

Zur Methodik des Rechenunterrichts in höheren Schulen.

Die Ziele des Rechenunterrichts sind zum Teil formaler, zum Teil realer Natur.

In formaler Hinsicht erstrebt der Rechenunterricht hauptsächlich eine Ausbildung der Denkhätigkeit. Die realen Ziele desselben bestehen darin, daß der Schüler die Fähigkeit erlange, die von ihm erlernten Rechenoperationen auf die mannigfachen Verhältnisse des praktischen Lebens anzuwenden.

Beide, die formale und die reale Seite des Rechenunterrichts, sind untrennbar mit einander verbunden und von gleicher Wichtigkeit. Doch ist es einleuchtend, daß je nach den Zwecken, welche eine Schule verfolgt, die eine oder die andere Seite mehr in den Vordergrund treten kann. Es ist ganz natürlich, daß in der Volksschule, deren Zöglinge meistens unmittelbar in das praktische Leben übertreten, hauptsächlich mit Rücksicht auf dieses die Ziele des Rechenunterrichts bestimmt werden. Die formale Seite des letzteren tritt hierbei zurück; sie wird auf das Notwendigste beschränkt. Für die höheren Schulen aber fordern die Lehrpläne vom 31. März 1882: „Der elementare Rechenunterricht in den unteren Klassen ist so zu erteilen, daß er mit dem darauf folgenden arithmetischen Unterrichte nicht nur im Einklang steht, sondern denselben vorzubereiten und zu unterstützen geeignet ist.“ Um dem zu genügen, darf vor allen Dingen die formale Seite des Rechenunterrichts nicht vernachlässigt werden.

Es ist für den Rechenunterricht an höheren Schulen mancherlei von Wichtigkeit, was für die Volksschule entbehrlich ist. Die Beantwortung der Fragen: Was ist zu behandeln? und wie ist es zu behandeln? wird also in manchen wesentlichen Punkten von dem abweichen müssen, was für den Volksschulunterricht als zweckmäßig erkannt worden ist. Nun liegt der Rechenunterricht an den Vorschulen ausschließlich und an den höheren Schulen zum großen Teil in den Händen von Lehrern, deren methodische Vorbildung im Seminar nur die Ziele der Volksschule ins Auge faßte. Es ist daher nicht zu verwundern, daß die besonderen Forderungen des Rechenunterrichts an höheren Schulen noch lange nicht hinreichende Beachtung finden. Ein Beweis dafür, daß dies wirklich so ist, liegt darin, daß noch vielfach dem Rechenunterricht an den höheren Schulen Rechenbücher zu Grunde

gelegt werden, welche den speziellen Bedürfnissen dieser Schulen gar keine Rechnung tragen.*)

Im Hinblick auf diese Thatsachen kann es nicht überflüssig erscheinen, zu erwägen, in welchen Punkten der Rechenunterricht an höheren Schulen sich dem Einflusse der an Volksschulen gebräuchlichen Methode des Rechenunterrichts zu entziehen hat. Diese Erwägungen, welche im Folgenden angestellt werden sollen, werden sich I. auf die Auswahl des Lehrstoffs, II. auf die Behandlung desselben erstrecken müssen.

I. Über die Auswahl des Lehrstoffes.

1. Die Rechnung mit Klammern.

In der Arithmetik, soweit dieselbe sich mit allgemeinen Größen beschäftigt, können die geforderten Rechnungen in der Regel nicht sofort ausgeführt werden, und man muß sich dann begnügen, die einzelnen Operationen durch die gebräuchlich gewordenen Operationszeichen anzudeuten. Daraus entspringt oft die Notwendigkeit, solche zusammengesetzten Ausdrücke, deren Wert erst durch gewisse Rechenoperationen ermittelt werden soll, als schon bekannte Größen in die Rechnung einzuführen. Bekanntlich bedient man sich hierzu der Klammern. Wie wichtig die Übung im richtigen Gebrauch der Klammern ist, und wie viele Übung nothwendig ist, um die Schüler zur Sicherheit darin zu bringen, weiß jeder Lehrer der Mathematik. Hier kann und muß der Rechenunterricht helfend eintreten dadurch, daß auch in ihm die Rechnung mit Klammern berücksichtigt wird. Auch für den Rechenunterricht selbst hat die Einführung der Klammern einen bedeutenden praktischen Wert insofern, als sich dadurch die zur Wiederholung und Befestigung so notwendige Verknüpfung der Grundrechnungsarten sehr mannigfach und das Interesse der Schüler erregend gestalten läßt. Die Bedeutung der Klammern aufzufassen, ist für den Standpunkt des Sextaners keine zu hohe Anforderung; ja, die einfachsten Formen zu verstehen, kann schon dem Vorschüler zugemutet werden.**). Die Forderung, den Gebrauch der Klammern schon im Rechenunterricht einzuüben, ist nicht neu; doch scheint man dieser Forderung im allgemeinen noch nicht genügend nachzukommen, da manche der an unseren höheren Schulen gebrauchten Rechenbücher die Klammern ganz unberücksichtigt lassen und

*) Eine vollständige Übersicht darüber, welche Rechenbücher an den höheren Schulen gebraucht werden, ist schwer zu erlangen, da in den Programmen die eingeführten Bücher auch seit dem Erlaß der Ministerialverfügung vom 7. Januar 1885 nicht immer aufgezählt werden. Sicher ist, daß unter anderen auch benutzt werden die Böhme'schen Rechenbücher, die Koch'schen Aufgabenhefte und das Rechenbuch von Steuer. Diese drei Rechenwerke suchen in erster Linie den Bedürfnissen der Volksschulen sowie der Mittelschulen und höheren Töchterschulen, nicht aber denjenigen der höheren Lehranstalten zu genügen.

***) Diesem Grundsätze entsprechend enthalten mehrere der neuerdings für die Vorschule erschienenen Rechenbücher Aufgaben mit Klammern, z. B. der von Berliner Vorschullehrern bearbeitete „Übungsstoff für den Rechenunterricht in Vorschulen“; ebenso „Mertens, Vorstufe zu den Kleinpaul'schen Aufgaben zum praktischen Rechnen“ und „Vogel, Rechenbuch für die Vorschule.“ Leider ist in den beiden zuletzt genannten Büchern der Gebrauch der Klammern nicht überall korrekt. Die Schreibweise „ $(2 \times 3) + 4$ “ oder „ $(18 : 6) + 5$ “ (Mertens, Vorstufe, S. 18) entspricht nicht dem in der Mathematik allgemein angenommenen Gebrauche, daß Produkte und Quotienten, welche Glieder eines Polynoms sind, nicht in Klammern eingeschlossen werden. In dem Buche von Vogel finden sich auf S. 44 Aufgaben wie folgende: $(25 \times 39) - 129 : 47$. Gemeint ist aber die Aufgabe: $(25 \times 39 - 129) : 47 = 18$.

auch in denjenigen Rechenbüchern, welche Übungsbeispiele für die Rechnung mit Klammern enthalten, das Übungsmaterial meistens nicht ausreichend ist.

2. Die Bruchrechnung.

In Beziehung auf die Rechnung mit gemeinen Brüchen ist vielfach die Ansicht ausgesprochen worden, daß dieselbe nach Einführung der dezimalen Einteilung unserer Münzen, Maße und Gewichte an praktischem Werte verloren habe und daher auf das Notwendigste zu beschränken sei. Hiergegen läßt sich nichts sagen, wenn der Rechenunterricht es als sein Hauptziel betrachtet, den Bedürfnissen des praktischen Lebens zu genügen. Soll derselbe aber den arithmetischen Unterricht unterstützen und ihm zur Vorbereitung dienen, so wird das Zurücktreten der Rechnung mit gewöhnlichen Brüchen nicht zu billigen sein.

In der Arithmetik haben, soweit es sich um die Rechnung mit allgemeinen Größen handelt, der ein Zahlensystem nicht zu Grunde gelegt werden kann, die Dezimalbrüche gar keine Bedeutung; sie kommen erst da zur Anwendung, wo es sich um numerische Berechnungen handelt. Dagegen müssen bei der Rechnung mit Buchstabengrößen die Regeln der Rechnung mit gemeinen Brüchen dem Schüler jederzeit gegenwärtig sein, und er muß sie auch geläufig anzuwenden verstehen. Ferner soll der Schüler nicht nur die einfacheren Formen beherrschen, sondern er soll auch mit solchen Brüchen, deren Zähler und Nenner zusammengesetzte Ausdrücke sind, sicher zu operieren vermögen. Es versteht sich von selbst, daß im arithmetischen Unterricht dies alles um so leichter und besser erreicht wird, je vollständiger im Rechenunterricht die Rechnung mit gewöhnlichen Brüchen geübt worden ist. Für den Rechenunterricht an höheren Schulen hat daher die Rechnung mit gemeinen Brüchen infolge der dezimalen Einteilung unserer Münzen, Maße und Gewichte an Bedeutung und Wichtigkeit nicht das Geringste verloren. Die Behandlung der gemeinen Brüche muß eine umfassende sein und muß sich auch auf die Fälle erstrecken, in denen Zähler und Nenner zusammengesetzte Zahlausdrücke sind. Der Schüler soll eben mit Brüchen, in welchen Beziehungen zu einander und in welchen Verbindungen mit einander dieselben auch auftreten mögen, sicher zu operieren verstehen.

Die Wichtigkeit der Dezimalbruchrechnung hier noch besonders zu betonen liegt kein Grund vor, da dieselbe noch niemals angezweifelt worden ist; doch sind in neuerer Zeit Stimmen laut geworden, welche das abgekürzte Rechnen mit Dezimalbrüchen aus dem Rechenunterricht beseitigt und auf spätere Stufen verschoben zu sehen wünschen.*) Ob dies wohlgethan wäre, erscheint mindestens zweifelhaft.**) Wenn auch der Schüler der Quarta den bei der abgekürzten Rechnung gemachten Fehler noch nicht genau zu bestimmen vermag, so ist doch gerade hier die passende Stelle, die Sache hinreichend zu üben, wohingegen auf späteren Unterrichtsstufen wegen der Fülle des anderweitigen mathematischen Lehrstoffes die Gefahr nahe liegt, daß für die Übung im abgekürzten Rechnen mit Dezimalbrüchen nicht die notwendige Zeit übrig bleibt.

3. Die bürgerlichen Rechnungsarten.

Um für die in Vorstehendem empfohlene ausgedehntere Übung der Rechnung mit Klammern und für die umfassende Behandlung der Rechnung sowohl mit gemeinen als auch

*) Verhandlungen der zweiten Direktoren-Versammlung in der Provinz Hannover 1879. S. 208 und 260.

**) Man vergl. hierzu: Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen, S. 108.

mit Dezimalbrüchen hinreichende Zeit zu haben, wird es notwendig sein, nach anderen Richtungen hin den Lehrstoff, soweit dies angeht, zu beschränken. Von dieser Beschränkung werden zunächst die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten betroffen, wie dies auch dem Lehrplan vom 31. März 1882 entsprechend ist.

