Die Auflösung dreigliedriger algebraischer Gleichungen durch Reihen.

Gauss hat in seiner berühmten Abhandlung über trinomische Gleichungen (2. Theil der „Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen“ s. Abh. der Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, 1849. Band IV. oder C. F. Gauss Werke, herausgegeben von der Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, Band III), — beiläufig seiner letzten Arbeit, — in welcher er eine sehr elegante indirecte Methode zur numerischen Bestimmung der Wurzeln dreigliedriger algebraischer Gleichungen mitgetheilt hat, einleitungsweise darauf hingewiesen, dass „sich jede, gleichviel ob reelle oder imaginäre Wurzel einer Gleichung mit drei Gliedern durch eine convergente Reihe von einfachem Fortschreitungsgesetze ausdrücken lasse.“ Er hat diese Auflösungsart jedoch „aus mehrern Gründen“ von seiner Arbeit ausgeschlossen. Zu diesen Gründen gehört vermuthlich der, dass im Jahre 1849, in welchem die citirte Gaussische Abhandlung erschien, von der philosophischen Facultät der Universität Göttingen die Preisaufgabe gestellt worden war: Evolvantur radices aequationum algebraicarum e ternis terminis constantium, puta quae sunt formae $x^{m+n}+ax^m+b=0$ in series infinitas, ita quidem, ut methodus ad omnes radices talium aequationum inveniendas pateat, series semper sint convergentes et secundum legem perspicuam procedant.

Diese Aufgabe wurde gelöst von J. G. Westphal, welcher seine Preisschrift unter dem Titel:

> Evolutio radicum aequationum algebraicarum e ternis terminis constantium in series infinitas. Gottingae MDCCCL.

veröffentlicht hat.

Die auf den folgenden Blättern gebotene Arbeit sucht dieselbe Aufgabe auf kürzere und nicht weniger strenge Weise zu lösen, bemüht sich die Resultate für das praktische Bedürfniss möglichst brauchbar herzustellen und zeigt an einigen Beispielen die Verwendbarkeit dieser Resultate.

1

Die allgemeine Form einer trinomischen Gleichung:

(1) $$fu^r + gu^s + hu^t = o, \text{ wobei } r > s > t;$$

f, g, h nicht Null, übrigens beliebig complex;

reducirt sich ohne Weiteres auf

(2) $$fu^m + gu^n + h = 0;\ m > n;\ f,\ g,\ h \text{ nicht Null.}$$

Hierbei kann, ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass m und n keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

Hätten m und n etwa den gemeinschaftlichen Factor k, so würde u^k als neue Unbekannte einzuführen und die dann resultirende Gleichung weiter zu behandeln sein.

Setzt man in Gleichung (2) $u = \lambda v$ und bestimmt man λ so, dass $f\lambda^m = g\lambda^n$, so geht die Gleichung (2) über in

(3) $$v^m + v^n + d = 0,$$

wenn d kurz für $\frac{h}{f\lambda^m} = \frac{h}{g\lambda^n}$ gesagt wird.

Diese Form zeigt, dass die Wurzeln der trinomischen Gleichungen nur Functionen des einen Coëfficienten d sind. Eben deshalb lassen sich die trinomischen Gleichungen auf besonders einfache Weise auflösen.

Dividirt man die Gleichung (2) durch u^n und setzt man $m - n = p$, $-n = -q$, $u = lx$, $fl^p = hl^{-q}$, $-\frac{g}{fl^p} = -\frac{g}{hl^{-q}} = y$, so erhält man die Form

(4) $$x^p + x^{-q} = y.$$

Dieselbe Form leitet sich auch aus (3) ab, wenn man darin $n = -q$, $-d = y$ nimmt.

p und q sollen als reelle Zahlen vorausgesetzt werden.

Wird in (4) x mit $\frac{1}{x}$ vertauscht, so ergiebt sich

$$x^{-p} + x^q = y, \text{ oder}$$

(5) $$x^q + x^{-p} = y.$$

Dieselbe Gleichung folgt aber auch aus (4) durch Vertauschung von p und q.

Daraus ist zu schliessen, dass einer Vertauschung von p und q eine Vertauschung von x und $\frac{1}{x}$ entspricht, und umgekehrt. Oder:

Die Wurzeln der trinomischen Gleichung (4) sind solche Functionen von y, p und q, dass, wenn

(6) $$x = F(y, p, q) \text{ gefunden wird, } \quad \frac{1}{x} = F(y, q, p)$$

zu nehmen ist.

Dieser bemerkenswerthen Eigenschaft wegen wollen wir die Gleichung (4) der nachfolgenden Entwicklung zu Grunde legen, obschon man gewöhnlich die trinomischen Gleichungen nach dem Vorgange von Gauss in der Form

$$z^{m+n} \pm az^m \pm b = 0$$

betrachtet, wobei a und b positiv, m und n relativ prim.

Durch die Gleichung (4) ist y als Function von x, $y=\varphi(x)$, gegeben. Wollen wir nun die Wurzeln von (4) bestimmen, so haben wir diese Gleichung $y=\varphi(x)$ umzukehren oder eine Gleichung $x=F(y)$ herzustellen.

Da die aus (2) abgeleitete Gleichung (4) $p+q$ Wurzeln besitzt, so wird sich x als eine solche Function von y bestimmen müssen, welche für jeden Werth von y $p+q$ Werthe annimmt.

Die Umkehrung der Gleichung $y=\varphi(x)$ lässt sich mittelst der Lagrangeschen Umkehrungsformel*) bewerkstelligen.

*) Ueber Lagrange's Lehrsatz giebt es eine zusammenfassende Arbeit von Hermann Hankel in d. A. Encykl. d. W. und K. 1. Section LXXIX S. 353—367. Zu den daselbst aufgeführten Ableitungen und Beweisen des Lagrange'schen Satzes von Laplace (Mém. sur l'usage du calcul aux diff. part. dans la théor. d. suites s. Mém. de l'Acad. Paris 1777. S. 99.), von Lambert (Observations analytiques. Mém. de l'Ac. de Berlin 1770), von Lagrange selbst (Théorie des fonctions analytiques. cf. Journal de l'École Polytechn. Cahier 9, p. 101. Paris, Prairial An V.), von Lexell (in den Novis Comm. Petr. T. XVI.), J. F. Pfaff (zuerst in dem Hindenburgischen Archiv der Mathem. Heft 1, Abh. 6 und später in den Disquisitiones analyt. Helmstadii 1797 p. 227), Canovrai (in den Abhandlungen der Akademie von Siena. 7. Bd.), Condorcet (in den Sammlungen der Turiner Gesellschaft Bd. 5. und in der französ. Encyklopädie Art. Séries), Klügel (Mathem. Wörterbuch Bd. 2. Art. „La Grange's Lehrsatz"), Rothe (Kastner's Archiv XII, 1827), Schlömilch (Mathem. Abhandlungen Dessau 1850. Abschn. II: „Die Bürmann'sche Reihe." Vgl. dazu Burmane, Développement général aux fonctions arbitraires in: Ueber combinatorische Analysis und Derivationscalcul, einige Fragmente, gesammelt und herausgeg. von C. F. Hindenburg. Leipzig 1803. S. 36 und: Rapport sur deux mémoires d'analyse du professeur Burmann. Signé Lagrange, Legendre in den Mém. de l'instit. national d. sciences et arts. Paris. Fructidor An VII. T. II. p. 13. „Zur Biographie Bürmann's" in d. Zeitschr. f. Mathem. und Phys. von Schlömilch, Jahrg. 18, Heft 1, S. 120—122), Cauchy (Mém. sur le dével. de f(ζ) suivant les puissances ascendantes de h, ζ étant une racine de l'équation $z-x-h\omega(z)=o$. cf. Mém. de l'Acad. d. scienc. Paris 1829. Bd. 8. S. 130), Jacobi (De resolutione aequationum per series infinitas. Crelle's Journal Bd. 6. 1830) sind noch nachzutragen die von Duhamel (Cours de Mécanique. 2. Ausg. Paris 1853. Thl. 2. S. 60), von Eugène Rouché (Journal de l'École Polyt. Cah. 39. p. 193. Paris 1862. Vgl. auch Serret, Cours d'Algèbre Supér. 3. Ausg. Bd. 1. Sect. 2. Kap. 3. Die Methode von Rouché's Beweis hat einige Aehnlichkeit mit der, welche Lagrange in s. Traité de la résolution des équations numériques, note XI. angewendet hat und welche von R. Murphy in a memoir on the Resolution of Algebraic Equations, published in the fourth volume of the Transactions of the Cambridge Philosophical Society, reproducirt worden ist) und von Tchebichef (s. d. Abh. von Rouché in der Einleitung).

Lacroix behandelt le Théorême de M. Lagrange et ses usages in s. Traité du calcul diff. et intégr. T. I. p. 285.

Untersuchungen über die Convergenz der Lagrange'schen Reihe haben angestellt: Lagrange (Mém. de l'Acad. de Berlin 1768. p. 275), Felix Chio, Prof. in Turin, (Recherches sur la série de Lagrange. Mém. I et II. cf. Mém. prés. p. div. savans à l'Acad. d. sc. Paris 1854. Bd. 12), Cauchy (Consid. nouv. sur la théorie d. suites et sur les lois de leur converg. cf. Exerc. d'anal. et de phys. math. 1840. Bd. 1. S. 269 und 1841. Bd. 2. S. 41. Vgl. auch Moigno, Leçons d. calc. diff. Bd. 1. S. 162.)

Anwendungen des Lagrange'schen Satzes auf die Auflösung des Keppler'schen Problems und andre Aufgaben der theorischen Astronomie sind besonders von Laplace gemacht worden. (Vgl. Mém. de l'Acad. 1769. Berlin und Mém. de l'Acad. d. sc. Paris 1777.)

Wenn x eine Function der unabhängigen Grössen α und β, eine Function von der Form

$$x = F(\alpha + \beta x^{\mu}) \tag{7*}$$

ist, so lässt sich der Werth von x mit Hülfe der Maclaurin'schen Formel durch eine nach β fortschreitende unendliche Reihe, aber von x selbst unabhängig, also ausdrücken:

$$x = F(w_0) + \frac{\partial F(w_0)}{\partial \beta} \cdot \beta + \frac{\partial^2 F(w_0)}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\partial^3 F(w_0)}{\partial \beta^3} \cdot \frac{\beta^3}{3!} + \cdots \tag{7}$$

wobei kurz $\alpha + \beta x^{\mu} = w$ gesetzt ist und wobei $F(w_0)$, $\dfrac{\partial F(w_0)}{\partial \beta}$, $\dfrac{\partial^2 F(w_0)}{\partial \beta^2}$, ... diejenigen Werthe von $F(w)$, $\dfrac{\partial F(w)}{\partial \beta}$, $\dfrac{\partial^2 F(w)}{\partial \beta^2}$, ... bezeichnen, welche für $\beta = 0$ hervorgehen.

Unter Berücksichtigung des Werthes von w ist aber

$$F(w_0) = F(\alpha),$$

$$\frac{\partial F(w_0)}{\partial \beta} = F^{\mu}(\alpha) \cdot \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial^2 F(w_0)}{\partial \beta^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[F^{2\mu}(\alpha) \cdot \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha}\right],$$

$$\cdots$$

allgemein:

$$\frac{\partial^n F(w_0)}{\partial \beta^n} = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\right]^{n-1}\left[F^{n\mu}(\alpha) \cdot \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha}\right],$$

so dass

$$\left\{\begin{aligned} x = F(\alpha) + F^{\mu}(\alpha)\,\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha}\,\beta + \frac{\beta^2}{2!}\,\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[F^{2\mu}(\alpha) \cdot \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha}\right] + \cdots \\ \cdots + \frac{\beta^n}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\right]^{n-1}\left[F^{n\mu}(\alpha) \cdot \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha}\right] + \cdots \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Um diese von Lagrange gegebene Reihenentwicklung auf unsre Gleichung (4) anwenden zu können, haben wir diese etwas umzuformen. Durch Multiplication mit x^q, Umsetzen und Radiciren folgt daraus

$$x = (-1 + y x^q)^{\frac{1}{p+q}},$$

so dass unsernfalls der Ausdruck $(-1 + y x^q)^{\frac{1}{p+q}}$ als gegebene Function $F(w)$ zu verwenden ist.

Setzen wir also in der Formel (8)

$$\beta = y,\ \mu = q,\ \alpha = -1,\ F = \frac{1}{p+q}\text{. Potenz,}$$

so erhalten wir für die Wurzel x der Gleichung (4) die folgende Reihe:

$$\left.\begin{aligned}x&=(-1)^{\frac{1}{p+q}}+(-1)^{\frac{q+1}{p+q}-1}\cdot y\cdot\frac{1}{p+q}+\frac{y^2}{2!}\cdot\frac{1}{p+q}\cdot\left[\frac{2q+1}{p+q}-1\right]\cdot(-1)^{\frac{2q+1}{p+q}-2}+\\&\cdots+\frac{y^n}{n!}\cdot\frac{1}{p+q}\cdot\left[\frac{nq+1}{p+q}-1\right]\left[\frac{nq+1}{p+q}-2\right]\cdots\left[\frac{nq+1}{p+q}-\overline{n-1}\right]\cdot(-1)^{\frac{nq+1}{p+q}-n}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

also

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\cdot(-1)^{\frac{1-np}{p+q}}\cdot\frac{1}{p+q}\cdot\left[\frac{nq+1}{p+q}-1\right]\left[\frac{np+1}{p+q}-2\right]\cdot\;\cdot\;\cdot\left[\frac{nq+1}{p+q}-\overline{n-1}\right]\quad(10)$$

oder, da

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{nq+1}{p+q}-\overline{n-1}\right]\left[\frac{nq+1}{p+q}-\overline{n-1}+1\right]\left[\frac{nq+1}{p+q}-\overline{n-1}+2\right]\cdots\left[\frac{nq+1}{p+q}-\overline{n-1}+\overline{n-1}\right]\\&=\frac{\Gamma\left[\frac{nq+1}{p+q}\right]}{\Gamma\left[\frac{nq+1}{p+q}-\overline{n-1}\right]}\\&\text{und } n!=\Gamma(n+1)\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

gesetzt werden kann,:

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}y^n\cdot\xi^{1-np}\cdot\frac{\frac{1}{p+q}\cdot\Gamma\left[\frac{nq+1}{p+q}\right]}{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma\left[\frac{nq+1}{p+q}-\overline{n-1}\right]},\quad(12)$$

wenn ξ den Werth von x für $y=0$ bezeichnet, so dass $\xi^{p+q}+1=0$. ξ hat also (13)
$p+q$ Werthe, welche wie bekannt in der Form $\xi=e^{\frac{(2m+1)\pi i}{p+q}}$ $(m=0,1,2,\cdots,p+q-1)$ enthalten sind.

Aus dieser Formel erhalten wir die analoge für $\frac{1}{x}$, wenn wir darin p und q mit einander vertauschen; zufolge (6).

Es ist also

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n\cdot\xi^{nq-1}\cdot\frac{\frac{1}{p+q}\cdot\Gamma\left[\frac{np+1}{p+q}\right]}{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma\left[\frac{np+1}{p+q}-\overline{n-1}\right]}.\quad(14)$$

Aus (12) und (14) ergeben sich, wie nothwendig, $p+q$ Werthe für x, weil die Grösse ξ ebensoviele verschiedene Werthe besitzt. $x=F(y)$ ist also eine vieldeutige Function, wie jede Wurzel einer algebraischen Gleichung.

Es ist nun noch zu untersuchen, unter welcher Bedingung diese Reihen convergiren.

Die Lagrange'sche Umkehrungsformel ist nichts Anderes, als eine Verallgemeinerung der Taylor'schen, resp. Maclaurin'schen Reihe. Da nun in unserm Falle mittelst der Umkehrungsformel x oder $F(y)$ in eine Reihe, welche nach Potenzen von y fortschreitet, entwickelt worden ist, so gilt für diese Entwicklung dieselbe Convergenzbedingung wie für die Maclaurin'sche Reihe. Unsere Reihe (10), resp. (12), convergirt also, — die Gauss'sche Darstellung der complexen Grössen durch Punkte einer Ebene zu Grunde gelegt, — für alle Werthe von y innerhalb eines Kreises um den Punkt $y=0$, dessen Radius gleich ist dem Abstande des nächsten Unstetigkeits- oder Verzweigungspunktes vom Nullpunkte. Verzweigungspunkte besitzt eine vieldeutige Function für diejenigen Werthe ihres Arguments, für welche zwei oder mehrere ihrer vieldeutigen Werthe zusammenfallen. Dies findet in unserm Falle nicht allein für $y=\infty$ statt, wo die sämmtlichen Werthe von x gleichfalls unendlich werden, sondern es können auch für endliche Werthe von y zwei und nur zwei endliche Werthe der Function x zusammenfallen. Die Bedingung dafür wird durch Differentiation erhalten und giebt

(15)
$$y=\left[\frac{q}{p}\right]^{\frac{p}{p+q}}+\left[\frac{p}{q}\right]^{\frac{q}{p+q}}$$

oder

(16)
$$y^{p+q}=\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p\cdot q^q},$$

also $p+q$ Verzweigungspunkte $y_1, y_2, \cdots, y_{p+q}$.

Dass nicht mehr als zwei gleiche Wurzeln x unsrer trinomischen Gleichung existiren, folgt durch wiederholte Differentiation, welche auf einen Widerspruch führt, wenn $p+q$ nicht verschwindet, d. h. wenn die Gleichung nicht blos zweigliedrig ist.

Bezeichnet ε eine eigentliche oder primitive $(p+q)$. Wurzel der positiven Einheit, so sind die $p+q$ Werthe von y:

$$y_1=\varepsilon^{p+q}\cdot y_1,\ y_2=\varepsilon y_1,\ y_3=\varepsilon^2\cdot y_1,\ y_4=\varepsilon^3\cdot y_1,\ \ldots\ldots,\ y_{p+q}=\varepsilon^{p+q-1}\cdot y_1.$$

Hat also irgend einer der Werthe von y, welche in (16) enthalten sind, die Form $y_1=\varrho e^{\psi i}$, so ist ϱ der Modul der sämmtlichen $p+q$ Werthe von y, für welche 2 Wurzeln der Gleichung (4) einander gleich werden. Denn die verschiednen Potenzen von ε sind von der Form e^{ki}, ändern also, wenn sie zu y_1 als Factoren hinzutreten, den Modul ϱ nicht.

