Ueber Decimalbrüche

die aus gewöhnlichen Brüchen abgeleitet sind.

Da das allgemeine Interesse für Decimalbrüche, welches durch die grosse praktische Anwendbarkeit derselben erweckt wird, auch bei gebildeten Nichtmathematikern oft die Wissbegierde nach der blossen Theorie erregt, so war es mein Wunsch, die Eigenschaften der Decimalbruchperioden hier so zu entwickeln, dass kaum die einfachsten Grundbegriffe der Buchstabenrechnung zum Verständniss, wenigstens der Hauptsachen, erforderlich seien. Es ist also das Ganze für Schüler und solche Laien geschrieben, die an einem Nachdenken Gefallen finden, wie es durch mathematische Betrachtungen in Anspruch genommen wird, und welches man sich bekanntlich durch die kleine Mühe des schriftlichen Nachrechnens sehr erleichtern kann. Da ich indess nicht bloss in andern Schriften Gelesenes hier zusammengetragen habe, so darf ich hoffen, dass auch der Mathematiker von Fach, der ja schnell über das ihm Bekannte hinweg gehen kann, hier und da vielleicht durch die ihm neue Art der Auffassung und Entwicklung einige Unterhaltung findet.

Ich habe den Stoff in drei Abschnitte vertheilt. Im ersten ist von den drei Formen eines aus gewöhnlichem Bruche entstandnen Decimalbruchs und von seiner Zurückführung auf den gewöhnlichen Bruch die Rede, auch werden die kleinsten Nenner angegeben, die auf Perioden von ein bis zwölf Stellen führen; der zweite Abschnitt behandelt die Eigenschaften der Perioden und Reste vorzugsweise für einfache Nenner, der dritte betrachtet die Perioden für Nenner, die aus Faktore bestehen.

Erster Abschnitt.

Man verwandelt einen gewöhnlichen Bruch, z. B. $\frac{47}{104}$ bekanntlich dadurch in einen Decimalbruch, dass man die gegebnen 47 Ganze zu 470 Zehntel macht und diese durch 104 dividirt; man erhält so den Quotient 4 Zehntel (also 0, 4) und den Rest 54 Zehntel, welcher zu 540 Hundertel gemacht und wieder durch 104 dividirt den Quotient 5 und Rest 20 Hundertel giebt, so dass $\frac{47}{104} = 0{,}45\ldots$ ist u. s. w. Mit andern Worten: man multiplicirt die 47 wiederholt mit 10, und zwar so viel mal, als wie viele Decimalen man zu haben wünscht.

Will man also den Bruchwerth bis zu den Tausendteln, d. i. bis zur 3ten Decimale genau, so muss man seinem Zähler nach und nach 3 Faktoren 10 zufügen; will man aber den Bruchwerth ganz genau, so hat man die Division fortzusetzen bis sie aufgeht, oder bis man einen Rest erhält, der vorher schon da war. Das obige Beispiel giebt:

$$\frac{47}{104} = 47{,}0 : 104 = 0{,}451923076$$

$$\begin{array}{rr}
\underline{416} & \\
\underline{540} & \\
\underline{520} & \\
200 & \\
\underline{104} & \\
{}^{*})\ 960 & \\
\underline{936} & \\
240 & \\
\underline{208} & \\
320 & \\
 & 320 \\
 & \underline{312} \\
 & 800 \\
 & \underline{728} \\
 & 720 \\
 & \underline{624} \\
 & 96
\end{array}$$

Da dieser letzte Rest 96 an der mit * bezeichneten Stelle schon da war, so wiederholen sich von hier an die Quotientziffern 923076 unaufhörlich. Man nennt diese Ziffergruppe daher Periode und bezeichnet sie so: (923076)..., so dass man hat $\frac{47}{104} = 0{,}451(923076)\ldots$

Die einfachsten und daher am häufigsten vorkommenden Fälle sind für Brüche mit aufgehender Division:

$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \frac{1}{8} = 0{,}125 \quad \frac{1}{5} = 0{,}2$;

mit nicht aufgehender Division:

$\frac{1}{9} = 0{,}1111\,.. = 0,(1)\,\ldots$, also $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = 0{,}3333\,.. = 0,(3)\,..$

$\frac{2}{3} = 0,(6)\ldots \quad \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots = 0{,}1(6)\ldots$

Man kann auch so schreiben:

$\frac{1}{3} = 0{,}3\frac{1}{3} = 0{,}33\frac{1}{3}$; ebenso $\frac{1}{6} = 0{,}16\frac{2}{3} = 0{,}166\frac{2}{3}$ u. s. w.