Angewandte Aufgaben müssen in jedem Abschnitt des zu behandelnden Pensums gegeben werden; sie sind der Übung halber notwendig und dienen außerdem zur Belebung des Unterrichts. Es soll hier auch keineswegs der Verminderung der zu machenden Anwendungen das Wort geredet werden, sondern es soll nur der alten und leider noch nicht verschwundenen Gewohnheit entgegengetreten werden, die Anwendungen auf solche bürgerlichen Verhältnisse zu beziehen, die für den Schüler verwickelt erscheinen und ihm daher nur mit Mühe und vielem Zeitaufwand zum Verständnis gebracht werden können. In dieser Beziehung gehen die meisten der gebräuchlichen Rechenbücher zu weit; namentlich wird dem sogenannten kaufmännischen Rechnen ein ungebührlich weiter Raum gewährt. Es ist aber nicht Aufgabe der Schule, ihren Schülern eine Fachbildung für einzelne Berufsarten mitzugeben, und dies ist auch im Rechenunterrichte zu berücksichtigen. Die im Rechnen zu machenden Anwendungen haben daher zweckmäßigerweise solche Dinge ins Auge zu fassen, welche von allgemeiner Bedeutung oder von allgemeinem Interesse und dabei der Fassungskraft des Schülers entsprechend sind.

Hiernach erscheint es ausreichend, wenn sich die Behandlung der bürgerlichen Rechnungsarten auf die einfacheren Fälle beschränkt, wobei allerdings die Regeldetri oder Schlußrechnung, sowohl die einfache als die zusammengesetzte, besondere Berücksichtigung verdient, da eigentlich die übrigen bürgerlichen Rechnungsarten im großen und ganzen nur Anwendungen der Regeldetri auf spezielle Verhältnisse sind. Die Regeldetri ist auf allen Stufen zu üben. Schon in der Vorschule muß den Schülern der Schluß von der Einheit auf die Mehrheit und der von einer Mehrheit auf die Einheit geläufig werden. Den Schluß von einer Mehrheit auf eine andere vermittelt immer der Schluß auf die Einheit. Später, nach der Behandlung der Bruchrechnung, werden die Regeldetriaufgaben mit Anwendung des Bruchsatzes gelöst. Hat der Schüler hinreichende Sicherheit in der Lösung von Regeldetriaufgaben erlangt, so schließen sich hieran mit Leichtigkeit Aufgaben aus der allgemeinen Prozentrechnung, die Hauptfälle der Zinsrechnung, der Rabattrechnung, der Durchschnitts- und Gesellschaftsrechnung an, und damit dürfte auf dem Gebiete der bürgerlichen Rechnungsarten genug geschehen sein. Die Behandlung der Terminrechnung, der Wechselrechnung, der Rechnung mit Wertpapieren und anderer dergleichen Rechnungsarten sind auszuschließen. Die Schwierigkeiten, welche Aufgaben dieser Art dem Schüler bereiten, werden durch ihren Nutzen nicht aufgewogen, da dieselben den Einblick in die Zahlenverhältnisse an sich und auch die Rechenfertigkeit zu fördern nicht geeignet sind und daher in formaler Hinsicht so gut wie gar keinen Wert haben.

4. Das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln, Flächen- und Körperberechnungen.

Weitere gerechtfertigte Beschränkungen des Lehrpensums im Rechnen bestehen darin, daß man das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln sowie die Berechnung von Flächen und Körpern auf spätere Stufen verschiebt. Den bezeichneten Rechnungsarten liegen Lehrsätze und Formeln zu Grunde, welche ohne Zusammenhang mit dem sonstigen

arithmetischen, geometrischen und stereometrischen Lehrstoff dem Schüler nur mit Mühe verständlich zu machen sind. Es kann daher keinem Bedenken unterliegen, diese Rechnungsarten auf spätere Stufen zu verweisen, zumal ja im mathematischen Unterrichte die gründliche und systematische Behandlung der betreffenden Abschnitte nicht entbehrt werden kann. Übrigens hat das Ausziehen der Kubikwurzeln nur einen geringen praktischen Wert, da später doch fast immer die Kubikwurzeln mit Hilfe der Logarithmen berechnet werden. Mit Rücksicht darauf ist schon verschiedentlich von Mathematikern die Ansicht geäußert worden, daß das Ausziehen der Kubikwurzeln im arithmetischen Unterrichte nicht gelehrt werden braucht; um so mehr kann der Rechenunterricht darauf verzichten. Auch die Einübung des Ausziehens der Quadratwurzeln, des geometrischen und stereometrischen Rechnens würde nur geschehen können mit einem Aufwande an Zeit, welche sich mit Vorteil für andere Übungen verwerten läßt.

II. Über die Behandlung des Lehrstoffes.

Wie bei der Auswahl des Lehrstoffes, so muß auch bei der Behandlung desselben in manchen wesentlichen Punkten von dem, was im elementaren Rechenunterrichte für gewöhnlich üblich ist, abgewichen werden, wenn der Rechenunterricht an höheren Schulen mit dem arithmetischen Unterrichte in Einklang stehen und ihn vorzubereiten und zu unterstützen geeignet sein soll.

1. Mündliche Ausdrucksweise und schriftliche Darstellungsformen.

Obenan steht in dieser Hinsicht die Forderung, daß die in der Arithmetik allgemein gebräuchliche Ausdrucksweise und Zeichensprache beim Rechenunterrichte in genau gleicher Weise benutzt werde. Diese Forderung ist schon oft ausgesprochen worden, findet aber trotzdem in der Praxis noch nicht hinreichende Beachtung. Man braucht, um dies zu erkennen, nur unsere gebräuchlichen Rechenbücher daraufhin einer Prüfung zu unterziehen. Viele derselben weichen in der Ausdrucksweise wie im Gebrauch der Rechnungszeichen mehr oder weniger von dem in der Arithmetik Gebräuchlichen ab. Noch schlimmer aber sieht es in der eigentlichen Rechenpraxis aus. Hier wollen gewisse, man könnte sagen vulgäre, Ausdrücke, z. B. „4 von 12 bleibt (läßt) 8“, „4 in 12 steckt 3 mal“ und ähnliche, noch immer nicht verschwinden. Während dergleichen Ausdrücke sich hartnäckig behaupten, finden die in der Arithmetik gebräuchlichen Ausdrücke oft nur nebensächliche Berücksichtigung. Dies ist aber in dem Rechenunterrichte an höheren Schulen nicht zu billigen. Denn dem Schüler werden keine neuen Schwierigkeiten zugemutet, wenn er von Anfang an genötigt wird, die korrekten Ausdrücke zu gebrauchen; dem arithmetischen Unterrichte wird dadurch jedoch ein wichtiger Dienst geleistet. Der Schüler lernt gewissermaßen das Handwerkszeug schon kennen und gebrauchen, mit welchem er den im arithmetischen Unterrichte ihm dargebotenen neuen Stoff, die allgemeinen Zahlen, zu behandeln hat.

Der Gebrauch der Bezeichnungen für die Zahlenverbindungen und ihrer Teile ist möglichst früh einzuführen. Dabei genügt es nicht, Definitionen zu geben, sondern im Unterrichte selbst müssen jene Bezeichnungen fortgesetzt zur Anwendung kommen. Daß dies recht oft geschehe, darauf ist Bedacht zu nehmen. Nur dadurch können die Schüler die so notwendige Sicherheit in diesem Punkte erlangen. Ein treffliches Mittel zur Erreichung

dieses Zieles ist die geeignete Behandlung der Aufgaben mit Klammern. Die Zergliederung derselben bietet reiches Übungsmaterial. Hier ein Beispiel: Es sei zu berechnen

$$(100 - 24) \cdot (144 + 56) - (1728 + 272) : (45 - 29).$$

Zunächst ist festzustellen, daß der ganze zu berechnende Ausdruck eine Differenz ist. Der Minuendus dieser Differenz stellt sich dar als ein Produkt zweier Faktoren, deren erster eine Differenz und deren anderer eine Summe ist. Der Subtrahendus der zu berechnenden Differenz ist ein Quotient mit einer Summe als Dividendus und einer Differenz als Divisor. Nun erst folgt die Berechnung, welche im vorliegenden Falle so einfach ist, daß sie mit Leichtigkeit im Kopf ausgeführt werden kann. Derartige Aufgaben lassen eine große Mannigfaltigkeit zu und lassen sich daher für den in Rede stehenden Zweck außerordentlich nutzbar machen, wie man an dem gegebenen Beispiele, so einfach dasselbe auch ist, erkennen kann.

Nicht nur bei der Bezeichnung der Zahlenverbindungen und ihrer Teile, sondern auch beim Lesen der Rechnungszeichen sind die in der Mathematik gebräuchlichen Ausdrücke anzuwenden. Hierzu ist um so mehr Grund vorhanden, als die sonst noch vorkommenden Lesarten hinsichtlich ihrer Korrektheit zum großen Teil angreifbar sind.

Die Gleichung $a + b = c$, wenn sie im arithmetischen Unterrichte vorkommt, wird gelesen „a plus b gleich c“; hierin sind a und b beliebige Zahlen, $a + b$ die Summe derselben und c der Wert dieser Summe. Setzt man nun für a und b bestimmte Zahlen und für c deren Summe, z. B. $a = 5$, $b = 3$, so wird die obige Gleichung $5 + 3 = 8$. Dies muß dem Vorigen entsprechend gelesen werden „5 plus 3 gleich 8“. Statt dessen wird in unseren Schulen vielfach gesprochen „5 und 3 ist (sind, giebt) 8“. Hier sind zunächst die Ausdrücke für das Gleichheitszeichen „ist“, „sind“, „giebt“ zu beanstanden. Der annehmbarste und wirklich am meisten gebrauchte unter ihnen ist der erste; aber auch er ist sprachlich inkorrekt, wie sich leicht zeigen läßt. Das Gleichheitszeichen wird gebraucht, um die Gleichheit zweier Zahlausdrücke anzudeuten; das, was links steht, ist gleich dem, was rechts steht. Ohne Abkürzung müßte man also die Gleichung $a + b = c$ lesen „a plus b ist gleich c“. Es ist nun in der Mathematik Gebrauch geworden, meistens die Copula „ist“ wegzulassen, und diese Abkürzung entspricht vollständig der Eigentümlichkeit unserer Sprache. Wenn aber das Prädikat „ist gleich“ abgekürzt wird durch Weglassung des Wortes „gleich“, welches den Begriff (nämlich der Gleichheit) bezeichnet, auf den es gerade ankommt, so ist dies gegen alle Regeln der Sprache. Es sei noch ein Beispiel angeführt, in welchem der Fehler, das Gleichheitszeichen „ist“ zu lesen, deutlicher hervortritt als in dem vorigen. Die Gleichung $5 + 3 = 10 - 2$ ist offenbar richtig. Es ist aber falsch, zu lesen „5 plus 3 ist 10 minus 2“; denn $5 + 3$ ist die Summe der Zahlen 5 und 3, $10 - 2$ dagegen die Differenz der Zahlen 10 und 2, demnach ist $5 + 3$ **nicht** $10 - 2$. Hiernach dürfte es gerechtfertigt erscheinen, daß auch im Rechenunterrichte als mündlicher Ausdruck für das Gleichheitszeichen nur das Wort „gleich“ zugelassen, alle anderen Ausdrücke aber verworfen werden.