Hiernach liegen die Punkte der Argumentenebene, für welche die Function x zwei gleiche Werthe, oder, was dasselbe, die trinomische Gleichung (4) zwei gleiche Wurzeln hat, auf einem Kreise um den Nullpunkt mit dem Radius ϱ, welche Grösse als Modul von y den Abstand eines dieser $p+q$ nächsten Unstetigkeitspunkte vom Nullpunkte darstellt. Die verschiednen Richtungen, in denen die einzelnen Punkte dieser Gruppe von Unstetigkeitspunkten vom Nullpunkte aus liegen, werden durch die verschiednen Amplituden der verschiednen Werthe von y bestimmt.

Die Reihenentwicklungen (12) und (14), in welchen x nach aufsteigenden Potenzen von y entwickelt ist, sind also immer gültig, solange der Modul von y, d. i. ϱ, kleiner ist als der Abstand eines der $p+q$ Unstetigkeitspunkte vom Nullpunkte; oder: solange y innerhalb des Kreises mit dem Radius ϱ um den Punkt $y=0$ oder $y=\varphi(\xi)$ liegt, wenn ξ den Werth von x bezeichnet, für welchen $\varphi(x)=0$ wird. (17)

Dass beide Reihen (12) und (14) unter dieser Bedingung wirklich convergent sind, lässt sich mit Hülfe des asymptotischen Werthes der Gammafunctionen darthun.

Es ist, wenn p. real. ω positiv über alle Grenzen wächst,*)

$$\Gamma(\omega)=\lim \sqrt{2\pi}.e^{-\omega}.\ \omega^{\omega-\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Um diese Formel auf (12) anwenden zu können, haben wir in dieser Reihe die Gammafunctionen mit negativem Argument in solche mit positivem Argument umzuformen. Dies geschieht mittelst der allgemein gültigen Formel

$$\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(1+x)=\frac{\pi x}{\sin \pi x}, \tag{19}$$

welche für $x=y+1$ in

$$\Gamma(-y)=\frac{\pi(y+1)}{\Gamma(y+2)\cdot \sin\ \pi(y+1)}$$

übergeht, sodass in (12)

$$\Gamma\left[\frac{nq+1}{p+q}-\overline{n-1}\right] \text{ durch } \frac{\pi\left[n-\frac{nq+1}{p+q}\right]}{\Gamma\left[n+1-\frac{nq+1}{p+q}\right]\cdot \sin\ \pi\left[n-\frac{nq+1}{p+q}\right]} \tag{20}$$

zu ersetzen ist.

Die Reihe (12) erhält dadurch die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n.\xi^{1-np}.\frac{\Gamma\left[\frac{nq+1}{p+q}\right]\cdot\Gamma\left[n+1-\frac{nq+1}{p+q}\right]\cdot \sin\ \pi\left[n-\frac{nq+1}{p+q}\right]}{(p+q)\ \cdot\ \Gamma(n+1)\ \cdot\ \pi\left[n-\frac{nq+1}{p+q}\right]}. \tag{21}$$

Diese Reihe convergirt aber, wenn die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n\cdot\frac{\Gamma\left[\frac{nq+1}{p+q}\right]\cdot\Gamma\left[n+1-\frac{nq+1}{p+q}\right]}{(p+q)\cdot\Gamma(n+1)\cdot\pi\left[n-\frac{nq+1}{p+q}\right]} \tag{22}$$

convergirt. Und die Convergenz dieser Reihe hängt von dem Werthe des Quotienten Q des $(n+1)\cdot$Gliedes durch das $n\cdot$Glied, d. i. von

*) Vgl. C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam. N° 29. (pag. 33.)

(23)
$$Q=\frac{y\cdot\Gamma\left[\frac{nq+q+1}{p+q}\right]\cdot\Gamma\left[\frac{np+2p+q-1}{p+q}\right]\cdot\Gamma(n+1)\cdot\pi\left[\frac{np-1}{p+q}\right]}{\Gamma\left[\frac{nq+1}{p+q}\right]\cdot\Gamma\left[\frac{np+p+q-1}{p+q}\right]\cdot\Gamma(n+2)\cdot\pi\left[\frac{np+p-1}{p+q}\right]}$$

ab. Dieser Ausdruck erhält durch Anwendung von Gleichung (18), n hinreichend gross genommen, die Form:

(24)
$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{y\cdot\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n+\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{q}{p+q}+\frac{q+1}{n(p+q)}\right]^{\frac{nq+q+1}{p+q}-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{p}{p+q}+\frac{2}{n}-\frac{q+1}{n(p+q)}\right]^{1\frac{1}{2}+\frac{np-q-1}{p+q}}}{\left[1+\frac{2}{n}\right]^{n+1\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{q}{p+q}+\frac{1}{n(p+q)}\right]^{\frac{nq+1}{p+q}-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{p}{p+q}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n(p+q)}\right]^{\frac{1}{2}+\frac{np-1}{p+q}}}\\ \times\dfrac{\left[\frac{p}{p+q}-\frac{1}{n(p+q)}\right]}{\left[\frac{p}{p+q}+\frac{p-1}{n(p+q)}\right]}=y\cdot\left[\frac{q}{p+q}\right]^{\frac{q}{p+q}}\cdot\left[\frac{p}{p+q}\right]^{\frac{p}{p+q}}=y\cdot\dfrac{p^{\frac{p}{p+q}}\cdot q^{\frac{q}{p+q}}}{p+q}.\end{array}\right.$$

Wenn nun, gemäss (16) und (17),

$$\text{mod. } y<\frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}}\cdot q^{\frac{q}{p+q}}},$$

so ist auch der in (24) gefundene Grenzwerth kleiner als 1, wie es sein muss, wenn die Reihe (22), also auch die Reihe (21) oder (12), convergiren soll.

In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass (14) unter derselben Bedingung convergirt, wie (12).

Hiernach gelten die Reihenentwicklungen (12) und (14) blos für ein kleines Stück der Argumentenebene, während sie für den grössern Theil derselben unbrauchbar sind. Deshalb sind noch Reihenentwicklungen abzuleiten, welche für

(25)
$$\text{mod. } y>\frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}}\cdot q^{\frac{q}{p+q}}}$$

gelten.

Um die entsprechenden brauchbaren Ausdrücke für den in (25) bezeichneten Fall aufzustellen, haben wir x nach den **absteigenden** Potenzen von y zu entwickeln. Zu dem Zwecke wollen wir die zu Grunde gelegte Gleichung (4) auf die Form

(26)
$$yx^{q}=x^{p+q}+1$$

bringen und darin

(27)
$$yx^{q}=\tau^{q}\ \text{ oder }\ x=\frac{\tau}{y^{\frac{1}{q}}}$$

setzen, so dass

$$\tau^{q}=\frac{\tau^{p+q}}{y^{\frac{p+q}{q}}}+1,$$

also

$$\tau = \left[1 + y^{-\frac{p+q}{q}} \cdot \tau^{p+q}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{28}$$

wird.

Wird der Kürze wegen $y^{-\frac{p+q}{q}} = \nu$ gesetzt, so bekommt (28) die Form

$$\tau = \left[1 + \nu \cdot \tau^{p+q}\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{29}$$

also die Form (7*), und es kann hiernach τ mittelst (8) in eine Reihe entwickelt werden, welche nach Potenzen von ν fortschreitet. Um diese Reihe zu erhalten, haben wir in Gleichung (8)

$$x = \tau,\ \beta = \nu,\ \mu = p+q,\ \alpha = +1,\ F = \frac{1}{q} \cdot \text{Potenz zu setzen.} \tag{30}$$

Dadurch findet sich

$$\left.\begin{aligned} \tau = {} & (+1)^{\frac{1}{q}} + (+1)^{\frac{p+q+1}{q} - 1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \nu + \frac{\nu^2}{2!} \cdot \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{2\overline{p+q}+1}{q} - 1\right] \cdot (+1)^{\frac{2(p+q)+1}{q} - 2} \\ & + \frac{\nu^3}{3!} \cdot \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{3\overline{p+q}+1}{q} - 1\right] \left[\frac{3\overline{p+q}+1}{q} - 2\right] \cdot (+1)^{\frac{3(p+q)+1}{q} - 3} + \cdots + \\ & \cdots + \frac{\nu^n}{n!} \cdot \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{n\overline{p+q}+1}{q} - 1\right] \left[\frac{n\overline{p+q}+1}{q} - 2\right] \cdots \left[\frac{n\overline{p+q}+1}{q} - \overline{n-1}\right] \cdot \\ & (+1)^{\frac{n(p+q)+1}{q} - n} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \tau = {} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \cdot (+1)^{\frac{np+1}{q}} \cdot \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{n\overline{p+q}+1}{q} - 1\right] \left[\frac{n\overline{p+q}+1}{q} - 2\right] \cdots \\ & \cdot \left[\frac{n\overline{p+q}+1}{q} - \overline{n-1}\right] \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

folglich, nach (27),:

$$\left.\begin{aligned} x = {} & \sum_{n=0}^{\infty} y^{-\frac{n(p+q)+1}{q}} \cdot (+1)^{\frac{np+1}{q}} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{np+1}{q} + 1\right] \left[\frac{np+1}{q} + 2\right] \cdots \\ & \cdot \left[\frac{np+1}{q} + \overline{n-1}\right] \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

d. i. zufolge ähnlicher Substitutionen wie in (11),:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} . y^{-\frac{n(p+q)+1}{q}} \cdot \zeta_q^{np+1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{\Gamma\left[\frac{np+1}{q} + n\right]}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma\left[\frac{np+1}{q} + 1\right]}, \tag{34}$$

wenn $\zeta_q^q - 1 = 0$ ist. (35)

Durch Vertauschung von p und q geht hieraus die analoge Formel für $\frac{1}{x}$ hervor, nämlich

$$(36)\qquad \frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty} y^{-\frac{n(p+q)+1}{p}}\cdot\zeta_p^{nq+1}\cdot\frac{\frac{1}{p}\cdot\Gamma\left[\frac{nq+1}{p}+n\right]}{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma\left[\frac{nq+1}{p}+1\right]},$$

(37) wobei $\zeta_p^p-1=0$.

Formel (34) giebt q Werthe, Formel (36) die übrigen p Werthe der $p+q$ Werthe von x.

Dass diese beiden Reihen (34) und (36) unter der Bedingung (25) convergiren, dagegen für $\varrho<\frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}}\cdot q^{\frac{q}{p+q}}}$ divergiren, lässt sich wiederum mit Hülfe des asymptotischen Werthes der Gammafunction nachweisen.

In dem Grenzfalle $mod.\, y=\frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}}\cdot q^{\frac{q}{p+q}}}$ und überhaupt dann, wenn $mod.\, y$ diesem Werthe nahe liegt, wird man sich am besten der Gaussischen indirecten Methode bedienen. Denn „die Convergenz unserer Reihen ist um so langsamer, je näher y dem Werthe kommt, bei welchem die zu Grunde gelegte Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, und in diesem Grenzfalle selbst ist sie schwächer, als bei irgendwelcher fallenden geometrischen Progression". *)

Die Reihe (12), resp. (21), wird für die praktische Verwendung vortheilhafter so geschrieben:

$$(12^*)\quad\left\{\begin{array}{l} x=\xi^1+\\ \frac{y^1\cdot\xi^{1-p}}{p+q}+\frac{1}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{y^n\cdot\xi^{1-np}}{(np-1)\cdot\Gamma(n+1)}\cdot\Gamma\left[\frac{nq+1}{p+q}\right]\cdot\Gamma\left[\frac{np-1}{p+q}+1\right]\cdot \sin\pi\left[\frac{np-1}{p+q}\right]\\ mod.\, y<\frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}}\cdot q^{\frac{q}{p+q}}}\;;\;\xi=\sqrt[p+q]{-1}=e^{i(1+2k)\frac{\pi}{p+q}}=\cos(1+2k)\frac{\pi}{p+q}+\\ i.\sin(1+2k)\frac{\pi}{p+q}\cdot[k=0,1,2,\cdots,p+q-1]\end{array}\right.$$

Hierbei ist in **jedem** Gliede die Summe der Argumente der beiden Zähler-Γ gleich dem Argumente des Nenner-Γ. Für ein **bestimmtes** Glied dieser Reihe ist

*) Gauss a. a. O.

$$\text{Das Argument}\left\{\begin{array}{lll} \text{des ersten Zähler-}\Gamma & \text{um} & \frac{q}{p+q} \\ \text{„ zweiten Zähler-}\Gamma & \text{um} & \frac{p}{p+q} \\ \text{„ Nenner-}\Gamma & \text{um} & 1 \\ \text{„ sinus} & \text{um} & \frac{p\pi}{p+q} \end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{grösser als das}\\ \text{Argument des}\\ \text{betr.}\end{array}\left\{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Gamma\\ \Gamma\\ \text{sinus}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{im vorher-}\\ \text{gehenden Gliede.}\end{array}$$

der Exponent von $\begin{Bmatrix} y \\ \xi \end{Bmatrix}$ um $\begin{Bmatrix} 1 \\ -p \end{Bmatrix}$ grösser als der Exponent von $\begin{Bmatrix} y \\ \xi \end{Bmatrix}$ im vorhergehenden Gliede; der Nenner-Factor $(np-1)$ um p grösser als der betr. Factor im vorhergehenden Gliede. Ebenso:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}=\xi^{-1}+ \\ \frac{y^{1}\cdot\xi^{q-1}}{p+q}+\frac{1}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{y^{n}\cdot\xi^{nq-1}}{(nq-1)\cdot\Gamma(n+1)}\cdot\Gamma\left[\frac{np+1}{p+q}\right]\cdot\Gamma\left[\frac{nq-1}{p+q}+1\right]\cdot\sin\pi\left[\frac{nq-1}{p+q}\right] \\ \quad mod.\,y<\frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}}\cdot q^{\frac{q}{p+q}}};\ \xi=\frac{1}{\sqrt[p+q]{-1}}=e^{-i(1+2k)\frac{\pi}{p+q}}; \\ \qquad [k=0,1,2,\cdots,p+q-1] \end{array}\right\}(14^*)$$

Hierin ist für ein bestimmtes Glied

$$\begin{array}{c}\text{Das Argu-}\\ \text{ment des}\end{array}\left\{\begin{array}{lll} \text{ersten Zähler-}\Gamma & \text{um} & \frac{p}{p+q} \\ \text{zweiten Zähler-}\Gamma & \text{um} & \frac{q}{p+q} \\ \text{Nenner-}\Gamma & \text{um} & 1 \\ \text{sinus} & \text{um} & \frac{q\pi}{p+q} \end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{grösser als das Argu-}\\ \text{ment des betr.}\end{array}\left\{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Gamma\\ \Gamma\\ \text{sin.}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{im vorher-}\\ \text{gehenden Gliede.}\end{array}$$

Der Exponent von $\begin{Bmatrix} y \\ \xi \end{Bmatrix}$ um $\begin{Bmatrix} 1 \\ q \end{Bmatrix}$ grösser als der Exponent von $\begin{Bmatrix} y \\ \xi \end{Bmatrix}$ im vorhergehenden Gliede. Der Nenner-Factor $(nq-1)$ um q grösser als der betr. Factor im vorhergehenden Gliede.

Uebrigens ist auch hier in jedem Gliede die Summe der Argumente der beiden Zähler-Γ gleich dem Argumente des Nenner-Γ.

