъ} \geqq 0, a + c - \text{ъ} \geqq 0, b + c - \text{ъ} \geqq 0$ zugleich $a + b + c - 2\,\text{ъ} \geqq 0$ ist, ferner dass für den andern Fall: $a + b - \text{ъ} \leqq 0, a + c - \text{ъ} \leqq 0, b + c - \text{ъ} \leqq 0$ zugleich $a + b + c - 2\,\text{ъ} \leqq 0$ sein muss, dass weiters allgemein, wenn in $q - [k, l] + [m, n]$ der absolute Wert von $|m - n| \leqq |k - l|$ und wenn k gilt, m gelten muss, wenn l, entsprechend n gilt, so ist der obige Ausdruck $q - [k, l] + [m, n] = (q - k + m, q - l + n)$; . . . . (90)

umgekehrt: für $|m - n| \geqq |k - l|$ würden wir erhalten: $q - [k, l] + [m, n] = [q - k + m, q - l + n]$ . . . . (91)

Daher die untere Grenze $= (a + b + c - 0 + 0, a + b + c - 2\,a - 2\,b - 2\,c + 3\,\text{ъ} + a + b + c - 2\,\text{ъ}) = (a + b + c, \text{ъ})$; also $\{a + b + c\} = (a + b + c, \text{ъ}) <> [a, b, c] = [a, b, c] <> (a + b + c, \text{ъ})$, übereinstimmend mit (88).

Ebenso findet man für 4 Elemente *(Fig. 21.)*; $p = 1. + 2. + 3. + 4.$, $a = 2. + 3. + 4. = abc + abd + acd$, $b = 1. + 3. + 4. = abc + abd + bcd$, $c = 1. + 2. + 4. = abc + acd + bcd$, $d = 1. + 2. + 3. = abd + acd + bcd$. Daraus: $a + b + c + d = 3\,(1. + 2. + 3. + 4.) = 3\,p$, oder $a + b + c + d = 3\,(abc + abd + acd + bcd)$. Aus der *Fig. 21.* ist ferner zu entnehmen, dass $ab = 3. + 4.$, $ac = 2. + 4.$, $ad = 2. + 3.$, $bc = 1. + 4$, $bd = 1. + 3.$, $cd = 1. + 2.$, also $\Sigma\, C^2 \langle a, b, c, d\rangle = 3\,p$. Daraus $\{a + b + c + d\} = 3\,p - 3\,p + p - abcd$, d. h. der Voraussetzung gemäß für $abcd = 0$, $\{a + b + c + d\} = p$. Die geringste Vergrößerung irgendeines von den vier Elementen bewirkt ein positives $abcd > 0$. Daher $abcd = [0, a + b + c + d - 3\,p] <> (a, b, c, d)$, und allgemein: $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n = [0, a_1 + a_2 + a_3 + \ldots (n - 1)\,p] <> (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ . . . . (92)
Ohne die Einschränkung, dass $\{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n\}$ nicht größer sein darf als p, ist darin $p = ъ$ zu setzen.

Man sieht, welch ungeahnte Erweiterung der Aufgabenkreis dadurch wieder erfährt. Doch ist es natürlich unmöglich, hier auf eine Besonderung dieser Probleme einzugehen. Ich greife daraus nur noch ein Gebiet heraus, das wir bisher nur gelegentlich gestreift, und das ein Correlat zu der oben (85) besprochenen Partie von den indefiniten Zahlen bildet und ebenso eine Erweiterung nach der grammatischen Seite hin bedeutet. Denn wie die Begriffe „alle“ und „einige“, wie 2 Punkte eine Gerade, eine Dimension fixieren, die außer den genannten Punkten noch eine unbeschränkte Menge anderer enthält, so legen auch die Begriffe der „Verneinung„ und „Bejahung“ eine Dimension fest, die außer diesen beiden Punkten eine unbeschränkte Anzahl Zwischenpunkte enthält, wie: wahrscheinlich, vielleicht, sicherlich, gewiss u. s. w. Die Behandlung dieser Begriffe d. i. die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist also ein wesentlicher Theil der exacten Logik. Die traditionelle Logik lässt natürlich alle diese Zwischenpunkte beiseite. Eigenthümlich ist es, dass das System Schröders nicht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung geführt hat. Boole behandelt diese Partie ausführlich, aber er kennt nicht die Disjunctionen-Rechnung. Es ist dies ein ähnlicher Gedanke, wie die Erfindung des x für eine unbekannte Größe. Ein Vorzug unseres Systems ist es, dadurch gerade für dieses Gebiet die einfachste Lösung gefunden zu haben.