Zu ähnlichen Bemerkungen giebt auch das Lesen des Pluszeichens durch „und“ Veranlassung. Dem Worte „und“ wird hierdurch eine besondere Bedeutung beigelegt, die es für gewöhnlich nicht hat. Man vergleiche folgende beide Fragen: „Wie heißt das Produkt der Zahlen 5 und 3?“ „Wie viel ist 5 und 3?“ In dem ersten Beispiele hat das Wort „und“ seine gewöhnliche Bedeutung, nämlich die als koordinierende Konjunktion; im zweiten Beispiel dagegen soll es zur Andeutung der Rechenoperation des Addierens dienen. Solche

Doppeldeutigkeit ist vom Übel; sie wird vermieden, wenn auch in diesem Punkte der Rechenunterricht sich dem Gebrauche des arithmetischen Unterrichts anschließt, so daß also das Zeichen + ein für allemal „plus“ gelesen, das dafür leider noch oft gebrauchte „und“ aber vollständig ausgemerzt wird.**) In Übereinstimmung damit ist darauf zu bestehen, daß das Subtraktionszeichen jederzeit „minus“ und nicht „weniger“ gelesen wird, wenn auch gegen das letztere Wort an und für sich nichts einzuwenden wäre.

Als mündlicher Ausdruck für das Multiplikationszeichen ist meistens das Wort „mal“ gebräuchlich. Ob dieser Ausdruck berechtigt ist oder nicht, dafür kann einzig und allein die Stellung der Faktoren bei der schriftlichen Darstellung maßgebend sein. Über diesen Punkt herrscht jedoch selbst unter den Mathematikern noch nicht volle Einigkeit. Zwar wird in den meisten Lehrbüchern der Arithmetik bestimmt erklärt, daß der Multiplikator auf die rechte Seite des Multiplikandus zu setzen sei, und dies erscheint auch als das Richtige schon wegen der Analogie mit dem Verfahren bei den übrigen Grundoperationen, sodann auch noch aus allgemeinen logischen Gründen. Denn es muß doch, um irgend eine Rechenoperation ausführen zu können, erst eine Zahl gegeben sein, an der dieselbe vorgenommen wird, und diese zuerst zu gebende Zahl ist beim Multiplizieren der Multiplikandus; deshalb muß auch in der Stellung der Multiplikator dem Multiplikandus nachfolgen. Doch finden sich auch Vertreter der Ansicht, daß der Multiplikator vor den Multiplikandus zu setzen sei.***) Ähnliche Schwankungen kommen in den Rechenbüchern vor. In manchen unter ihnen ist der Multiplikator immer vorangestellt, in anderen wechselt die Stellung der Faktoren;****) in den neueren speziell für höhere Schulen bearbeiteten Rechenbüchern pflegt jedoch daran festgehalten zu werden, daß die Stellung des Multiplikators auf der rechten Seite des Multiplikandus die allein richtige sei. Dieser letztere Standpunkt soll auch hier festgehalten werden.

Danach ist $a \cdot b = a + a + a + \dots + a$ (b mal), und dem entsprechend $5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5$. Daß man nun hier nicht lesen darf „5 mal 3“, leuchtet sofort ein; denn nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche ist 5 mal 3 gleich $3 + 3 + 3 + 3 + 3$. Zwar ist das Resultat in beiden Fällen dasselbe, weil, wie bekannt, beide Faktoren vertauscht werden können; aber dies darf zur Erklärung der gegebenen Produktform nicht in Betracht gezogen werden. Zudem hört die Vertauschbarkeit der Faktoren beim Rechnen mit benannten Zahlen auf, da nach dem Begriff der Multiplikation der Multiplikator eine unbenannte Zahl sein muß. Das Wörtchen „mal“ ist zur Andeutung einer Multiplikation nur dann brauchbar, wenn der Multiplikator vor dasselbe treten kann; da aber bei der festgesetzten Reihenfolge der Faktoren der Multiplikator immer erst auf das Multiplikationszeichen folgt, so darf das letztere nicht „mal“ gelesen werden. Ein passenderer Ausdruck bietet sich gewissermaßen von selbst dar aus der Analogie mit der Division. Wie man das Divisionszeichen „dividiert durch“ liest, so lese man das Multiplikationszeichen ein für allemal „multipliziert mit“, und alle Schwierigkeiten sind gehoben.

*) Vergl. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen, S. 109.

**) Siehe z. B. Kambly, Arithmetik, S. 8.

***) Mertens schreibt in seiner Bearbeitung der Kleinpaulschen Anweisung zum praktischen Rechnen (Heft 2, S. 34): „Das Zeichen der Multiplikation ist ein liegendes Kreuz „ \times “ oder ein Punkt. 24×5 oder $5 \cdot 24$ wird gelesen: 24 multipliziert mit 5 oder 24 soll 5 mal genommen werden, denn man multipliziert den voranstehenden Multiplikandus mit dem nachfolgenden Multiplikator. — In den meisten Elementarbüchern (auch in unserer Vorstufe) steht der Multiplikator vor dem Multiplikandus; 4×8 liest man „4 mal 8“ = $8 + 8 + 8 + 8$.“ Ein Grund für die hier hervortretende Inkonsistenz ist nicht angegeben.

Daß durch die Einführung dieses Ausdruckes besondere Weitläufigkeiten hervorgerufen werden, ist nicht zu befürchten. Es soll nämlich das Wörtchen „mal“ keinesweges aus dem mündlichen Rechnen verdrängt werden; dasselbe soll nur nicht als mündlicher Ausdruck für das Multiplikationszeichen benutzt, sein Gebrauch an passender Stelle aber in keiner Weise beschränkt werden. Das Einmaleins kann also nach wie vor in der Form $1 \text{ mal } 6 = 6$, $2 \text{ mal } 6 = 12$ u. s. w. gelernt werden; aber man schreibe dann auch so, wie hier angegeben ist, und nicht $1 \times 6 = 6$; denn letzteres wäre zu lesen: 1 multipliziert mit 6 gleich 6. Auch beim Multiplizieren mehrstelliger Zahlen bleibt es beim Alten. Z. B. $7169 \cdot 8 = 57352$. Man spreche, wie gebräuchlich: 8 mal 9 gleich 72; 8 mal 6 gleich 48 u. s. w.; nur ist darauf zu achten, daß immer der Multiplikator zuerst genannt werde.

Der Gebrauch, das Divisionszeichen „in“ zu lesen, welcher vor noch nicht langer Zeit im elementaren Rechenunterrichte ziemlich allgemein war, darf wohl jetzt meistens als beseitigt betrachtet werden, da man sich auch im Volksschulunterrichte der Bestimmung, daß bei der schriftlichen Darstellung der Divisor rechts vom Dividendus stehen solle, mehr und mehr gefügt hat. Es ist daher nicht zu befürchten, daß jener Gebrauch jemals wieder zur Geltung gelangen werde.

Als mündlicher Ausdruck für das Divisionszeichen ist allgemein „dividiert durch“ angenommen worden. Dieser Ausdruck soll nun beide Arten des Dividierens, das Teilen und das Messen, bezeichnen; er darf daher nicht einseitig definiert werden. Jede Division ist die Umkehrung einer Multiplikation, in welcher das Produkt und ein Faktor bekannt sind, der zweite Faktor aber gesucht wird. Dem entsprechend pflegt in der Arithmetik der Begriff des Dividierens bestimmt zu werden, und es erscheint zweckmäßig, sich im Rechenunterrichte dem anzuschließen. Es ergeben sich dann beide Arten des Dividierens, ohne daß man einer doppelten Definition bedarf. Ist nämlich der gesuchte Faktor der Multiplikandus, so hat man eine Teilungsaufgabe; ist er der Multiplikator, so hat man eine Aufgabe des Enthaltenseins. Jede Divisionsaufgabe mit unbenannten Zahlen kann als eine Aufgabe des Teilens und auch als eine Aufgabe des Messens aufgefaßt werden. Z. B. $35 : 5$ kann bedeuten, daß die Zahl 35 in 5 gleiche Teile geteilt werden soll, oder auch, daß angegeben werden soll, wie oft 5 in 35 enthalten ist. In beiden Fällen aber wird gelesen „35 dividiert durch 5.“ Beim Rechnen mit benannten Zahlen fällt die Zweideutigkeit der Divisionsaufgaben weg. Die Aufgabe $20 \text{ Std} : 4$ kann nichts anderes bedeuten, als daß 20 Std in 4 gleiche Teile geteilt werden sollen, während die Aufgabe $20 \text{ Std} : 4 \text{ Std}$ anzugeben verlangt, wie oft 4 Std in 20 Std enthalten sind. Die Schüler müssen in der richtigen Auffassung solcher Aufgaben Geläufigkeit erlangen, müssen auch umgekehrt die Aufgaben selbst richtig anzugeben wissen, wenn dahin zielende Fragen ihnen vorgelegt werden. Fügt man den obigen Aufgaben die Resultate hinzu, so ist zu lesen „20 Std dividiert durch 4 gleich 5 Std“ und „20 Std dividiert durch 4 Std gleich 5“, aber nicht etwa im letzten Beispiel „gleich 5 mal“ oder gar (bei schriftlicher Darstellung) „gleich $5 \times$ “, was ein Mißbrauch des Multiplikationszeichens wäre.

Da der Ausdruck „dividiert durch“ nach Obigem geeignet ist zur Bezeichnung beider Arten der Division, so ist es zweckmäßig, ihn auch überall da zu gebrauchen, wo es sich um eine kurze Andeutung einer Division handelt, insbesondere also auch bei der schriftlichen Division ganzer Zahlen. Hierbei sind noch Ausdrücke in Gebrauch, die verworfen werden

müssen. Es sei z. B. zu rechnen $18032 : 7$, so hört man häufig bei der Ausrechnung sprechen: „7 in 18 geht (steckt) 2 mal, 7 in 40 geht (steckt) 5 mal u. s. w.“ Abgesehen von der sprachlichen Inkorrektheit dieser Ausdrücke sind dieselben auch deshalb unannehmbar, weil sie sich nur auf die eine Art des Dividierens, das Messen, beziehen. Aus demselben Grunde empfiehlt es sich auch nicht, zu sprechen: „Der 7. Teil von 18 gleich 2 u. s. w.“; denn dies würde nur für Teilaufgaben anwendbar sein. Da es nun in vielen Fällen gleichgültig ist, welcher Art die zu rechnende Divisionsaufgabe ist, und da es bei der Ausrechnung selbst niemals darauf ankommt, so spreche man: „18 dividiert durch 7 gleich 2, Rest 4; 40 dividiert durch 7 gleich 5, Rest 5 u. s. w.“ Dies paßt für alle Fälle und hat außerdem noch den praktischen Vorteil, daß der Schüler gezwungen wird, seine Aufmerksamkeit immer zuerst dem Dividendus zuzuwenden, was insofern von Wichtigkeit ist, als der Dividendus diejenige Zahl ist, welche fortwährend wechselt, während der Divisor im Laufe einer und derselben Rechnung unverändert bleibt.