Alle gewöhnlichen Brüche zerfallen somit in drei Arten, nämlich in solche, bei denen

1) die Division aufgeht: diess ist dann der Fall, wenn der Nenner nur aus Faktoren 2 oder 5 besteht, und zwar liefern n Faktoren 2 oder 5 (2×5 ist als ein Faktor zu rechnen) auch n Decimalen;
2) die Periode von vorn, d. h. gleich nach dem Einerzeichen anfängt: wenn der Nenner weder 2 noch 5 als Faktor hat;
3) der Periode eine oder mehr nichtperiodische Stellen vorangehen: wenn der Nenner einen oder mehr Faktoren 2 oder 5 nebst andern Faktoren enthält.

Von der Richtigkeit dieser Gesetze überzeugt man sich leicht folgenderweise.

Besteht erstens der Nenner b des Bruchs a/b nur aus Faktoren 2, etwa aus 4 Faktoren 2, ist also 2.2.2.2 d. h. 16, und man multiplicirt den Zähler a auch 4 mal mit 10, d. h. man macht a zu Zehntausendteln, so geht die Division auf, weil die 4 Nennerfaktoren 2 in den 4 Zählerfaktoren 10 enthalten sind. Die 16tel erstrecken sich als Decimalbruch bis zu den Zehntausendteln. Gleiches gilt von jeder beliebigen Anzahl solcher Faktoren 2, und ebenso von Faktoren 5; ein Doppelfaktor 2×5 im Nenner b verursacht natürlich nur eine Decimalstelle.

Ist zweitens Nenner b frei von Faktoren 2 oder 5, endet also auf eine der 4 Ziffern 1, 3, 7 oder 9, so muss eine Periode entstehn die von vorn anfängt, d. h. der ursprüngliche Zähler a muss als Rest beim Dividiren früher als jeder andre Rest wieder kommen. Es lässt sich nämlich in diesem Falle rückwärts dividiren, so dass irgend ein Rest nicht nur die folgenden Ziffern des Quotienten liefert, sondern auch die vorhergehenden bedingt. Um sich hiervon zu überzeugen bemerke man zuerst dieses: wird eine auf 1, 3, 7 oder 9 endende Zahl nach der Reihe mit 0, 1, 2, 3 bis 9 multiplicirt, so enden diese Produkte jedesmal mit anderer Ziffer, nämlich

für 1 mit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
für 3 mit 0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7

für 7 mit 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3

für 9 mit 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Sei nun z. B. für den Nenner 407 ein beliebiger Rest 246 gegeben (welcher bei fernerem Dividiren die Quotientziffer $2460 : 407 = 6$ liefert), so würde man die vorherige Quotientziffer durch folgende Schlüsse finden. Der Rest 246 konnte nur bleiben indem man eine auf 4 endende Zahl vom vorigen Reste, dem man eine Null zufügte, abzog. Die vorige Quotientziffer musste also 2 sein, denn n u r 2 ist die Ziffer, mit welcher 407 multiplicirt eine auf 4 endende Zahl nämlich 814 giebt, und somit war der vorige Dividend $246 + 814 = 1060$, der vorige Rest also 106*).