Der Wahrscheinlichkeits-Calcül. Das Grundprincip der mit unserm System der exacten Logik verknüpften Wahrscheinlichkeitsrechnung ist folgendes: „die Wahrscheinlichkeit, dass ein a (Subj.) ein c (Präd.) ist“ $= w = \frac{a\,.\,c}{a}$ . . . . (93)
d. h. = der Complexion des Subjects- und Prädicats-Gebietes, dividiert durch das Gebiet des Subjectes. Denn die möglichen Fälle sind a =

das Gebiet des Subjectes, das, wie wir später zeigen werden, zugleich das Gebiet des Satzes ist. Die günstigen Fälle sind a . c.

Daraus folgt unmittelbar „die Wahrscheinlichkeit, dass ein c (Subj.) a (Präd.) ist“ . . . $w = \frac{a . c}{c}$.

Folgerungen: 1.) „Die Wahrscheinlichkeit, dass etwas a ist“ (das Gebiet von „etwas“ $= \text{ъ}) = w = \frac{a . \text{ъ}}{\text{ъ}} = \frac{a}{\text{ъ}}$ . . . . (94)

2.) Sind alle a (Subj.) c (Präd.), so ist die Wahrscheinlichkeit, dass a ein b ist, da $ac = a$, . . . $w = \frac{ac}{a} = \frac{a}{a} = 1$.

3.) Ist $G_a\, 20 . G_c\, 30 = 7$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein a ein b ist, . . . $w = \frac{7}{20}$, und dass ein c ein a ist, . . . $w = \frac{7}{30}$. Ist kein a (Subj.) c (Präd.), so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein a ein c ist, . . . $w = \frac{0}{a} = 0$. Ist für $G_a\, 20 . G_c\, 30$ die Limitation: $5 <> 11$ gefunden worden, so ist auch der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eine Limitation, u. zw. 1.) dafür, dass ein a ein c ist . . . $w = \frac{5 <> 11}{20} = \frac{1}{4} <> \frac{11}{20}$, 2.) dass ein c ein a ist, . . . $w = \frac{5 <> 11}{30} = \frac{1}{6} <> \frac{11}{30}$.

Aus dem obigen Grundprincipe folgt ferner

4.) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein a zugleich c und d und e ist, . . . $w = \frac{a . c . d . e}{a}$ . . . . (95)
daher die Wahrscheinlichkeit, dass abc zugleich bc und cd und ace ist, . . . $w = \frac{abc . bc . cd . ace}{abc} = \frac{a(2)\, b(2)\, c(4)\, de}{abc} = \frac{a . b . c . d . e}{a . b . c}$.

Eine Abkürzung des Bruches ist, da Zähler und Nenner Complexionen sind, natürlich nicht gestattet.

5.) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein a entweder c_1 oder c_2 oder c_3 . . . ist, „entweder-oder“ in der weitesten Bedeutung genommen, dass sich die Theilprädicate ausschließen oder auch nicht, . .
$w = \frac{a . \{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\}}{a}$ . . . . (96)
Daher die Wahrscheinlichkeit, dass ein a entweder c oder c_I ist, . . . $w = \frac{a\{c + c_I\}}{a} = \frac{a\text{ъ}}{a} = \frac{a}{a} = 1$. Schließen sich die Theilprädicate aus, dann ändert sich die Formel (96) in . . . $w = \frac{a . (c_1 + c_2 + c_3 + \ldots)}{a}$ . . (97)

7.) Die Wahrscheinlichkeit, dass entweder a_1 oder a_2 oder a_3 . . . ein c ist, . . . $w = \frac{\{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\}\, c}{\{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\}}$ . . . . (98)

