Elementare Darstellung der Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in einem isotropen Mittel.

1. Um die Erscheinungen, welche das Licht darbietet, erklären zu können, nimmt man an, dass der ganze Raum und mithin auch jeder Körper in demselben von einem äusserst feinen und elastischen, den Gesetzen der Schwere nicht unterworfenen Mittel, welches man Aether nennt, erfüllt sei. Der Gleichgewichtszustand des Aethers hängt im Allgemeinen von den anziehenden und abstossenden Kräften ab, welche die Theilchen desselben auf einander ausüben. Innerhalb eines mit Materie erfüllten Raumes, also namentlich innerhalb der Körper selbst, muss derselbe ausserdem noch durch die Wirkungen bedingt sein, welche von den Theilchen der letzteren auf die Theilchen des Aethers ausgeübt werden. Solche Mittel, welche in den einzelnen Richtungen überall die gleiche Beschaffenheit haben, bei denen also daselbst die Theilchen sich in gleichen Abständen befinden und durch gleiche Kräfte im Gleichgewicht gehalten werden, heissen homogene Mittel. Ist insbesondere die Beschaffenheit nicht nur in den einzelnen Richtungen sondern nach allen Richtungen zugleich dieselbe, so nennt man die Mittel isotrop, im Gegentheil anisotrop oder heterotrop. Zu den isotropen Körpern gehören z. B. Luft, Wasser, Glas u. s. w. überhaupt die sogenannten amorphen Körper in ihrem natürlichen Zustande, zu den heterotropen die krystallisirten Körper. In den isotropen Mitteln wird, ebenso wie in einem von Materie nicht erfüllten Raume, der Aether überall gleiche Beschaffenheit haben, denn welche Wirkungen auch die Theilchen des Körpers auf diejenigen des Aethers äussern mögen, so müssen sie doch in allen Punkten genau dieselben sein.

2. Die leuchtenden Körper befinden sich wie die tönenden in Schwingungen, nur erfolgen dieselben mit viel grösserer Geschwindigkeit. Die Schwingungen pflanzen sich durch den Aether bis auf unsere Netzhaut fort, und indem sie dieselbe treffen, erzeugen sie die Empfindung des Lichtes. Es wird demnach zunächst darauf ankommen, die Gesetze der schwingenden Bewegung eines Aethertheilchens, welches man hinsichtlich seiner Grösse als einen Punkt ansehen kann, zu ermitteln. Denkt man sich daher ein solches Theilchen durch irgend eine äussere Kraft von momentaner Dauer aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, so wird dasselbe durch die Kräfte, welche es vorher in der Ruhelage festhielten, wieder dahin zurückgeführt. Die Bahn kann keine andere als eine geradlinige sein und da die Kräfte, welche das Theilchen zurückziehen, so lange darauf wirken, bis es seine anfängliche Lage wieder erreicht hat, so muss es mit beschleunigter Geschwindigkeit dahin zurückkehren, und in Folge derselben gerade so wie das Pendel um die Ruhelage eine hin und hergehende Bewegung vollführen. Die schwingende Bewegung des Theilchens wird vollständig bestimmt sein, sobald man im Stande ist in jedem Augenblicke den Ort und die Geschwindigkeit desselben anzugeben. Man wird daher Gleichungen aufzustellen haben, in denen der Abstand des bewegten Theilchens von der Gleichgewichtslage und die Geschwindigkeit desselben als abhängig von der Zeit dargestellt werden. Beides aber wird wesentlich davon abhängen, wie die Kräfte, welche das Theilchen in die Ruhelage zurück-

führen, d. h. die Elasticitätskräfte des Aethers, wirken. Wir machen daher die leicht zu rechtfertigende Annahme*), dass dieselben auf ein aus der Gleichgewichtslage entferntes Theilchen so wirken, dass eine Kraft resultirt, deren Grösse der Entfernung von der Ruhelage einfach proportional ist. Wir denken uns ferner die Wirkung der Kraft darin bestehend, dass sie dem Theilchen Impulse ertheilt, die in gleichen, ausserordentlich kleinen Zeitintervallen unausgesetzt auf einander erfolgen.

Es seien nun y_{m-1}, y_m und y_{m+1} die Entfernungen des Theilchens von der Gleichgewichtslage nach $m-1$, m und $m+1$ Impulsen oder Zeitintervallen, dann hat das Theilchen in dem m^{ten} Zeitintervalle den Weg $y_m - y_{m-1}$ und in dem darauf folgenden den Weg $y_{m+1} - y_m$ zurückgelegt. Die Differenz beider Wege ist also:

$$(y_{m+1} - y_m) - (y_m - y_{m-1}) = y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}$$

und zwar ist dieselbe immer negativ, so lange y_{m+1} etc. positiv sind, denn entfernt sich das Theilchen von der Gleichgewichtslage, ist also $y_{m+1} > y_m > y_{m-1}$, so ist jede der auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehenden Differenzen positiv, da aber in diesem Falle die Geschwindigkeit abnimmt, so ist die erste Differenz kleiner als die zweite, nähert sich hingegen das Theilchen der Gleichgewichtslage, ist demnach $y_{m+1} < y_m < y_{m-1}$, so sind die einzelnen Differenzen negativ und die erste ist absolut genommen grösser als die zweite, weil die Geschwindigkeit zunimmt. Der Weg, den das Aethertheilchen in dem $m+1^{\text{sten}}$ Zeitintervalle mehr (oder weniger) zurücklegt, als in dem m^{ten}, rührt von dem Impulse her, den es nach Ablauf von m Zeittheilchen erfährt; denn fände kein neuer Impuls statt, so würde es in dem $m+1^{\text{sten}}$ Zeittheilchen denselben Weg zurücklegen, den es in dem m^{ten} zurückgelegt hat.

Bezeichnet man mit k die Kraft, mit der das Theilchen in der Einheit der Entfernung nach der Ruhelage hingezogen wird, so ist nach der früher gemachten Annahme in der Entfernung y_m die Grösse derselben ky_m. Nimmt man also an, dass die Stärke des Impulses, welchen das Theilchen vermöge jener Kraft in dem $m+1^{\text{sten}}$ Zeitintervalle erfährt $= \frac{ky_m}{n}$ ist, und dass ein Zeitintervall $\frac{1}{n}$ Secunde beträgt, so legt das Aetertheilchen vermöge jenes Impulses in demselben den Weg $\frac{ky_m}{n^2}$ zurück. Dieser Weg ist aber, wie vorher angegeben, gleich der Differenz der in der m^{ten} und $m+1^{\text{sten}}$ n^{tel} Secunde zurückgelegten Wege, mithin hat man die Gleichung:

$$y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1} = -\frac{ky_m}{n^2}$$

worin das negative Vorzeichen auf der rechten Seite aus dem oben angeführten Grunde zu setzen ist.

3. Aus der in dem vorigen § entwickelten Gleichung lässt sich nun y_m bestimmen **). Es geschieht nämlich derselben Genüge, wenn man

$$\begin{aligned} y_m &= Ap^m + Bq^m \\ \text{und folgl.}\quad y_{m+1} &= Ap^{m+1} + Bq^{m+1} \qquad (1) \\ y_{m-1} &= Ap^{m-1} + Bq^{m-1} \end{aligned}$$

setzt, wobei p und q die Wurzeln der Gleichung:

$$u^2 - \left(2 - \frac{k}{n^2}\right) u + 1 = 0 \qquad (2)$$

*) S. Neue Elemente der Mechanik von Schellbach. Berlin 1860. S. 215.
**) S. Ebendas. S. 80.

A und B aber den Bedingungen der Aufgabe gemäss noch näher zu bestimmende Constanten sind. Setzt man nämlich die Werthe (1) in die auf 0 reducirte Gleichung am Schluss des vorigen § ein, so erhält man:

$$y_{m+1} - \left(2 - \frac{k}{n^2}\right) y_m + y_{m-1} = Ap^{m-1}\left(p^2 - \left(2 - \frac{k}{n^2}\right) p + 1\right) + Bq^{m-1}\left(q^2 - \left(2 - \frac{k}{n^2}\right) q + 1\right) \quad (3)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber in der That $= 0$, wenn p und q die Wurzeln der Gleichung (2) sind. — Löst man die Gleichung (2) auf, so ergiebt sich:

$$u = 1 - \frac{k}{2n^2} \pm \sqrt{-\frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{4n^4}} \quad (4)$$

oder näherungsweise: $u = 1 \pm \frac{\sqrt{-k}}{n}$, da $\frac{\sqrt{k}}{n}$ eine sehr kleine Grösse ist, und folglich die höheren Potenzen derselben vernachlässigt werden können. Es ist daher:

$$p = 1 + \frac{i\sqrt{k}}{n}$$
$$\text{und} \quad q = 1 - \frac{i\sqrt{k}}{n} \quad (5)$$

wenn, wie gewöhnlich, $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet wird. Setzt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (1) ein, so erhält man:

$$y_m = A\left(1 + \frac{i\sqrt{k}}{n}\right)^m + B\left(1 - \frac{i\sqrt{k}}{n}\right)^m \quad (6)$$

Ist t die in Secunden ausgedrückte Zeit, zu der das Aethertheilchen die Entfernung y_m hat, so ist, da in jeder Secunde n Impulse erfolgen, $m = nt$ zu setzen, so dass man statt der Gleichung (6) die folgende hat:

$$y_{nt} = A\left(1 + \frac{i\sqrt{k}}{n}\right)^{nt} + B\left(1 - \frac{i\sqrt{k}}{n}\right)^{nt} \quad (7)$$

Da aber bekanntlich $\left(1 + \frac{i\sqrt{k}}{n}\right)^n = e^{i\sqrt{k}}$ und ebenso $\left(1 - \frac{i\sqrt{k}}{n}\right)^n = e^{-i\sqrt{k}}$ ist, so ergiebt sich: $y_{nt} = Ae^{it\sqrt{k}} + Be^{-it\sqrt{k}}$ (8)