Weiter ist:

$$\left.\begin{array}{l} x=y^{-\frac{1}{q}}\cdot\zeta_q^{1}+ \\ +\frac{1}{q}\cdot y^{-\frac{1+(p+q)}{q}}\cdot\zeta_q^{1+p}+\frac{1}{q}\cdot\sum\limits_{n=2}^{\infty}y^{-\frac{n(p+q)+1}{q}}\cdot\zeta_q^{np+1}\cdot\frac{\Gamma\left[\frac{np+1}{q}+n\right]}{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma\left[\frac{np+1}{q}+1\right]} \\ \quad mod.\,y>\frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}}\cdot q^{\frac{q}{p+q}}};\ \zeta_q=\sqrt[q]{+1}=e^{ik\cdot\frac{2\pi}{q}}=\cos\left[k\cdot\frac{2\pi}{q}\right]+i\sin\left[k\cdot\frac{2\pi}{q}\right]. \\ \qquad [k=0,1,2,\cdots,q-1] \end{array}\right\}(34^*)$$

In dieser Reihe ist das Argument des Zähler-Γ um die ganze Zahl $n-1$ grösser als das des zweiten Nenner-Γ, sodass beide Argumente gleichzeitig ganzzahlig werden. Ferner ist der Exponent von y entgegengesetzt gleich dem Argument des Zähler-Γ. Und für ein bestimmtes Glied ist

$$\text{das Argument des}\left\{\begin{array}{r} \text{Zähler-}\Gamma \text{ um } \frac{p+q}{p} \\ \text{ersten Nenner-}\Gamma \text{ um } 1 \\ \text{zweiten Nenner-}\Gamma \text{ um } \frac{p}{q} \end{array}\right\} \text{grösser als das Argument des betr. } \Gamma \text{ im vorhergehenden Gliede.}$$

$$\text{Der Exponent von}\left\{\begin{array}{c} y \\ \zeta_q \end{array}\right\} \text{um} \left\{\begin{array}{c} -\frac{p+q}{q} \\ p \end{array}\right\} \text{grösser als der Exponent von} \left\{\begin{array}{c} y \\ \zeta_q \end{array}\right\} \text{im vorhergehenden Gliede.}$$

Endlich:

$$(36^*)\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}=y^{-\frac{1}{p}}\cdot\zeta_p^{+1}+ \\ \quad +\frac{1}{p}\cdot y^{-\frac{1+(p+q)}{p}}\cdot\zeta_p^{1+q}+\frac{1}{p}\cdot\sum_{n=2}^{\infty} y^{-\frac{n(p+q)+1}{p}}\cdot\zeta_p^{nq+1}\cdot\frac{\Gamma\left[\frac{nq+1}{p}+n\right]}{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma\left[\frac{nq+1}{p}+1\right]} \\ \mathrm{mod.}\, y>\frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}}\cdot q^{\frac{q}{p+q}}};\ \zeta_p=\sqrt[p]{+1}=e^{ik\cdot\frac{2\pi}{p}}=\cos\left[k\cdot\frac{2\pi}{p}\right]+i\sin\left[k\cdot\frac{2\pi}{p}\right]. \\ \qquad\qquad [k=0,1,2,\cdots,p-1] \end{array}\right.$$

Auch hier ist das Argument des Zähler-Γ um $n-1$ grösser als das des zweiten Nenner-Γ, zugleich entgegengesetzt gleich dem Exponenten von y; und für ein bestimmtes Glied ist:

$$\text{Das Argument des}\left\{\begin{array}{r} \text{Zähler-}\Gamma \text{ um } \frac{p+q}{p} \\ \text{ersten Nenner-}\Gamma \text{ um } 1 \\ \text{zweiten Nenner-}\Gamma \text{ um } \frac{q}{p} \end{array}\right\} \text{grösser als das des betr. } \Gamma \text{ im vorhergehenden Gliede;}$$

$$\text{Der Exponent von}\left\{\begin{array}{c} y \\ \zeta_p \end{array}\right\} \text{um} \left\{\begin{array}{c} -\frac{p+q}{p} \\ q \end{array}\right\} \text{grösser als der Exponent von} \left\{\begin{array}{c} y \\ \zeta_p \end{array}\right\} \text{im vorhergehenden Gliede.}$$

Für die Berechnung dieser Reihen ist es von Wichtigkeit, eine Tafel von $\log\Gamma(x)$ verwenden zu können. Eine solche ist nun zwar für $x=1{,}000$ bis $x=2{,}000$ von Legendre berechnet (Exerc. d. calc. intégr. Paris 1811. Partie IV, Sect. I, pag. 85—95, oder Traité des fonctions elliptiques. T. II. Paris 1826. p. 489. Dieselbe Tafel findet sich auch bei Schlömilch, Analytische Studien, Leipzig 1848. 1. Abth. S. 163ff.); diese Tabelle ist aber für unsern Zweck unbequem, weil es sich bei ihrer Anwendung um öftre Benutzung der Relation $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, also um vielmaliges Addiren von Logarithmen handeln würde. Ich habe deshalb die nachfolgenden Tabellen A, B, C, D berechnet. Von diesen enthält Tabelle B die sechsstelligen Logarithmen der Function $\Gamma(x)$ für die Werthe von x in dem Intervall 1,00 bis 10,99. Die dabei angegebenen Differenzen (D) beziehen sich auf den Uebergang von der betr. Zeile, in welcher sie stehen, zur folgenden Zeile. Tabelle C schliesst sich an Tab. B an und giebt log $\Gamma(x)$ sechsstellig für $x=11{,}0$ bis $x=100{,}9$; dazu die ersten und zweiten Differenzen (D_1, resp. D_2). Tabelle D enthält die siebenstelligen Logarithmen von $\Gamma(x)$ für $x=101$; 101,5; 102; 102,5; ····· 199,5; ferner für $x=200$; 201; ····; 499; 500. B und C sind mit achtstelligen, D ist mit zehnstelligen Logarithmen*) gerechnet worden. Auf Grund dieser Rechnung sind die letzten Stellen bestimmt. Die durch Erhöhung hervorgegangne 6. resp. 7. Stelle ist unterstrichen.

Zur Berechnung gewisser Hauptwerthe wurde die Reihe**)

$$\log \Gamma(1+x) = \log \sqrt{2\pi} + \left(x+\frac{1}{2}\right) \log x - Mx + \frac{b_1}{x} - \frac{b_3}{x^3} + \frac{b_5}{x^5} - \frac{b_7}{x^7} \pm \cdots\cdots$$

benutzt, in welcher

$$M = 0{,}4342\ 9448\ 1903 \text{ und } b_{2n+1} = \frac{M.B_{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+2)};\ B_{2n+1} = (2n+1)\,te$$

Bernoulli'sche Zahl ($B_1=\frac{1}{6}$; $B_3=\frac{1}{30}$; $B_5=\frac{1}{42}$; $B_7=\frac{1}{30}$; $B_9=\frac{5}{66}$; $B_{11}=\frac{691}{2730}$; u. s. f. (vgl. Jac. Bernoulli, Ars conjectandi p. 97. Basileae 1713.).

Diese Reihe besteht aus der asymptotischen Function $\log \sqrt{2\pi} + \left(x+\frac{1}{2}\right) \log x - Mx$ und aus dem Correctionsgliede $\left(\frac{b_1}{x} - \frac{b_3}{x^3} \pm \cdots\right)$. Tabelle A zeigt den Verlauf dieser beiden Theile für die Werthe $x=50{,}0$; 50,1; ····· 50,9.

Zur Controle diente für Tabelle B die erwähnte Legendre'sche Tafel und für Tabelle D eine sehr rasch convergirende Reihe, welche W. Scheibner in seiner Habilitationsschrift „Ueber die Entwicklung der Störungsfunction“ (Gotha 1853) S. 16 abgeleitet und später, in der Abh. „Ueber periodische Functionen“ (Berichte über d. Verhandl. der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. zu Leipzig, Mathem.-Phys. Classe. 1862. S. 73) etwas einfacher dargestellt hat, nämlich die Reihe:

$$\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} = \frac{1}{\sqrt{m+\frac{1}{4}}} \cdot \left| 1 - \frac{1}{6\left(m+\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{21}{8192\left(m+\frac{1}{4}\right)^4} - \frac{671}{524288\left(m+\frac{1}{4}\right)^6} \pm \cdots\cdots \right|$$

* Nach François Callet, Tables Portatives de Logarithmes, Édit. stéréot. Paris 1795. An III. (Tirage 1808); zum Theil auch nach G. Vega, Thesaurus logarithmorum completus. Lipsiae 1794.

**) Vgl. C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam. n⁰ 29 (p. 33) cf. Commentationes Gotting. T. II. 1812. Fast gleichzeitig hat Bessel diese Formel gefunden (Brief an Olbers vom Januar 1812.)

Ausserdem leistete gute Dienste: C. F. Degen, Tabularum ad faciliorem et breviorem probabilitatis computationem utilium Enneas. Havniae MDCCCXXIV.

Um mittelst Tabelle C log Γ auch für die Argumente 11,00 u. s. f. zu berechnen, hat man die gewöhnliche Interpolationsformel*) anzuwenden.

Sei kurz $A = \log \Gamma(a)$ und seien δA, $\delta^2 A$ die erste, zweite Differenz von A, wie sie die genannte Tabelle giebt, unter der Voraussetzung, dass a beständig um $\omega = 0{,}1$ wächst.

Dann wird X oder $\log \Gamma(a + \omega x)$ erhalten aus der Formel

$$X = A + x\left(\delta A + \frac{x-1}{2}\left(\delta^2 A \cdots,\right.\right.$$

deren Berechnung sich folgenderweise gestaltet:

Nachdem der Werth von x festgestellt ist, welcher übrigens immer kleiner als 1 ist, berechnet man zunächst $\frac{1-x}{2}\,\delta^2 A$ bis auf die 6. Decimale und bildet unter Berücksichtigung der Differenzen-Vorzeichen die Grösse $\delta A - \left(\frac{1-x}{2}\right)\delta^2 A$, welche man die corrigirte erste Differenz nennen und durch $\delta A x$ bezeichnen kann. Darauf hat man nur noch die Grösse $A + x\delta A x$ zu bilden, welche den verlangten Logarithmus X darstellt.

Wenn z. B. $\log \Gamma(10{,}38)$ zu berechnen ist aus der Tabelle, welche blos bis zu Zehnteln herabgeht, so setzt man $a = 10{,}3$ und $x = \frac{8}{10}$ und nimmt aus dieser Tabelle die Werthe von A, δA, $\delta^2 A$, welche dem Argumentwerthe 10,3 entsprechen; d. s.:

A	δA	$\delta^2 A$
5,855174	0,099362	0,000439

Daraus folgt dann:

$$\delta A x = \delta A - \frac{1}{10}\delta^2 A = 0{,}099362 - 0{,}000044 = 0{,}099318$$

$$\text{und } X = A + \frac{8}{10}\delta A x = 5{,}855174 + 0{,}079454 = 5{,}934628,$$

d. i. ein Werth, der durch Tabelle B bestätigt wird.

---

*) Vgl. J. F. Encke's Aufsatz „Ueber Interpolation" im Berliner Astronom. Jahrb. für 1830, bearbeitet nach der von Gauss im Jahre 1812 über diesen Gegenstand gehaltnen Vorlesung.

Tabelle A.

x	50,0	50,1	50,2	50,3	50,4	50,5	50,6	50,7	50,8	50,9
Asymptotische Function d. i. $(x+\frac{1}{2})\log x + \log\sqrt{2\pi} - Mx$	64,482 351 0_3	64,652 725 3_2	64,823 185 4_0	64,993 731 1_3	65,164 362 3_5	65,335 078 8_7	65,505 880 5_6	65,676 767 2_2	65,847 738 6_9	66,018 794 8_1
	+0,17037429	+0,17046008	+0,17054573	+0,17063122	+0,17071652	+0,17080169	+0,17088[illegible]66	+0,17097147	+0,17105612	
Correctionsglied für die genaue Function.	0,000 723 8_1	0,000 722 3_7	0,000 720 9_3	0,000 719 5_0	0,000 718 0_7	0,000 716 6_5	0,000 715 2_1	0,000 713 8_2	0,000 712 4_2	0,000 711 0_2
	−0,00000144	−0,00000144	−0,00000143	−0,00000143	−0,00000142	−0,00000142	−0,00000141	−0,00000140	−0,00000140	
$\log\,\Gamma(1+x)$	64,483 074 8_4	64,653 447 6_9	64,823 906 3_3	64,994 450 6_3	65,165 080 4_2	65,335 795 5_2	65,506 595 7_9	65,677 481 0_4	65,848 451 1_1	66,019 505 8_3
	+0,17037285	+0,17045864	+0,17054430	+0,17062979	+0,17071510	+0,17080027	+0,17088525	+0,17097007	+0,17105472	

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
1,0	$\bar{1}$,*	997529	995128	992796	990533	988338	986209	984146	982147	980212	—1871
1	978341	976531	974783	973096	971469	969901	968391	966939	965544	964205	—1282
2	962923	961695	960521	959401	958335	957321	956359	955449	954589	953780	— 760
3	953020	952310	951649	951035	950470	949952	949480	949055	948676	948342	— 289
4	948053	947808	947608	947451	947338	947268	947240	947254	947310	947407	+ 138
1,5	$\bar{1}$,947545	947724	947943	948201	948500	948837	949214	949629	950082	950573	+ 529
6	951102	951668	952271	952911	953587	954299	955047	955830	956649	957503	+ 888
7	958391	959314	960271	961262	962287	963345	964436	965561	966718	967907	+1222
8	969129	970382	971668	972985	974333	975713	977123	978564	980036	981537	+1532
9	983069	984631	986223	987844	989494	991173	992881	994618	996384	998178	+1822
2,0	0,000000	001850	003728	005634	007567	009527	011515	013529	015571	017639	+2094
1	019733	021854	024001	026175	028374	030599	032849	035125	037426	039752	+2352
2	042104	044480	046881	049307	051757	054231	056730	059252	061799	064369	+2594
3	066964	069581	072222	074887	077575	080285	083019	085775	088555	091356	+2824
4	094181	097027	099896	102788	105701	108636	111593	114571	117571	120593	+3043
2,5	0,123636	126701	129786	132893	136021	139169	142339	145529	148739	151970	+3252
6	155222	158494	161786	165098	168431	171783	175155	178547	181958	185390	+3450
7	188840	192310	195800	199308	202836	206383	209949	213534	217138	220760	+3641
8	224401	228061	231739	235436	239151	242884	246636	250406	254193	257999	+3824
9	261823	265665	269524	273401	277296	281208	285138	289085	293049	297031	+3999
3,0	0,301030	305046	309079	313130	317197	321281	325382	329500	333634	337785	+4168
1	341953	346137	350337	354554	358788	363037	367303	371585	375883	380196	+4329
2	384526	388872	393234	397611	402005	406414	410838	415278	419734	424205	+4486
3	428691	433193	437710	442243	446790	451353	455931	460524	465132	469754	+4638
4	474392	479045	483712	488394	493090	497802	502528	507268	512023	516792	+4784
3,5	0,521576	526374	531187	536013	540854	545709	550578	555462	560359	565270	+4925
6	570195	575134	580087	585054	590035	595029	600037	605058	610093	615142	+5062
7	620204	625280	630369	635471	640587	645716	650858	656014	661182	666364	+5195
8	671559	676767	681988	687222	692469	697729	703002	708288	713586	718897	+5324
9	724221	729557	734907	740269	745643	751030	756429	761841	767265	772702	+5449
4,0	0,778151	783613	789086	794572	800071	805581	811103	816638	822185	827744	+5570
1	833314	838897	844492	850099	855717	861348	866990	872644	878310	883987	+5689
2	889676	895377	901090	906814	912550	918297	924056	929826	935608	941401	+5804
3	947205	953021	958849	964687	970537	976398	982270	988154	994048	999954	+5917
4	1,005871	011799	017738	023688	029649	035621	041604	047598	053602	059618	+6026
4,5	1,065644	071681	077729	083788	089858	095938	102028	108130	114242	120365	+6133
6	126498	132642	138796	144961	151136	157322	163518	169724	175941	182168	+6238
7	188406	194653	200912	207180	213458	219747	226046	232355	238674	245003	+6340
8	251343	257692	264052	270421	276801	283190	289589	295999	302418	308847	+6439
9	315286	321734	328193	334661	341139	347627	354124	360632	367149	373675	+6536
5,0	1,380211	386757	393312	399877	406452	413036	419629	426232	432845	439467	+6631
1	446098	452739	459389	466049	472718	479396	486083	492780	499486	506201	+6725
2	512926	519659	526402	533154	539916	546686	553465	560254	567052	573858	+6816
3	580674	587499	594332	601175	608027	614887	621757	628635	635522	642419	+6905
4	649324	656237	663160	670092	677032	683981	690939	697905	704880	711864	+6993
5,5	1,718857	725858	732868	739886	746913	753949	760993	768046	775107	782177	+7079
6	789256	796343	803438	810542	817654	824775	831904	839041	846187	853341	+7163
7	860504	867674	874854	882041	889237	896441	903653	910873	918102	925339	+7245
8	932584	939837	947099	954368	961646	968932	976226	983527	990837	998156	+7326
9	2,005482	012816	020158	027508	034866	042232	049606	056988	064378	071776	+7405
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
6,0	2,079181	086595	094016	101445	108882	116327	123789	131240	138709	146185	+ 7483
1	153668	161160	168659	176166	183681	191203	198733	206270	213816	221369	+ 7560
2	228929	236497	244073	251658	259247	266845	274451	282065	289685	297314	+ 7636
3	304950	312593	320244	327902	335568	343241	350922	358609	366305	374007	+ 7710
4	381717	389435	397159	404891	412631	420377	428131	435892	443661	451437	+ 7782
6,5	2,459219	467010	474807	482611	490423	498242	506068	513901	521742	529589	+ 7855
6	537444	545305	553174	561050	568933	576823	584720	592624	600535	608453	+ 7925
7	616378	624310	632250	640196	648149	656109	664075	672049	680030	688018	+ 7994
8	696012	704013	712022	720037	728059	736088	744123	752166	760215	768271	+ 8063
9	776334	784403	792480	800563	808653	816749	824852	832962	841079	849202	+ 8131
7,0	2,857332	865469	873613	881763	889919	897083	906253	914429	922612	930802	+ 8196
1	938998	947201	955410	963626	971849	980078	988314	996556	*004804	*013059	+ 8262
2	3,021321	029589	037863	046144	054431	062725	071025	079332	087645	095964	+ 8326
3	104290	112622	120961	129306	137657	146015	154379	162749	171125	179508	+ 8389
4	187897	196293	204694	213102	221517	229937	238364	246797	255236	263681	+ 8452
7,5	3,272133	280591	289055	297525	306001	314483	322972	331467	339968	348475	+ 8513
6	356988	365507	374032	382564	391101	399645	408194	416750	425312	433879	+ 8574
7	442453	451033	459619	468211	476808	485412	494022	502638	511260	519887	+ 8634
8	528521	537161	545806	554457	563115	571778	580447	589122	597803	606490	+ 8693
9	615183	623881	632586	641296	650012	658734	667462	676195	684934	693680	+ 8751
8,0	3,702431	711187	719950	728718	737492	745272	755057	763849	772645	781448	+ 8809
1	790257	799071	807890	816716	825547	834384	843227	852075	860929	869788	+ 8865
2	878653	887524	896400	905282	914170	923063	931962	940866	949776	958692	+ 8921
3	967613	976540	985472	994410	*003353	*012302	*021256	*030216	*039182	*048153	+ 8976
4	4,057129	066111	075098	084091	093090	102093	111103	120117	129137	138163	+ 9031
8,5	4,147194	156231	165272	174320	183372	192430	201494	210563	219637	228716	+ 9085
6	237801	246892	255987	265088	274194	283306	292423	301545	310673	319806	+ 9138
7	328944	338087	347236	356390	365549	374714	383884	393059	402239	411425	+ 9191
8	420616	429812	439013	448219	457431	466648	475870	485097	494329	503567	+ 9243
9	512810	522058	531311	540569	549832	559101	568375	577653	586937	596226	+ 9295
9,0	4,605521	614820	624124	633434	642748	651068	661392	670722	680057	689397	+ 9345
1	698742	708092	717447	726807	736172	745542	754917	764297	773682	783072	+ 9395
2	792467	801867	811272	820682	830097	839517	848942	858372	867807	877247	+ 9444
3	886691	896141	905595	915055	924519	933989	943463	952942	962426	971915	+ 9493
4	981408	990907	*000410	*009919	*019432	*028950	*038473	*048001	*057533	*067071	+ 9542
9,5	5,076613	086160	095712	105269	114830	124396	133968	143543	153124	162709	+ 9591
6	172300	181895	191494	201099	210708	220322	229941	239564	249193	258825	+ 9638
7	268463	278106	287753	297404	307061	316722	326388	336058	345734	355414	+ 9684
8	365098	374787	384481	394180	403883	413591	423304	433021	442742	452469	+ 9731
9	462200	471935	481676	491421	501170	510924	520683	530446	540214	549986	+ 9777
10,0	5,559763	569545	579331	589121	598916	607716	618520	628329	638143	647961	+ 9822
1	657783	667610	677441	687277	697118	706963	716812	726666	736525	746388	+ 9867
2	756255	766127	776003	785884	795769	805659	815553	825452	835355	845262	+ 9912
3	855174	865091	875011	884936	894866	904800	914739	924681	934629	944580	+ 9956
4	954536	964497	974461	984431	994404	*004382	*014364	*024351	*034342	*044337	+10000
10,5	6,054337	064341	074349	084362	094378	104400	114425	124455	134490	144528	+10043
6	154571	164618	174669	184725	194785	204849	214918	224991	235068	245149	+10086
7	255235	265325	275419	285517	295620	305727	315838	325953	336073	346196	+10128
8	356324	366456	376593	386733	396878	407027	417180	427338	437499	447665	+10170
9	457835	468009	478187	488370	498556	508747	518942	529141	539344	549552	+10211
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