Ein derartiger Rückschluss ist bei allen auf 1, 3, 7 oder 9 endenden Nennern unzweideutig, eine bestimmte Schlussziffer verlangt eine bestimmte vorherige, auch weiss man, dass der Nenner b vorhin derselbe war, dass er sich nicht kürzen liess. Denn weil der ursprüngliche Bruch a/b offenbar als unkürzbar zu denken ist, zu a aber nur Faktoren 10 hinzutreten, so bleibt b, welches hier weder 2 noch 5 enthalten soll, im Laufe der Division dieselbe Zahl. Damit ist aber bewiesen, dass ein solcher Nenner eine r e i n e Periode liefern muss, weil der Anfangsziffer einer Periode keine andre als die Schlussziffer der Periode vorangehen könnte.

Enthält der Nenner b endlich drittens ausser andern Faktoren auch noch Faktoren 2 oder 5, so heben sich diese nach und nach. So konnte man in dem früheren Beispiele $\frac{47}{104}$ den ersten Rest 54 mit 2, den zweiten 20 mit 4, den dritten 96 mit 8 gegen den Nenner 104 kürzen, die Quotientziffern wären genau dieselben geblieben, und der dann noch übrige Bruch $\frac{12}{13}$ $(= \frac{96}{104})$ hätte die nun beginnende reine Periode 923076 geliefert. Gleiches gilt von Nennern mit Fak-

---

*) Anmerkg. Die Rechnung stellt sich etwa so dar:

$$\begin{array}{rrl}
\text{Gegebner Rest:} & 246 & \\
& +\ \underline{814} & = 407.2 \\
\text{voriger Rest:} & 1060 & \\
& \underline{814} & = 407.2 \\
& 920 & \\
& \underline{1628} & = 407.4 \\
& 1720 & \\
& \underline{1628} & = 407.4 \\
& 1800 & \\
& \underline{000} & = 407.0 \\
& 180 & \\
& \underline{2442} & = 407.6 \\
& 2460 &
\end{array}$$

von hier an wiederholen sich die rückwärts gefundenen Quotientziffern 224406, und es ist somit $^{246}/_{407} = 0, (604422) \ldots$

toren 5, sonst von keinem andern Faktor, da eben nur 2 und 5 in den zum Zähler a hinzutretenden Faktoren 10 enthalten sind. Man erhält folglich vor der Periode soviel nichtperiodische Stellen oder Vorziffern als im Nenner Faktoren 2 oder 5 vorkommen. Die oben aufgestellten 3 Gesetze sind hiermit erklärt.

Ist umgekehrt ein periodischer Decimalbruch gegeben, so lässt sich dieser auf den gewöhnlichen Bruch durch folgende Betrachtungen zurückführen.

Die einfachen Brüche $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$ ... geben eine einfache 1, 2, 3, ... stellige Periode, denn man findet

$$\tfrac{1}{9} = 0,111 \ldots \qquad \tfrac{1}{99} = 0,010101 \ldots \qquad \tfrac{1}{999} = 0,001001001 \ldots$$

Hieraus folgt dass z. B. mehrere 99stel, etwa 45 99stel d. i. $45 \times \frac{1}{99}$ die zweistellige Periode $45 \times 0,010101 \ldots = 0,454545 \ldots$ geben, dass also überhaupt jede zweistellige reine Periode 99stel, jede dreistellige 999stel bezeichnet und so fort. Daher die Regel:

1) Ein p stelliger rein periodischer Decimalbruch ist gleich einem gewöhnlichen Bruche, dessen Zähler die gegebne Periode ist und dessen Nenner aus p Neunen besteht.

Es ist z. B. $0,(37) \ldots = \frac{37}{99}$ $\quad 0,(052) \ldots = \frac{52}{999}$ $\quad 0,(1287) \ldots = \frac{1287}{9999}$, gekürzt mit 99 giebt $\frac{13}{101}$.

Kommen zu den Nennern der einfachen Brüche $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$ etc. noch Nullen hinzu, so wird die Periode um ebenso viel Stellen verschoben, es ist:

$$\tfrac{1}{90} = 0,0111 \ldots \qquad \tfrac{1}{900} = 0,00111 \ldots \qquad \tfrac{1}{9000} = 0,00011 \ldots,$$

ebenso $\frac{1}{990} = 0,0|0101 \ldots$ $\quad \frac{1}{99900} = 0,00|001001 \ldots$ u. s. w.