4. Es kommt noch darauf an, die zur Zeit t stattfindende Geschwindigkeit zu ermitteln. Da der Weg, den das Aethertheilchen zur Zeit t in einer $n^{\underline{\text{tel}}}$ Secunde zurückgelegt hat, $y_m - y_{m-1}$ od. $y_{nt} - y_{nt-1}$ war, so ist die in diesem Augenblicke stattfindende Geschwindigkeit $v = n\,(y_{nt} - y_{nt-1})$. Nun ist aber $nt - 1 = (t - \frac{1}{n})$, man wird daher den Werth von y_{nt-1} erhalten, wenn man in die Gleichung (8) des vorigen § für t, $t - \frac{1}{n}$ setzt, dadurch ergiebt sich:

$$y_{nt-1} = Ae^{it\sqrt{k}} \,.\, e^{\frac{-i\sqrt{k}}{n}} + Be^{-it\sqrt{k}} \,.\, e^{\frac{i\sqrt{k}}{n}} \quad (1)$$

daher ist:

$$v = n\left[Ae^{it\sqrt{k}}\left(1 - e^{\frac{-i\sqrt{k}}{n}}\right) + Be^{-it\sqrt{k}}\left(1 - e^{\frac{i\sqrt{k}}{n}}\right)\right] \quad (2)$$

Es ist ferner bekanntlich:

$$e^{\pm\frac{i\sqrt{k}}{n}} = 1 \pm \frac{i\sqrt{k}}{n} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\sqrt{k}}{n}\right)^2 \pm \ldots\ldots \quad (3)$$

Berücksichtigt man also nur die beiden ersten Glieder der Entwickelung, so erhält man statt der Gleichung (2) die folgende:

$$v = i\sqrt{k}\,(Ae^{it\sqrt{k}} - Be^{-it\sqrt{k}}) \qquad (4)$$

5. Um endlich die Constanten A und B den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu bestimmen, erwäge man zunächst, dass im Anfange der Bewegung das Aethertheilchen sich in der Ruhelage befindet, dass also für $t = 0$, $y = 0$ sein muss; es ergiebt sich daher aus der Gleichung (8) im § 3, dass $A + B = 0$, folgl. $B = -A$ ist. Bezeichnet man ferner die Zeit, zu der das Theilchen seine grösste Entfernung von der Gleichgewichtslage erreicht hat, mit t', so muss für dieselbe offenbar $v = 0$ sein, und daher geht die Gleichung (4) in § 4 in folgende über:

$$i\sqrt{k}\,A\,(e^{it'\sqrt{k}} + e^{-it'\sqrt{k}}) = 0. \qquad (1)$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist bekanntlich $2\cos t'\sqrt{k}$, folglich muss $2Ai\sqrt{k}\cos t'\sqrt{k} = 0$ sein, da aber $2A\sqrt{k}$ nicht den Werth 0 haben kann, so muss $\cos t'\sqrt{k} = 0$ und folglich $t'\sqrt{k} = \frac{\pi}{2}$ also $t' = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ sein. Setzt man diesen eben gefundenen Werth der Zeit t, zu der das Theilchen seine grösste Entfernung von der Gleichgewichtslage hat, in die Gleichung (8) in § 3, und bezeichnet die letztere, also den dazu gehörigen Werth von y_{nt} mit a, so ergiebt sich, wenn man zugleich für B, $-A$ setzt:

$$a = A\left(e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}\right) = 2Ai\sin\frac{\pi}{2}\,.$$

$$\text{folgl. ist} \quad A = \frac{a}{2i}\ \text{u.}\ B = -\frac{a}{2i} \qquad (2)$$

Durch Einsetzung dieser Werthe von A und B in die Gleichungen (8) § 3, und (4) § 4, erhält man:

$$y_{nt} = \frac{a}{2i}\left(e^{it\sqrt{k}} - e^{-it\sqrt{k}}\right) = a\sin t\sqrt{k}\,.$$

$$v = a\sqrt{k}\left(e^{it\sqrt{k}} + e^{-it\sqrt{k}}\right) = a\sqrt{k}\cos t\sqrt{k}$$

Schreibt man der Einfachheit wegen y an Stelle von y_{nt}, so hat man folgende, die Bewegung des Aethertheilchens bestimmende Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= a\sin t\sqrt{k} \\ v &= a\sqrt{k}\cos t\sqrt{k} \end{aligned} \qquad (3)$$

Wenn n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so ist bekanntlich: $\sin(2n\pi + t\sqrt{k})$ oder was dasselbe ist: $\sin\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{k}} + t\right)\sqrt{k} = \sin t\sqrt{k}$ und ebenso $\cos(2n\pi + t\sqrt{k}) = \cos\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{k}} + t\right)\sqrt{k} = \cos t\sqrt{k}$; so oft sich also die Zeit um $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ ändert, ist der Schwingungszustand wieder derselbe wie zur Zeit t; daher ist $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ die Dauer einer vollständigen Schwingung. Man nennt dieselbe die **Oscillationsdauer**, bezeichnet man sie mit T, setzt also $\frac{2\pi}{\sqrt{k}} = T$, so ist $\sqrt{k} = \frac{2\pi}{T}$ und durch Einsetzung dieses Werthes von $\sqrt{k}$ in die Gleichungen (3) erhält man:

$$\begin{aligned} y &= a\sin\frac{2\pi t}{T} \\ v &= \frac{2a\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{T} \end{aligned} \qquad (4)$$

Durch diese beiden Gleichungen ist der Zustand des Aethertheilchens zu jeder Zeit t vollständig bestimmt, sobald a und T als gegebene Grössen betrachtet werden. Es möge hier zugleich noch bemerkt werden, dass a, d. h. die grösste Entfernung des Theilchens von der Gleichgewichtslage, die Amplitude der Schwingung genannt wird.

6. Um nun zu zeigen, dass durch die beiden Gleichungen am Schluss des vorigen § die früher (§ 2) im Allgemeinen beschriebene Bewegung eines Aethertheilchens vollständig dargestellt wird, sollen dieselben näher erörtert werden. Zunächst ergiebt sich, dass für $t = \frac{T}{4}$ $y = a$ und $v = o$ ist; d. h. nach Verlauf des ersten Viertels der Oscillationsdauer hat das Theilchen seine grösste Entfernung von der Gleichgewichtslage erreicht, und seine Geschwindigkeit ist $= o$. Von $t = \frac{T}{4}$ bis $t = \frac{T}{2}$ wird, da $\frac{2\pi t}{T}$ dann von $\frac{\pi}{2}$ bis π zunimmt, der sinus und folglich auch y immer kleiner, während der cosinus absolut genommen, und daher auch v, immer grösser wird, aber negativ ist. Das Theilchen nähert sich also der Gleichgewichtslage und zwar mit immer grösserer Geschwindigkeit; es erreicht dieselbe für $t = \frac{T}{2}$ d. h. am Ende der halben Oscillationsdauer, und hat dann seine grösste Geschwindigkeit $-\frac{2a\pi}{T}$, wobei das negative Vorzeichen die der anfänglichen entgegengesetzte Richtung der Bewegung andeutet. Von $t = \frac{1}{2}T$ bis $t = \frac{3}{4}T$ liegt $\frac{2\pi t}{T}$ zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$, der sinus ist also negativ, nimmt absolut genommen zu, während der cosinus abnimmt und ebenfalls negativ ist. Das Theilchen entfernt sich also nach der entgegengesetzten Seite von der Gleichgewichtslage und zwar mit abnehmender Geschwindigkeit; die grösste Entfernung auf dieser Seite erreicht es für $t = \frac{3}{4}T$, da hierfür $y = -a$ ist, zugleich hat es dann wieder die Geschwindigkeit o. Nimmt endlich t von $\frac{3}{4}T$ bis T zu, dann wächst $\frac{2\pi t}{T}$ von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π, der sinus nimmt also ab und ist negativ, der cosinus hingegen nimmt zu und ist positiv; daher nähert sich das Theilchen nun wieder mit zunehmender Geschwindigkeit der Gleichgewichtslage, und erreicht dieselbe für $t = T$, wobei es abermals seine grösste Geschwindigkeit $\frac{2a\pi}{T}$ erhält. Von nun an beginnt es eine neue Schwingung, die ganz auf dieselbe Weise vor sich geht wie die erste.

Setzt man in die Gleichungen (4) in § 5 für t, $t + \frac{T}{2}$ und nennt die dazu gehörige Entfernung y', die Geschwindigkeit v', so hat man:

$$y' = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right) = -a \sin\frac{2\pi t}{T} = -y$$

$$\text{u.} \quad v' = \frac{2a\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right) = -\frac{2a\pi}{T} \cos\frac{2\pi t}{T} = -v$$

d. h. das Aethertheilchen befindet sich in Zeiten, die um eine halbe Oscillationsdauer verschieden sind, in gleichen Abständen von der Gleichgewichtslage, aber auf entgegengesetzten Seiten, und hat dieselbe Geschwindigkeit, aber die Bewegungsrichtungen sind entgegengesetzt.