Tabelle C.

x	log Γ(x)	D_1	D_2	x	log Γ(x)	D_1	D_2
11,0	6,559763	+102341		15,0	10,940408	+116295	+300
1	662104	102751	+410	1	11,056703	116592	297
2	764855	103156	405	2	173295	116888	296
3	868011	103559	403	3	290183	117180	292
4	971570	103956	397	4	407363	117472	292
11,5	7,075526	104351	395	15,5	524835	117762	290
6	179877	104742	391	6	642597	118049	287
7	284619	105129	387	7	760646	118335	286
8	389748	105514	385	8	878981	118618	283
9	495262	105894	380	9	997599	118901	283
12,0	601156	106271	377	16,0	12,116500	119180	279
1	707427	106646	375	1	235680	119459	279
2	814073	107017	371	2	355139	119736	277
3	921090	107384	367	3	474875	120009	273
4	8,028474	107750	366	4	594884	120283	274
12,5	136224	108111	361	16,5	715167	120555	272
6	244335	108470	359	6	835722	120824	269
7	352805	108825	355	7	956546	121092	268
8	461630	109178	353	8	13,077638	121358	266
9	570808	109529	351	9	198996	121624	266
13,0	680337	109876	347	17,0	320620	121886	262
1	790213	110220	344	1	442506	122148	262
2	900433	110562	342	2	564654	122408	260
3	9,010995	110901	339	3	687062	122666	258
4	121896	111238	337	4	809728	122923	257
13,5	233134	111571	333	17,5	932651	123179	256
6	344705	111903	332	6	14,055830	123432	253
7	456608	112232	329	7	179262	123685	253
8	568840	112558	326	8	302947	123936	251
9	681398	112882	324	9	426883	124186	250
14,0	794280	113204	322	18,0	551069	124433	247
1	907484	113523	319	1	675502	124680	247
2	10,021007	113840	317	2	800182	124926	246
3	134847	114154	314	3	925108	125169	243
4	249001	114466	312	4	15,050277	125412	243
14,5	363467	114777	311	18,5	175689	125653	241
6	478244	115085	308	6	301342	125894	241
7	593329	115390	305	7	427236	126131	237
8	708719	115694	304	8	553367	126369	238
9	824413	115995	301	9	679736	126605	236

x	log Γ(x)	D₁	D₂
19,0	15,806341	+126840	+235
1	933181	127073	233
2	16,060254	127305	232
3	187559	127536	231
4	315095	127766	230
19,5	442861	127994	228
6	570855	128222	228
7	699077	128448	226
8	827525	128673	225
9	956198	128897	224
20,0	17,085095	129119	222
1	214214	129341	222
2	343555	129561	220
3	473116	129781	220
4	602897	129998	217
20,5	732895	130216	218
6	863111	130432	216
7	993543	130647	215
8	18,124190	130861	214
9	255051	131074	213
21,0	386125	131285	211
1	517410	131496	211
2	648906	131706	210
3	780612	131915	209
4	912527	132122	207
21,5	19,044649	132330	208
6	176979	132535	205
7	309514	132740	205
8	442254	132943	203
9	575197	133147	204
22,0	708344	133349	202
1	841693	133549	200
2	975242	133750	201
3	20,108992	133949	199
4	242941	134147	198
22,5	377088	134344	197
6	511432	134541	197
7	645973	134737	196
8	780710	134931	194
9	915641	135126	195
23,0	21,050767	+135318	+192
1	186085	135510	192
2	321595	135702	192
3	457297	135892	190
4	593189	136081	189
23,5	729270	136271	190
6	865541	136458	187
7	22,001999	136646	188
8	138645	136832	186
9	275477	137017	185
24,0	412494	137203	186
1	549697	137386	183
2	687083	137570	184
3	824653	137752	182
4	962405	137933	181
24,5	23,100338	138115	182
6	238453	138295	180
7	376748	138474	179
8	515222	138653	179
9	653875	138831	178
25,0	792706	139008	177
1	931714	159184	176
2	24,070898	139361	177
3	210259	139535	174
4	349794	139710	175
25,5	489504	139884	174
6	629388	140057	173
7	769445	140229	172
8	909674	140400	171
9	050074	140572	172
26,0	25,190646	140742	170
1	331388	140911	169
2	472299	141080	169
3	613379	141249	169
4	754628	141417	168
26,5	896045	141583	166
6	26,037628	141750	167
7	179378	141915	165
8	321293	142081	166
9	463374	142245	164

x	log Γ(x)	D_1	D_2	x	log Γ(x)	D_1	D_2
27,0	26,605619	+142409	+164	**31,0**	32,423660	+148503	+142
1	748028	142572	163	1	572163	148645	142
2	890600	142735	163	2	720808	148786	141
3	27,033335	142897	162	3	869594	148928	142
4	176232	143058	161	4	33,018522	149068	140
27,5	319290	143220	162	31,5	167590	149208	140
6	462510	143379	159	6	316798	149347	139
7	605889	143539	160	7	466145	149487	140
8	749428	143698	159	8	615632	149626	139
9	893126	143857	159	9	765258	149764	138
28,0	28,036983	144014	157	**32,0**	915022	149901	137
1	180997	144172	158	1	34,064923	150040	139
2	325169	144329	157.	2	214963	150176	136
3	469498	144485	156	3	365139	150313	137
4	613983	144640	155	4	515452	150448	135
28,5	758623	144796	156	32,5	665900	150585	137
6	903419	144950	154	6	816485	150720	135
7	29,048369	145104	154	7	967205	150854	134
8	193473	145257	153	8	35,118059	150990	136
9	338730	145411	154	9	269049	151123	133
29,0	484141	145563	152	**33,0**	420172	151257	134
1	629704	145714	151	1	571429	151390	133
2	775418	145866	152	2	722819	151522	132
3	921284	146017	151	3	874341	151656	134
4	30,067301	146167	150	4	36,025997	151787	131
29,5	213468	146317	150	33,5	177784	151919	132
6	359785	146466	149	6	329703	152049	130
7	506251	146614	148	7	481752	152181	132
8	652865	146763	149	8	633933	152311	130
9	799628	146911	148	9	786244	152442	131
30,0	946539	147058	147	**34,0**	938686	152571	129
1	31,093597	147204	146	1	37,091257	152700	129
2	240801	147351	147	2	243957	152829	129
3	388152	147496	145	3	396786	152957	128
4	535648	147642	146	4	549743	153086	129
30,5	683290	147786	144	34,5	702829	153213	127
6	831076	147931	145	6	856042	153340	127
7	979007	148075	144	7	38,009382	153468	128
8	32,127082	148217	142	8	162850	153594	126
9	275299	148361	144	9	316444	153721	127

x	log Γ(x)	D_1	D_2	x	log Γ(x)	D_1	D_2
35,0	38,470165	+153846	+125	39,0	44,718520	+158604	+114
1	624011	153972	126	1	877124	158716	112
2	777983	154097	125	2	45,035840	158829	113
3	932080	154221	124	3	194669	158940	111
4	39,086301	154347	126	4	353609	159052	112
35,5	240648	154470	123	39,5	512661	159163	111
6	395118	154594	124	6	671824	159274	111
7	549712	154717	123	7	831098	159386	112
8	704429	154841	124	8	990484	159495	109
9	859270	154963	122	9	46,149979	159606	111
36,0	40,014233	155085	122	40,0	309585	159716	110
1	169318	155207	122	1	469301	159825	109
2	324525	155329	122	2	629126	159935	110
3	479854	155451	122	3	789061	160044	109
4	635305	155571	120	4	949105	160153	109
36,5	790876	155692	121	40,5	47,109258	160261	108
6	946568	155812	120	6	269519	160370	109
7	41,102380	155932	120	7	429889	160478	108
8	258312	156052	120	8	590367	160585	107
9	414364	156171	119	9	750952	160693	108
37,0	570535	156290	119	41,0	911645	160800	107
1	726825	156409	119	1	48,072445	160907	107
2	883234	156527	118	2	233352	161014	107
3	42,039761	156645	118	3	394366	161121	107
4	196406	156763	118	4	555487	161226	105
37,5	353169	156880	117	41,5	716713	161332	106
6	510049	156997	117	6	878045	161438	106
7	667046	157114	117	7	49,039483	161544	106
8	824160	157230	116	8	201027	161648	104
9	981390	157347	117	9	362675	161754	106
38,0	43,138737	157462	115	42,0	524429	161858	104
1	296199	157578	116	1	686287	161963	105
2	453777	157693	115	2	848250	162066	103
3	611470	157808	115	3	50,010316	162171	105
4	769278	157922	114	4	172487	162274	103
38,5	927200	158037	115	42,5	334761	162378	104
6	44,085237	158150	113	6	497139	162480	102
7	243387	158265	115	7	659619	162584	104
8	401652	158378	113	8	822203	162686	102
9	560030	158490	112	9	984889	162789	103

x	log Γ(x)	D_1	D_2	x	log Γ(x)	D_1	D_2
43,0	51,147678	+162891	+102	47,0	57,740570	+166792	+92
1	310569	162993	102	1	907362	166886	94
2	473562	163095	101	2	58,074248	166979	93
3	636657	163196	101	3	241227	167072	93
4	799853	163297	101	4	408299	167165	93
43,5	963150	163398	101	47,5	575464	167256	91
6	52,126548	163499	101	6	742720	167349	93
7	290047	163600	101	7	910069	167441	92
8	453647	163700	100	8	59,077510	167533	92
9	617347	163800	100	9	245043	167625	92
44,0	781147	163899	99	48,0	412668	167715	90
1	945046	164000	101	1	580383	167807	92
2	53,109046	164099	99	2	748190	167899	92
3	273145	164197	98	3	916089	167989	90
4	437342	164297	100	4	60,084078	168079	90
44,5	601639	164396	99	48,5	252157	168170	91
6	766035	164494	98	6	420327	168261	91
7	930529	164592	98	7	588588	168350	89
8	54,095121	164690	98	8	756938	168441	91
9	259811	164788	98	9	925379	168530	89
45,0	424599	164886	98	49,0	61,093909	168619	89
1	589485	164983	97	1	262528	168710	91
2	754468	165080	97	2	431238	168798	88
3	919548	165177	97	3	600036	168887	89
4	55,084725	165274	97	4	768923	168976	89
45,5	249999	165371	97	49,5	937899	169065	89
6	415370	165466	95	6	62,106964	169153	88
7	580836	165563	97	7	276117	169241	88
8	746399	165659	96	8	445358	169330	89
9	912058	165754	95	9	614688	169417	87
46,0	56,077812	165850	96	50,0	784105	169505	88
1	243662	165944	94	1	953610	169593	88
2	409606	166040	96	2	63,123203	169680	87
3	575646	166135	95	3	292883	169767	87
4	741781	166230	95	4	462650	169854	87
46,5	908011	166324	94	50,5	632504	169941	87
6	57,074335	166417	93	6	802445	170028	87
7	240752	166512	95	7	972473	170114	86
8	407264	166606	94	8	64,142587	170201	87
9	573870	166700	94	9	312788	170287	86

x	log Γ(x)	D₂	D₂	x	log Γ(x)	D₁	D₂
51,0	64,483075	+170373	+86	**55,0**	71,363318	+173680	+80
1	653448	170458	85	1	536998	173760	80
2	823906	170545	87	2	710758	173839	79
3	994451	170629	84	3	884597	173918	79
4	65,165080	170716	87	4	72,058515	173997	79
51,5	335796	170800	84	55,5	232512	174077	80
6	506596	170885	85	6	406589	174155	78
7	677481	170970	85	7	580744	174234	79
8	848451	171055	85	8	754978	174312	78
9	66,019506	171139	84	9	929290	174391	79
52,0	190645	171224	85	**56,0**	73,103681	174469	78
1	361869	171307	83	1	278150	174547	78
2	533176	171392	85	2	452697	174625	78
3	704568	171476	84	3	627322	174703	78
4	876044	171559	83	4	802025	174780	77
52,5	67,047603	171642	83	56,5	976805	174858	78
6	219245	171727	85	6	74,151663	174936	78
7	390972	171809	82	7	326599	175013	77
8	562781	171892	83	8	501612	175090	77
9	734673	171975	83	9	676702	175167	77
53,0	906648	172058	83	**57,0**	851869	175244	77
1	68,078706	172141	83	1	75,027113	175320	76
2	250847	172223	82	2	202433	175397	77
3	423070	172305	82	3	377830	175474	77
4	595375	172387	82	4	553304	175550	76
53,5	767762	172469	82	57,5	728854	175626	76
6	940231	172551	82	6	904480	175702	76
7	69,112782	172633	82	7	76,080182	175778	76
8	285415	172714	81	8	255960	175854	76
9	458129	172795	81	9	431814	175930	76
54,0	630924	172877	82	**58,0**	607744	176005	75
1	803801	172957	80	1	783749	176080	75
2	976758	173039	82	2	959829	176156	76
3	70,149797	173119	80	3	77,135985	176231	75
4	322916	173200	81	4	312216	176306	75
54,5	496116	173280	80	58,5	488522	176380	74
6	669396	173360	80	6	664902	176456	76
7	842756	173441	81	7	841358	176530	74
8	71,016197	173521	80	8	78,017888	176605	75
9	189718	173600	79	9	194493	176679	74

x	log Γ(x)	D_1	D_2	x	log Γ(x)	D_1	D_2
59,0	78,371172	+176753	+74	**63,0**	85,497896	+179624	+71
1	547925	176827	74	1	677520	179692	68
2	724752	176901	74	2	857212	179762	70
3	901653	176976	75	3	86,036974	179831	69
4	79,078629	177048	72	4	216805	179900	69
59,5	255677	177123	75	63,5	396705	179969	69
6	432800	177196	73	6	576674	180038	69
7	609996	177269	73	7	756712	180106	68
8	787265	177343	74	8	936818	180175	69
9	964608	177416	73	9	87,116993	180244	69
60,0	80,142024	177488	72	**64,0**	297237	180312	68
1	319512	177562	74	1	477549	180380	68
2	497074	177634	72	2	657929	180449	69
3	674708	177707	73	3	838378	180516	67
4	852415	177779	72	4	88,018894	180585	69
60,5	81,030194	177852	73	64,5	199479	180652	67
6	208046	177924	72	6	380131	180720	68
7	385970	177997	73	7	560851	180788	68
8	563967	178068	71	8	741639	180855	67
9	742035	178140	72	9	922494	180923	68
61,0	920175	178212	72	**65,0**	89,103417	180990	67
1	82,098387	178283	71	1	284407	181057	67
2	276670	178355	72	2	465464	181125	68
3	455025	178427	72	3	646589	181191	66
4	633452	178498	71	4	827780	181258	67
61,5	811950	178569	71	65,5	90,009038	181326	68
6	990519	178640	71	6	190364	181391	65
7	83,169159	178711	71	7	371755	181459	68
8	347870	178782	71	8	553214	181525	66
9	526652	178853	71	9	734739	181591	66
62,0	705505	178923	70	**66,0**	916330	181658	67
1	884428	178994	71	1	91,097988	181724	66
2	84,063422	179064	70	2	279712	181790	66
3	242486	179134	70	3	461502	181856	66
4	421620	179205	71	4	643358	181922	66
62,5	600825	179275	70	66,5	825280	181987	65
6	780100	179344	69	6	92,007267	182054	67
7	959444	179415	71	7	189321	182119	65
8	85,138859	179484	69	8	371440	182184	65
9	318343	179553	69	9	553624	182250	66