Hat man die Notwendigkeit, unpassende und inkorrekte Ausdrücke beim Lesen der mathematischen Zeichen zu beseitigen, erkannt, so erfordert es die Konsequenz, daß man von der untersten Stufe an nach diesem Prinzipie verfähre. Haben sich die Schüler auf den unteren Stufen erst die zu verwerfende Sprechweise beim Rechnen angewöhnt, so ist es später ungemein schwer, dieselbe wieder ganz zu beseitigen. Diesem Uebelstande abzu- helfen, bleibt nichts anderes übrig, als gleich bei der Einführung der arithmetischen Operationszeichen auch die korrekten mündlichen Ausdrücke zu geben und an den letzteren streng festzuhalten. Es wird nun hiergegen der Einwand erhoben, daß damit dem Schüler der Unterstufe zu viel zugemutet werde. Dieser Einwand kann jedoch als stichhaltig nicht anerkannt werden. Nach allgemein pädagogischem Prinzip muß in jedem Unterrichte immer erst die Sache und dann die Bezeichnung derselben gegeben werden. Auf den Rechenunterricht angewandt, bedeutet dies, daß der Schüler erst den Begriff einer Rechenoperation erfaßt haben muß, ehe er mit dem betreffenden Operationszeichen oder dem Kunstausdruck für dasselbe bekannt gemacht wird. Daß bei der Einführung in die einzelnen Rechenoperationen auf der Unterstufe Veranschaulichung und vielfache mündliche Übung die Hauptsache ist, weiß jeder Lehrer. Dabei bleibt selbstverständlich das Operationszeichen sowohl als der Ausdruck für dasselbe ganz ausser Betracht. Ist aber der Schüler auf diese Weise zum vollen Verständnis der einzutübenden Rechenoperation gelangt, so daß man ihm den Gebrauch des betreffenden Rechnungszeichens bei schriftlicher Darstellung zumuten darf, so ist er auch imstande, mit dem jenem Zeichen entsprechenden Kunstausdruck die richtige Vorstellung zu verbinden. Andererseits, wenn es dem Schüler nicht gelungen ist, ein Verständnis der vorzunehmenden Rechenoperation zu erlangen, wird diese Lücke auch nicht ausgefüllt werden, wenn für das Operationszeichen an Stelle des korrekten Ausdrucks ein anderer zugelassen wird. Es kommt eben hauptsächlich auf das Verständnis an. Besonders wichtig hierfür ist aber, daß die Schüler von der Einführung der Rechnungszeichen an immerwährend geübt werden, die Zeichensprache in die Wortsprache zu übertragen und umgekehrt. Wenn dies geschieht, hat es nicht das geringste Bedenken, zugleich mit den Rechnungszeichen, also schon auf der untersten Stufe des Rechenunterrichts, auch die in der Arithmetik gebräuchlichen Ausdrücke für dieselben einzuführen.

Hinsichtlich der schriftlichen Darstellung stößt man ebenfalls sowohl in den Rechenbüchern als auch in der Rechenpraxis noch vielfach auf Unzuträglichkeiten, so daß es nicht

überflüssig erscheint, auf die Grundprinzipien, welche bei jeder schriftlichen Darstellung einer Rechenaufgabe zu beachten sind, hier zurückzukommen.

Erste Forderung ist, daß jede schriftliche Darstellung mathematisch korrekt sei, und dazu gehört, daß die mathematischen Zeichen nur in ihrer eigentlichen Bedeutung und niemals anders gebraucht werden. Obwohl diese Forderung von keiner Seite bestritten wird, tauchen doch oft genug schriftliche Darstellungsformen auf, welche derselben nicht entsprechen. Besonders das Gleichheitszeichen findet man oft an Stellen, wo es nicht hinpaßt, z. B. in Regeldetriaufgaben, wenn für dieselben folgendes Rechenschema empfohlen wird:

Aufgabe (aus Steuers Rechenbuch): 1 m kostet $\frac{1}{2}$ M.,
wie viel kosten 3 m?

$$1 \text{ m} = \frac{1}{2} \text{ M.},$$

$$3 \text{ m} = \frac{3}{2} \text{ M.}$$

Oder beim Addieren der Brüche, wenn folgende schriftliche Darstellung gewählt wird (aus der Kleinpaulschen Anweisung zum praktischen Rechnen, Heft 2 S. 130):

$$\begin{array}{r} 1 = \frac{360}{360} \\ \hline \frac{7}{8} = 45 \times 7 = 315 \\ \frac{7}{9} = 40 \times 7 = 280 \\ \frac{7}{10} = 36 \times 7 = 252 \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

Mathematisch korrekt ist es ferner nicht, wenn in Gleichungen zwischen benannten Zahlen die Benennung auf einer Seite weggelassen wird, z. B.

$$\frac{108. \quad 960. \quad 2. \quad 10}{5. \quad 720. \quad 15. \quad 3} = \frac{64}{5} = 12\frac{4}{5} \text{ M.}$$

(Resultat einer Regeldetriaufgabe aus Böhme, Heft No. XII.)

Eine zweite unerläßliche Forderung für die schriftliche Darstellung, welche namentlich die angewandten Aufgaben betrifft, ist die der sprachlichen Korrektheit. Gegen diese Forderung verstößt der Gebrauch sinnwidriger Abkürzungen, welche der Raumerparnis halber häufig angewandt werden. Schon die Aufgaben werden oft in einer sprachlich nicht zu rechtfertigenden Form gegeben, z. B. „372 Std. ? Tg.“ (aus Böhme, Heft No. VIII) oder „ $\frac{3}{8}$ kg? $\frac{4}{5}$ kg = $2\frac{1}{2}$ M.“ (aus Kleinpaul-Mertens, Aufgaben, Heft 2). Derartige Abkürzungen sind entschieden zu verwerfen, weil sie dem Schüler ein schlechtes Vorbild sind. Zudem ist die Ersparnis an Raum und Zeit meistens keine nennenswerte, und wenn dies auch der Fall wäre, so müßte doch die Rücksicht auf die sprachliche Korrektheit obenan stehen. Von dem Schüler ist zu fordern, daß er, wenn er eine Aufgabe schriftlich löst, den Gang der Lösung in gutem Deutsch darzulegen vermag. Dies kann natürlich nur durch fortgesetzte Uebungen erreicht werden. Zu beginnen sind diese Uebungen zweckmäßigerweise damit, daß schon bei den Aufgaben einfachster Art, wenn dieselben in Form einer Frage gestellt sind, die Schüler angehalten werden, diese Frage in einem vollständigen Satze zu beantworten. Ist z. B. die Resolutionsaufgabe „Wie viel Min. sind 19 Tg. 15 Std. 36 Min.“ gegeben, so ist es nicht ausreichend, wenn der Schüler nach Ausführung der Rechnung angiebt: „Resultat: 28296 Min.“; sondern er muß die in der Aufgabe gestellte Frage durch den Satz „19 Tg. 15 Std. 36 Min. sind 28296 Min.“ beantworten. Dies hat für den Schüler den großen Vorteil, daß er genötigt wird, sich der Bedeutung der von ihm ausgeführten

Rechnung bewußt zu bleiben. Es ist aber auch für den Lehrer ein gutes Mittel, zu kontrollieren, ob bei den Schülern schon ausreichendes Verständnis erzielt worden ist. Eine bekannte Erfahrung lehrt, daß schwächere Schüler in vielen Fällen den Mechanismus einer Rechnung eher lernen, als sie die Bedeutung derselben aufgefaßt haben, und daß sie daher in solchen Fällen wohl das Resultat der Aufgabe anzugeben wissen, trotzdem aber eine richtige Antwort zu geben nicht imstande sind. Deshalb ist es von großer Wichtigkeit, daß jede in einer Aufgabe gestellte Frage in einem vollständigen Satze beantwortet werde. Wenn bei weiterem Fortschreiten die Schüler fortgesetzt darin geübt werden, in ihren Lösungen den richtigen Ausdruck zu finden, so werden sie schließlich auch in schwierigeren Fällen imstande sein, bei schriftlicher Darstellung den Gang der Lösung in sprachlich korrekter Form anzugeben.

Ein dritter Punkt von Wichtigkeit für jede schriftliche Darstellung einer Aufgabe ist die Übersichtlichkeit derselben. In dieser Beziehung bedürfen die Schüler einer vielfachen Anleitung. Es müssen daher für jede Rechnungsart von dem Lehrer Musterbeispiele in schriftlicher Form entwickelt werden, nach welchen die Schüler sich zunächst streng zu richten haben. Dadurch wird in den letzteren der Sinn für eine übersichtliche und geordnete Darstellungsweise geweckt, und sie werden auf späteren Stufen, wenn ihnen Aufgaben entgegentreten, welche sich in ein gegebenes Schema nicht einordnen lassen, doch befähigt sein, selber eine übersichtliche Form zu finden.

Wenn im Rechenunterrichte bei den schriftlichen Darstellungsformen den erwähnten drei Hauptforderungen der mathematischen Korrektheit, der sprachlichen Korrektheit und der Übersichtlichkeit immer genügt wird, so wird hierdurch der mathematische Unterricht unterstützt. Die Schüler, wenn sie sehen, daß der Lehrer mit peinlichster Gewissenhaftigkeit jene drei Grundprinzipien in aller Strenge aufrecht zu erhalten bestrebt ist, und daß ihm nichts, was gegen dieselben verstößt, zu unwesentlich erscheint, um es zu bekämpfen, werden dadurch angetrieben, in dieser Hinsicht auch an ihren eigenen Arbeiten Kritik zu üben und auf eine mustergiltige Form bedacht zu sein. Dies hat seinen großen Vorteil nicht allein für den späteren mathematischen Unterricht, sondern auch für die allgemeine Bildung des Schülers.

2. Zu den Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen.*)

Nachdem im Vorstehenden allgemeinere Gesichtspunkte erörtert wurden, welche für die Behandlung des Rechenstoffes maßgebend sein müssen, werden sich die folgenden Betrachtungen einzelnen speziellen Gebieten zuwenden.

Die im Rechnen notwendigerweise zu erzielende Sicherheit muß sich auf zweierlei erstrecken, nämlich erstens auf die auszuführenden mechanischen Rechenoperationen und zweitens auf den vorzunehmenden Denkprozeß, das Schließen.