Hieraus folgt dass mehrere 99900stel, etwa $\frac{32407}{99900}$ oder $32407 \times \frac{1}{99900}$ den Bruch $32407 \times 0,00|001001 \ldots$ geben. Führt man diese Multiplikation aus, also:

$$\begin{array}{l} 32407 \times 0,00|001001 \ldots \\ \hline = \quad 32407 \\ \qquad\quad 32407 \\ \qquad\qquad 32407 \\ \qquad\qquad\quad \ldots\ldots \end{array}$$

so sieht man sogleich, dass die eigentlich 5stellige Periode 32407 sich zu einer nur 3stelligen zusammenschiebt, wodurch die übrigen 2 ersten Ziffern zu Vorziffern werden. Die Addition ergiebt das Resultat

$$\tfrac{32407}{99900} = 0,32439439 \ldots = 0,32(439) \ldots$$

Lässt man aber bei der Addition die oberste Zeile 32407, welches die wahre Periode ist, hinweg, so liefern die übrigen Zeilen ganz dasselbe nur um 3 Stellen verschobne Resultat, nämlich 0,00032(439). Folglich muss umgekehrt die wahre Periode übrig bleiben, wenn man letzteren Werth vom Gesammtwerthe 0,32(439) ... hinwegnimmt, wobei nur die ersten 5 Ziffern in Betracht kommen, denn die übrigen sind bei beiden Werthen dieselben; man erhält die Ziffern 32407 durch Subtraktion von 0,32439 — 0,00032.

Ebenso giebt $\frac{7284}{9000} = 7284 + \frac{1}{9000}$

$$= 7284 \times 0{,}00011 \ldots .$$

$$\begin{array}{l} \quad 7284 \\ \quad\; 7284 \\ \quad\;\; 7284 \\ \quad\;\;\; \ldots . \end{array}$$

d. i. eine 4stellige Periode, die sich zu einer 1stelligen zusammenschiebt mit 3 Vorziffern.

Die Addition ergiebt hier $\frac{7284}{9000} = 0{,}809(3) \ldots$, und umgekehrt ist $0{,}809(3) \ldots - 0{,}0809(3) \ldots$, oder kürzer $0{,}8093 - 0{,}0809 = 7284$ die wahre Periode.

Der aus Neunen mit Nullen bestehende gewöhnliche Nenner giebt also so viel Periodenstellen als er Neunen, und so viel Vorziffern als er Nullen hat.

Daher die allgemeine Regel:

2) Eine p stellige Periode mit n Vorziffern ist eine um n Stellen zusammengeschobne $n + p$ stellige Periode, deren wahren Werth man erhält, wenn man die n Vorziffern von den $n + p$ Ziffern abzieht. Der Decimalbruch ist also einem gewöhnlichen Bruche gleich, dessen Zähler aus der wahren Periode, und dessen Nenner aus p Neunen mit n Nullen besteht.

$$\text{Z. B. } 0{,}73(148) \ldots = \frac{73148 - 73}{99900} = \frac{73075}{99900} \text{ d. i. } = \frac{79}{108}$$

$$0{,}037(09) \ldots = \frac{3709 - 37}{99000} = \frac{3672}{99000} \text{ d. i. } = \frac{51}{1375}$$

Der einfachste Fall ist: $\frac{1}{6} = 0{,}1(6) \ldots$ welcher die zusammengeschobne Periode 15 giebt, also den gew. Bruch: $\frac{15}{90}$. —

Zu einem Nenner wie 99900 können nun alle Zahlen von 1 bis 99899 als Zähler treten, so wird der entwickelte Decimalbruch eine 3stellige Periode mit vorausgehenden 2 Ziffern sein. Es gehören jedoch unter diese vielen Brüche nicht wenige solche, deren Zähler sich gegen 99900 kürzen lassen, und die dann oft nicht eigentlich 3stell. Per. mit 2 Vorziffern liefern, wohl aber stets in dieser Weise geschrieben werden können, wie z. B.