x	log Γ(x)	D_1	D_2	x	log Γ(x)	D_1	D_2
67,0	92,735874	+182315	+65	**71,0**	100,078405	+184850	+62
1	918189	182381	66	1	263255	184912	62
2	93,100570	182445	64	2	448167	184973	61
3	283015	182511	66	3	633140	185034	61
4	465526	182575	64	4	818174	185096	62
67,5	648101	182641	66	71,5	101,003270	185156	60
6	830742	182705	64	6	188426	185218	62
7	94,013447	182769	64	7	373644	185279	61
8	196216	182834	65	8	558923	185340	61
9	379050	182899	65	9	744263	185400	60
68,0	561949	182963	64	**72,0**	929663	185462	62
1	744912	183027	64	1	102,115125	185522	60
2	927939	183091	64	2	300647	185582	60
3	95,111030	183156	65	3	486229	185643	61
4	294186	183219	63	4	671872	185704	61
68,5	477405	183283	64	72,5	857576	185763	59
6	660688	183347	64	6	103,043339	185824	61
7	844035	183411	64	7	229163	185884	60
8	96,027446	183474	63	8	415047	185945	61
9	210920	183538	64	9	600992	186004	59
69,0	394458	183601	63	**73,0**	786996	186064	60
1	578059	183664	63	1	973060	186124	60
2	761723	183728	64	2	104,159184	186184	60
3	945451	183791	63	3	345368	186243	59
4	97,129242	183854	63	4	531611	186303	60
69,5	313096	183916	62	73,5	717914	186362	59
6	497012	183980	64	6	904276	186422	60
7	680992	184042	62	7	105,090698	186481	59
8	865034	184105	63	8	277179	186540	59
9	98,049139	184168	63	9	463719	186600	60
70,0	233307	184230	62	**74,0**	650319	186658	58
1	417537	184293	63	1	836977	186718	60
2	601830	184354	61	2	106,023695	186777	59
3	786184	184417	63	3	210472	186835	58
4	970601	184479	62	4	397307	186894	59
70,5	99,155080	184542	63	74,5	584201	186953	59
6	339622	184603	61	6	771154	187011	58
7	524225	184665	62	7	958165	187070	59
8	708890	184727	62	8	107,145235	187129	59
9	893617	184788	61	9	332364	187186	57

x	log Γ(x)	D_1	D_2	x	log Γ(x)	D_1	D_2
75,0	107,519550	+187246	+60	**79,0**	115,054011	+189515	+55
1	706796	187303	57	1	243526	189570	55
2	894099	187361	58	2	433096	189625	55
3	108,081460	187420	59	3	622721	189681	56
4	268880	187477	57	4	812402	189735	54
75,5	456357	187536	59	79,5	116,002137	189790	55
6	643893	187593	57	6	191927	189846	56
7	831486	187651	58	7	381773	189900	54
8	109,019137	187708	57	8	571673	189955	55
9	206845	187767	59	9	761628	190010	55
76,0	394612	187823	56	**80,0**	951638	190064	54
1	582435	187882	59	1	117,141702	190119	55
2	770317	187938	56	2	331821	190173	54
3	958255	187996	58	3	521994	190228	55
4	110,146251	188053	57	4	712222	190282	54
76,5	334304	188110	57	80,5	902504	190337	55
6	522414	188168	58	6	118,092841	190390	53
7	710582	188224	56	7	283231	190445	55
8	898806	188281	57	8	473676	190499	54
9	111,087087	188338	57	9	664175	190553	54
77,0	275425	188395	57	**81,0**	854728	190607	54
1	463820	188452	57	1	119,045335	190660	53
2	652272	188508	56	2	235995	190715	55
3	840780	188565	57	3	426710	190768	53
4	112,029345	188621	56	4	617478	190822	54
77,5	217966	188677	56	81,5	808300	190876	54
6	406643	188734	57	6	999176	190929	53
7	595377	188790	56	7	120,190105	190982	53
8	784167	188847	57	8	381087	191036	54
9	973014	188902	55	9	572123	191090	54
78,0	113,161916	188959	57	**82,0**	763213	191142	52
1	350875	189014	55	1	954355	191196	54
2	539889	189070	56	2	121,145551	191249	53
3	728959	189126	56	3	336800	191302	53
4	918085	189182	56	4	528102	191356	54
78,5	114,107267	189238	56	82,5	719458	191408	52
6	296505	189293	55	6	910866	191461	53
7	485798	189349	56	7	122,102327	191514	53
8	675147	189404	55	8	293841	191566	52
9	864551	189460	56	9	485407	191620	54

x	$\log \Gamma(x)$	D_1	D_2	x	$\log \Gamma(x)$	D_1	D_2
83,0	122,677027	+191672	+52	**87,0**	130,384301	+193727	+51
1	868699	191724	52	1	578028	193777	50
2	123,060423	191777	53	2	771805	193828	51
3	252200	191830	53	3	965633	193877	49
4	444030	191882	52	4	131,159510	193927	50
83,5	635912	191934	52	87,5	353437	193977	50
6	827846	191986	52	6	547414	194027	50
7	124,019832	192039	53	7	741441	194077	50
8	211871	192091	52	8	935518	194126	49
9	403962	192143	52	9	132,129644	194177	51
84,0	596105	192195	52	**88,0**	323821	194225	48
1	788300	192246	51	1	518046	194276	51
2	980546	192299	53	2	712322	194325	49
3	125,172845	192351	52	3	906647	194374	49
4	365196	192402	51	4	133,101021	194424	50
84,5	557598	192454	52	88,5	295445	194473	49
6	750052	192506	52	6	489918	194523	50
7	942558	192557	51	7	684441	194571	48
8	126,135115	192609	52	8	879012	194621	50
9	327724	192660	51	9	134,073633	194670	49
85,0	520384	192712	52	**89,0**	268303	194719	49
1	713096	192763	51	1	463022	194768	49
2	905859	192814	51	2	657790	194818	50
3	127,098673	192865	51	3	852608	194865	47
4	291538	192917	52	4	135,047473	194915	50
85,5	484455	192967	50	89,5	242388	194964	49
6	677422	193019	52	6	437352	195012	48
7	870441	193070	51	7	632364	195061	49
8	128,063511	193120	50	8	827425	195110	49
9	256631	193172	52	9	136,022535	195158	48
86,0	449803	193222	50	**90,0**	217693	195207	49
1	643025	193273	51	1	412900	195255	48
2	836298	193324	51	2	608155	195304	49
3	129,029622	193374	50	3	803459	195352	48
4	222996	193425	51	4	998811	195400	48
86,5	416421	193475	50	90,5	137,194211	195449	49
6	609896	193526	51	6	389660	195497	48
7	803422	193576	50	7	585157	195545	48
8	996998	193627	51	8	780702	195593	48
9	130,190625	193676	49	9	976295	195641	48

x	log Γ(x)	D₁	D₂	x	log Γ(x)	D₁	D₂
91,0	138,171936	+195689	+48	**95,0**	146,036376	+197566	+45
1	367625	195737	48	1	233942	197612	46
2	563362	195785	48	2	431554	197659	47
3	759147	195832	47	3	629213	197703	44
4	954979	195881	49	4	826916	197750	47
91,5	139,150860	195928	47	95,5	147,024666	197796	46
6	346788	195976	48	6	222462	197841	45
7	542764	196024	48	7	420303	197886	45
8	738788	196071	47	8	618189	197933	47
9	934859	196118	47	9	816122	197977	44
92,0	140,130977	196166	48	**96,0**	148,014099	198024	47
1	327143	196214	48	1	212123	198068	44
2	523357	196261	47	2	410191	198114	46
3	719618	196308	47	3	608305	198160	46
4	915926	196355	47	4	806465	198205	45
92,5	141,112281	196403	48	96,5	149,004670	198249	44
6	308684	196449	46	6	202919	198296	47
7	505133	196497	48	7	401215	198340	44
8	701630	196544	47	8	599555	198385	45
9	898174	196591	47	9	797940	198431	46
93,0	142,094765	196638	47	**97,0**	996371	198475	44
1	291403	196685	47	1	150,194846	198520	45
2	488088	196731	46	2	393366	198566	46
3	684819	196779	48	3	591932	198610	44
4	881598	196825	46	4	790542	198655	45
93,5	143,078423	196872	47	97,5	989197	198700	45
6	275295	196918	46	6	151,187897	198744	44
7	472213	196965	47	7	386641	198789	45
8	669178	197012	47	8	585430	198834	45
9	866190	197058	46	9	784264	198878	44
94,0	144,063248	197105	47	**98,0**	983142	198923	45
1	260353	197151	46	1	152,182065	198968	45
2	457504	197197	46	2	381033	199012	44
3	654701	197243	46	3	580045	199056	44
4	851944	197290	47	4	779101	199100	44
94,5	145,049234	197336	46	98,5	978201	199145	45
6	246570	197383	47	6	153,177346	199190	45
7	443953	197428	45	7	376536	199233	43
8	641381	197474	46	8	575769	199278	45
9	838855	197521	47	9	775047	199321	43

x	log Γ(x)	D_1	D_2	x	log Γ(x)	D_1	D_2
99,0	153,974368	+199366	+45	100,0	155,970004	+199804	+43
1	154,173734	199410	44	1	156,169808	199848	44
2	373144	199454	44	2	369656	199891	43
3	572598	199498	44	3	569547	199935	44
4	772096	199542	44	4	769482	199979	44
99,5	971638	199585	43	100,5	969461	200022	43
6	155,171223	199630	45	6	157,169483	200065	43
7	370853	199673	43	7	369548	200109	44
8	570526	199717	44	8	569657	200151	42
9	770243	199761	44	9	769808	200196	45

Tabelle D.

x	log $\Gamma(x)$	x	log $\Gamma(x)$	x	log $\Gamma(x)$
101	157, 970 003 7	113	182, 295 458 6	125	207, 177 865 8
101, 5	158, 971 626 9	113, 5	183, 321 517 5	125, 5	208, 225 886 6
102	159, 974 325 0	114	184, 348 537 1	126	209, 274 775 9
102, 5	160, 978 092 9	114, 5	185, 376 513 3	126, 5	210, 324 530 3
103	161, 982 925 2	115	186, 405 441 9	127	211, 375 146 4
103, 5	162, 988 816 8	115, 5	187, 435 318 8	127, 5	212, 426 620 8
104	163, 995 762 4	116	188, 466 139 8	128	213, 478 950 1
104, 5	165, 003 757 1	116, 5	189, 497 900 8	128, 5	214, 532 131 0
105	166, 012 795 8	117	190, 530 597 8	129	215, 586 160 1
105, 5	167, 022 873 4	117, 5	191, 564 226 7	129, 5	216, 641 034 1
106	168, 033 985 1	118	192, 598 783 6	130	217, 696 749 8
106, 5	169, 046 125 9	118, 5	193, 634 264 6	130, 5	218, 753 303 9
107	170, 059 290 9	119	194, 670 665 6	131	219, 810 693 2
107, 5	171, 073 475 5	119, 5	195, 707 982 9	131, 5	220, 868 914 4
108	172, 088 674 7	120	196, 746 212 6	132	221, 927 964 5
108, 5	173, 104 883 9	120, 5	197, 785 350 8	132, 5	222, 987 840 2
109	174, 122 098 5	121	198, 825 393 8	133	224, 048 538 4
109, 5	175, 140 313 7	121, 5	199, 866 337 9	133, 5	225, 110 056 0
110	176, 159 525 0	122	200, 908 179 2	134	226, 172 390 0
110, 5	177, 179 727 8	122, 5	201, 950 914 2	134, 5	227, 235 537 3
111	178, 200 917 6	123	202, 994 539 0	135	228, 299 494 8
111, 5	179, 223 090 1	123, 5	204, 039 050 2	135, 5	229, 364 259 6
112	180, 246 240 6	124	205, 084 444 2	136	230, 429 828 6
112, 5	181, 270 364 9	124, 5	206, 130 717 2	136, 5	231, 496 198 9

x	log $\Gamma(x)$	x	log $\Gamma(x)$	x	log $\Gamma(x)$
137	232, 563 367 5	159	280, 267 939 1	181	329, 302 971 4
137, 5	233, 631 331 5	159, 5	281, 368 296 3	181, 5	330, 431 510 8
138	234, 700 088 1	160	282, 469 336 3	182	331, 560 650 0
138, 5	235, 769 634 2	160, 5	283, 571 057 0	182, 5	332, 690 387 4
139	236, 839 967 2	161	284, 673 456 2	183	333, 820 721 4
139, 5	237, 911 084 0	161, 5	285, 776 532 0	183, 5	334, 951 650 3
140	238, 982 982 0	162	286, 880 282 1	184	336, 083 172 5
140, 5	240, 055 658 2	162, 5	287, 984 704 5	184, 5	337, 215 286 4
141	241, 129 110 0	163	289, 089 797 1	185	338, 347 990 3
141, 5	242, 203 334 5	163, 5	290, 195 557 9	185, 5	339, 481 282 7
142	243, 278 329 1	164	291, 301 984 7	186	340, 615 162 0
142, 5	244, 354 091 0	164, 5	292, 409 075 6	186, 5	341, 749 626 6
143	245, 430 617 4	165	293, 516 828 6	187	342, 884 675 0
143, 5	246, 507 905 8	165, 5	294, 625 241 5	187, 5	344, 020 305 5
144	247, 585 953 5	166	295, 734 312 5	188	345, 156 516 6
144, 5	248, 664 757 7	166, 5	296, 844 039 5	188, 5	346, 293 306 7
145	249, 744 316 0	167	297, 954 420 6	189	347, 430 674 4
145, 5	250, 824 625 6	167, 5	299, 065 453 8	189, 5	348, 568 618 1
146	251, 905 684 0	168	300, 177 137 1	190	349, 707 136 2
146, 5	252, 987 488 6	168, 5	301, 289 468 6	190, 5	350, 846 227 3
147	254, 070 036 8	169	302, 402 446 4	191	351, 985 889 8
147, 5	255, 153 326 2	169, 5	303, 516 068 5	191, 5	353, 126 122 3
148	256, 237 354 2	170	304, 630 333 1	192	354, 266 923 2
148, 5	257, 322 118 2	170, 5	305, 745 238 2	192, 5	355, 408 291 1
149	258, 407 615 9	171	306, 860 782 0	193	356, 550 224 4
149, 5	259, 493 844 7	171, 5	307, 976 962 6	193, 5	357, 692 721 8
150	260, 580 802 2	172	309, 093 778 1	194	358, 835 781 7
150, 5	261, 668 485 9	172, 5	310, 211 226 7	194, 5	359, 979 402 8
151	262, 756 893 4	173	311, 329 306 6	195	361, 123 583 5
151, 5	263, 846 022 4	173, 5	312, 448 015 8	195, 5	362, 268 322 4
152	264, 935 870 4	174	313, 567 352 7	196	363, 413 618 1
152, 5	266, 026 435 0	174, 5	314, 687 315 3	196, 5	364, 559 469 1
153	267, 117 713 9	175	315, 807 901 9	197	365, 705 874 2
153, 5	268, 209 704 8	175, 5	316, 929 110 7	197, 5	366, 852 831 7
154	269, 302 405 4	176	318, 050 940 0	198	368, 000 340 4
154, 5	270, 395 813 2	176, 5	319, 173 387 8	198, 5	369, 148 398 8
155	271, 489 926 1	177	320, 296 452 6	199	370, 297 005 6
155, 5	272, 584 741 7	177, 5	321, 420 132 5	199, 5	371, 446 159 3
156	273, 680 257 8	178	322, 544 425 9	200	372, 595 858 6
156, 5	274, 776 472 1	178, 5	323, 669 330 9	200, 5	373, 746 102 2
157	275, 873 382 4	179	324, 794 845 9	201	374, 896 888 6
157, 5	276, 970 986 4	179, 5	325, 920 969 1	201, 5	376, 048 216 6
158	278, 069 282 0	180	327, 047 698 9	202	377, 200 084 7
158, 5	279, 168 267 0	180, 5	328, 175 033 6		

x	$\log \Gamma(x)$	x	$\log \Gamma(x)$	x	$\log \Gamma(x)$	x	$\log \Gamma(x)$
200	372, 595 858 6	240	466, 229 157 5	280	562, 777 434 0	320	661, 820 386 9
201	374, 896 888 6	241	468, 609 368 7	281	565, 224 592 0	321	664, 325 536 9
202	377, 200 084 7	242	470, 991 385 7	282	567, 673 298 4	322	666, 832 041 9
203	379, 505 436 1	243	473, 375 201 1	283	570, 123 547 5	323	669, 339 897 8
204	381, 812 932 1	244	475, 760 807 4	284	572, 575 333 9	324	671, 849 100 3
205	384, 122 562 3	245	478, 148 197 2	285	575, 028 652 3	325	674, 359 645 3
206	386, 434 316 1	246	480, 537 363 3	286	577, 483 497 1	326	676, 871 528 7
207	388, 748 183 4	247	482, 928 298 4	287	579, 939 863 1	327	679, 384 746 3
208	391, 064 153 7	248	485, 320 995 4	288	582, 397 745 0	328	681, 899 294 0
209	393, 382 217 0	249	487, 715 447 0	289	584, 857 137 5	329	684, 415 167 9
210	395, 702 363 3	250	490, 111 646 4	290	587, 318 035 4	330	686, 932 363 8
211	398, 024 582 6	251	492, 509 586 4	291	589, 780 433 4	331	689, 450 877 7
212	400, 348 865 1	252	494, 909 260 1	292	592, 244 326 4	332	691, 970 705 7
213	402, 675 200 9	253	497, 310 660 7	293	594, 709 709 2	333	694, 491 843 8
214	405, 003 580 5	254	499, 713 781 2	294	597, 176 576 8	334	697, 014 288 0
215	407, 333 994 3	255	502, 118 614 9	295	599, 644 924 2	335	699, 538 034 5
216	409, 666 432 8	256	504, 525 155 1	296	602, 114 746 2	336	702, 063 079 3
217	412, 000 886 5	257	506, 933 395 0	297	604, 586 037 9	337	704, 589 418 6
218	414, 337 346 3	258	509, 343 328 2	298	607, 058 794 3	338	707, 117 048 5
219	416, 675 802 7	259	511, 754 947 9	299	609, 533 010 6	339	709, 645 965 2
220	419, 016 246 9	260	514, 168 247 6	300	612, 008 681 8	340	712, 176 164 9
221	421, 358 669 5	261	516, 583 221 0	301	614, 485 803 0	341	714, 707 643 8
222	423, 703 061 8	262	518, 999 861 5	302	616, 964 369 5	342	717, 240 398 2
223	426, 049 414 8	263	521, 418 162 8	303	619, 444 376 5	343	719, 774 424 3
224	428, 397 719 7	264	523, 838 118 5	304	621, 925 819 1	344	722, 309 718 4
225	430, 747 967 7	265	526, 259 722 5	305	624, 408 692 7	345	724, 846 276 8
226	433, 100 150 2	266	528, 682 968 3	306	626, 892 992 5	346	727, 384 095 9
227	435, 454 258 6	267	531, 107 850 0	307	629, 378 714 0	347	729, 923 172 0
228	437, 810 284 5	268	533, 534 361 2	308	631, 865 852 3	348	732, 463 501 5
229	440, 168 219 3	269	535, 962 496 0	309	634, 354 403 1	349	735, 005 080 7
230	442, 528 054 8	270	538, 392 248 3	310	636, 844 361 5	350	737, 547 906 2
231	444, 889 782 7	271	540, 823 612 1	311	639, 335 723 2	351	740, 091 974 2
232	447, 253 394 6	272	543, 256 581 4	312	641, 828 483 6	352	742, 637 281 3
233	449, 618 882 6	273	545, 691 150 3	313	644, 322 638 2	353	745, 183 824 0
234	451, 986 238 5	274	548, 127 312 9	314	646, 818 182 5	354	747, 731 598 7
235	454, 355 454 4	275	550, 565 063 5	315	649, 315 112 2	355	750, 280 602 0
236	456, 726 522 3	276	553, 004 396 2	316	651, 813 422 7	356	752, 830 830 3
237	459, 099 434 3	277	555, 445 305 2	317	654, 313 109 8	357	755, 382 280 3
238	461, 474 182 6	278	557, 887 785 0	318	656, 814 169 1	358	757, 934 948 5
239	463, 850 759 6	279	560, 331 829 8	319	659, 316 596 2	359	760, 488 831 6