8.) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein a nicht ein c ist, oder dass kein a (Sub.) c (Präd.) ist, . . . $w_I = \frac{ac_I}{a} = \frac{a(\text{ъ} - c)}{a} = \frac{a - ac}{a} = 1 - \frac{ac}{a}$, also $w_I = 1 - w$ . . . . (99)
Die Wahrscheinlichkeit, dass a weder c_1 noch c_2 noch c_3 . . . ist . . . $w_I = \frac{a\{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\}_I}{a} = \frac{a(\text{ъ} - \{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\}}{a} = 1 - w$. Die Wahrscheinlichkeit, dass a nicht zugleich c und d und e ist, . . . $w_I = \frac{a(c\,d\,e)_I}{a} = \frac{a(\text{ъ} - c\,de)}{a} = 1 - w$,

9.) Ist nun allgemein $w_1 = \frac{ab}{a}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein a ein b ist; $w_2 = \frac{ac}{a}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein a ein c ist; $w_3 = \frac{ad}{a}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein a ein d ist u. s. w.; und wollen wir nun daraus die Werte der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit berechnen, so zwingt uns wieder die exacte Methode scharf zu unterscheiden zwischen dem Falle 1.), wo die obigen a in jedem Satze indentisch sind, und dem Falle 2.), wo in jedem Satze ein anderes a verstanden werden kann. In ersterm Falle ist die Wahrscheinlichket, dass a (Subj.) b und e und d zugleich ist $= W = \frac{abcd}{a} = \frac{ab \,.\, ac \,.\, ad}{a} = \frac{[0, ab + ac + ad - 2\,a] <> (ab, ac, ad)}{a}$, denn p hier $= a$; W ist weiter $= \left[\frac{0}{a}, \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a} + \frac{ad}{a} - 2\,\frac{a}{a}\right] <> \left(\frac{ab}{a}, \frac{ac}{a}, \frac{ad}{a}\right) =$ $[0, w_1 + w_2 + w_3 - 2] <> (w_1, w_2, w_3)$ . . . . (100)

Im zweiten Falle sind die günstigen Fälle $ab \times ac \times ad$, und die möglichen = der Anzahl der Variationen der verschiedenen a mit Wiederholungen $= a^3$; also $W = \frac{ab \times ac \times ad}{a^3} = \frac{ab}{a} \times \frac{ac}{a} \times \frac{ad}{a} = w_1 \times w_2 \times w_3$ u. s. f. . . . . (101)

(Fortsetzung folgt.)

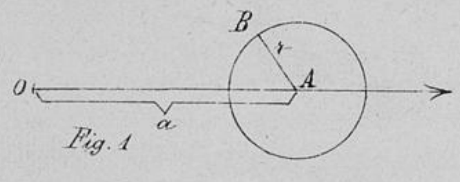

Fig. 1

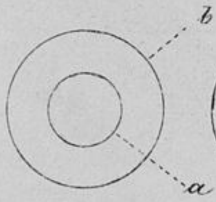

Fig. 2.

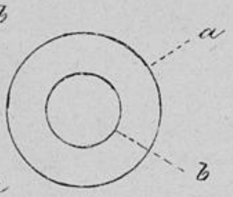

Fig 3.

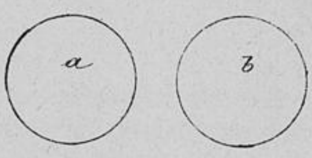

Fig 4

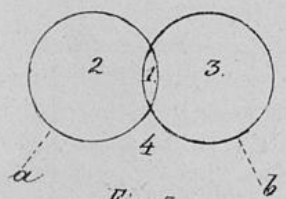

Fig. 5

$1. = a\,b$
$2. = a\,b_1$
$3. = a_1\,b$
$4. = a_1\,b_1$

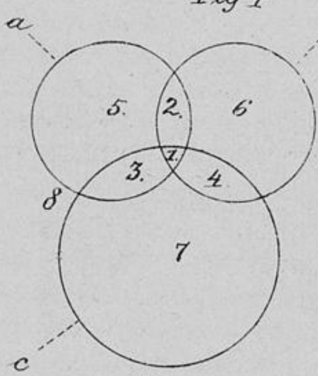

Fig. 6.

$1. = abc$
$2+1. = ab$
$3+1. = a\,c$
$4+1. = b\,c$
$2. = abc_1$
$3. = ab_1c$
$4 = a_1bc$
$5 = ab_1c_1$
$6 = a_1bc_1$
$7 = a_1b_1c$
$8 = a_1b_1c_1$

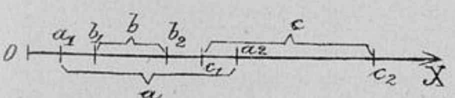

Fig. 7.