$\frac{1}{37} = 0{,}(027) \ldots = 0{,}02(702) \ldots$; $\frac{5}{18} = 0{,}2(7) \ldots = 0{,}27(777) \ldots .$

auch $\frac{3}{4} = 0{,}75$ lässt sich schreiben: $0{,}75(000) \ldots .$

Wenn nun auch alle Nenner, die durch Zusammensetzung beliebiger der Faktoren von 99900, nämlich 3.3.3.37.2.5.2.5, sich bilden lassen, zu Brüchen führen, die 3stell. Perioden mit 2 Vorziffern haben, oder in dieser Form geschrieben werden können, weil solche Nenner eben unter den 99900steln mit inbegriffen sind, so sind doch diesem Systeme ausschliesslich angehörig nur die Nenner, aus denen kein Nenner mit weniger als 3 Neunen und 2 Nullen gewonnen werden kann. Da nun hierzu einerseits $3.3.3 = 27$, oder statt dessen auch 37, andrerseits 2.2 oder 5.5 erforderlich ist, so sind die kleinsten solcher Nenner diese: $27.4 = 108$, $37.4 = 148$ $27.25 = 675$ und $37.25 = 925$. Als Zähler dazu darf natürlich keine Zahl genommen werden, die mit dem Nenner einen Faktor gemeinsam hat, sonst jede beliebige, z. B. zu 675 kein Zähler mit dem Faktor 3 oder 5, sondern etwa $\frac{404}{675} = 0{,}59(851)\ldots.$

Will man also die kleinsten Nenner wissen, welche 1stell., 2stell., 3stell. Perioden u. s. w. geben, so braucht man nur die Zahlen 9,99,999,... die ich kurz mit 9_1, 9_2, 9_3,.... bezeichnen will, in ihre Faktoren zu zerlegen. Man findet:

$9_1, = 9 = {\scriptstyle 3.}\,3$ $\qquad 9_2 = {\scriptstyle 9.}11$ $\qquad 9_3 = 27.37$

$9_4 = {\scriptstyle 9.11.}101$ $\qquad 9_5 = {\scriptstyle 9.}41.271$ $\qquad 9_6 = {\scriptstyle 27.11.37.}7.13$

$9_7 = {\scriptstyle 9.}\,239.4649$ $\qquad 9_8 = {\scriptstyle 9.11.101.}73.137$

$9_9 = 81.{\scriptstyle 37.}333667$ $\qquad 9_{10} = {\scriptstyle 9.11.41.271.}9091$

$9_{11} = {\scriptstyle 9.}11111111111$*) $\qquad 9_{12} = {\scriptstyle 27.7.11.13.37.101.}9901.$

Die grossgedruckten Faktoren gehören dem durch den Index der links stehenden 9 bezeichneten Systeme ausschliesslich an, die kleingedruckten, den einfacheren früheren Systemen zugehörig, vermehren durch ihr Hinzutreten zu jenen die Stellenzahl der Periode nicht. So geben alle 7tel und alle 13tel für sich 6stellige Perioden; ebenso die $7.11 = 77$stel, oder $9.13 = 117$tel, oder auch die $7.13 = 91$stel u. s. w. Aber auch eine Zusammenstellung kleingedrukter Faktoren liefert keine geringere Periode als es der Index verlangt, sobald nicht die ganze Zusammenstellung bereits vorher da war. Es werden sonach die Perioden ebenfalls

6stell. für 11.27 und 11.37, 10stellig für 11.41 und 11.271,

12stellig für 101.27 oder 101.7 oder 101.13 oder 101.37.

Jeder hinzugefügte Faktor 2 oder 5 verursacht zu der betreffenden Periode eine Vorziffer.

Anmerkung. Man bemerke, dass ein Faktor 9 die Stellenzahl der Periode nicht vermehrt, wohl aber jeder neu hinzutretende Faktor 3.

*) Diess scheint eine Primzahl zu sein.

Zweiter Abschnitt.

Es entsteht nun die Frage, welche Eigenschaften die Perioden für einen gegebnen Nenner a haben.