x	log $\Gamma(x)$	x	log $\Gamma(x)$	x	log $\Gamma(x)$	x	log $\Gamma(x)$
360	763, 043 926 0	395	853, 210 415 4	430	944, 727 248 6	465	1037, 484 130 3
361	765, 600 228 5	396	855, 807 012 5	431	947, 360 717 0	466	1040, 151 583 2
362	768, 157 735 7	397	858, 404 707 7	432	949, 995 194 3	467	1042, 819 969 2
363	770, 716 444 3	398	861, 003 498 2	433	952, 630 678 0	468	1045, 489 286 0
364	773, 276 350 9	399	863, 603 381 3	434	955, 267 165 9	469	1048, 159 531 9
365	775, 837 452 3	400	866, 204 354 2	435	957, 904 655 7	470	1050, 830 704 7
366	778, 399 745 2	401	868, 806 414 2	436	969, 543 144 9	471	1053, 502 802 6
367	780, 963 226 2	402	871, 409 558 6	437	963, 182 631 4	472	1056, 175 823 5
368	783, 527 892 3	403	874, 013 784 6	438	965, 823 112 8	473	1058, 849 765 5
369	786, 093 740 1	404	876, 619 089 6	439	968, 464 586 9	474	1061, 524 626 6
370	788, 660 766 5	405	879, 225 471 0	440	971, 107 051 5	475	1064, 200 405 0
371	791, 228 968 2	406	881, 832 926 0	441	973, 750 504 1	476	1066, 877 098 6
372	793, 798 342 1	407	884, 441 452 1	442	976, 394 942 7	477	1069, 554 705 6
373	796, 368 885 1	408	887, 051 046 5	443	979, 040 365 0	478	1072, 235 223 9
374	798, 940 593 9	409	889, 661 706 6	444	981, 686 768 7	479	1074, 912 651 8
375	801, 513 465 5	410	892, 273 430 0	445	984, 334 151 7	480	1077, 592 987 3
376	804, 087 496 8	411	894, 886 213 8	446	986, 982 511 7	481	1080, 274 228 6
377	806, 662 684 6	412	897, 500 055 6	447	989, 631 846 6	482	1082, 956 373 7
378	809, 239 026 0	413	900, 114 952 8	448	992, 282 154 1	483	1085, 639 420 7
379	811, 816 517 8	414	902, 730 902 9	449	994, 933 432 1	484	1088, 323 367 8
380	814, 395 157 0	415	905, 347 903 2	450	997, 585 678 4	485	1091, 008 213 2
381	816, 974 940 6	416	907, 965 951 3	451	1000, 238 891 0	486	1093, 693 954 9
382	819, 555 865 5	417	910, 585 044 7	452	1002, 893 067 5	487	1096, 380 591 2
383	822, 137 928 9	418	913, 205 180 7	453	1005, 548 205 9	488	1099, 068 120 2
384	824, 721 127 7	419	915, 826 357 0	454	1008, 204 304 1	489	1101, 756 540 0
385	827, 305 458 9	420	918, 448 571 0	455	1010, 861 360 0	490	1104, 445 848 8
386	829, 890 919 6	421	921, 071 820 3	456	1013, 519 371 4	491	1107, 136 044 9
387	832, 477 506 9	422	923, 696 102 4	457	1016, 178 336 2	492	1109, 827 126 4
388	835, 065 217 9	423	926, 321 414 9	458	1018, 838 252 4	493	1112, 519 091 5
389	837, 654 049 6	424	928, 947 755 2	459	1021, 499 117 9	494	1115, 211 938 4
390	840, 243 999 2	425	931, 575 121 1	460	1024, 160 930 6	495	1117, 905 665 4
391	842, 835 063 8	426	934, 203 510 0	461	1026, 823 688 4	496	1120, 600 270 6
392	845, 427 240 6	427	936, 832 919 6	462	1029, 487 389 3	497	1123, 295 752 3
393	848, 020 526 7	428	939, 463 347 5	463	1032, 152 031 3	498	1125, 992 108 6
394	850, 614 919 2	429	942, 094 791 3	464	1034, 817 612 3	499	1128, 689 338 0
						500	1131, 387 438 5

Beispiele (mit vollständiger Ausrechnung):

I.

$$\underline{u^7 - 10u^4 + 3 = 0.}\,^{*)}$$

$$u^3 + 3u^{-4} = 10$$

$$u = lx$$

$$l^3x^3 + 3l^{-4}x^{-4} = 10$$

$$l^3 = 3l^{-4};\; l = \sqrt[7]{3}$$

$$\text{folgl. } x^3 + x^{-4} = \frac{10}{(\sqrt[7]{3})^3}.$$

Also: $p=3,\; q=4,\; p+q=7;\; y = \dfrac{10}{(\sqrt[7]{3})^3}$;

$$\log \frac{7}{3^{\frac{3}{7}} \cdot 4^{\frac{4}{7}}} = 0{,}296\,5831$$

$$\log y = 0{,}795\,5194$$

$$\text{folgl. mod. } y > \frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}} \cdot q^{\frac{q}{p+q}}}.$$

Demnach Formel (34*) und (36*) anzuwenden.

$$x = y^{-\frac{1}{4}} \cdot \zeta_4^1 + \frac{1}{4} \cdot y^{-\frac{8}{4}} \cdot \zeta_4^4 + \frac{1}{4} \cdot \Big[y^{-\frac{15}{4}} \cdot \zeta_4^7 \cdot \frac{\Gamma(3{,}75)}{\Gamma(3) \cdot \Gamma(2{,}75)} + y^{-\frac{22}{4}} \cdot \zeta_4^{10} \cdot \frac{\Gamma(5{,}5)}{\Gamma(4) \cdot \Gamma(3{,}5)}$$

$$+ y^{-\frac{29}{4}} \cdot \zeta_4^{13} \cdot \frac{\Gamma(7.25)}{\Gamma(5) \cdot \Gamma(4{,}25)} + \cdots \Big]$$

	$\overset{\mathrm{I}}{\zeta_4}$	$\overset{\mathrm{II}}{\zeta_4}$	$\overset{\mathrm{III}}{\zeta_4}$	$\overset{\mathrm{IV}}{\zeta_4}$
ζ_4^1	$+i$	-1	$-i$	$+1$
ζ_4^4	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
ζ_4^7	$-i$	-1	$+i$	$+1$
ζ_4^{10}	-1	$+1$	-1	$+1$
ζ_4^{13}	$+i$	-1	$-i$	$+1$

$\log \dfrac{1.\ \text{Glied}}{\zeta_4^1}$	$\bar{1},801\,1202$	
1. Glied	$0{,}632\,5869 \cdot \zeta_4^1$	
$\log \dfrac{2.\ \text{Glied}}{\zeta_4^4}$	$\bar{3},806\,9012$	
2. Glied	$0{,}006\,4106 \cdot \zeta_4^4$	
$\log y^{-3\frac{3}{4}}$	$\bar{3},016\,802$	+
$\log \Gamma(3{,}75)$	$0{,}645\,716$	+
$\log \Gamma(3)$	$0{,}301\,030$	−
$\log \Gamma(2{,}75)$	$0{,}206\,383$	−
	$\bar{3},155\,105$	
1. Klammerglied	$0{,}0014\,292 \cdot \zeta_4^7$	

$\log y^{-\frac{22}{4}}$	$\bar{5},624\,643$	+
$\log \Gamma(5{,}5)$	$1{,}718\,857$	+
$\log \Gamma(4)$	$0{,}778\,151$	−
$\log (3{,}5)$	$0{,}521\,576$	−
	$\bar{4},043\,773$	
2. Klammerglied	$0{,}000\,1106 \cdot \zeta_4^{10}$	

$\log y^{-\frac{29}{4}}$	$\bar{6},232\,484$	+
$\log \Gamma(7{,}25)$	$3{,}062\,725$	+
$\log \Gamma(5)$	$1{,}380\,211$	−
$\log \Gamma(4{,}25)$	$0{,}918\,297$	−
	$\bar{6},996\,701$	
3. Klammerglied	$0{,}000\,0099 \cdot \zeta_4^{13}$	
⋮	⋮	

*) s. Westphal, a. a. O.

Also

$$x = 0{,}632\,587 \begin{Bmatrix} +i \\ -1 \\ -i \\ +1 \end{Bmatrix} + 0{,}006\,411 \begin{Bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{Bmatrix} + 0{,}000\,357 \begin{Bmatrix} -i \\ -1 \\ +i \\ +1 \end{Bmatrix} + 0{,}000\,028 \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

$$+ 0{,}000\,002 \begin{Bmatrix} +i \\ -1 \\ -i \\ +1 \end{Bmatrix} + \cdots\cdots$$

d. i.

$$\begin{array}{rl} x_1 = +0{,}006\,411 & +0{,}632\,587\,i \\ -0{,}000\,028 & -0{,}000\,357\,i \\ & +0{,}000\,002\,i \\ \hline 0{,}006\,383 & +0{,}632\,232\,i \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x_2 = +0{,}006\,411 & -0{,}632\,587 \\ +0{,}000\,028 & -0{,}000\,357 \\ & -0{,}000\,002 \\ \hline +0{,}006\,439 & -0{,}632\,946 \\ = -0{,}626\,507 & \end{array}$$

$x_3 = 0{,}006\,383 - 0{,}632\,232\,i$ $\qquad$ $x_4 = 0{,}006\,439 + 0{,}632\,946 = +\,0{,}639\,385$

$$\begin{array}{r|l} + & \log\ 0{,}006\,383 = \bar{3}{,}805\,024\,8 \\ + & \log\ l = \log \sqrt[7]{3} = 0{,}068\,160\,2 \\ \hline & \log\ 0{,}006\,383\,l = \bar{3}{,}873\,185\,0 \\ & \text{Numerus} = 0{,}007\,468 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} + & \log\ 0{,}632\,232 = \bar{1}{,}800\,876\,5 \\ + & \log\ l = 0{,}068\,160\,2 \\ \hline & \log\ 0{,}632\,232\,l = \bar{1}{,}869\,036\,7 \\ & \text{Numerus} = 0{,}739\,668 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} + & \log\ 0{,}626\,507 = \bar{1}{,}796\,925\,9 \\ + & \log\ l = 0{,}068\,160\,2 \\ \hline & \log\ 0{,}626\,507\,l = \bar{1}{,}865\,086\,1 \\ & \text{Numerus} = 0{,}732\,970 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} + & \log\ 0{,}639\,385 = \bar{1}{,}805\,762\,4 \\ + & \log\ l = 0{,}068\,160\,2 \\ \hline & \log\ 0{,}639\,385\,l = \bar{1}{,}873\,922\,6 \\ & \text{Numerus} = 0{,}748\,036 \end{array}$$

Demnach

$$u_1 = 0{,}007\,468 + 0{,}739\,668\,i; \qquad u_2 = -\,0{,}732\,970;$$
$$u_3 = 0{,}007\,468 - 0{,}739\,668\,i; \qquad u_4 = 0{,}748\,036;$$

$$\frac{1}{x} = y^{-\frac{1}{3}} \cdot \zeta_3^{+1} + \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{8}{3}} \cdot \zeta_3^{5} + \frac{1}{3} \cdot \left[y^{-\frac{15}{3}} \cdot \zeta_3^{9} \cdot \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3) \cdot \Gamma(4)} + y^{-\frac{22}{3}} \cdot \zeta_3^{13} \cdot \frac{\Gamma\left(7\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(4) \cdot \Gamma\left(5\frac{1}{3}\right)} \right.$$

$$\left. + y^{-\frac{29}{3}} \cdot \zeta_3^{17} \cdot \frac{\Gamma\left(9\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(5) \cdot \Gamma\left(6\frac{2}{3}\right)} + \cdots \right]$$

	ζ_3^{I}	ζ_3^{II}	ζ_3^{III}
ζ_3^1	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	$+1$
ζ_3^5	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	$+1$
ζ_3^9	$+1$	$+1$	$+1$

$$\zeta_3^{13}=\zeta_3^{1},\quad \zeta_3^{17}=\zeta_3^{5},\quad \zeta_3^{21}=\zeta_3^{9},$$

$$\text{da } \zeta_3^{13}=+1.$$

$\log y^{-\frac{1}{3}}$	$\bar{1},734\,826\,9$	
$\log \frac{\text{1. Glied}}{\zeta_3^1}$	$\bar{1},734\,826\,9$	
1. Glied	$0,543\,033\,9 \cdot \zeta_3^1$	
$\log y^{-\frac{7}{3}}$	$\bar{2},143\,788\,3$	
$\log y^{-\frac{8}{3}}$	$\bar{3},878\,615\,2$	$+$
$\log y^{3}$	$0,477\,121\,3$	$-$
$\log \frac{\text{2. Glied}}{\zeta_3^5}$	$\bar{3},401\,493\,9$	
2. Glied	$0,002\,520\,5 \cdot \zeta_3^5$	

$\log y^{-\frac{15}{3}}$	$\bar{4},022\,404$	$+$
$\log \Gamma(5)$	$1,380\,211$	$+$
$\log \Gamma(3)$	$0,301\,030$	$-$
$\log \Gamma(4)$	$0,778\,151$	$-$
$\log \frac{\text{1. Klammerglied}}{\zeta_3^9}$	$\bar{4},323\,434$	
1. Klammerglied	$0,000\,210\,6 \cdot \zeta_3^9$	

$\log y^{-\frac{22}{3}}$	$\bar{6},166\,192$	$+$
$\log \Gamma(7,333\,333\,3)$	$3,132\,088$	$+$
$\log \Gamma(4)$	$0,778\,151$	$-$
$\log \Gamma(5,333\,333\,3)$	$1,603\,459$	$-$
$\log \frac{\text{2. Klammerglied}}{\zeta_3^{13}}$	$\bar{6},916\,670$	
2. Klammerglied	$0,000\,008\,3 \cdot \zeta_3^{13}$	

Also

$$\frac{1}{x}=0,543\,034\left\{\begin{matrix}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\\ +1\end{matrix}\right\}+0,002\,521\left\{\begin{matrix}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\\ +1\end{matrix}\right\}+0,000\,070\left\{\begin{matrix}+1\\ +1\\ +1\end{matrix}\right\}$$

$$+0,000\,003\left\{\begin{matrix}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\\ +1\end{matrix}\right\}+\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\text{d. i. } \frac{1}{x_5} &= -0,271\,517+0,271\,517\,i\sqrt{3}\\ &\quad -0,001\,260-0,001\,260\,i\sqrt{3}\\ &\quad +0,000\,070\\ &\quad -0,000\,001+0,000\,001\,i\sqrt{3}\\ \hline &\quad -0,272\,708+0,270\,258\,i\sqrt{3}\\ &= -0,272\,708+0,468\,101\,i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_7} &= +0,543\,034\\ &\quad +0,002\,521\\ &\quad +0,000\,070\\ &\quad +0,000\,003\\ \hline &\quad 0,545\,628\end{aligned}$$

oder: $$x_5 = \frac{+0,272\,708 + 0,468\,101\,i}{-0,293\,488(3)}$$

$\log x_7 = 0,263\,103\,4$	+
$\log l \;= 0,068\,160\,2$	+
$\log u_7 = 0,331\,263\,6$	
$u_7 = 2,144\,191$	

also $u_5 = lx_5 = -1,087\,095 - 1,865\,989\,i$,

$$\left(l = \sqrt[7]{3}\right)$$

dann $u_6 = \sqrt[7]{3} \cdot x_6 = -1,087\,095 + 1,865\,989\,i$

Wir haben also:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0,007\,468 + 0,739\,668\,i\\
u_2 &= -0,732\,970\\
u_3 &= 0,007\,468 - 0,739\,668\,i\\
u_4 &= 0,747\,036\\
u_5 &= -1,087\,095 - 1,865\,989\,i\\
u_6 &= -1,087\,095 + 1,865\,989\,i\\
u_7 &= 2,144\,191\\
\hline
& 0,000\,003
\end{aligned}$$

w. e. s. s.

II.