Man kann die Schwingungen eines Aethertheilchens geometrisch darstellen, wenn man einen Kreis beschreibt, dessen Radius gleich der Amplitude ist, und annimmt, dass die Oscillationsdauer durch den Umfang des Kreises ausgedrückt wird. Zieht man in diesem Kreise einen Durchmesser, welcher die Bahn des bewegten Theilchens bezeichnet, errichtet darauf einen Radius senkrecht, theilt von dessen Endpunkt aus die Peripherie des Kreises nach der Richtung der beginnenden Bewegung des Theilchens in eine beliebige Anzahl z. B. 12 gleiche Theile, und fällt endlich von den einzelnen Theilpunkten Senkrechte auf jenen Durchmesser, so geben die Fusspunkte der Senkrechten die Orte an, in denen sich das Aethertheilchen in den betreffenden Momenten der Bewegung, also nach 1, 2 etc. 12teln einer Oscillationsdauer, befindet, während die Senkrechten selbst den zu diesen Zeiten stattfindenden Geschwindigkeiten proportional sind. —

Die einzelnen Bogen $\frac{2\pi t}{T}$ nennt man Phasen der Oscillation zur Zeit t, und die grösste Geschwindigkeit $\frac{2a\pi}{T}$ des Aethertheilchens heisst die Vibrationsintensität, die letztere hängt, wie man sieht, von der Oscillationsdauer ab, während dies mit der Amplitude nicht der Fall ist. —

7. Wenn durch irgend eine Veranlassung ein Aethertheilchen in Bewegung gesetzt wird, so muss sich dieselbe nothwendig den benachbarten Theilchen mittheilen, und von diesen dann weiter fortgepflanzt werden. Denn sobald ein Theilchen aus der Ruhelage entfernt ist, ändert sich dadurch sein Abstand von den ihm benachbarten Theilchen, folglich tritt auch eine Aenderung in der Wirkung der zwischen ihnen thätigen Kräfte ein, und es muss also auch eine Bewegung der nächsten Theilchen erfolgen. Wir denken uns zunächst eine in gerader Linie liegende Reihe von Aethertheilchen, A, B, C etc., und wollen die Fortpflanzung der Bewegung in derselben genauer untersuchen. Verlässt das Theilchen A seine Gleichgewichtslage, und wird dadurch sein Abstand von B vergrössert, so wird B nun von A stärker angezogen als von C, denn wir haben angenommen, dass bei einer Verschiebung der Aethertheilchen vermöge der zwischen ihnen thätigen Elasticitätskräfte eine Kraft resultirt, die der Grösse der Verschiebung proportional ist. Das Theilchen B kann also, da ungleiche Kräfte auf dasselbe wirken, nicht mehr in Ruhe bleiben, seine Bewegung muss nach Grösse und Richtung durch die Resultante der beiden nach A und C hin wirkenden Kräfte bestimmt werden. Dasselbe gilt von allen folgenden Theilchen, so dass nach und nach die ganze Reihe in Bewegung geräth. Haben alle Theilchen gleichen Abstand von einander, und sind die auf dieselben wirkenden Kräfte von gleicher Grösse, so muss offenbar jedes folgende dieselbe Bewegung machen als das vorhergehende, und es unterscheiden sich die Bewegungen derselben nur dadurch von einander, dass sie zu verschiedenen Zeiten begonnen haben, die Bewegungszustände der verschiedenen Theilchen werden also auch zu derselben Zeit im Allgemeinen verschieden sein. Ist demnach t′ die Zeit, seit der ein Theilchen, dessen Entfernung von dem ursprüngl. bewegten = x ist, schwingt, und bezeichnen y′ und v′ bezüglich seine Entfernung und Geschwindigkeit zu dieser Zeit, so wird der Schwingungszustand zunächst durch die folgenden Gleichungen bestimmt sein:

$$\left.\begin{aligned} y' &= a \sin \frac{2\pi t'}{T} \\ v' &= \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi t'}{T} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Will man nun den Schwingungszustand zur Zeit t, während welcher das ursprünglich bewegte Theilchen schon schwingt, erhalten, so muss man t′ durch t ausdrücken. Bezeichnet man zu dem Ende die Länge, um welche sich die Bewegung während einer Oscillation des ursprünglich bewegten Theilchens fortpflanzt, mit λ, so muss, da die Oscillationsdauer für jedes Theilchen dieselbe ist, diese Länge in der ganzen Reihe der Theilchen auch immer dieselbe bleiben; man nennt sie eine Wellenlänge. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Bewegung in der Reihe fortpflanzt, ist daher $= \frac{\lambda}{T}$ und folgl. die Zeit, in welcher mit dieser Geschwindigkeit der Weg x zurückgelegt wird $= \frac{xT}{\lambda}$. Die Zeit, welche die Bewegung brauchte, um bis zu dem Theilchen in der Entfernung x zu gelangen, ist aber offenbar auch $= t - t'$, man hat also die Gleichung $\frac{xT}{\lambda} = t - t'$, aus der sich $t' = t - \frac{xT}{\lambda}$ ergiebt. Setzt man diesen Werth von t' in die Gleichungen (1) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} y' &= a \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{xT}{\lambda}\right) = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ v' &= \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{xT}{\lambda}\right) = \frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Durch diese Gleichungen ist der Schwingungszustand eines Theilchens, dessen Entfernung von dem Anfangspunkte der Bewegung x ist, vollständig bestimmt, und mithin auch, da x jeden beliebigen Werth haben kann, die Bewegung jedes Punktes der Reihe.

8. Ist $x = n\lambda$, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so ist:

$$\left.\begin{aligned} y' &= a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - 2n\pi\right) = a \sin \frac{2\pi t}{T} \\ \text{u.} \quad v' &= \frac{2a\pi}{T} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - 2n\pi\right) = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

also $y' = y$ und $v' = v$. Demnach befinden sich die Theilchen, welche um irgend ein Vielfaches einer Wellenlänge von dem Anfangspunkte entfernt sind, in gleichen Schwingungszuständen.

Ist $x = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ so ist:

$$\left.\begin{aligned} y' &= a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - (2n+1)\pi\right) = - a \sin \frac{2\pi t}{T} \\ v' &= \frac{2a\pi}{T} \cos. \left(\frac{2\pi t}{T} - (2n+1)\pi\right) = - \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

oder es ist $y' = - y$ und $v' = - v$

d. h. alle Theilchen, die um 1, 3, 5 etc. halbe Wellenlängen von dem Anfangspunkte entfernt sind, befinden sich in gerade entgegengesetztem Schwingungszustande.

Setzt man $t = nT$ d. h. nimmt man an, dass das zuerst schwingende Theilchen gerade eine beliebige Anzahl von Oscillationen vollendet hat, so ist:

$$\left.\begin{aligned} y' &= a \sin \left(2n\pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = - a \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \\ v' &= \frac{2a\pi}{T} \cos \left(2n\pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Da nun $\sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ immer $= 0$, wenn $x = n\frac{\lambda}{2}$, $\cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ hingegen $= \pm 1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so sind alle Theilchen, die um eine beliebige Anzahl halber Wellenlängen vom Anfangspunkte entfernt sind, zu gleicher Zeit mit dem zuerst bewegten Theilchen in der Gleichgewichtslage und besitzen gleiche, aber abwechselnd entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten.

Hat endlich in den Gleichungen (3) x den Werth $(2n+1)\frac{\lambda}{4}$, so ist $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$, je nachdem n gerade oder ungerade, und $\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$. Demnach ist $y' = \pm a$ und $v' = 0$, d. h. wenn sich das zuerst schwingende Aethertheilchen in der Gleichgewichtslage befindet, dann haben alle Theilchen, welche um eine ungerade Anzahl von Viertel Wellenlängen von ihm entfernt sind, die Geschwindigkeit 0 und befinden sich in ihren weitesten Entfernungen von der Gleichgewichtslage, und zwar abwechselnd auf verschiedenen Seiten derselben.

9. In den beiden vorhergehenden §§ ist die Richtung, in der die Bewegung der einzelnen Theilchen erfolgt, gar nicht berücksichtigt worden; dieselbe wird unter den gestellten Voraussetzungen nur von der Richtung abhängen, in welcher sich das erste Aethertheilchen bewegt. Geht dessen Bewegung in der Richtung der geraden Linie, in der die Aethertheilchen liegen, vor sich, so finden in der Reihe abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen statt, es entstehen also sogenannte longitudinale Schwingungen oder Wellen; dabei ändert sich die Gestalt der Linie nicht. Erfolgt die Bewegung der Theilchen senkrecht zur Richtung der sie enthaltenden geraden Linie, mithin auch senkrecht gegen die Richtung, in der sich die Bewegung fortpflanzt, so nennt man die Schwingungen transversale. In diesem Falle ändert sich die Gestalt der Linie, und man kann dieselbe leicht durch folgende Construction erhalten. Man beschreibe zunächst einen Kreis mit einem Radius, den man = a annimmt und theile die Peripherie desselben in eine beliebige Anzahl, etwa 12 gleiche Theile. Die Sinus der Bogen $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ etc. sind, wie man aus der Gleichung $y = -a \sin\frac{2\pi x}{\lambda}$ ersieht, die Ausweichungen der Aethertheilchen in der Entfernung von $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}$ etc. Wellenlängen von dem Anfangspunkte der Bewegung. Theilt man daher eine als Wellenlänge angenommene Strecke AB in 12 gleiche Theile, und errichtet in den Theilpunkten Senkrechte, welche der Reihe nach den Sinus jener Bogen gleich sind, wobei die Richtung durch das Vorzeichen bestimmt wird, so geben die Endpunkte dieser Senkrechten die Lage der Theilchen für die Zeit an, wenn das im Anfangspunkte A liegende Theilchen gerade eine Oscillation vollendet hat. Die krumme Linie, in der jene Punkte liegen, hat eine wellenförmige Gestalt, und eben daher nennt man die Bewegung eine Wellenbewegung.

10. In einem mit Aether erfüllten Raume können wir uns die Aethertheilchen so geordnet denken, dass sie alle auf den unzähligen geraden Linien liegen, welche man von einem Theilchen aus nach allen möglichen Richtungen ziehen kann. Jenes Theilchen gehört jeder der geraden Linien an, welche wie die Radien einer Kugel von demselben, als dem Mittelpunkte auslaufen. Geräth dasselbe also durch irgend eine Veranlassung in Schwingungen, so pflanzt sich die Bewegung nach dem in dem Vorhergehenden entwickelten Gesetze auf jedem einzelnen Radius fort. Unter der Voraussetzung, dass wir es nur mit einem isotropen Mittel zu thun haben, muss offenbar die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung und ebenso die Wellenlänge auf allen Radien dieselbe sein. Bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit c, so wird die Wellenbewegung auf jedem Radius in der Zeit t bis zu der Entfernung ct gelangt sein; die Aethertheilchen also, die auf den einzelnen Radien in dieser Entfernung liegen, müssen sich in gleichen Schwingungszuständen befinden. Diese aber bilden die Oberfläche einer Kugel, deren Radius ct ist, mithin befinden sich sämmtliche Theilchen, die auf einer Kugeloberfläche liegen, deren Mittelpunkt das zuerst bewegte Aethertheilchen ist, in denselben Schwingungszuständen. Ist T, wie bisher, die Oscillationsdauer des letzteren,

dann fangen die Theilchen, welche sich auf einer Kugeloberfläche vom Radius cT befinden, ihre Bewegung gerade an, wenn jenes erste eine Oscillation vollendet hat. Nach der Zeit $2T$ haben diese Theilchen ihre erste Oscillation vollendet, und die Bewegung hat sich bis zur Oberfläche einer Kugel vom Radius $2cT$ fortgepflanzt. Man übersieht leicht, wie in jeder folgenden Zeit T die Bewegung sich immer wieder um die Grösse cT weiter fortpflanzt, und wie sich also um das zuerst bewegte Aethertheilchen eine immer grössere Menge von Kugelschalen bildet, deren Dicke cT ist, und in denen die einzelnen, gleich weit von der Grenze der Schalen entfernten Theilchen sich stets in gleichen Schwingungszuständen befinden, nur mit dem Unterschiede, dass die dem Mittelpunkte näher liegenden schon eine grössere Anzahl von Oscillationen vollendet haben, als die entfernteren. Man nennt die einzelnen Kugelschalen kugelförmige Wellen, die Dicke derselben die Wellenlänge, und die einzelnen Radien Lichtstrahlen.