Entwickelt man einen einfachen Bruch $1/a$, dessen Nenner eine Primzahl ist, z. B. $\frac{1}{7}$ in Periodenform:

$$\tfrac{1}{7} = 1{,}0 : 7 = 0{,}142857142857\,.$$

$$\begin{array}{rr}
7 & \\
\hline
30 & 40 \\
28 & 35 \\
\hline
20 & 50 \\
14 & 49 \\
\hline
60 & 10 \\
56 & \ldots \\
\hline
40 &
\end{array}$$

so erkennt man sofort, dass aus der Periode 142857 für ein 7tel sich die für die übrigen 7tel ablesen lassen, nämlich für 2 : 285714, für 3 : 428571 u. s. w.; die übrigen 7tel haben dieselbe Zifferreihe als Periode, nur ist mit andrer Ziffer anzufangen. Ebenso wird, wenn man die Reste über die Quotientziffern notirt:

$$\tfrac{1}{17} = 0{,}(\overset{1}{0}\;\overset{10}{5}\;\overset{15}{8}\;\overset{14}{8}\;\overset{4}{2}\;\overset{6}{3}\;\overset{9}{5}\;\overset{5}{2}\;\overset{16}{9}\;\overset{7}{4}\;\overset{2}{1}\;\overset{3}{1}\;\overset{13}{7}\;\overset{11}{6}\;\overset{8}{4}\;\overset{12}{7})\ldots.$$

woraus man die Periode für $\frac{5}{17}$ ablesen kann, wenn man mit der unter 5 stehenden Ziffer anfängt, nämlich $\frac{5}{17} = 0{,}(2941176470588235)\ldots$ u. s. w.

Nicht so verhält es sich mit andern einfachen Brüchen, wie mit

$$\tfrac{1}{13} = 0{,}(\overset{1}{0}\;\overset{10}{7}\;\overset{9}{6}\;\overset{12}{9}\;\overset{3}{2}\;\overset{4}{3})\ldots \quad \text{und} \quad \tfrac{2}{13} = 0{,}(\overset{2}{1}\;\overset{7}{5}\;\overset{5}{3}\;\overset{11}{8}\;\overset{6}{4}\;\overset{8}{6})\ldots.,$$

so dass also aus der Periode für $\frac{1}{13}$ sich nicht die für alle übrigen 13tel ablesen lassen, sondern sich 2 Gruppen bilden, deren jede diejenige Hälfte aller 13tel umfasst, welche der andern fehlen.

Da man statt 1,000 .... auch schreiben kann 0,999 .... oder $9 \times 0{,}111\ldots.$, so würde man die Periode für $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{13}$ auch erhalten haben, wenn man mit 7 oder 13 in 999999 d. i. 9_6, oder auch in 111111 d. i. 1_6 dividirt und letzteren Quotient mit 9 multiplicirt hätte. Der Quotient $9_6 : 7$ giebt die Periode für $\frac{1}{7}$ selbst, während $1{,}000000 : 7$ den Rest 1 lässt, welcher die neue Periode anfängt.

Hieran knüpfen sich sofort folgende Betrachtungen.

Liefert der Bruch $1/a$ eine αstellige Periode, so kann α höchstens $= a - 1$ sein; denn wird $1{,}000\ldots$ durch a dividirt, so können nur die Zahlen $2,3,4\ldots$ bis $a-1$ als Reste (in veränderter Reihenfolge) bleiben, dann spätestens muss der Rest 1 wieder kommen, die Periode schliesst sich, sie besteht aus höchstens $a-1$ Quotientziffern. Es ist diess dann der Fall, wenn a in keiner kleineren Zahl als in 9_{a-1} aufgeht. Die Periode für $1/a$ enthält hierbei alle $a-1$ Brüche $1/a$, $2/a$, $3/a$ bis $\frac{a-1}{a}$ in sich.