Für die Sicherheit in der Rechenfertigkeit ist die unentbehrliche Grundlage die absolute Sicherheit in den vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen. Diese zu erzielen ist demnach eine sehr wichtige Aufgabe des Rechenunterrichts. Dabei darf sich der letztere gegen die in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten gemachten Vorschläge zur Vereinfachung und Verbesserung des rechnerischen Mechanismus nicht ohne weiteres ablehnend verhalten, sondern es sind jene Vorschläge zu prüfen und, wenn sie Vorteil gewähren, zu berücksichtigen.

*) Eine ausführlichere Behandlung dieses Kapitels giebt die Abhandlung von Kallius „Bemerkungen zu dem Unterricht in den vier Species in ganzen Zahlen“ (Progr. des Königst. Gymnasiums in Berlin, 1885).

Die vier Grundrechnungsarten sind Anwendungen einer kleinen Zahl grundlegender Aufgaben und ihrer Umkehrungen. Diese grundlegenden Aufgaben sind die Additionsaufgaben, in denen zwei einstellige Summanden addiert werden, und die Multiplikationsaufgaben, in denen zwei einstellige Faktoren mit einander multipliziert werden (das sogenannte kleine Einmaleins). Die ersteren mit ihren Umkehrungen liegen der Addition und Subtraktion, die letzteren mit ihren Umkehrungen der Multiplikation und Division zu Grunde. Es ist selbstverständlich, daß diese grundlegenden Aufgaben einer sorgfältigen Behandlung und sehr ausgedehnter Übung bedürfen. Wo sie nicht vollständiges Eigentum des Gedächtnisses geworden sind, da hört alle Sicherheit im Rechnen auf.

Die grundlegenden Additionsaufgaben teilen sich in zwei Gruppen. Zur ersten Gruppe gehören die Aufgaben, in denen die Summe nicht größer ist als 10. Die Resultate dieser Aufgaben kann sich der Schüler nur durch Nachzählen der zur Veranschaulichung dienenden Gegenstände zu eigen machen. Dabei soll es aber nicht bleiben; das Nachzählen soll späterhin nicht mehr notwendig sein, sondern der Schüler soll die Resultate aus dem Gedächtnis angeben können. Außerdem sind die Umkehrungen dieser Aufgaben in demselben Maße zu berücksichtigen wie die Aufgaben selbst. Hat der Schüler z. B. gelernt $3 + 2 = 5$, so soll er gleichzeitig lernen $5 = 3 + 2$ und $5 = 2 + 3$, worin die eingeklammerten Zahlen von dem Schüler anzugeben sind, und hieran schließen sich dann die Subtraktionsaufgaben $5 - 3 = 2$ und $5 - 2 = 3$. Zu der zweiten der erwähnten Gruppen gehören diejenigen Aufgaben, in denen die Summe größer ist als 10. Die Resultate dieser Aufgaben werden nicht durch Aufwärtszählen in der natürlichen Zahlenreihe, sondern durch Vervollständigung des ersten Zehners nach passender Zerlegung des Addenden erhalten. Es sei z. B. das Resultat der Aufgabe $6 + 7$ zu entwickeln. Da der Schüler gelernt hat, die Zahl 7 auf alle mögliche Weise zu zerlegen, so braucht man ihn nur noch anzuleiten, daß er diese Zerlegung so einrichte, daß der erste der durch die Zerlegung entstehenden Summanden die Zahl 6 zu 10 vervollständige, daß er also zerlege $7 = 4 + 3$. Dann ergibt sich $6 + 7 = 13$, ohne daß ein Aufwärtszählen von 6 bis 13 nötig gewesen wäre. Eine Berücksichtigung der möglichen Umkehrungen ist bei diesen Aufgaben ebenso wichtig wie bei den Aufgaben der ersten Gruppe. Sind die betrachteten Aufgaben hinreichend geübt worden, und ist namentlich die Zerlegung der Zahlen hierbei nicht zu kurz gekommen, so wird es späterhin keine Schwierigkeiten machen, das Addieren und Subtrahieren im Kopfe auf zwei- und dreistellige Zahlen auszudehnen; ferner werden beim schriftlichen Rechnen mancherlei Erleichterungen erzielt werden können.

Beim schriftlichen Addieren muß der Schüler bald dahin gebracht werden, nur die notwendigsten Zahlen auszusprechen. Ist z. B. die Aufgabe

$$\begin{array}{r} 2345 \\ + 876 \\ + 9108 \\ + 3429 \\ \hline 15758 \end{array}$$

zu rechnen, so ist es nicht nötig, die einzelnen Summanden, sondern nur die Teilsummen jeder Reihe anzugeben. Es wird also gesprochen: „17, 23, 28.“ Dann werden die 8 Einer des Resultats geschrieben, die zwei Zehner werden jedoch stillschweigend zu dem ersten

Summanden der Zehnerreihe addiert und so auch bei den Hundertern und Tausendern. Es ist also weiter zu sprechen: „4, 11, 15; 5, 6, 14, 17; 4, 13, 15. Summe: 15758.“

Für das schriftliche Subtrahieren empfiehlt es sich, die sogenannte österreichische oder süddeutsche Subtraktionsmethode anzuwenden, welche in Österreich und Süddeutschland ausschließlich in Gebrauch ist und sich dort als praktisch bewährt hat. Dieselbe besteht darin, daß die Differenz zweier Zahlen, der in der Arithmetik gebräuchlichen Definition entsprechend, als diejenige Zahl betrachtet wird, welche, zum Subtrahendus addiert, den Minuendus ergibt. Diese Methode bietet mancherlei Rechenvorteile, wie sich an nachfolgenden Beispielen zeigen wird. Sie ist deshalb mit Recht in Rechenbüchern, Zeitschriften und anderen Schriften schon vielfach zur allgemeinen Einführung empfohlen worden, scheint jedoch in der Praxis in Norddeutschland noch wenig Beachtung zu finden. Man macht dieser Methode den Vorwurf, daß sie den Charakter der Subtraktion verwische.*) Dieser Vorwurf muß aber entschieden zurückgewiesen werden. Es kann im Gegenteil behauptet werden, daß ein Schüler, der eine Differenz nur kennt als diejenige Zahl, welche durch Verringerung des Minuendus um den Subtrahendus entsteht, den Begriff der Subtraktion noch nicht vollständig erfaßt habe. Es soll ihm ebenso geläufig sein, eine Differenz als diejenige Zahl anzusehen, welche den Subtrahendus zum Minuendus vervollständigt. Welche von beiden Anschauungsweisen in einem speziellen Falle die richtige ist, kann auf die mechanische Ausführung der Rechnung keinen Einfluß üben, so wie man auch beim schriftlichen Dividieren nicht erst zu fragen braucht, ob eine Teilungsaufgabe oder eine Aufgabe des Messens vorliegt. Andererseits ist die Anwendung der hier empfohlenen Subtraktionsmethode niemals ein Hindernis, die erhaltene Differenz anzusehen als eine durch Verminderung des Minuendus entstandene Zahl.

Daß die österreichische Subtraktionsmethode bei uns in der Praxis erst geringe Beachtung gefunden hat, erklärt sich dadurch, daß man sich im elementaren Rechenunterrichte meistens scheut, dem Begriff des Subtrahierens in der Bedeutung „abziehen“ seine Alleinherrschaft zu beschränken. Namentlich wird es für die unteren Stufen für notwendig erachtet, die bisherige Methode beizubehalten. Soll jedoch der Vorteil des österreichischen Verfahrens recht zur Geltung kommen, so ist es notwendig, dasselbe von Grund auf anzuwenden; denn ein späteres Umlernen ist, abgesehen von anderen Nachteilen, mit unnützem Zeitaufwand verbunden.

Es mögen nun zur genaueren Darlegung der empfohlenen Methode und ihrer Vorteile einige Beispiele folgen. Bei Ausrechnung der Aufgabe

$$\begin{array}{r} 975863 \\ - 410821 \\ \hline 565042 \end{array}$$

ist zu sprechen: „1 **plus 2** gleich 3, 2 **plus 4** gleich 6, 8 **plus 0** gleich 8, 0 **plus 5** gleich 5 u. s. w.“ Geschrieben wird jedesmal die Zahl, welche auf das Wort „plus“ folgt. Diese Weise, zu rechnen, ist sicherlich nicht schwerer, als wenn gesprochen wird: „3 minus 1 gleich 2 u. s. w.“ — In dem obigen Beispiel ist in keiner Stelle die Anzahl der Einheiten des Minuendus kleiner als die Anzahl der Einheiten des Subtrahendus, und dies ist der einfachste Fall. Anders ist es in folgender Aufgabe:

*) Hartmann, Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule, S. 270.

$$\begin{array}{r}
 1340085 \\
 - 862719 \\
 \hline
 477366
 \end{array}$$

Hier müssen die 9 Einer des Subtrahendus zu 15 Einern ergänzt werden. Dadurch werden die Zehner des Minuendus stillschweigend um einen vermehrt. Soll sich nun die Differenz der Zehner richtig ergeben, so müssen auch die Zehner des Subtrahendus um einen vermehrt werden. Dies geschieht, wie beim Addieren, stillschweigend. Es ist also zu sprechen: „9 **plus 6** gleich 15, 2 **plus 6** gleich 8, 7 **plus 3** gleich 10, 3 **plus 7** gleich 10, 7 **plus 7** gleich 14, 9 **plus 4** gleich 13. Man hat demnach genau so zu sprechen, als wenn man die Aufgabe nach der alten Methode gerechnet hätte und nun die Probe der Richtigkeit durch Addieren des Subtrahendus und des Restes machen wollte.

Die soeben dargestellte Ausführung der Rechnung bietet zunächst den Vorteil, daß das sogenannte „Borgen“, welches, wie jeder Lehrer weiß, vielfach zu Fehlern Veranlassung giebt, vermieden wird. Der Hauptvorteil dieses Verfahrens liegt jedoch darin, daß es in den Stand setzt, gleichzeitig mehrere Zahlen von einer gegebenen zu subtrahieren. Die Aufgabe

$$\begin{array}{r}
 876149 \\
 - 28376 \\
 - 159728 \\
 - 223894 \\
 - 81057 \\
 \hline
 383094
 \end{array}$$

kann so gerechnet werden: „11, 19, 25 **plus 4** gleich 29; 7, 16, 18, 25 **plus 9** gleich 34; 11, 18, 21 **plus 0** gleich 21; 3, 6, 15, 23 **plus 3** gleich 26; 10, 12, 17, 19 **plus 8** gleich 27; 4, 5 **plus 3** gleich 8. — Selbstverständlich ist dieses Verfahren auch anwendbar, wenn alle Subtrahenden gleich sind, wenn also etwa die Aufgabe vorliegt

$$\begin{array}{r}
 796842 - 39864 \cdot 9 \\
 \hline
 438066
 \end{array}$$

Hier läßt sich das Resultat sofort niederschreiben, indem man rechnet: „(9 mal 4 gleich) 36, **plus 6** gleich 42; (9 mal 6 gleich) 54, 58 **plus 6** gleich 64; (9 mal 8 gleich) 72, 78 **plus 0** gleich 78; (9 mal 9 gleich) 81, 88 **plus 8** gleich 96; (9 mal 3 gleich) 27, 36 **plus 3** gleich 39; 3 **plus 4** gleich 7.“ Die eingeklammerten Worte werden dabei nur zu Anfang der Einübung gesprochen, bleiben aber weg, wenn erst Geläufigkeit erzielt worden ist.