Hört die Bewegung des ersten Theilchens auf, so kommen in der Zeit T alle Theilchen, die innerhalh einer Kugel vom Radius cT liegen, in Ruhe, nach der Zeit $2T$ haben auch die Bewegungen aller Theilchen der ersten Kugelschale aufgehört etc. Es entsteht also ausser der äusseren Begrenzung der Wellenbewegung noch eine innere, die in demselben Maasse vom Mittelpunkte weiter fortrückt, als die äussere; daher befinden sich sämmtliche bewegte Theilchen in einer Kugelschale, die immer dieselbe Dicke ncT hat, wenn nämlich nT die Zeit ist, während welcher das im Mittelpunkte befindliche Theilchen in Schwingung gewesen ist.

11. Denkt man sich mehrere Aethertheilchen in Bewegung gesetzt, so werden alle übrigen durch die von jenen ausgehenden Bewegungen getroffen, und es kommt darauf an, die aus den verschiedenen Anregungen sich ergebenden Schwingungen der Theilchen zu bestimmen. Zunächst möge der einfache Fall betrachtet werden, dass nur zwei Aethertheilchen gleichzeitig in Bewegung gesetzt sind, oder was auf dasselbe hinaus kommt, dass von zwei verschiedenen Punkten gleichzeitig Lichtstrahlen ausgehen, und es sollen die Bewegungen der von ihnen getroffenen Aethertheilchen ermittelt werden, welche mit jenen Punkten in gerader Linie liegen *). Bezeichnen wir die Entfernung der beiden Punkte A und B, von denen die Lichtstrahlen ausgehen, mit d, und nehmen an, dass die Oscillationsdauer und demnach auch die Wellenlänge für die von A und B ausgehenden Schwingungen dieselbe sei, so wird der Schwingungszustand eines Theilchens C, dessen Entfernung von B x also von A $d+x$ ist, wenn es nur von dem Lichtstrahl, welcher von B ausgeht, getroffen würde, zur Zeit t durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ v &= \frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

bestimmt sein, während derselbe durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y' &= a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d+x}{\lambda}\right) \\ v' &= \frac{2a_1\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d+x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ausgedrückt ist, wenn das Theilchen nur durch die von A ausgehende Bewegung angeregt würde. Nimmt man nun ferner an, dass die Oscillationsbewegungen der Aethertheilchen in den Lichtstrahlen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung, und zwar für beide in derselben

*) S. Die Beugungserscheinungen von F. M. Schwerd. Mannheim 1835. S. 10. § 38.

Ebene erfolgen, so muss die resultirende Entfernung des Aethertheilchens gleich der algebraischen Summe der einzelnen Entfernungen, und ebenso die resultirende Geschwindigkeit, gleich der algebr. Summe der einzelnen Geschwindigkeiten sein. Bezeichnet man also die Entfernung und Geschwindigkeit des Theilchens C bezüglich mit Y und V, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} Y &= y + y' = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d+x}{\lambda}\right) \\ V &= v + v' = \frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{2a_1\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d+x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Unter den vorher angegebenen Bedingungen aber muss die resultirende Schwingung von C jedenfalls in derselben Weise vor sich gehen, wie die eines Theilchens, das nur durch eine von einem Punkte ausgehende Bewegung angeregt wird, und wird sich daher auch durch folgende Gleichungen ausdrücken lassen:

$$\left.\begin{aligned} Y &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_m}{\lambda}\right) \\ V &= \frac{2A\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_m}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wenn A die Amplitude und x_m die Entfernung desjenigen schwingenden Aethertheilchens bedeutet, dessen Bewegung allein auf C dieselbe Wirkung hervorbringt, als die beiden von A und B ausgehenden Bewegungen zusammengenommen. Aus der Verbindung der Gleichungen (3) und (4) folgt, dass:

$$\left.\begin{aligned} A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_m}{\lambda}\right) &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d+x}{\lambda}\right) \\ \frac{2A\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_m}{\lambda}\right) &= \frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{2a_1\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d+x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

sein muss.

Ist $\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} = \frac{n}{2}$, also $\frac{t}{T} = \frac{x}{\lambda} + \frac{n}{2}$, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) &= 0 \\ \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d+x}{x}\right) &= \mp \sin \frac{2\pi d}{\lambda} \\ \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_m}{\lambda}\right) &= \pm \sin 2\pi \left(\frac{x - x_m}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

und die erste der Gleichungen (5) geht daher in folgende über:

$$A \sin \frac{2\pi (x - x_m)}{\lambda} = - a_1 \sin \frac{2\pi d}{\lambda} \quad (7)$$

Setzt man ferner $\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} = \frac{2n+1}{4}$, also $\frac{t}{T} = \frac{x}{\lambda} + \frac{2n+1}{4}$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) &= \pm 1 \\ \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right) &= \pm \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \\ \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_m}{\lambda}\right) &= \pm \cos 2\pi \frac{(x - x_m)}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die erste der Gleichungen (5) erhält man:

$$A \cos 2\pi \frac{x - x_m}{\lambda} = a + a_1 \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \qquad (9)$$

Dividirt man die Gleichung (7) durch (9), so ergiebt sich:

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{x - x_m}{\lambda} = - \frac{a_1 \sin \frac{2\pi d}{\lambda}}{a + a_1 \cos \frac{2\pi d}{\lambda}} \qquad (10)$$

Addirt man hingegen dieselben Gleichungen, nachdem man sie quadrirt hat, so erhält man:

$$A^2 = a^2 + a_1^2 + 2 a a_1 \cos \frac{2\pi d}{\lambda}$$

$$\text{also} \quad A = \sqrt{a^2 + a_1^2 + 2 a a_1 \cos \frac{2\pi d}{\lambda}} \qquad (11)$$

Durch die Gleichungen (10) und (11) sind x_m und A vollständig bestimmt, daher ist durch die Gleichungen (4) in Verbindung mit den eben genannten der resultirende Schwingungszustand des Aethertheilchens C genau bestimmt.

Die Wirkung, welche ein bewegter Körper ausübt, ist bekanntlich dem Produkt aus seiner Masse in das Quadrat seiner Geschwindigkeit proportional, daher wird auch die Lichtstärke oder Intensität eines Lichtstrahles, da in dem gegenwärtigen Falle die Masse $= 1$ zu setzen ist, dem Quadrate der Vibrationsintensität proportional sein. Sind also die Vibrationsintensitäten in den Entfernungen 1 und x bezüglich $v = \frac{2a\pi}{T}$ und $v_1 = \frac{2a_1\pi}{T}$, so verhalten sich die Intensitäten wie $v^2 : v_1^2$ oder wie $a^2 : a_1^2$, d. h. wie die Quadrate der Amplituden. Wird die Intensität für die Amplitude $a = 1$ zur Einheit genommen, so ist für die Amplitude a_1 die Intensität $J = a_1^2$. Demnach ist die relative Intensität eines Lichtstrahles dem Quadrate der Amplitude gleich, und es ist daher für den vorliegenden Fall

$$J = a^2 + a_1^2 + 2 a a_1 \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \qquad (12)$$

12. Ist insbesondere $a = a_1$, sind also die Amplituden einander gleich, so erhält man aus Gleichung 10 des vor. §:

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{x - x_m}{\lambda} = - \frac{\sin \frac{2\pi d}{\lambda}}{1 + \cos \frac{2\pi d}{\lambda}} = - \operatorname{tang} \frac{\pi d}{\lambda}$$

$$\text{also} \quad x_m = x + \frac{d}{2} \qquad (1)$$

$$\text{und aus Gleichung (11): } A = a \sqrt{2\left(1 + \cos \frac{2\pi d}{\lambda}\right)} = 2a \cos \frac{\pi d}{\lambda} \qquad (2)$$

Setzt man diese Werthe von x_m und A in die Gleichungen (4) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} Y &= 2a \cos \frac{\pi d}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{2}d}{\lambda}\right) \\ V &= \frac{4a\pi}{T} \cos \frac{\pi d}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{2}d}{\lambda}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Es schwingt mithin in diesem Falle das Aethertheilchen C gerade so, als wenn es von einem Theilchen angeregt würde, das sich in der Entfernung $x + \frac{1}{2}d$ befindet, dessen Amplitude $2\,a \cos \frac{\pi d}{\lambda}$ und dessen Vibrationsintensität $\frac{4\,a\,\pi}{T} \cos \frac{\pi d}{\lambda}$ ist. —

13. Sind die beiden Punkte A und B um irgend ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge von einander entfernt, ist also $d = n\lambda$, so ist $\cos \frac{d\,\pi}{\lambda} = \cos n\pi = \pm 1$, je nachdem n gerade oder ungerade, ferner ist $\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2 + \frac{1}{2}d}{\lambda}\right) = \pm \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, und ebenso $\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{2}d}{\lambda}\right) = \pm \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$; daher gehen die Gleichungen (3) des vorigen § in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} Y &= 2\,a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ V &= \frac{4a\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

d. h. die Entfernung des Theilchens C von der Gleichgewichtslage ist durch die Einwirkung beider Bewegungen zu jeder Zeit doppelt so gross, als sie vermöge jeder einzelnen sein würde; dasselbe gilt von der Geschwindigkeit, die Intensität aber ist 4 mal so gross.