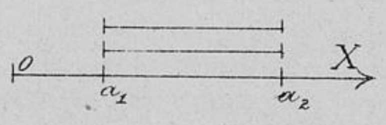

Fig. 8.

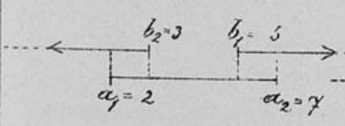

Fig. 9.

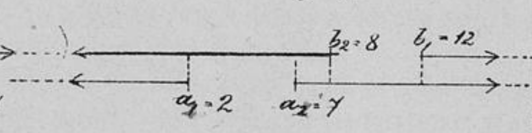

Fig. 10.

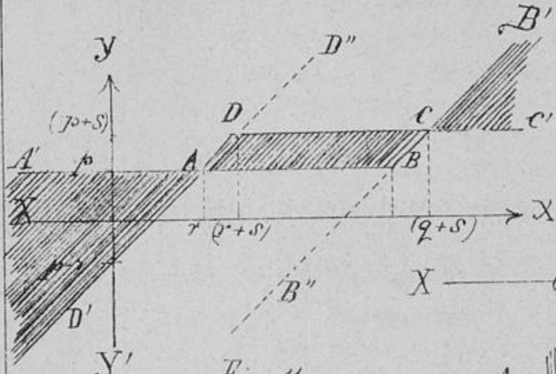

Fig. 11.

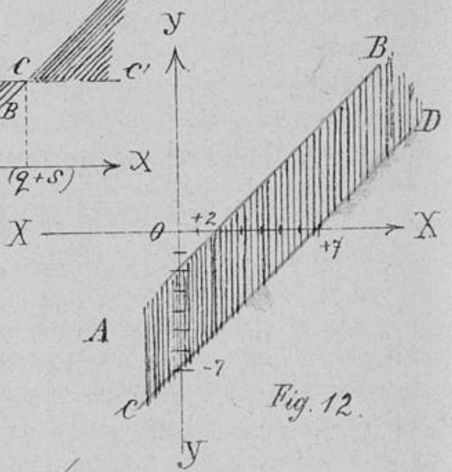

Fig. 12.

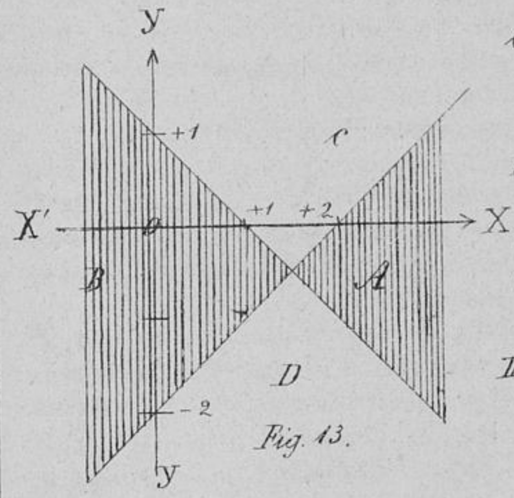

Fig. 13.

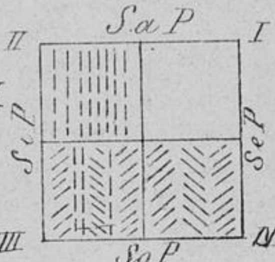

Fig. 14.

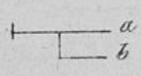

Fig. 15.

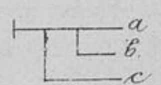

Fig. 16.

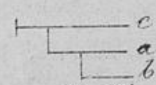

Fig. 17.

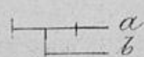

Fig. 18.

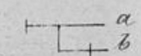

Fig. 19.

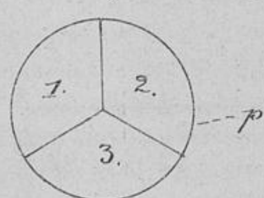

Fig. 20.

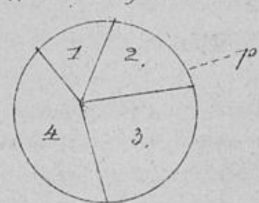

Fig. 21.