Die grundlegenden Multiplikationsaufgaben (das kleine Einmaleins) sind in ähnlicher Weise zu behandeln wie die grundlegenden Additionsaufgaben. Sie bilden nur eine Gruppe, und ihre Resultate können einzig und allein durch fortgesetztes Addieren des betreffenden Multiplikandus erhalten werden. Auch hier sind die Umkehrungen ebenso wichtig als die Aufgaben selbst. Der Forderung der Anschaulichkeit kann nur genügt werden, wenn der Unterricht an wirkliche Gegenstände anknüpft, und damit sind dann benannte Zahlen eingeführt; die Anwendung benannter Zahlen bei der Behandlung dieser Aufgaben ist aber auch aus dem Grunde notwendig, weil dadurch dem Schüler die Unterscheidung von Multiplikandus und Multiplikator gewissermaßen aufgedrungen wird. Die Divisionsaufgaben,

welche durch die Umkehrung der Aufgaben des kleinen Einmaleins erhalten werden, sind in mannigfacher Weise zu üben. Fragen wie: Welches ist der 7te Teil von 42 M? Wie oft sind 7 M in 42 M enthalten? Das Wievielfache von 7 M sind 42 M? Was bedeutet $42 M : 7?$ oder $42 M : 7 M?$ müssen die Schüler beantworten lernen. Selbstverständlich sind die Aufgaben, in denen ein Rest bleibt, ebenfalls mitzuüben; überhaupt ist es zweckmäßig, diese Multiplikations- und Divisionsaufgaben auch mit Additions- und Subtraktionsaufgaben zu verbinden.

Beim schriftlichen Multiplizieren ist diejenige Anordnung der Teilprodukte vorherrschend gebräuchlich, nach welcher zuerst mit den Einheiten der niedrigsten Ordnung und dann der Reihe nach mit den Einheiten der höheren Ordnungen des Multiplikators multipliziert wird. Auf das Resultat ist jedoch die Anordnung der Teilprodukte ohne Einfluß, und die Reihenfolge der letzteren darf daher beliebig genommen werden. Für die der Regel nach zu wählende Reihenfolge können also nur Zweckmäßigkeitsgründe maßgebend sein. Nun ist aber die vorhin erwähnte, noch meist gebräuchliche Anordnungsweise in mehrfacher Hinsicht nicht zweckmäßig. Denn erstens dehnt sich die Rechnung in ihrem weiteren Verlaufe immer mehr nach links aus, und dies giebt in den Arbeiten der Schüler, wenn dieselben den Bedarf an Raum zu gering geschätzt haben, zu schlechter schriftlicher Darstellung und zu Fehlern Veranlassung. Zweitens entspricht auch das Fortschreiten von rechts nach links nicht dem in der Arithmetik üblichen Verfahren, und drittens muß die in Rede stehende Anordnung bei der abgekürzten Multiplikation der Dezimalbrüche doch aufgegeben werden. Es ist deshalb schon vielfach empfohlen worden, bei der Multiplikation bei den Einheiten der höchsten Ordnung des Multiplikators zu beginnen, und dieser Vorschlag verdient allgemeine Beachtung. Auf das Untereinanderschreiben der Faktoren kann bei der Multiplikation auch verzichtet werden. Die schriftliche Form einer Multiplikationsaufgabe wird dann folgende sein:

$$\begin{array}{r}
 7936 \cdot 839 \\
 \hline
 63488 \\
 23808 \\
 71424 \\
 \hline
 6658304
 \end{array}$$

Zu sprechen ist hierbei: „(8 mal 6 gleich) 48; (8 mal 3 gleich) 24, 28; (8 mal 9 gleich) 72, 74 u. s. w.“ Für geübtere Schüler fallen die eingeklammerten Worte weg. Die unverhältnismäßige Ausdehnung der Rechnung nach links wird hier dadurch vermieden, daß die Stellung der Ziffern in den Teilprodukten sich nach dem Multiplikator und nicht nach dem Multiplikandus richtet. Es tritt bei Anwendung der vorstehenden Form keine Ziffer der Rechnung nach links oder rechts über den Raum hinaus, den schon die Aufgabe selbst einnimmt. Man giebt hierbei allerdings den Vorteil auf, den Multiplikandus gleich als Teilprodukt ansehen zu können, wenn der Multiplikator eine 1 enthält; aber ein Vorteil anderer Art läßt sich in manchen Fällen bequem anwenden, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{r}
 2584 \cdot 4279 \\
 \hline
 18088 \\
 108528 \\
 23256 \\
 \hline
 11056936
 \end{array}
 \quad \text{oder} \quad
 \begin{array}{r}
 2584 \cdot 4279 \\
 \hline
 10336 \\
 23256 \\
 69768 \\
 \hline
 11056936
 \end{array}$$

Hier weicht die Anordnung der Teilprodukte von der vorhin empfohlenen ab, weil dadurch die Berechnung eines Teilproduktes erspart werden konnte. In der ersten Ausrechnung ist zuerst das 7fache, hieraus das 42fache des Multiplikandus berechnet und dann die Multiplikation mit 9 ausgeführt worden; in der zweiten Ausrechnung ist erst mit 4, dann mit 9 multipliziert worden, um aus dem letzteren Teilprodukt das 27fache des Multiplikandus zu finden.

Eine sehr wesentliche Abkürzung erfährt die Division, wenn die Subtraktion nach dem österreichischen Verfahren geübt worden ist, da man dann nicht nötig hat, die zu subtrahierenden Teilprodukte, sondern nur die Reste, auf welche es ankommt, niederzuschreiben. Die schriftliche Division gestaltet sich dann so:

$$\begin{array}{r} 3855488 : 728 = 5296 \\ \underline{2154} \\ 6988 \\ \underline{4368} \end{array}$$

Zu sprechen ist hierbei: „3855 dividiert durch 728 gleich 5; (5 mal 8 gleich) 40, **plus 5** gleich 45; (5 mal 2 gleich) 10, 14 **plus 1** gleich 15; (5 mal 7 gleich) 35, 36 **plus 2** gleich 38.“ Dann, nachdem die 4 Hunderter herunter genommen worden sind, weiter: „2154 dividiert durch 728 gleich 2 u. s. w.“ — Vergleicht man die vorstehende Ausführung mit der sonst gebräuchlichen, so fällt der grosse Vorteil, welchen die hier empfohlene Methode gewährt, sofort in die Augen.

3. Vorübungen für die Rechnung mit gemeinen Brüchen.

Die Sicherheit in der Rechenfertigkeit muß sich auch auf die Rechnung mit gewöhnlichen Brüchen erstrecken. Selbstverständlich ist erste Vorbedingung hierfür die Sicherheit in den Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, aber es sind außerdem noch gewisse vorbereitende Übungen anzustellen, ohne welche vollständige Sicherheit und Geläufigkeit in den Operationen mit gemeinen Brüchen nicht zu erlangen ist. Diese Übungen betreffen die Teilbarkeit der Zahlen, die Zerlegung derselben in Primfaktoren, das Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes sowie des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen. Auf die Wichtigkeit dieser Übungen aufmerksam zu machen, kann hier nicht unterlassen werden, da an unseren höheren Schulen noch Rechenbücher in Gebrauch sind, welche für die bezeichneten Kapitel kein Übungsmaterial enthalten.*) Will man der Rechnung mit gemeinen Brüchen eine untergeordnete Stellung zuweisen, so kann man allerdings auf die erwähnten Übungen verzichten. Dies entspricht aber nicht den Zwecken und Zielen des Rechenunterrichts an höheren Lehranstalten, und darum ist auch jenen vorbereitenden Übungen ein hinreichender Raum zu gewähren.

Von den Sätzen über die Teilbarkeit der Zahlen sind zunächst diejenigen zu entwickeln, welche die Zahlen 10, 100, 1000, 2, 5, 4, 25, 3, 9 betreffen; ihnen können sich später noch die Sätze über die Teilbarkeit durch 8, 125, 11 anschließen. Die Schüler müssen diese Sätze leicht und sicher anwenden lernen. Auch die Kombinationen derselben sind in Betracht zu ziehen.

Bei der Zerlegung der Zahlen ist es häufig nicht nötig, sofort mit der Aussonderung

*) Z. B. die Aufgabenhefte von Koch und das Rechenbuch von Steuer.

der Primfaktoren zu beginnen; die Rechnung wird in der Regel wesentlich verkürzt, wenn die gegebene Zahl sich leicht in zwei größere Faktoren zerlegen läßt. Man vergleiche:

$$\begin{array}{r} 1260 = 2 \cdot 630 \\ 630 = 2 \cdot 315 \\ 315 = 3 \cdot 105 \\ 105 = 3 \cdot 35 \\ 35 = 5 \cdot 7 \end{array}$$

$$\underline{1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

(Aus dem Rechenbuche von Harms und Kallius, S. 103).

Kürzer ist folgende Ausführung;

$$\begin{array}{r} 1260 = 70 \cdot 18 \\ = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \underline{1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} \end{array}$$

Die Einführung des Potenzbegriffs bei dieser Gelegenheit ist zu empfehlen. Sie ist von Nutzen, wenn das kleinste gemeinschaftliche Vielfache oder das größte gemeinschaftliche Maß mehrerer gegebener Zahlen gefunden werden soll.

Es sei z. B. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache für die Zahlen 60, 27, 24, 50, 45 zu bestimmen, so hat man

$$\begin{array}{l} 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 27 = 3^3 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 50 = 2 \cdot 5^2 \\ 45 = 3^2 \cdot 5 \end{array}$$

$$\text{Kl. gem. Vielf.: } 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 5400.$$

Das Verfahren besteht hier darin, daß nach der Zerlegung der gegebenen Zahlen in Primfaktoren zur Bildung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen jeder einzelne Primfaktor in der höchsten überhaupt vorkommenden Potenz genommen wird. Dieses Verfahren übertrifft an Einfachheit das früher gebräuchliche, nach welchem die für die Bildung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen notwendigen Faktoren durch successive Division aus den gegebenen Zahlen herausgenommen wurden, bei weitem; auch zeichnet es sich dadurch aus, daß es für den Schüler leicht verständlich ist.