Wenn $d = (n + \frac{1}{4})\,\lambda$, so ist $\cos \frac{d\pi}{\lambda} = \cos\,(n + \frac{1}{4})\,\pi = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

ferner: $\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{2}d}{\lambda}\right) = \pm \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{8}\lambda}{\lambda}\right)$,

und ebenso: $\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{2}d}{\lambda}\right) = \pm \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{8}\lambda}{\lambda}\right)$;

daher erhält man statt der Gleichungen (3) des vor. § die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} Y &= a\sqrt{2} \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{8}\lambda}{\lambda}\right) \\ V &= \frac{2a\pi\sqrt{2}}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{8}\lambda}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

d. h. wenn die Entfernung der Theilchen A und B 1, 5, 9 etc. Viertel Wellenlängen beträgt, so ist die resultirende Wellenbewegung gegen die erste um $\frac{1}{8}$ Wellenlänge verschoben, ihre Amplitude ist $a\sqrt{2}$, die Vibrationsintensität $\frac{2a\pi\sqrt{2}}{T}$, und die Lichtstärke $2a^2$, also doppelt so gross, als wenn das Theilchen nur von einem Lichtstrahl getroffen wird.

Nimmt d den Werth $(n + \frac{1}{2})\,\lambda$ an, dann ist, weil

$$\cos \frac{d\pi}{\lambda} = \cos\,(n + \tfrac{1}{2})\,\pi = 0, \text{ sowohl } Y = 0 \text{ als auch } V = 0 \quad (3)$$

Sind demnach die Theilchen um 1, 3, 5 etc. halbe Wellenlängen von einander entfernt, so wird durch das Zusammenwirken beider Bewegungen das Gleichgewicht der übrigen Theilchen nicht gestört, die Wirkungen der beiden Lichtstrahlen heben sich also gegenseitig auf.

Ist endlich $d = (n + \frac{3}{4})\,\lambda$, so ergiebt sich, da $\cos \frac{d\pi}{\lambda} = \cos\,(n + \frac{3}{4})\,\pi = \mp \frac{1}{2}\sqrt{2}$, leicht, dass:

$$Y = -a\sqrt{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{3}{8}\lambda}{\lambda}\right)$$
$$V = -\frac{2a\pi\sqrt{2}}{T}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{3}{8}\lambda}{\lambda}\right) \qquad (4)$$

Wenn also die Entfernung der Punkte, von denen die Bewegungen ausgehen, 3, 7, 11 etc. Viertel Wellenlängen beträgt, so haben die Amplitude, Vibrationsintensität und Lichtstärke dieselbe Grösse wie im zweiten Falle, der Schwingungszustand ist aber der entgegengesetzte, und die Wellenbewegung ist gegen die erste um $\frac{3}{8}$ Wellenlängen verschoben.

. . . .

14. Wir nehmen nun an, dass in einer Reihe von Aethertheilchen, die in gerader Linie liegen, n + 1 Theilchen zu gleicher Zeit in Bewegung gesetzt werden, und wollen die Schwingungszustände der Aethertheilchen bestimmen, welche mit jenen in derselben geraden Linie liegen, und durch alle jene Bewegungen angeregt werden, oder was im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, es soll der Schwingungszustand eines Aethertheilchens bestimmt werden, welches von n + 1 in derselben Richtung ankommenden Lichtstrahlen getroffen wird. Wir fügen hier zu den schon früher gemachten Beschränkungen, dass nämlich die Schwingungen der Aethertheilchen in den einzelnen Lichtstrahlen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung und zwar alle in derselben Ebene erfolgen, und dass die Oscillationsdauer sowie die Wellenlänge für alle dieselbe ist, sogleich noch die hinzu, dass auch die Amplitude für alle von gleicher Grösse ist. Sind daher x', x'', x''' etc. die Entfernungen eines beliebigen Aethertheilchens von den Erregungsstellen, und y', y'', y''' etc. die Entfernungen von der Gleichgewichtslage, welche das betrachtete Theilchen zur Zeit t vermöge der einzelnen Anregungen haben würde, so ist, wenn man mit Y die durch das Zusammenwirken sämmtlicher Anregungen hervorgebrachte Entfernung von der Gleichgewichtslage zur Zeit t bezeichnet, zunächst wieder:

$$Y = y' + y'' + y''' \ldots.$$

Da aber:
$$y' = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right)$$
$$y'' = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x''}{\lambda}\right) \text{ etc.}$$

so ist auch:
$$Y = a\left(\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x''}{\lambda}\right) + \ldots\ldots\right)$$

oder:
$$\begin{aligned} Y = {} & a\sin\frac{2\pi t}{T}\left(\cos\frac{2\pi x'}{\lambda} + \cos\frac{2\pi x''}{\lambda} + \ldots\ldots\right) \\ & - a\cos\frac{2\pi t}{\lambda}\left(\sin\frac{2\pi x'}{\lambda} + \sin\frac{2\pi x''}{\lambda} + \ldots\ldots\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

Nimmt man an, dass die Entfernungen x' x'' etc. in einer arithmetischen Reihe zunehmen, dass also, wenn $x'' - x' = dx$ gesetzt wird, $x''' = x' + 2\,dx$ etc. ist, und setzt der Abkürzung wegen $\frac{2\pi x'}{\lambda} = \beta$ u. $\frac{2\pi\, dx}{\lambda} = \varepsilon$, so erhält man statt der Gleichung (1) die folgende:

$$\begin{aligned} Y = {} & a\sin\frac{2\pi t}{T}\left(\cos\beta + \cos(\beta + \varepsilon) + \cos(\beta + 2\varepsilon) + \ldots\right) \\ & - a\cos\frac{2\pi t}{T}\left(\sin\beta + \sin(\beta + \varepsilon) + \sin(\beta + 2\varepsilon) + \ldots\right) \end{aligned} \qquad (2)$$

und es kommt nun zunächst darauf an, die in den Klammern stehenden Reihen, von denen jede n + 1 Glieder enthält, da die Anzahl der Lichtstrahlen so gross ist, zu summiren. Zu dem Ende möge die in der ersten Klammer stehende Reihe mit S bezeichnet werden, also:

$$S = \cos\beta + \cos(\beta + 2\varepsilon) \ldots . + \cos(\beta + n\varepsilon) \qquad (3)$$

sein. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $2 \cos \varepsilon$, so erhält man:

$$2 S \cos\varepsilon = 2\cos\beta\cos\varepsilon + 2\cos(\beta+\varepsilon)\cos\varepsilon + 2\cos(\beta+2\varepsilon)\cos\varepsilon + \ldots . 2\cos(\beta+n\varepsilon)\cos\varepsilon \qquad (4)$$

Es ist aber

$$2\cos\beta\cos\varepsilon = \cos(\beta+\varepsilon) + \cos(\beta-\varepsilon)$$
$$2\cos(\beta+\varepsilon)\cos\varepsilon = \cos(\beta+2\varepsilon) + \cos\beta$$
$$2\cos(\beta+\varepsilon)\cos\varepsilon = \cos(\beta+3\varepsilon) + \cos(\beta+2\varepsilon)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\cos(\beta+n\varepsilon)\cos\varepsilon = \cos(\beta+(n+1)\varepsilon) + \cos(\beta+(n-1)\varepsilon);$$

Addirt man die vorstehenden Gleichungen, so erhält man:

$$2S\cos\varepsilon = S - \cos\beta + \cos(\beta+(n+1)\varepsilon) + S + \cos(\beta-\varepsilon) - \cos(\beta+n\varepsilon)$$

oder: $$2S\cos\varepsilon = 2S - [\cos\beta - \cos(\beta-\varepsilon)] + [\cos(\beta+(n+1)\varepsilon) - \cos(\beta+n\varepsilon)]$$

d. i.: $$2S\cos\varepsilon = 2S + 2\sin\frac{(2\beta-\varepsilon)}{2}\sin\frac{\varepsilon}{2} - 2\sin\frac{(2\beta+(2n+1)\varepsilon)}{2}\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

und hieraus ergiebt sich ferner:

$$(1-\cos\varepsilon)\,S = \sin\frac{\varepsilon}{2}\left(\sin\frac{2\beta+(2n+1)\varepsilon}{2} - \sin\frac{2\beta-\varepsilon}{2}\right)$$

woraus man endlich durch eine leichte Umformung erhält:

$$S = \frac{\sin\frac{(n+1)\varepsilon}{2}\cos\frac{2\beta+n\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} \qquad (5)$$

Auf ganz ähnliche Weise findet man die Summe der zweiten Reihe; es ergiebt sich nämlich, wenn man dieselbe mit S′ bezeichnet:

$$S' = \frac{\sin\frac{(n+1)\varepsilon}{2}\sin\frac{2\beta+n\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} \qquad (6)$$

Setzt man die eben gefundenen Werthe von S und S′ in die Gleichung (2) ein, so kommt:

$$Y = \frac{a\sin\frac{(n+1)\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\left(\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\beta+n\varepsilon}{2} - \cos\frac{2\pi t}{T}\sin\frac{2\beta+n\varepsilon}{2}\right)$$

d. i.: $$Y = \frac{a\sin\frac{(n+1)\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\beta+n\varepsilon}{2}\right)$$

oder wenn man wieder für β und ε ihre Werthe einführt:

$$Y = \frac{a\sin\frac{(n+1)dx\pi}{\lambda}}{\sin\frac{dx\pi}{\lambda}}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2x'+n\,dx}{2\lambda}\right) \qquad (7)$$

Es ist aber $\frac{2x'+ndx}{2}$ die mittlere Entfernung des Aethertheilchens von den Erregungsstellen, daher ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung, dass die resultirende Entfernung von der Gleichgewichtslage dieselbe ist, als wenn das Aethertheilchen nur von einem Lichtstrahl getroffen würde, welcher von dem in der Mitte der zuerst schwingenden Aethertheilchen liegenden Punkte ausgeht, und dessen Theilchen mit der Amplitude $\frac{a \sin \frac{(n+1)\, dx\pi}{\lambda}}{\sin \frac{dx\pi}{\lambda}}$ schwingen.