Die Lehre von den geometrischen Progressionen führt in einigen Fällen auf trinomische Gleichungen. Bezeichnet a das Anfangsglied der geometrischen Progression, t das Endglied, n die Anzahl der Glieder, e den Exponent (das Verhältniss) und s die Summe aller Glieder, so wird e oder t aus a, n, s, ferner e oder a aus n, t, s durch eine Gleichung vom $(n-1)\cdot$Grade gefunden, welche sich resp. unter der Form

$$\frac{e^n-1}{e-1} - \frac{s}{a} = 0,\; \frac{y^n-1}{y-1} - \frac{s}{a} = 0,\; \frac{e^n-1}{e-1} - \frac{s}{t}\cdot e^{n-1} = 0,\; \frac{z^n-1}{z-1} - \frac{s}{t} = 0 \quad \text{darstellen}$$

lässt, wobei y kurz für $\sqrt[n-1]{t:a}$, z für $\sqrt[n-1]{a:t}$ gesetzt ist. Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $e-1$, $y-1$, $e-1$, $z-1$, so erhält man Gleichungen $n\cdot$Grades, also Gleichungen, die je eine Wurzel (resp. $e=1$, $y=1$, $e=1$, $z=1$) zu viel haben. Diese Gleichungen $n\cdot$Grades können also für jene vom $(n-1)\cdot$Grade gesetzt werden, wenn man nur die betr. überschüssige Wurzel weglässt. Die Gleichungen $n\cdot$Grades sind aber dreigliedrige Gleichungen, welche sich nach unsrer Methode auflösen lassen.

Um in der Rentenrechnung aus der Mise, der Rente und ihrer Dauer die Verzinsung zu berechnen, hat man ebenfalls eine trinomische Gleichung aufzulösen. Denn die Rentengleichung*)

$$\frac{100}{p}\left(1 - 1,0p^{-n}\right) = \frac{c}{r}$$

oder, nachdem man $\frac{1}{1,0p} = x$, $\frac{100}{p} = \frac{x}{1-x}$ substituirt hat,:

$$x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{c}{r},$$

*) Vgl. R. Baltzer, d. Elem. d. Mathem. Bd. 1, Bch. 2, §. 22, 6. IV.

d. i. eine Gleichung vom n · Grade, hat dieselben Wurzeln wie die dreigliedrige Gleichung vom $(n+1)$ · Grade

$$x^{n+1} - x\left(\frac{c}{r}+1\right) = -\frac{c}{r},$$

wenn man hierbei den Wurzelwerth $x=1$ ausschliesst.

Hierher gehört die Aufgabe:*)

Wenn eine Versorgungsanstalt p Procent jährliche zu capitalisirende Zinsen berechnet, und 100 Gulden gegen eine 35 jährige Rente von 6 Gulden zahlt, so ist $\frac{6}{p}\left(1-1{,}0p^{-35}\right)=1 \,.\, p$ zu berechnen.

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{1}{1{,}0p}=u$, so geht sie über in

$$u \cdot \frac{1-u^{35}}{1-u} = \frac{100}{6},$$

deren Wurzeln übereinstimmen mit denen der Gleichung vom 36. Grade $u^{36} - \frac{106}{6}u = -\frac{100}{6}$, wenn man hierin die Wurzel $u=1$ unberücksichtigt lässt.

Die letztere Gleichung ist aber nach unserer Methode in folgender Weise zu behandeln:

$$u^{35} + \frac{100}{6}u^{-1} = \frac{106}{6}.$$

$$u = lx$$

$$l^{35}x^{35} + \frac{100}{6}l^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{106}{6}$$

$$l^{35} = \frac{100}{6}l^{-1}, \quad l = \sqrt[36]{\frac{100}{6}}$$

$$\text{folgl. } x^{35} + x^{-1} = \frac{106}{6} : \sqrt[36]{\frac{100}{6}}^{\,35}$$

Also:

$$p=35;\; q=1;\; p+q=36;\; y = \frac{106}{6 \cdot \sqrt[36]{\frac{100}{6}}^{\,35}};$$

$$\log \frac{36}{35^{\frac{35}{36}}} = 0{,}055\,125\,2$$

$$\log y = 0{,}059\,246\,1$$

$$\text{folgl. mod. } y > \frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}} \cdot q^{\frac{p}{p+q}}}.$$

Demnach Formel (34*) und (36*) anzuwenden.

Nach (34*) ist:

$$x = y^{-1} + y^{-37} + \frac{y^{-73}}{\Gamma(3)} \cdot \frac{\Gamma(73)}{\Gamma(72)} + \frac{y^{-109}}{\Gamma(4)} \cdot \frac{\Gamma(109)}{\Gamma(107)} + \frac{y^{-145}}{\Gamma(5)} \cdot \frac{\Gamma(145)}{\Gamma(142)}$$

$$+ \frac{y^{-181}}{\Gamma(6)} \cdot \frac{\Gamma(181)}{\Gamma(177)} + \frac{y^{-217}}{\Gamma(7)} \cdot \frac{\Gamma(217)}{\Gamma(212)} + \frac{y^{-253}}{\Gamma(8)} \cdot \frac{\Gamma(253)}{\Gamma(247)} + \frac{y^{-289}}{\Gamma(9)} \cdot \frac{\Gamma(289)}{\Gamma(282)}$$

$$+ \frac{y^{-325}}{\Gamma(10)} \cdot \frac{\Gamma(325)}{\Gamma(317)} + \frac{y^{-361}}{\Gamma(11)} \cdot \frac{\Gamma(361)}{\Gamma(352)} + \frac{y^{-397}}{\Gamma(12)} \cdot \frac{\Gamma(397)}{\Gamma(387)} + \frac{y^{-433}}{\Gamma(13)} \cdot \frac{\Gamma(433)}{\Gamma(422)}$$

$$+ \frac{y^{-469}}{\Gamma(14)} \cdot \frac{\Gamma(469)}{\Gamma(457)} + \cdots$$

*) Vgl. Baltzer, a. a. O. Bch. 3, §. 8, 4. Beisp. 4.

Da es sich um die Procentzahl p handelt, so genügen etwa 4 Stellen nach dem Komma. Die folgende Berechnung ist darnach eingerichtet.

$\log y$	0,059 246 108	
$\log y^{-1}$	$\bar{1}$,940 753 892	
1. Glied	0,872 476 8	
$\log y^{-36}$	$\bar{3}$,867 140 11	
$\log y^{-37}$	$\bar{3}$,807 894 00	
2. Glied	0,006 425 3	
$\log y^{-73}$	$\bar{5}$,675 034 1	+
$\log \Gamma(73)$	103,786 99$\underline{6}$	+
$\log \Gamma(72)$	101,929 663	—
$\log \Gamma(3)$	0,301 030	—
	$\bar{3}$,231 337	
3. Glied	0,001 703 $\underline{5}$	
$\log y^{-109}$	$\bar{7}$,542 174	+
$\log \Gamma(109)$	174,122 098	+
$\log \Gamma(107)$	170,059 29$\underline{1}$	—
$\log \Gamma(4)$	0,778 151	—
	$\bar{4}$,826 830	
4. Glied	0,000 671 $\underline{2}$	
$\log y^{-145}$	$\bar{9}$,409 314	+
$\log \Gamma(145)$	249,744 316	+
$\log \Gamma(142)$	243,278 329	—
$\log \Gamma(5)$	1,380 211	—
	$\bar{4}$,495 090	
5. Glied	0,000 31$\underline{3}$	

$\log y^{-181}$	$\overline{11}$,276 454	+
$\log \Gamma(181)$	329,302 971	+
$\log \Gamma(177)$	320,296 45$\underline{3}$	—
$\log \Gamma(6)$	2,079 181	—
	$\bar{4}$,203 791	
6. Glied	0,000 16$\underline{0}$	
$\log y^{-217}$	$\overline{13}$,143 594	+
$\log \Gamma(217)$	412,000 88$\underline{7}$	+
$\log \Gamma(212)$	400,348 865	—
$\log \Gamma(7)$	2,857 332	—
	$\bar{5}$,938 284	
7. Glied	0,000 08$\underline{7}$	
$\log y^{-253}$	$\overline{15}$,010 734	+
$\log \Gamma(253)$	497,310 66$\underline{1}$	+
$\log \Gamma(247)$	482,928 298	—
$\log \Gamma(8)$	3,702 43$\underline{1}$	—
	$\bar{5}$,690 666	
8. Glied	0,000 049	
$\log y^{-289}$	$\overline{18}$,877 874	+
$\log \Gamma(289)$	584,857 13$\underline{8}$	+
$\log \Gamma(282)$	567,673 298	—
$\log \Gamma(9)$	4,605 52$\underline{1}$	—
	$\bar{5}$,456 193	
9. Glied	0,000 02$\underline{9}$	

$\log y^{-325}$	$\overline{20}$,745 014	+
$\log \Gamma(325)$	674,359 645	+
$\log \Gamma(317)$	654,313 11$\underline{0}$	—
$\log \Gamma(10)$	5,559 763	—
	$\bar{5}$,231 786	
10. Glied	0,000 017	
$\log y^{-361}$	$\overline{22}$,612 154	+
$\log \Gamma(361)$	765,600 22$\underline{9}$	+
$\log \Gamma(352)$	742,637 281	—
$\log \Gamma(11)$	6,559 763	—
	$\bar{5}$,015 339	
11. Glied	0,000 010	
$\log y^{-397}$	$\overline{24}$,479 294	+
$\log \Gamma(397)$	858,404 70$\underline{8}$	+
$\log \Gamma(387)$	332,477 50$\underline{7}$	—
$\log \Gamma(12)$	7,601 15$\underline{6}$	—
	$\bar{6}$,805 339	
12. Glied	0,000 006	
$\log y^{-433}$	$\overline{26}$,346 434	+
$\log \Gamma(433)$	952,630 678	+
$\log \Gamma(422)$	923,696 102	—
$\log \Gamma(13)$	8,680 33$\underline{7}$	—
	$\bar{6}$,600 673	
13. Glied	0,000 00$\underline{4}$	

$\log y^{-469}$	$\overline{28}$,213 574	+
$\log \Gamma(469)$	1048,159 53$\underline{2}$	+
$\log \Gamma(457)$	1016,178 336	—
$\log \Gamma(14)$	9,794 280	—
	$\bar{6}$,400 490	
14. Glied	0,000 00$\underline{3}$	

Die Summe der ersten 14 Glieder beträgt also 0,881 954. Berechnet man die Summe bis zu dem Gliede 0,000 000, so vergrössert sich die letzte Stelle der eben angeführten Zahl noch um einige Einheiten, so dass als Werth von x (bis zur 5. Stelle nach dem Komma) genommen werden kann: 0,881 9$\underline{6}$.

$$\text{Nun ist } \log x = \log 0{,}881\,9\underline{6} = \bar{1}{,}945\,448\,\underline{9}$$

$$\log l = \log \sqrt[36]{\frac{100}{6}} = 0{,}033\,940\,2$$

$$\log u = \bar{1}{,}979\,389\,1$$

$$\text{Dekad. Erg.} = 0{,}020\,610\,\underline{9}$$

$$\text{Num. dazu} = 1{,}048\,602\,\underline{5} = \frac{1}{u}$$

$$\text{folgl. } \underline{p} = 100\left(\frac{1}{u} - 1\right) = 4{,}8602\underline{5}$$

Die Formel (36*) liefert für u ausser dem reellen Werthe 1 lauter complexe Werthe, da ζ_{36}, den Fall $k=0$ ausgenommen, durchaus complex ist. Der mittelst Formel (34*) berechnete Werth von p ist also der einzige reelle.

III.

$$u^5 - 2625u = 16600 \text{ *)}$$

$$u^4 - 16600\, u^{-1} = 2625$$

$$u = lx$$

$$l^4 x^4 - 16600\, l^{-1}\, x^{-1} = 2625$$

$$l^4 = -16600\, l^{-1};\ l = -\sqrt[5]{16600}$$

$$\text{folgl. } x^4 + x^{-1} = \frac{2625}{\sqrt[5]{16600}^4}$$

Also:

$$p=4;\ q=1;\ p+q=5;\ y = \frac{2625}{\sqrt[5]{16600}^4};$$

$$\log \frac{5}{4^{\frac{4}{5}} \cdot 1^{\frac{1}{5}}} = 0{,}217\,3220$$

$$\log y = 0{,}043\,0428$$

$$\text{folgl. mod. } y < \frac{p+q}{p^{\frac{p}{p+q}} \cdot q^{\frac{q}{p+q}}};$$

Demnach (12*) oder (14*) anzuwenden.

Nach (12*) ist, da

$$\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\frac{2}{5}\pi}{\Gamma\left(1\frac{2}{5}\right) \cdot \sin \frac{2}{5}\pi},\ \Gamma\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\frac{1}{5}\pi}{\Gamma\left(1\frac{1}{5}\right) \cdot \sin \frac{1}{5}\pi},\ \underset{n=0,1,\cdots}{\sin (2n+1)\pi = 0},:$$

$$x = \xi^1 + \frac{1}{5} y^1 \cdot \xi^{-3} + \frac{1}{\pi} \cdot \left[-\frac{y^2 \cdot \xi^{-7}}{7 \cdot \Gamma(3)} \cdot \frac{\frac{2}{5}\pi \cdot \Gamma\left(2\frac{2}{5}\right)}{\Gamma\left(1\frac{2}{5}\right)} + \frac{y^3 \cdot \xi^{-11}}{11 \cdot \Gamma(4)} \cdot \frac{\frac{1}{5}\pi\, \Gamma\left(3\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(1\frac{1}{5}\right)} \right.$$

$$- \frac{y^5 \cdot \xi^{-19}}{19 \cdot \Gamma(6)} \cdot \Gamma\left(1\frac{1}{5}\right) \cdot \Gamma\left(4\frac{4}{5}\right) \cdot \sin \frac{1}{5}\pi + \frac{y^6 \cdot \xi^{-23}}{23 \cdot \Gamma(7)} \cdot \Gamma\left(1\frac{2}{5}\right) \cdot \Gamma\left(5\frac{3}{5}\right) \cdot \sin \frac{2}{5}\pi$$

$$- \frac{y^7 \cdot \xi^{-27}}{27 \cdot \Gamma(8)} \cdot \Gamma\left(1\frac{3}{5}\right) \cdot \Gamma\left(6\frac{2}{5}\right) \cdot \sin \frac{2}{5}\pi + \frac{y^8 \cdot \xi^{-31}}{31 \cdot \Gamma(9)} \cdot \Gamma\left(1\frac{4}{5}\right) \cdot \Gamma\left(7\frac{1}{5}\right) \cdot \sin \frac{1}{5}\pi$$

$$- \frac{y^{10} \cdot \xi^{-39}}{39 \cdot \Gamma(11)} \cdot \Gamma\left(2\frac{1}{5}\right) \cdot \Gamma\left(8\frac{4}{5}\right) \cdot \sin \frac{1}{5}\pi + \frac{y^{11} \cdot \xi^{-43}}{43 \cdot \Gamma(12)} \cdot \Gamma\left(2\frac{2}{5}\right) \cdot \Gamma\left(9\frac{3}{5}\right) \cdot \sin \frac{2}{5}\pi$$

*) S. Euler, Einl. in d. Anal. d. Unendl. 3. Bch. S. 54. Ausg. v. Michelsen. Berlin 1791.

$$-\frac{y^{12}\cdot\xi^{-47}}{47\cdot\Gamma(13)}\cdot\Gamma\left(2\tfrac{3}{5}\right)\cdot\Gamma\left(10\tfrac{2}{5}\right)\cdot sin\,\frac{2}{5}\pi+\frac{y^{13}\cdot\xi^{-51}}{51\cdot\Gamma(14)}\cdot\Gamma\left(2\tfrac{4}{5}\right)\cdot\Gamma\left(11\tfrac{1}{5}\right)\cdot sin\,\frac{1}{5}\pi$$

$$-\frac{y^{15}\cdot\xi^{-59}}{59\cdot\Gamma(16)}\cdot\Gamma\left(3\tfrac{1}{5}\right)\cdot\Gamma\left(12\tfrac{4}{5}\right)\cdot sin\,\frac{1}{5}\pi+\frac{y^{16}\cdot\xi^{-63}}{63\cdot\Gamma(17)}\cdot\Gamma\left(3\tfrac{2}{5}\right)\cdot\Gamma\left(13\tfrac{3}{5}\right)\cdot sin\,\frac{2}{5}\pi$$

$$-\frac{y^{17}\cdot\xi^{-67}}{67\cdot\Gamma(18)}\cdot\Gamma\left(3\tfrac{3}{5}\right)\cdot\Gamma\left(14\tfrac{2}{5}\right)\cdot sin\,\frac{2}{5}\pi+\frac{y^{18}\cdot\xi^{-71}}{71\cdot\Gamma(19)}\cdot\Gamma\left(3\tfrac{4}{5}\right)\cdot\Gamma\left(15\tfrac{1}{5}\right)\cdot sin\,\frac{1}{5}\pi$$

$$-\frac{y^{20}\cdot\xi^{-79}}{79\cdot\Gamma(21)}\cdot\Gamma\left(4\tfrac{1}{5}\right)\cdot\Gamma\left(16\tfrac{4}{5}\right)\cdot sin\,\frac{1}{5}\pi+\frac{y^{21}\cdot\xi^{-83}}{83\cdot\Gamma(22)}\cdot\Gamma\left(4\tfrac{2}{5}\right)\cdot\Gamma\left(17\tfrac{3}{5}\right)\cdot sin\,\frac{2}{5}\pi$$

$$-\frac{y^{22}\cdot\xi^{-87}}{87\cdot\Gamma(23)}\cdot\Gamma\left(4\tfrac{3}{5}\right)\cdot\Gamma\left(18\tfrac{2}{5}\right)\cdot sin\,\frac{2}{5}\pi\pm\cdots\cdot$$

$$\left(\xi^{\mathrm{IV}}\right)^{-3}=\left(\xi^{\mathrm{III}}\right)^{-11}=\left(\xi^{\mathrm{II}}\right)^{-7}=\left(\xi^{\mathrm{I}}\right)^{1}=\tfrac{1}{4}\left[1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$
$$=0{,}809\,017+0{,}587\,785\,i$$

$$\left(\xi^{\mathrm{IV}}\right)^{1}=\left(\xi^{\mathrm{III}}\right)^{-7}=\left(\xi^{\mathrm{II}}\right)^{-11}=\left(\xi^{\mathrm{I}}\right)^{-3}=\tfrac{1}{4}\left[1-\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$$
$$=-0{,}309\,017+0{,}951\,057\,i$$

$$\left(\xi^{\mathrm{IV}}\right)^{-11}=\left(\xi^{\mathrm{III}}\right)^{-3}=\left(\xi^{\mathrm{II}}\right)^{1}=\left(\xi^{\mathrm{I}}\right)^{-7}=\tfrac{1}{4}\left[1-\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$$
$$=-0{,}309\,017-0{,}951\,057\,i$$

$$\left(\xi^{\mathrm{IV}}\right)^{-7}=\left(\xi^{\mathrm{III}}\right)^{1}=\left(\xi^{\mathrm{II}}\right)^{-3}=\left(\xi^{\mathrm{I}}\right)^{-11}=\tfrac{1}{4}\left[1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$
$$=0{,}809\,017-0{,}587\,785\,i$$

$$\left(\xi^{\mathrm{I}}\right)^{-15}=\left(\xi^{\mathrm{II}}\right)^{-15}=\left(\xi^{\mathrm{III}}\right)^{-15}=\left(\xi^{\mathrm{IV}}\right)^{-15}=\left(\xi^{\mathrm{V}}\right)^{-15}=\left(\xi^{\mathrm{V}}\right)^{-11}=\left(\xi^{\mathrm{V}}\right)^{-7}$$
$$=\left(\xi^{\mathrm{V}}\right)^{-3}=\left(\xi^{\mathrm{V}}\right)^{1}=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}
\xi^{1}=\xi^{-19}=\xi^{-39}=\xi^{-59}=\xi^{-79}=\cdots\cdot\\
\xi^{-3}=\xi^{-23}=\xi^{-43}=\xi^{-63}=\xi^{-83}=\cdots\cdot\\
\xi^{-7}=\xi^{-27}=\xi^{-47}=\xi^{-67}=\xi^{-87}=\cdots\cdot\\
\xi^{-11}=\xi^{-31}=\xi^{-51}=\zeta^{-71}=\xi^{-91}=\cdots\cdot\\
\xi^{-15}=\xi^{-35}=\xi^{-55}=\xi^{-75}=\xi^{-95}=\cdots\cdot
\end{array}\right\}\text{ da }\xi^{-20}=+1.$$