Ist das größte gemeinschaftliche Maß zweier gegebener Zahlen zu suchen, etwa der Zahlen 144 und 540, so rechnet man

$$\begin{array}{l} 144 = 2^4 \cdot 3^2 \\ 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \end{array}$$

$$\text{Gr. gem. Maß: } 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

Hier kommen bei der Bildung des größten gemeinschaftlichen Maßes nur diejenigen Primfaktoren in Betracht, die beiden gegebenen Zahlen gemeinschaftlich sind, und zwar sind dieselben in der niedrigsten vorkommenden Potenz zu nehmen. Dieses Verfahren ist jedoch nur dann zweckmäßig, wenn die gegebenen Zahlen leicht in ihre Primfaktoren zerlegt werden können; ist dies nicht der Fall, so wendet man besser die Kettendivision an, und daher muß auch diese im Rechenunterrichte Berücksichtigung finden. Als geeignete schriftliche Form für dieselbe ist folgende in den Kleinpaul-Mertens'schen Aufgaben und in dem Schellen'schen Rechenbuche gebrauchte zu empfehlen:

Gesucht wird das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 2236 und 3225.

$$\begin{array}{cccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \underbrace{1} & \underbrace{5} & \\ 3225 : 2236 : 989 : 258 : 215 : 43 \\ \hline 2236 & 1978 & 774 & 215 & 215 & \end{array}$$

Größtes gemeinschaftliches Maß: 43.

Diese Darstellungsweise hat den Vorteil, daß in ihr der jedesmalige Divisor immer rechts von dem Dividendus steht, und daß doch das Fortrücken der Rechnung von rechts nach links, was schon bei der Multiplikation ganzer Zahlen als ein Übelstand bezeichnet werden mußte, vermieden wird. Die Rechnung wird noch bedeutend einfacher bei Anwendung der österreichischen Subtraktionsmethode; sie gestaltet sich dann folgendermaßen:

$$\begin{array}{cccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \underbrace{1} & \underbrace{5} & \\ 3225 : 2236 : 989 : 258 : 215 : 43. \end{array}$$

Es wird dabei unmittelbar der jedesmalige Rest gefunden und dieser sofort als neuer Divisor aufgeschrieben. Diese abgekürzte Form ist in Treutleins Übungsbuch angewandt worden.

4. Die Behandlung der Regeldetriaufgaben.

Ebenso wichtig als die Sicherheit in der Rechenfertigkeit ist für den Rechner die Sicherheit im Schließen. Auf allen Stufen des Rechenunterrichts haben daher die Übungen im richtigen Schließen mit den Übungen in der Rechenfertigkeit Hand in Hand zu gehen. Es sind hauptsächlich die angewandten Aufgaben, welche nach dieser Richtung hin das Übungsmaterial liefern. In ihnen treten dem Schüler Zahlen entgegen, die in gewissen Beziehungen zu einander stehen. Diese Beziehungen sind abhängig von den sachlichen Verhältnissen, an welche die Aufgabe angeknüpft hat. Das richtige Schließen ist ein Denkprozeß, der erst dann vor sich gehen kann, wenn der Schüler sowohl die erwähnten sachlichen Verhältnisse, als auch jene Beziehungen der Zahlen zu einander richtig aufgefaßt und erkannt hat. Darum müssen die Aufgaben dem Anschauungskreise des Schülers entnommen und seiner Fassungskraft angepaßt sein. Das Resultat des Schließens muß darin bestehen, daß der Schüler die Rechnungen anzugeben weiß, welche zu machen sind, um den Forderungen der Aufgabe genügen zu können.

Den wichtigsten Übungsstoff für die Übungen im richtigen Schließen bieten die Regeldetriaufgaben, und darum ist die Regeldetriaufgabe auf allen Stufen zu üben. Selbstverständlich müssen die auf den unteren Stufen zu behandelnden Regeldetriaufgaben ganz einfach sein. Sie schließen sich zunächst der Einübung des kleinen Einmaleins an und enthalten nur einen Schluß, entweder von der Einheit auf eine Mehrheit oder umgekehrt, und werden im Kopfe gerechnet. Auch wenn der Zahlenraum bis 100 überschritten worden ist, sind doch die Regeldetriaufgaben so zu stellen, daß ihre Lösung im Kopfe möglich ist; es kann jedoch dann die Verbindung der Schlüsse von einer Mehrheit auf die Einheit und von der Einheit auf eine andere Mehrheit eintreten. Die schriftliche Lösung von Regeldetriaufgaben ist erst dann von Nutzen, wenn die Einübung der vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen beendet ist. Hiermit ist zweckmäßigerweise in Sexta zu beginnen; daneben aber muß die Übung in der mündlichen Lösung leichterer Aufgaben fortgesetzt werden.

Die Regeldetriaufgaben liefern für den Sextaner reiches Übungsmaterial in mannigfaltiger Weise, auch wenn nur solche Aufgaben behandelt werden, in denen aus drei gegebenen Zahlen die unbekannteste vierte gesucht wird, und wenn außerdem noch Aufgaben

mit umgekehrten Verhältnissen ausgeschlossen werden, was wohl dem Standpunkte der Sexta entsprechend sein dürfte. Folgende Beispiele werden dies erkennen lassen:

- a. In 12 Wch verdient jemand 336 M; wie viel verdient er in 26 Wch?
- b. Für 36 M erhält man 53,640 kg; wie viel erhält man für 55 M?
- c. Ein Fußgänger legt 16 km in 3 Std 20 Min zurück; wie lange gebraucht er zu 21 km?
- d. In 3 Std 36 Min legt ein Eisenbahnzug 232,200 km zurück; wie weit fährt er in 5 Std 8 Min?

Das Beispiel a. enthält nur einfach benannte Zahlen; in b. ist die zweite Zahl eine mehrfach benannte mit dezimaler Einteilung; in c. steht an ihrer Stelle eine mehrfach benannte Zahl mit nicht dezimaler Einteilung; Beispiel d. enthält lauter mehrfach benannte Zahlen, so daß zwei derselben erst eingerichtet (auf eine Benennung gebracht) werden müssen. In allen vier Aufgaben ist zuerst auf die Einheit und dann auf die im Fragesatze enthaltene Zahl zu schließen; ehe jedoch solche Aufgaben gegeben werden, gehen Aufgaben ähnlicher Art voran, in denen nur einer der beiden Schlüsse zu machen ist, und dadurch wird die Mannigfaltigkeit der Übungen noch größer.

Nach der Durchnahme der Bruchrechnung, also in Quinta, kann bei der Lösung von Regeldetriaufgaben der Bruchsatz angewandt werden, und es ist nun der Zeitpunkt gekommen, die Regeldetri in ihrem vollen Umfange zu behandeln. Dabei ist eine zweckmäßige Abstufung der einzelnen Fälle vorzunehmen, etwa in folgender Weise:

1. Einfache Regeldetri: a. gerades Verhältnis; b. umgekehrtes Verhältnis.
2. Zusammengesetzte Regeldetri: a. nur gerade Verhältnisse; b. nur umgekehrte Verhältnisse; c. gemischte Verhältnisse.

Es ist wichtig, daß innerhalb jeder Gruppe zuerst Aufgaben behandelt werden, welche nur ganze Zahlen enthalten; dies erleichtert dem Schüler die richtige Auffassung wesentlich.

Obgleich die Behandlung der Regeldetriaufgaben in Sexta eine bedeutend andere ist als die spätere mit Anwendung des Bruchsatzes, so müssen doch beide in einigen wichtigen Punkten übereinstimmen. Jede Regeldetriaufgabe besteht aus zwei Sätzen. Der eine derselben enthält zwei oder mehr als bekannt anzusehende Zahlen, die in einer gewissen Abhängigkeit von einander stehen; er möge der gegebene Satz heißen. Der andere enthält eine Zahl weniger; die noch fehlende Zahl soll gesucht werden aus der Bedingung, daß alle diese Zahlen (die gesuchte mit eingeschlossen) in derselben Abhängigkeit von einander stehen wie die Zahlen des gegebenen Satzes. Dieser zweite Satz möge der Fragesatz genannt werden. Es ist nun durchaus notwendig, daß der Schüler, ehe er an die Ausrechnung einer Regeldetriaufgabe geht, sich dessen genau bewußt werde, welches der gegebene Satz und welches der Fragesatz ist. Man darf nicht meinen, daß es überflüssig sei, den Schüler angeben zu lassen, was bekannt ist und was gefunden werden soll; die Erfahrung lehrt, daß die Schüler oft genug anfangen zu rechnen, ohne diese Ueberlegung gemacht zu haben. Darum ist eine stetige Anleitung hierzu notwendig. Auch die Art der Abhängigkeit der Zahlen der Aufgabe von einander, und namentlich die Art der Abhängigkeit der gesuchten Zahl von den übrigen, muß der Schüler erkannt haben, ehe er an die Ausrechnung geht. Wenn bei jeder Aufgabe hieran streng festgehalten wird, so ist dies für den Schüler eine gute Übung und zugleich eine gute Gewöhnung, und wenn er sich später mit Gleichungen in eingekleideter Form zu befassen hat, so ist es ihm nichts Fremdes mehr, daß er sich zu-

nächst klar zu machen hat, welches die zu suchende unbekannte Größe ist und in welchen Beziehungen sie zu den gegebenen Daten der Aufgabe steht.

Ein anderes, was bei der Behandlung jeder Regeldetriaufgabe, sie möge noch so einfach oder noch so kompliziert sein, beachtet werden muß, ist, daß der Schüler seine Schlüsse in klaren Worten darlege. Bei der mündlichen Lösung ist dies selbstverständlich; aber auch bei der schriftlichen Lösung muß dies beibehalten werden, bis vollständige Sicherheit im richtigen Schließen erzielt ist. Die schriftliche Lösung giebt mit Recht nur die Resultate der Schlüsse; wenn aber beim Vorrechnen von dem Schüler nur das gesprochen wird, was er zugleich niederschreibt, so giebt dies dem Lehrer noch nicht genauen Aufschluß darüber, ob volles Verständnis erzielt worden ist. Zwei Ausdrücke sind es, die dem Schüler vollständig geläufig werden müssen, so daß er sie jederzeit an richtiger Stelle anzuwenden vermag. Ist z. B. die sehr einfache Aufgabe gegeben: „1 kg kostet 5 M; wie viel kosten 8 kg?“ so muß die Antwort lauten: „Wenn 1 kg 5 M kostet, so kosten 8 kg 8 mal so viel.“ Und die Aufgabe: „Jemand hat in 6 Tg 18 M verdient; wie viel verdient er in 1 Tg?“ ist vorzurechnen: „Wenn er in 6 Tg 18 M verdient, so verdient er in 1 Tg den 6ten Teil davon.“ In diesen Beispielen sind die Ausdrücke „8 mal so viel“ und „den 6ten Teil davon“ diejenigen, welche vorhin als wichtig bezeichnet wurden; sie sind die einzigen korrekten Ausdrücke für die Darlegung der Schlüsse von der Einheit auf eine Mehrheit und umgekehrt. Nicht als korrekt anzuerkennen sind namentlich die manchmal (z. B. in dem Rechenbuch von Schellen) gebrauchten Ausdrücke „8 mal mehr“ und „6 mal weniger“. Beim Vorrechnen ist außerdem darauf zu halten, daß der Bedingungssatz, welcher die Voraussetzung enthält, niemals weggelassen werde. In dieser Weise ist auch vorzurechnen, wenn eine Aufgabe mit Anwendung des Bruchsatzes gelöst wird.