15. Die resultirende Geschwindigkeit V ist, wenn mit v' v'' etc. die durch die einzelnen Bewegungen hervorgebrachten Geschwindigkeiten bezeichnet werden, zunächst wieder gleich der algebraischen Summe der letzteren, also $V = v' + v'' + v''' + \dots$

Da aber: $$v' = \frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right)$$
$$v'' = \frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x''}{\lambda}\right)$$

so ist: $$V = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \left(\cos \frac{2\pi x'}{\lambda} + \cos \frac{2\pi x''}{\lambda} + \dots\dots\right)$$
$$+ \frac{2a\pi}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T} \left(\sin \frac{2\pi x'}{\lambda} + \sin \frac{2\pi x''}{\lambda} + \dots\dots\right) \qquad (1)$$

Setzt man für die in den Klammern stehenden Reihen die früher (§ 14) gefundenen Werthe ein, so kommt:

$$V = \frac{2a\pi}{T} \frac{\sin \frac{(n+1)\, dx\pi}{\lambda}}{\sin \frac{dx\pi}{\lambda}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2x' + ndx}{2\lambda}\right) \qquad (2)$$

Diese Gleichung zeigt, dass in Bezug auf die resultirende Geschwindigkeit des Theilchens dasselbe gilt, was am Schlusse des vor. § in Betreff seiner Entfernung von der Gleichgewichtslage gesagt ist. Endlich erhält man für die verhältnissmässige Lichtstärke dem früher angegebenen zufolge:

$$J = a^2 \frac{\sin^2 \frac{(n+1)\, dx\pi}{\lambda}}{\sin^2 \frac{dx\pi}{\lambda}} \qquad (3)$$

Ist $ndx = \frac{\lambda}{2}$, beträgt also der Unterschied der Wege, welchen die von dem nächsten und von dem entferntesten Punkte kommenden Wellenbewegungen bis zu dem Aethertheilchen zurückgelegt haben, eine halbe Wellenlänge, und ist n sehr gross, so kann man

$$\frac{\sin \frac{(n+1)\, dx\pi}{\lambda}}{\sin \frac{dx\pi}{\lambda}} = \frac{2n}{\pi}$$

setzen, und man hat:

$$Y = \frac{2na}{\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x' + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right)$$
$$V = \frac{4na}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x' + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right) \quad (4)$$

Es schwingt mithin das Theilchen gerade so, als wenn die Anregung von einem Punkte ausgegangen wäre, der um eine Viertel Wellenlänge weiter liegt, als der nächstgelegene, und dessen Amplitude $\frac{2na}{\pi}$.

Gehen von zwei auf einanderfolgenden Gruppen von Aethertheilchen Wellenbewegungen aus, in denen die Schwingungen der einzelnen Aethertheilchen von der früher bezeichneten Beschaffenheit sind, und treffen dieselben sämmtlich in paralleler Richtung auf ein Aethertheilchen, so bringen sie auf das letztere die nämliche Wirkung hervor, wie zwei von den Mitten der Gruppen ausgehende Wellenbewegungen. Sind die Wege, welche die von den beiden äussersten Theilchen jeder Gruppe ausgehenden Bewegungen bis zu dem in Rede stehenden Theilchen zurückgelegt haben, um eine halbe Wellenlänge von einander verschieden, so müssen die von den Mitten ausgehenden Wellenbewegungen ebenfalls um dieselbe Grösse verschieden sein, sind daher ihre Amplituden gleich, so müssen sie sich gegenseitig vernichten. Die Amplituden hängen aber, wie man sich leicht überzeugt, wenn a für beide Gruppen denselben Werth behält, nur von n, d. h. von der Anzahl der in jeder schwingenden Aethertheilchen ab, und sind demnach gleich, wenn in jeder Gruppe eine gleiche Anzahl von Aethertheilchen schwingt.

16. In § 10 ist gezeigt worden, wie man sich die Fortpflanzung der Schwingungen eines Aethertheilchens in einem gleichförmigen Mittel vorstellen kann. Nach dem sogenannten Huyghen'schen Princip lässt sich aber dem dabei stattfindenden Vorgange noch eine andere Anschauungsweise zu Grunde legen *). Wenn nämlich in einem isotropen Mittel von irgend einem Punkte eine Wellenbewegung ausgegangen ist, und sich bis zur Oberfläche einer Kugel vom Radius r ausgebreitet hat, so kann man alle auf derselben liegenden Aethertheilchen als neue Wellenmittelpunkte ansehen, und es wird sich folglich nach der Zeit t um jedes derselben eine Kugelwelle vom Radius ct gebildet haben, wenn, wie früher, mit c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung bezeichnet wird. Die äussere Grenze, bis zu der sich also nach der Zeit t die Wellenbewegung fortgepflanzt hat, muss diejenige Fläche sein, welche alle jene Kugeln oder Elementarwellen einhüllt. Diese Fläche ist aber offenbar die Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt der Ausgangspunkt der Wellenbewegung, und deren Radius r + ct ist; denn die von jenem Punkte am weitesten entfernten Aethertheilchen sind jedenfalls diejenigen, für welche die Radien ct mit dem Radius r eine gerade Linie bilden, und diese liegen in der That auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius r + ct. Demnach ist die Begrenzung der Welle nach dieser Construction genau dieselbe, wie nach der Annahme, dass die Fortpflanzung nur nach den vom Mittelpunkt ausgehenden Radien erfolge. Es ist aber noch nachzuweisen, dass auch die Bewegung der einzelnen Aethertheilchen in den abgeleiteten Wellen dieselbe sein muss, als die, welche ihnen unter der Voraussetzung der gradlinigen Verbreitung der Wellen zukommt. Dazu wird es genügen, die resultirende Bewegung zu ermitteln, welche die auf dem Durchschnitt einer Kugelwelle, also auf einem Kreise liegenden Aethertheilchen auf einen Punkt A ausüben, der in der Richtung eines Radius r um die Länge x von der Welle entfernt ist. Denkt man

*) S. Einleitung in die höhere Optik von A. Beer. Braunschweig 1853. S. 18.

sich den Mittelpunkt C mit A durch eine gerade Linie verbunden, welche den Kreis in B schneidet, so enthalten die beiden zur rechten und linken Seite von B liegenden Bogen eine gleiche Anzahl von Aethertheilchen, und diese sind zu je zwei von A gleich weit entfernt. Daher braucht man nur die Wirkung zu betrachten, welche die Bewegungen der Theilchen eines dieser Bogen auf A hervorbringen, und das Resultat zu verdoppeln. Wir wollen uns zu dem Ende den einen Bogen von B aus in den Punkten m, m′, m″ etc. so getheilt denken, dass die Entfernungen AB, Am, Am′ etc. immer um $\frac{1}{4}\lambda$ zu nehmen, so dass also, wenn $AB = x$ ist, $Am = x + \frac{1}{2}\lambda$, $Am' = x + \lambda$ etc. wird. Nimmt man an, dass die Entfernung des Punktes A von B im Vergleich der Grösse der Welle, sehr gross ist, so wird man nicht nur die von den Theilchen jedes einzelnen Bogens mm′, m′m″ etc., sondern auch noch die von den Theilchen benachbarten Bogen nach A gezogenen geraden Linien als nahezu parallel ansehen können. Wie in dem vorigen § gezeigt worden, werden daher die von allen Theilchen eines Bogens z. B. mm′ ausgehenden Bewegungen auf das Aethertheilchen A dieselbe Wirkung ausüben, wie die Bewegung, welche von einem einzigen Theile ausgeht, das um eine Viertel Wellenlänge entfernter liegt, als das nächstliegende, so dass also, wenn das Theilchen mit m_1 bezeichnet wird, $m_1A - mA = \frac{1}{4}\lambda$ ist; die Amplitude ist $\frac{2na}{\pi}$, wenn n die Anzahl der auf dem Bogen mm′ enthaltenen Aethertheilchen ist. Wir haben aber ferner gezeigt, dass die von zwei aufeinander folgenden Gruppen von Aethertheilchen ausgehenden resultirenden Bewegungen einander vernichten müssen, wenn die Entfernungen um eine halbe Wellenlänge verschieden sind, und die Anzahl der in jeder Gruppe schwingenden Aethertheilchen dieselbe ist; daher müssen sich auch hier die von den Theilchen zweier aufeinander folgenden Bogen herrührenden Bewegungen gegenseitig aufheben, wenn die Anzahl der Aethertheilchen auf dem einen Bogen so gross ist, als auf dem folgenden, wenn also die aufeinander folgenden Bogen von gleicher Grösse sind. Diese Gleichheit findet aber nahezu schon statt, wenn die Linien $Am^{(n)}$ mit AB einen merklichen Winkel bilden, es werden sich also die Wirkungen der Aethertheilchen, welche auf den entfernten Bogen liegen, gegenseitig aufheben, und es bleiben nur die Wirkungen der Elementarwellen zu berücksichtigen übrig, welche von den Aethertheilchen ausgehen, die auf den B zunächst liegenden Theilen des Bogens sich befinden. Aber auch diese heben sich zum Theil auf. Durch Rechnung lässt sich nämlich nachweisen, dass jeder Bogen gleich der halben Summe des vorhergehenden und nachfolgenden Bogens ist, da die von der zweiten Hälfte des ersten und von der zweiten Hälfte des zweiten Bogens ausgehenden Bewegungen um eine halbe Wellenlänge verschieden sind, so müssen sie sich ebenfalls gegenseitig aufheben, und dasselbe gilt für die von der ersten Hälfte des zweiten und ersten Hälfte des dritten Bogens ausgehenden Bewegungen etc. Es bleibt daher nur die Wirkung von dem halben unmittelbar an B liegenden Bogen übrig. Dasselbe gilt von dem ganzen auf der anderen Seite von B liegenden Bogen, daher wird die Bewegung von A nur durch die Schwingungen der Aethertheilchen bestimmt, welche sich auf einem kleinen Bogen befinden, dessen Mitte B ist, und dessen Endpunkte von A um eine Viertel Wellenlänge weiter entfernt sind als B. Die resultirende Schwingung von A ist mithin gerade so, als wenn sich die Bewegung nur in der Richtung des durch B gezogenen Radius fortgepflanzt hätte. Man gelangt demnach in der That durch die Huyghen'sche Construction bei der Fortpflanzung der Wellenbewegung zu denselben Resultaten, wie nach der früher (§ 10) angegebenen Anschauungsweise.