1. Glied	ξ^1	
$\log y$	0,043 042 8	+
$\log 5$	0,698 970 0	−
	$\bar{1}$,344 072 8	
2. Glied	$0,220\,838 \cdot \xi^{-3}$	
$\log y^2$	0,086 085 6	+
$\log 7$	0,845 098 0	−
$\log \Gamma(3)$	0,301 030 0	−
	$\bar{2}$,939 957 6	+
$\log \frac{2}{5}\pi$	0,099 209 9	+
$\log \Gamma(2,4)$	0,094 181	+
$\log \Gamma(1,4)$	$\bar{1}$,948 053	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{2}$,688 146	
3. Glied	$0,048\,769 \cdot \xi^{-7}$	
$\log y^3$	0,129 128	+
$\log \frac{1}{5}\pi$	$\bar{1}$,798 180	+
$\log \Gamma(3,2)$	0,384 526	+
$\log 11$	1,041 393	−
$\log \Gamma(4)$	0,778 151	−
$\log \Gamma(1,2)$	$\bar{1}$,962 923	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{2}$,032 217	
4. Glied	$0,010\,770 \cdot \xi^{-11}$	
$\log y^5$	0,215 214	+
$\log \Gamma(1,2)$	$\bar{1}$,962 923	+
$\log \Gamma(4,8)$	1,251 343	+
$\log \sin \frac{1}{5}\pi$	$\bar{1}$,769 219	+
$\log 19$	1,278 754	−
$\log \Gamma(6)$	2,079 181	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{3}$,343 614	
5. Glied	$0,002\,206 \cdot \xi^{-19}$	
$\log y^6$	0,258 257	+
$\log \Gamma(1,4)$	$\bar{1}$,948 053	+
$\log \Gamma(5,6)$	1,789 256	+
$\log \sin \frac{2}{5}\pi$	$\bar{1}$,978 206	+
$\log 23$	1,361 728	−
$\log \Gamma(7)$	2,857 332	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{3}$,257 562	
6. Glied	$0,001\,810 \cdot \xi^{-23}$	
$\log y^7$	0,301 300	+
$\log \Gamma(1,6)$	$\bar{1}$,951 102	+
$\log \Gamma(6,4)$	2,381 717	+
$\log \sin \frac{2}{5}\pi$	$\bar{1}$,978 206	+
$\log 27$	1,431 364	−
$\log \Gamma(8)$	3,702 431	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{4}$,981 380	
7. Glied	$0,000\,958 \cdot \xi^{-27}$	
$\log y^8$	0,344 342	+
$\log \Gamma(1,8)$	$\bar{1}$,969 129	+
$\log \Gamma(7,2)$	3,021 321	+
$\log \sin \frac{1}{5}\pi$	$\bar{1}$,769 219	+
$\log 31$	1,491 362	−
$\log \Gamma(9)$	4,605 521	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{4}$,509 978	
8. Glied	$0,000\,324 \cdot \xi^{-31}$	
$\log y^{10}$	0,430 428	+
$\log \Gamma(2,2)$	0,042 104	+
$\log \Gamma(8,8)$	4,420 616	+
$\log \sin \frac{1}{5}\pi$	$\bar{1}$,769 219	+
$\log 39$	1,591 065	−
$\log \Gamma(11)$	6,559 763	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{4}$,014 389	
9. Glied	$0,000\,103 \cdot \xi^{-39}$	
$\log y^{11}$	0,473 471	+
$\log \Gamma(2,4)$	0,094 181	+
$\log \Gamma(9,6)$	5,172 300	+
$\log \sin \frac{2}{5}\pi$	$\bar{1}$,978 206	+
$\log 43$	1,633 469	−
$\log \Gamma(12)$	7,601 156	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{5}$,986 383	
10. Glied	$0,000\,097 \cdot \xi^{-43}$	
$\log y^{12}$	0,516 514	+
$\log \Gamma(2,6)$	0,155 222	+
$\log \Gamma(10,4)$	5,954 536	+
$\log \sin \frac{2}{5}\pi$	$\bar{1}$,978 206	+
$\log 47$	1,672 098	−
$\log \Gamma(13)$	8,680 337	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{5}$,754 893	
11. Glied	$0,000\,057 \cdot \xi^{-47}$	
$\log y^{13}$	0,559 557	+
$\log \Gamma(2,8)$	0,224 401	+
$\log \Gamma(11,2)$	6,764 855	+
$\log \sin \frac{1}{5}\pi$	$\bar{1}$,769 219	+
$\log 51$	1,707 570	−
$\log \Gamma(14)$	9,794 280	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{5}$,319 032	
12. Glied	$0,000\,021 \cdot \xi^{-51}$	
$\log y^{15}$	0,645 643	+
$\log \Gamma(3,2)$	0,384 526	+
$\log \Gamma(12,8)$	8,461 630	+
$\log \sin \frac{1}{5}\pi$	$\bar{1}$,769 219	+
$\log 59$	1,770 852	−
$\log \Gamma(16)$	12,116 500	−
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1}$,502 850	+
	$\bar{6}$,876 516	
13. Glied	$0,000\,008 \cdot \xi^{-59}$	

$\log y^{16}$	$0,688\,686$	$+$
$\log \Gamma(3,4)$	$0,474\,392$	$+$
$\log \Gamma(13,6)$	$9,344\,705$	$+$
$\log \sin\frac{2}{5}\pi$	$\bar{1},978\,206$	$+$
$\log 63$	$1,799\,340$	$-$
$\log \Gamma(17)$	$13,320\,620$	$-$
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1},502\,850$	$+$
	$\bar{6},868\,879$	

14. Glied $0,000\,007 \cdot \xi^{-63}$

$\log y^{17}$	$0,731\,729$	$+$
$\log \Gamma(3,6)$	$0,570\,195$	$+$
$\log \Gamma(14,4)$	$10,249\,001$	$+$
$\log \sin\frac{2}{5}\pi$	$\bar{1},978\,206$	$+$
$\log 67$	$1,826\,075$	$-$
$\log \Gamma(18)$	$14,551\,069$	$-$
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1},502\,850$	$+$
	$\bar{6},654\,837$	

15. Glied $0,000\,005 \cdot \xi^{-67}$

$\log y^{18}$	$0,774\,772$	$+$
$\log \Gamma(3,8)$	$0,671\,559$	$+$
$\log \Gamma(15,2)$	$11,173\,295$	$+$
$\log \sin\frac{1}{5}\pi$	$\bar{1},769\,219$	$+$
$\log 71$	$1,851\,258$	$-$
$\log \Gamma(19)$	$15,806\,341$	$-$
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1},502\,850$	$+$
	$\bar{6},234\,096$	

16. Glied $0,000\,002 \cdot \xi^{-71}$

$\log y^{20}$	$0,860\,858$	$+$
$\log \Gamma(4,2)$	$0,889\,676$	$+$
$\log \Gamma(16,8)$	$13,077\,638$	$+$
$\log \sin\frac{1}{5}\pi$	$\bar{1},769\,219$	$+$
$\log 79$	$1,897\,627$	$-$
$\log \Gamma(21)$	$18,386\,125$	$-$
$\log \frac{1}{\pi}$	$\bar{1},502\,850$	$+$
	$\bar{7},816\,489$	

17. Glied $0,000,001 \cdot \xi^{-79}$

18. Glied $0,000\,001 \cdot \xi^{-83}$

Setzt man, der Kürze wegen,

$$0,809\,017 = a_1 \quad\Big|\quad 0,309\,017 = a_2$$
$$0,587\,785 = b_1 \quad\Big|\quad 0,951\,057 = b_2$$

$$\text{also } \log a_1 = \bar{1},907\,957\,7 \quad\Big|\quad \log a_2 = \bar{1},489\,982\,4$$
$$\log b_1 = \bar{1},769\,218\,5 \quad\Big|\quad \log b_2 = \bar{1},978\,206\,5$$

so resultirt:

$$x = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ -a_2 + b_2 i \\ a_1 - b_1 i \\ -a_2 - b_2 i \\ -1 \end{bmatrix} + 0,220\,838 \cdot \begin{bmatrix} -a_2 - b_2 i \\ a_1 - b_1 i \\ -a_2 + b_2 i \\ a_1 + b_1 i \\ -1 \end{bmatrix} - 0,048\,769 \cdot \begin{bmatrix} -a_2 + b_2 i \\ a_1 + b_1 i \\ -a_2 - b_2 i \\ a_1 - b_1 i \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$+ 0,010\,770 \cdot \begin{bmatrix} a_1 - b_1 i \\ -a_2 - b_2 i \\ a_1 + b_1 i \\ -a_2 + b_2 i \\ -1 \end{bmatrix} - 0,002\,206 \cdot \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ -a_2 + b_2 i \\ a_1 - b_1 i \\ -a_2 - b_2 i \\ -1 \end{bmatrix} + 0,001\,810 \cdot \begin{bmatrix} -a_2 - b_2 i \\ a_1 - b_1 i \\ -a_2 + b_2 i \\ a_1 + b_1 i \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$
-0{,}000\,958\cdot\begin{bmatrix}-a_2+b_2i\\ a_1+b_1i\\ -a_2-b_2i\\ a_1-b_1i\\ -1\end{bmatrix}+0{,}000\,32\underline{4}\cdot\begin{bmatrix}a_1-b_1i\\ -a_2-b_2i\\ a_1+b_1i\\ -a_2+b_2i\\ -1\end{bmatrix}-0{,}000\,103\cdot\begin{bmatrix}a_1+b_1i\\ -a_2+b_2i\\ a_1-b_1i\\ -a_2-b_2i\\ -1\end{bmatrix}
$$

$$
+0{,}000\,09\underline{7}\cdot\begin{bmatrix}-a_2-b_2i\\ a_1-b_1i\\ -a_2+b_2i\\ a_1+b_1i\\ -1\end{bmatrix}-0{,}000\,05\underline{7}\cdot\begin{bmatrix}-a_2+b_2i\\ a_1+b_1i\\ -a_2-b_2i\\ a_1-b_1i\\ -1\end{bmatrix}+0{,}000\,02\underline{1}\cdot\begin{bmatrix}a_1-b_1i\\ -a_2-b_2i\\ a_1+b_1i\\ -a_2+b_2i\\ -1\end{bmatrix}
$$

$$
-0{,}000\,00\underline{8}\cdot\begin{bmatrix}a_1+b_1i\\ -a_2+b_2i\\ a_1-b_1i\\ -a_2-b_2i\\ -1\end{bmatrix}+0{,}000\,007\cdot\begin{bmatrix}-a_2-b_2i\\ a_1-b_1i\\ -a_2+b_2i\\ a_1+b_1i\\ -1\end{bmatrix}-0{,}000\,00\underline{5}\cdot\begin{bmatrix}-a_2+b_2i\\ a_1+b_1i\\ -a_2-b_2i\\ a_1-b_1i\\ -1\end{bmatrix}
$$

$$
+0{,}000\,00\underline{2}\cdot\begin{bmatrix}a_1-b_1i\\ -a_2-b_2i\\ a_1+b_1i\\ -a_2+b_2i\\ -1\end{bmatrix}-0{,}000\,00\underline{1}\cdot\begin{bmatrix}a_1+b_1i\\ -a_2+b_2i\\ a_1-b_1i\\ -a_2-b_2i\\ -1\end{bmatrix}+0{,}000\,00\underline{1}\cdot\begin{bmatrix}-a_2-b_2i\\ a_1-b_1i\\ -a_2+b_2i\\ a_1+b_1i\\ -1\end{bmatrix}\mp\ldots.
$$

folgl.
$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1{,}008\,799\;a_1+0{,}986\,565\;b_1i-0{,}172\,964\;a_2-0{,}272\,542\;b_2i\\
x_2 &= -1{,}008\,799\;a_2+0{,}986\,565\;b_2i-0{,}172\,964\;a_1-0{,}272\,542\;b_2i\\
x_5 &= -1{,}181\,763
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log 1{,}008\,799 &= 0{,}003\,805\,03\\
\log 0{,}986\,565 &= \bar{1}{,}994\,125\,7\\
\log 0{,}172\,964 &= \bar{1}{,}237\,955\,7\\
\log 0{,}272\,542 &= \bar{1}{,}435\,433\,5\\
\log l = \log\left[-\sqrt[5]{16600}\right] &= 0{,}844\,0216(n)
\end{aligned}
$$

0,003 805 0	$\bar{1}$,994 125 7	$\bar{1}$,237 955 7 (n)	$\bar{1}$,435 433 5 (n)
$\bar{1}$,907 957 7	$\bar{1}$,769 218 5	$\bar{1}$,489 982 4	$\bar{1}$,978 206 5
0,844 021 6 (n)	0,844 021 6 (n)	0,844 021 6 (n)	0,844 021 6 (n)
0,755 784 3	0,607 365 8	$\bar{1}$,571 959 7	0,257 661 6
Num. = - 5,698 811	Num. = — 4,049 168	Num. = + 0,373 216	Num. = + 1,809 929

$$
\begin{array}{r}
-5{,}698\,811-4{,}049\,168\,i\\
+0{,}373\,216+1{,}809\,929\,i\\
\hline
-5{,}325\,595-2{,}239\,239\,\mathrm{i}=\mathrm{u}_1
\end{array}
$$

0,003 805 0 (n)	$\bar{1}$,994 125 7	$\bar{1}$,237 955 7	$\bar{1}$,435 433 5 (n)
$\bar{1}$,489 982 4	$\bar{1}$,978 206 5	$\bar{1}$,907 957 7	$\bar{1}$,769 218 5
0,844 021 6 (n)	0,844 021 6 (n)	0,844 021 6 (n)	0,844 021 6 (n)
0,337 809 0	0,816 353 8 (n)	$\bar{1}$,989 935 0 (n)	0,048 673 6
Num. = + 2,176 752	Num. = − 6,551 697	Num. = − 0,977 091	Num. = + 1,118 597

$$\begin{array}{r}
+ 2{,}176\,752 - 6{,}551\,697\, i \\
- 0{,}977\,091 + 1{,}118\,597\, i \\
\hline
+ 1{,}199\,661 - 5{,}433\,100\, i = u_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\log x_5 = 0{,}072\,530\,4 (n) \\
\log l \;= 0{,}844\,021\,6 (n) \\
\hline
\log u_5 = 0{,}916\,552\,0 \\
\quad u_5 = 8{,}251\,862
\end{array}$$

also $u_3 = - 5{,}325\,595 + 2{,}239\,239\, i$

$u_4 = + 1{,}199\,661 + 5{,}433\,100\, i$

Probe:
$$\begin{array}{l}
u_1 = - 5{,}325\,595 - 2{,}239\,239\, i \;+ \\
u_2 = + 1{,}199\,661 - 5{,}433\,100\, i \;+ \\
u_3 = - 5{,}325\,595 + 2{,}239\,239\, i \;+ \\
u_4 = + 1{,}199\,661 + 5{,}433\,100\, i \;+ \\
u_5 = + 8{,}251\,862 \;+ \\
\hline
\quad = - 0{,}000\,006
\end{array}$$

Anmerkung: Da sich die vollständige Gleichung 5. Grades mittelst einer Methode, welche der englische Mathematiker Jerrard angegeben hat (vgl. Serret, Cours d'Algèbre Supérieure. 2. Aufl. Paris 1854. S. 462. Note 5), auf eine der vier Formen

$$\begin{aligned}
x^5 + p_1 x \;\; + q_1 &= 0 \\
x^5 + p_2 x^2 + q_2 &= 0 \\
x^5 + p_3 x^3 + q_3 &= 0 \\
x^5 + p_4 x^4 + q_4 &= 0
\end{aligned}$$

zurückführen lässt, so sind die für die Auflösung trinomischer Gleichungen gegebenen Reihen auch bei der Auflösung der vollständigen Gleichung 5. Grades zu gebrauchen.