Zur näheren Erläuterung mögen noch einige Beispiele folgen:

1.) Es sei in Sexta von den vorhin angeführten Beispielen die Aufgabe c zu rechnen: „Ein Fußgänger legt 16 km in 3 Std 20 Min zurück; wie lange gebraucht er zu 21 km?“ Nachdem die Aufgabe von einem Schüler gelesen worden ist, wird auf dahin zielende Fragen des Lehrers mündlich angegeben: „Hier ist bekannt, wie lange ein Fußgänger zu 16 km gebraucht; es soll gefunden werden, wie lange er zu 21 km gebraucht. Man muß zuerst finden, wie lange er zu 1 km gebraucht. Man hat zu schließen: Wenn er zu 16 km 3 Std 20 Min gebraucht, so gebraucht er zu 1 km den 16ten Teil davon. Es ist also die Aufgabe zu rechnen: 3 Std 20 Min : 16.“ Jetzt wird geschrieben:

$$\begin{aligned} \text{„Zu 1 km gebraucht er 3 Std 20 Min : 16} &= 12 \text{ Min 30 Sek.} \\ 200 \text{ Min : 16} &= 12 \text{ Min} \quad 480 \text{ Sek : 16} = 30 \text{ Sek} \\ \hline &8 \text{ Min (Rest).} \end{aligned}$$

Dann wieder mündlich: „Jetzt ist gefunden worden, daß er zu 1 km 12 Min 30 Sek gebraucht. Man schließt weiter: Wenn er zu 1 km 12 Min 30 Sek gebraucht, so gebraucht er zu 21 km 21 mal so viel. Es ist also die Aufgabe zu rechnen: 12 Min 30 Sek · 21.“ Nun wird wieder geschrieben:

$$\begin{aligned} \text{„Zu 21 km gebraucht er 12 Min 30 Sek} \cdot 21 &= 4 \text{ Std 22 Min 30 Sek.} \\ \hline 30 \text{ Sek} \cdot 21 & \qquad \qquad \qquad 12 \text{ Min} \cdot 21 \\ 630 \text{ Sek} = 10 \text{ Min 30 Sek} & \qquad \qquad \qquad 24 \\ & \qquad \qquad \qquad 12 \\ & \qquad \qquad \qquad 10 \\ \hline & \qquad \qquad \qquad 262 \text{ Min} = 4 \text{ Std 22 Min} \end{aligned}$$

2.) Es sei mit Anwendung des Bruchsatzes folgende Aufgabe zu rechnen: „Wie viele Arbeiter kann man 15 Wch lang, täglich 9 Std für 1620 M beschäftigen, wenn der Lohn für 15 Arbeiter, die 16 Wch lang täglich 8 Std arbeiten, 2304 M beträgt?“

Die schriftliche Darstellung wird folgende sein:

Man beschäftigt	16	Wch	lg.	bei	8std.	Arbeit	für	2304	M	15	Arb;
" "	15	" "	" "	" "	9	" "	" "	1620	" ?	" "	
Man beschäftigt	1	Wch	lg.	bei	8std.	Arbeit	für	2304	M	15	Arb · 16;
" "	15	" "	" "	" "	8	" "	" "	2304	" "	$\frac{15 \text{ Arb} \cdot 16}{15}$;	
" "	15	" "	" "	" "	1	" "	" "	2304	" "	$\frac{15 \text{ Arb} \cdot 16 \cdot 8}{15}$;	
" "	15	" "	" "	" "	9	" "	" "	2304	" "	$\frac{15 \text{ Arb} \cdot 16 \cdot 8}{15 \cdot 9}$;	
" "	15	" "	" "	" "	9	" "	" "	1	" "	$\frac{15 \text{ Arb} \cdot 16 \cdot 8}{15 \cdot 9 \cdot 2304}$;	
" "	15	" "	" "	" "	9	" "	" "	1620	" "	$\frac{15 \text{ Arb} \cdot 16 \cdot 8 \cdot 1620}{15 \cdot 9 \cdot 2304}$;	
										$\frac{15 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 1620}{15 \cdot 9 \cdot 2304} = 10 \cdot$	

Also können unter den gegebenen Bedingungen 10 Arbeiter beschäftigt werden.

Diese schriftliche Form der Lösung ergibt sich auf folgende Weise: Der Schüler liest die Aufgabe und gibt an, wie der gegebene und der Fragesatz heißen und daß nach der Zahl der Arbeiter gefragt ist. Dann werden die Zahlen der Aufgabe der leichteren Übersicht halber, wie oben geschehen, schematisch geordnet niedergeschrieben. Ehe nun zur Bildung des Bruchsatzes geschritten wird, hat der Schüler noch anzugeben: Die Zahl der Arbeiter ist erstens abhängig von der Zahl der Wochen. Je größer die Zahl der Wochen, um so weniger Arbeiter können beschäftigt werden. Das Verhältnis ist ein umgekehrtes. Die Zahl der Arbeiter ist zweitens abhängig von der täglichen Arbeitszeit. Je größer die tägliche Arbeitszeit, um so weniger Arbeiter können beschäftigt werden. Das Verhältnis ist ein umgekehrtes. Die Zahl der Arbeiter ist drittens abhängig von der Höhe des Lohnes. Je größer der Lohn, um so mehr Arbeiter können beschäftigt werden. Das Verhältnis ist ein gerades.

Nun folgt die Bildung des Bruchsatzes. Die Reihenfolge der Schlüsse ist die in der obigen Ausrechnung angegebene. Man schließt also von 16 Wch auf 1 Wch und dann sofort auf 15 Wch; darauf von 8stündiger Arbeitszeit auf 1stündige und dann sogleich auf 9stündige Arbeitszeit; endlich von 2304 M Lohn auf 1 M und auf 1620 M Lohn. Die Reihenfolge der Schlüsse so zu wählen, daß zunächst von 16 Wch auf 1 Wch, von 8stündiger Arbeitszeit auf 1stündige, von 2304 M Lohn auf 1 M Lohn, und dann erst von 1 Wch auf 15 Wch u. s. w. geschlossen wird, ist nicht zu billigen. Dadurch wird der Schüler gezwungen, eine und dieselbe Überlegung zweimal zu machen, und hierin liegt eine unnötige Erschwerung der Aufgabe. Ein solches Verfahren wäre unpädagogisch.

Jeder zu machende Schluß ist vom Schüler mündlich anzugeben. Dabei ist es zweckmäßig, daß nur diejenigen Zahlen der Aufgabe genannt werden, auf die es ankommt, alle übrigen aber unberücksichtigt bleiben. Die Ausdrucksweise wird sonst gar zu umständlich,

und die Aufmerksamkeit des Schülers wird durch die nebensächlichen Zahlen von der Hauptsache abgelenkt.

Bei den ersten beiden Schlüssen wird nur der Einfluß der Veränderung der Zahl der Wochen auf die Zahl der Arbeiter in Betracht gezogen; der Schüler hat daher zu sprechen: „Wenn man **16** Wch lang 15 Arb beschäftigen kann, so kann man **1** Wch lang 16 mal so viel Arb. beschäftigen; es ist demnach mit 16 zu multiplizieren. Also (mündl. u. schriftl.): Man beschäftigt 1 Wch lang bei 8std. Arbeit für 2304 M 15 Arb · 16.“ Dann mündlich weiter: „Wenn man **1** Wch lang so viel Arbeiter (nämlich 15 Arb · 16) beschäftigen kann, so kann man **15** Wch lang nur den 15ten Teil derselben beschäftigen; es ist demnach durch 15 zu dividieren. Also (mündl. u. schriftl.): Man beschäftigt 15 Wch lang bei 8std. Arbeit für $2304 \text{ M} \frac{15 \text{ Arb} \cdot 16}{15}$.“

Bei den folgenden beiden Schlüssen kommt der Einfluß der Veränderung der täglichen Arbeitszeit auf die Zahl der Arbeiter in Betracht. Daher wird gesprochen: „Wenn man bei **8**std. Arbeitszeit so viel Arbeiter (nämlich $\frac{15 \text{ Arb} \cdot 16}{15}$) beschäftigen kann, so kann man bei **1**std. Arbeitszeit 8 mal so viel Arbeiter beschäftigen; es ist demnach mit 8 zu multiplizieren. Also: (es folgt der dritte der obigen Sätze).“ In gleicher Weise wird fortgeföhren, bis der Bruchsatz vollständig ist, worauf dann die Ausrechnung folgt.

Bei den Regeldetriaufgaben, welche Brüche oder gemischte Zahlen enthalten, wird in vielen Rechenbüchern (z. B. Böhme, Schellen) auf die entsprechenden Stammbrüche zurückgegangen. Dadurch wird die Rechnung, namentlich in größeren Aufgaben, sehr umständlich; außerdem aber wird, und dies ist ein noch größerer Nachteil, auf diese Weise das Multiplizieren mit einem Bruch und das Dividieren durch einen Bruch umgangen. Diese letztgenannten Operationen in ihren Anwendungen einzuüben, dazu soll die Regeldetria dienen; sie ist auch dazu vortrefflich geeignet, aber nur, wenn man sich an dem unmittelbaren Schluß auf die Einheit genügen läßt.

Wenn man von einer gebrochenen Zahl, etwa $6\frac{3}{4}$, auf die Einheit zu schließen hat und es ist zu dividieren, so verliert der Ausdruck „den $6\frac{3}{4}$ ten Teil“ seine Berechtigung; er ist zu ersetzen durch den Ausdruck „dividiert durch $6\frac{3}{4}$ “. Dagegen kann, wenn zu multiplizieren ist, der Ausdruck „ $6\frac{3}{4}$ mal so viel“ unbedenklich beibehalten werden.

Durch die Übungen im Lösen von Regeldetriaufgaben muß der Schüler zu einer solchen Sicherheit im Schließen gelangen, daß er nicht mehr nötig hat, die Reihenfolge der Schlüsse niederzuschreiben. Dadurch vereinfacht sich die schriftliche Darstellung bedeutend. Dieselbe besteht dann nur aus der schematisch geordneten Aufgabe, dem Bruchsatz und seiner Ausrechnung. Die einzelnen zu machenden Schlüsse sind aber beim Vorrechnen genau in derselben Weise anzugeben wie vorhin.

Jeder einigermaßen achtsame Schüler wird, wenn er eine Anzahl von Aufgaben gerechnet hat, leicht merken, daß bei geraden Verhältnissen durch die Zahlen des gegebenen Satzes zu dividieren und mit den Zahlen des Fragesatzes zu multiplizieren ist, und daß bei umgekehrten Verhältnissen das Umgekehrte stattfindet. Dadurch wird die Bildung des Bruchsatzes mehr mechanisch. Dies darf man aber unbedenklich zulassen, da die Hauptsache, nämlich die richtige Beurteilung der Art der Abhängigkeit des unbekanntes Gliedes von den bekannten, niemals einem Mechanismus verfallen kann.

W. Stegemann.