17. Wird die von einem Punkte ausgehende Hauptwelle in ihrem Fortschreiten theilweise gehindert, fällt sie also auf einen undurchsichtigen Schirm, in dem sich eine Oeffnung befindet, welche nur einem Theile derselben den Durchgang gestattet, so kann man nach dem Huyghen'schen Principe die in der Oeffnung liegenden Aethertheilchen als die Mittelpunkte

neuer Wellen (Elementarwellen) ansehen *). Die Theilchen werden im Allgemeinen nach verschiedenen Zeiten durch die von dem Mittelpunkte C der Hauptwelle ausgehende Bewegung angeregt werden. Bezeichnet man die in der Oeffnung liegenden Aethertheilchen der Reihe nach mit m, m_1, m_2 etc. und ist c, wie bisher, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung, so werden m_1, m_2 etc. beziehungsweise um die Zeit $\frac{Cm_1 - Cm}{c}$, $\frac{Cm_2 - Cm}{c}$ etc. später in Bewegung gesetzt, als m. Ist also m schon t Zeiteinheiten in Schwingung, so sind m_1, m_2 etc. bezüglich erst $t - \frac{Cm_1 - Cm}{c}$, $t - \frac{Cm_2 - Cm}{c}$ etc. Zeiteinheiten in Bewegung, und es haben sich mithin um m, m_1, m_2 etc. Wellen von den Radien ct, $ct - Cm_1 + Cm$, $ct - Cm_2 + Cm$ etc. gebildet. Denkt man sich von C aus durch m, m_1, m_2 etc. gerade Linien bis an die Oberfläche jener Wellen gezogen, so sind dieselben der Reihe nach $Cm + ct$, $Cm_1 + ct - Cm_1 + Cm$, $Cm_2 + ct + Cm_2 - Cm$ etc., also sämmtlich gleich $Cm + ct$, daher werden alle von den Theilchen der Oeffnung ausgehenden Elementarwellen von einer Hauptwelle berührt, deren Mittelpunkt C und deren Radius die angegebene Grösse hat, welche folglich mit derjenigen identisch ist, die sich bei ungehinderter Fortpflanzung nach Verlauf der Zeit t um C gebildet haben würde. Zugleich ist ersichtlich, dass nur derjenige Theil der Hauptwelle die Elementarwellen berührt, welcher durch den Kegel ausgeschnitten wird, dessen Spitze C und der durch den Umfang der Oeffnung geht. Es kann daher auch nur in diesem begrenzten Theile der Hauptwelle der Schwingungszustand der Aethertheilchen ebenso sein, als wenn sie durch die in den Radien derselben erfolgte Fortpflanzung der Bewegung angeregt wären, und folglich kann man auch nur innerhalb jenes Kegels den Eindruck der von C unmittelbar ausgehenden Schwingungen erhalten, in diesem Raum allein kann also der Punkt C selbst sichtbar sein. Man gelangt demnach auch bei der Betrachtung der in ihrer Fortpflanzung theilweise gestörten Lichtwellen nach dem Huyghen'schen Principe zu demselben Resultate, wie nach der § 10 angenommenen Vorstellung von der Fortpflanzung der Schwingungen. Bekanntlich stimmt das Resultat mit der Erfahrung überein, und man stellt daher auch in der elementaren Optik den Satz auf, dass sich das Licht von einem leuchtenden Punkte aus in gerader Linie fortpflanzt.

18. In dem Vorhergehenden sind die Gesetze der Fortpflanzung und der Zusammensetzung der Wellenbewegung nur unter bestimmten Beschränkungen entwickelt worden, ohne darnach zu fragen, ob und in wie weit die letzteren für die Erklärung der durch die Erfahrung gegebenen Lichterscheinungen ihre Berechtigung finden, und ohne überhaupt die Beschaffenheit der Oscillationen des Aethers besonders zu berücksichtigen. Was die letztere anlangt, so wird dieselbe durch die Bahn, welche die Aethertheilchen bei ihren Schwingungen beschreiben, durch die Amplitude und die Oscillationsdauer bestimmt. Die Bahn ist in den Fällen, die hier allein in Betracht gezogen sind, dass nämlich die Bewegungen nur von einem Theilchen ausgehen, das geradlinig schwingt, oder dass mehrere Wellenbewegungen zusammentreffen, deren Schwingungen alle gleich gerichtet sind, eine gerade Linie; doch findet dies keineswegs immer statt, und würde namentlich nicht mehr nothwendig der Fall sein, sobald Wellenbewegungen zusammentreffen, deren Schwingungen nicht gleich gerichtet sind. Unter dieser Voraussetzung beschreiben die Aethertheilchen vielmehr im Allgemeinen Ellipsen um ihre Gleichgewichtslage. Wie nun aber auch die Bewegungen der Aethertheilchen in den Wellen beschaffen sein mögen, so wird man sie doch stets als aus dem Zusammenwirken von drei geradlinigen auf einander senkrechten

*) S. Einleitung in die höhere Optik von A. Beer. Braunschweig 1853. S. 15.

Schwingungen hervorgegangen ansehen können, von denen die eine in der Richtung der Fortpflanzung der Bewegung stattfindet. Die Schwingung eines Aethertheilchens ist also dann die Resultante aus einer longitudinalen und zwei transversalen Schwingungen, und zwar stehen die letzteren auf der ersten und aufeinander senkrecht. Nun aber lässt sich aus mehreren Erscheinungen, z. B. aus denen, welche das Licht bei seinem Durchgange durch einen Kalkspath zeigt *), nachweisen, dass wenn überhaupt longitudinale Schwingungen vorkommen, dieselben wenigstens keine Wirkung hervorbringen können. Man nimmt daher an, dass die Aethertheilchen eines gewöhnlichen Lichtstrahles nur transversal schwingen, aber nach verschiedenen Richtungen und mit den verschiedenartigsten Amplituden. Jene Erscheinungen nöthigen aber auch ausserdem zu der Annahme, dass sämmtliche einem Lichtstrahle zugehörige Aethertheilchen in bestimmten Fällen veranlasst werden, in derselben Ebene zu schwingen. Man nennt einen solchen Lichtstrahl, dessen Aethertheilchen in geradlinigen, parallelen, zur Fortpflanzung senkrechten Richtungen schwingen, geradlinig polarisirt. Die Ebene, in der die Schwingungen vor sich gehen, heisst die Schwingungsebene, die darauf senkrechte die Polarisationsebene. Erfolgen die Schwingungen der Aethertheilchen in kreisförmigen oder elliptischen Bahnen, dann ist das Licht kreisförmig oder elliptisch polarisirt. Für das gewöhnliche nicht polarisirte Licht lässt sich der Nachweis führen, dass es sich nicht von demjenigen Lichte unterscheidet, welches aus dem Zusammenwirken zweier geradlinig polarisirten Lichtstrahlen hervorgeht, und daher ist man in den Stand gesetzt, die Betrachtung des gewöhnlichen Lichtes auf die des geradlinig polarisirten zurückzuführen.

Die Amplituden der Schwingungen müssen unmessbar klein sein, denn wenn sie es nicht wären, so müssten sich beim Durchgange des Lichtes durch sehr kleine aber messbare Oeffnungen Erscheinungen darbieten, die auf eine durch die Ränder der Oeffnung bewirkte Störung der Schwingungen hindeuten; solche Erscheinungen sind aber niemals wahrgenommen worden.

Wie von der Geschwindigkeit, mit welcher ein schallender Körper schwingt, die Höhe oder Tiefe des Tones abhängt, so wird durch die Verschiedenheit der Oscillationsdauer der Aethertheilchen die Farbe des Lichtes bestimmt, und zwar kommt dem Roth die grösste Oscillationsdauer, also die kleinste Schwingungszahl, dem Violett hingegen die kleinste Oscillationsdauer und folglich die grösste Schwingungszahl zu. Da $c = \frac{\lambda}{T}$ ist (§ 7), in einem gleichförmigen Aether aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit constant bleibt, so verhalten sich die Längen verschiedener Lichtwellen genau wie die Zeiten der Oscillationen, durch welche sie hervorgebracht werden, daher müssen dem rothen Lichte die längsten, dem violetten hingegen die kürzesten Wellen zukommen, und Lichtstrahlen von gleicher Farbe auch Wellen von gleicher Länge haben. Lichtstrahlen wie die in den vorhergehenden Entwickelungen angenommenen, d. h. solche, die gleiche Wellenlängen haben, und in denen die Schwingungen in einer zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene vor sich gehen, sind einfärbige, geradlinig polarisirte.

19. Die Oscillationsdauer lässt sich unmittelbar nicht messen, wohl aber kann sie mittelbar aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der Wellenlänge bestimmt werden. Die Geschwindigkeit des Lichtes ist bekanntlich zuerst von Olaus Römer durch die Beobachtung der Verfinsterungen der Jupiters Trabanten auf etwa 42000 geogr. M. berechnet, neuerdings aber von Struve aus der schon von Bradley beobachteten Aberration auf 41549 g. M. mit einem wahrscheinlichen Fehler von höchstens 2 g. M. bestimmt worden **). In der neuesten

*) Einleitung in die höhere Optik von A. Beer. S. 55.

**) S. A. v. Humboldt's Kosmos Bd. III. S. 91.

Zeit ist es **Fizeau** gelungen dieselbe durch terrestrische Messungen zu finden, und zwar erhielt er aus einer grösseren Anzahl von Versuchen den Mittelwerth 42506 g. M.*). Als den genaueren Werth hat man jedenfalls den von **Struve** gefundenen anzusehen. Um die Länge der Lichtwellen zu bestimmen, kann man sich der bekannten Beugungserscheinungen bedienen, und zwar genügt es dazu den einfachsten Fall, die Beugung des Lichtes durch eine einzelne Spalte zu betrachten**). Die zur grösseren Deutlichkeit des Folgenden nöthige Figur wird sich nach den darin enthaltenen Angaben leicht construiren lassen. AB sei der horizontale Querschnitt einer engen verticalen Spalte in einem Schirme dessen horizontaler Durchschnitt MN ist. Eine zu MN parallele Linie PQ bezeichne den horizontalen Durchschnitt eines zweiten dem ersten parallelen Schirmes. Denkt man sich nun von einem weit entfernten Punkte eine Lichtwelle, und zwar von einfarbigem, geradlinig polarisirtem Lichte, auf den Schirm MN fallend, so wird der in die Oeffnung AB eintretende Theil der Welle als geradlinig angesehen werden können. Nach dem **Huyghen**'schen Princip hat man jedes in der Oeffnung liegende Aethertheilchen als neuen Schwingungsmittelpunkt anzusehen, und es fragt sich nun, welche Wirkung die von ihnen ausgehenden Bewegungen auf irgend einen Punkt D des Schirmes PQ ausüben werden. Nimmt man die Entfernung der beiden Schirme von einander so gross an, dass man wegen der Kleinheit der Oeffnung alle von derselben nach D hingehende Strahlen als parallel ansehen kann, so wird die Wirkung, welche sie in dem Punkte D hervorbringen, wesentlich von dem Unterschiede der Wege, die sie von der Oeffnung bis zu jenem Punkte zurückgelegt haben, abhängen; denn in der Oeffnung selbst befinden sich unter der angegebenen Bedingung, dass die in ihr liegenden Theilchen einer Welle angehören, dieselben sämmtlich in gleichen Schwingungszuständen. Bezeichnet man die Entfernung zweier Aethertheilchen in AB mit $d\beta$, denkt sich von dem Rande B der Oeffnung auf die nach D gehenden Strahlen eine Senkrechte gefällt, welche mit der Richtung von BA einen Winkel ϑ bildet, so sind offenbar $d\beta \sin\vartheta$, $2\, d\beta \sin\vartheta$, $3\, d\beta \sin\vartheta$ etc. die Differenzen jener Wege. Man hat also hier den in § 14 betrachteten Fall, dass ein Punkt von einer Anzahl von parallelen Lichtstrahlen getroffen wird, bei denen die Differenzen der bis dahin zurückgelegten Wege eine arithmetische Reihe, und zwar hier mit der Differenz $d\beta \sin\vartheta$ bilden. Um die Intensität des Lichtes in D zu ermitteln hat man also in dem § 14 entwickelten Ausdruck $d\beta \sin\vartheta$ statt dx zu setzen, und erhält dadurch:

$$J = \frac{a^2 \sin^2 \frac{\pi (n+1)\, d\beta \sin\vartheta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi\, d\beta \sin\vartheta}{\lambda}} \qquad (1)$$

wenn nämlich $d\beta$ in der Breite der Spalte (β) $n+1$ mal enthalten ist. Da aber $(n+1)\, d\beta = \beta$ ist, und $\sin \frac{\pi d\beta \sin\vartheta}{\lambda}$ wegen des sehr kleinen Bogens $= \frac{\pi d\beta \sin\vartheta}{\lambda}$ oder $= \frac{\pi\beta \sin\vartheta}{(n+1)\lambda}$ gesetzt werden kann, so geht die vorige Gleichung in folgende über:

$$J = \left[\frac{(n+1)\, a\lambda \sin\frac{\pi\beta\sin\vartheta}{\lambda}}{\pi\beta\sin\vartheta}\right]^2 \qquad (2)$$

Dieser Ausdruck gilt für einen horizontalen Streifen der Spalte. Enthält dieselbe $m+1$ solcher Streifen, so ist die Intensität des ganzen Lichtbündels:

---

*) S. Pogg. Annal. Bd. LXXIX. S. 167. — Einleitung in die höhere Optik von **Beer**. S. 8 ff.
) S. die Beugungserscheinungen von F. M. **Schwerd, S. 20.

$$J = \left[A_\lambda \frac{\sin \frac{\pi \beta \sin \vartheta}{\lambda}}{\frac{\pi \beta \sin \vartheta}{\lambda}} \right]^2 \qquad (3)$$

wenn man der Kürze halber $(m+1)\ (n+1)\ a = A$ setzt.

20. Der Werth von J ist $= 0$, wenn in der Gleichung (3) der Zähler, nicht aber zugleich der Nenner $= 0$ wird, also wenn

$$\frac{\beta \sin \vartheta}{\lambda} = p \text{ oder } \beta \sin \vartheta = p \lambda \qquad (1)$$

ist, wo p eine beliebige ganze Zahl, aber nicht 0 sein kann. Da nun $\beta \sin \vartheta$ der Unterschied in den Wegen der Randstrahlen ist, so ergiebt sich hieraus, dass die Minima für die Lichtstärke, oder die dunkelen Streifen auf dem Schirme PQ für alle die Punkte stattfinden, für welche der Unterschied in den Wegen der Randstrahlen eine beliebige Anzahl ganzer Wellenlängen beträgt.

Die Maxima finden statt für $\sin \frac{\pi \beta \sin \vartheta}{\lambda} = \pm 1$, also wenn:

$$\frac{\beta \sin \vartheta}{\lambda} = \frac{2p+1}{2} \text{ oder } \beta \sin \vartheta = (2p+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

ist, d. h. in den Punkten, in welchen jener Unterschied eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt, findet die grösste Lichtstärke statt. Die auf einander folgenden Maxima sind, wie leicht zu sehen: $\left(\frac{2A}{\pi}\right)^2$, $\left(\frac{2A}{3\pi}\right)^2$, $\left(\frac{2A}{5\pi}\right)^2$ etc., woraus sich ergiebt, dass sich die Lichtstärken in den Max. umgekehrt wie die Quadrate der ungeraden Zahlen verhalten. Zugleich ersieht man, dass wenn A d. h. die Intensität des ungebeugten Lichtes $= 1$ angenommen wird, die verhältnissmässige Grösse der übrigen Maxima leicht berechnet werden kann. Da es sich indessen hier hauptsächlich um die Bestimmung von λ handelt, so gehen wir hierauf nicht weiter ein, sondern wenden uns an eine der Gleichungen (1) oder (2), aus denen sich λ leicht bestimmen lässt, sobald man die Breite des Spaltes β und den Winkel ϑ kennt. Der letztere ist offenbar auch gleich dem Winkel, welchen der ungebeugte Strahl mit dem gebeugten bildet, und kann daher durch Messung gefunden werden. Da dies für die Minima leichter ist, so nimmt man zweckmässiger die Gleichung (1) zur Bestimmung der Wellenlänge. Hat man z. B. bei einer Breite der Spalte von 1,353 Millimeter gefunden, dass der Ablenkungswinkel ϑ bei rothem Lichte für die auf einander folgenden Minima die Werthe 1′ 41″, 3′ 18″, 4′ 55″, 6′ 27″ hat, so findet man aus jener Gleichung, wenn darin $\beta = 1{,}353$, für ϑ nach einander die angegebenen Werthe und für p entsprechend 1, 2, 3, 4 gesetzt wird, durch eine leicht auszuführende Rechnung für λ folgende Werthe:

$$\lambda_1 = 0{,}0006622 \text{ Millim.}$$
$$\lambda_2 = 0{,}0006493 \quad ,,$$
$$\lambda_3 = 0{,}0006449 \quad ,,$$
$$\lambda_4 = 0{,}0006346 \quad ,,$$

aus denen sich für die Wellenlänge der rothen Lichtstrahlen der Mittelwerth $\lambda = 0{,}0006478$ ergiebt.

Nimmt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zu 41549 geogr. M. und die geographische Meile zu 7419 Meter an, so findet man aus der Gleichung $T = \frac{\lambda}{c}$, dass die Oscillationsdauer 21 Zehntausend Billiontel einer Secunde beträgt, und folglich die Schwingungszahl 476 Billionen ist. Es stimmen die gefundenen Zahlenwerthe ziemlich genau mit den nach Newtons Messungen bei den Farbenringen sich ergebenden überein, indem darnach die Wellänge für das äusserste Roth 0,000645 Millim. und die daraus abgeleitete Schwingungszahl 478 Billionen beträgt. Uebrigens versteht sich wohl von selbst, dass es hier nicht auf Ermittelung eines genauen Werthes ankam, sondern nur darauf, zu zeigen, wie man überhaupt den Werth von λ finden kann. —

Es liegt hier die Frage, warum sich die Beugungserscheinungen nur bei engen Spalten wahrnehmen lassen, so nahe, dass sie nicht ganz mit Stillschweigen übergangen werden kann. Die Beantwortung ergiebt sich leicht, wenn man die Gleichung (1) näher betrachtet. Da nämlich λ eine sehr kleine Grösse ist, so wird der Bruch $\frac{\lambda}{\beta}$ um so kleiner werden, je grösser β im Verhältniss zu λ ist; man wird folglich, auch wenn der Unterschied der Randstrahlen eine grosse Anzahl von Wellenlängen beträgt, ϑ statt sin ϑ nehmen können, so dass also $\vartheta = p \frac{\lambda}{\beta}$, und $\frac{\lambda}{\beta}$, $\frac{2\lambda}{\beta}$, $\frac{3\lambda}{\beta}$ etc. die Entfernungen der auf einander folgenden Minima sind. Demnach werden auch die Beugungsspectra um so näher an einander rücken, und um so weniger weit von der Mitte des ganzen Beugungsbildes entfernt sein, je grösser die Spalte ist; da nun überdem die entfernteren eine sehr geringe Intensität haben, so ist einleuchtend, dass sämmtliche Spectra bei zu grosser Oeffnung unmerklich werden, und folglich bei einer solchen die Beugungserscheinungen deshalb nicht zum Vorschein kommen.