Geht aber a schon in einer kleineren Zahl 9_α auf, so muss α ein aliquoter Theil von $a-1$, der $m$te Theil von $a-1$ sein. Dann zerfallen nämlich alle $a$tel in m Gruppen, deren jede ihre eigne αstellige Periode hat. Die Periode jeder Gruppe ist ein Vielfaches der primären Periode, es ist Periode für z/a das $z$fache der Periode für $1/a$, einfach weil $z/a = z \times 1/a$ ist. Es kann also keine Gruppe mehr oder weniger Stellen als die andre haben, (wofür der Grund auch darin liegt, dass a in 9_α aufgeht, so dass jeder Bruch mit Nenner a auf Nenner 9_α gebracht werden kann,) und da jede Periode bei andrer Ziffer angefangen stets andern Bruch repräsentirt, kein Bruch aber mehr als einer Gruppe angehören kann, so müssen sich alle $a-1$ $a$tel in die m Gruppen vertheilen, es muss α aliquoter Theil von $a-1$ sein.

Jede Periode, nicht nur die erste von jeder der m Gruppen, ist Vielfaches der primären Periode für $1/a$. Da nun diese durch Division von 9_α durch a gewonnen wird, also $9_\alpha : a$ geschrieben werden kann, so muss jeder in 9_α enthaltne Faktor in der Periode aufgehn, ausgenommen a selbst. Folglich ist durch 9 eine jede Periode theilbar; ferner durch 11 die Perioden mit gerader Stellenzahl, ferner durch 27 oder 37 die Perioden deren Stellenzahl α durch 3 theilbar ist u. s. w., wie man an den (oben p. 9) angegebnen Faktoren von 9_α sieht: denn den Faktor 9 enthält jede Angabe, den Faktor 11 die 2te, 4te, 6te ..., den Faktor 27.37 die 3te, 6te, 9te, ... Angabe. Ausgenommen aber sind bei diesen drei Fällen die Per. der Brüche 9tel, 11tel und 27stel oder 37stel selbst, so jedoch, dass die Periode der 37stel zwar nicht mehr durch 37, aber noch durch 27 theilbar ist, sowie die der 27stel noch durch 37.

Es zerfallen z. B. alle 37stel in zwölf 3stellige Gruppen, deren primäre Periode $\frac{1}{37} = 0{,}(027)\ldots$ ist, welche zugleich die Brüche $\frac{10}{37} = 0{,}(270)\ldots$ und $\frac{26}{37} = 0{,}(702)$

enthält. Die 5fache Periode giebt die Gruppe $\frac{5}{37} = 0,(135)\,..,\ \frac{50}{37} = 1,(351)\,..$ oder $1\frac{13}{37}$, $^{130}/_{37} = 3,(513)\,....$ oder $3\frac{19}{37}$; die Zähler in der primären Gruppe sind also 1,10,26, in der abgeleiteten 5,13,19. Jede dieser Perioden ist eine Zahl, die sich durch 27 theilen lässt. —

Ist in der primären Periode der 1ste Rest r und somit $r$mal so gross als der anfängliche Zähler oder Dividend 1, so muss der 2te Quotient und Rest auch $r$mal so gross als der erste sein, überhaupt jeder Rest und Quotient $r$mal so gross als der vorige, der ganze entwickelte Decimalbruch von einer beliebigen Stelle angefangen $r$mal so gross als von der vorigen Stelle angefangen. Obschon man diess den Zahlen nicht sofort ansieht, weil diese in einander greifen, indem man 10 Einer zu 1 Zehner macht und die Reste nicht beibehält, sondern um den Divisor vermindert so oft es geht, so ist diess Gesetz doch ein allgemeines, für einen jeden Bruch gültiges. Z. B. bei der Periode für $\frac{1}{7}$, wo der 1ste Rest 3 war, ist die von der 5ten Quotientziffer angefangene Reihe 57142857 .... 3mal genommen = 1|71428571 d. i. gleich der von der 6ten Ziffer angefangenen. Bei einfachen Beispielen ist diess Gesetz leicht ersichtlich zu machen, so bei

```
1/8 = 1,0 : 8 = 0,1248624862486 ... = 0, 125;
       8             136251249 ...
      ---              125000 ...
       20                 124 ...
       16
      ---
        40
        32
       ---
         80                          ebenso bei
         64
        ---               3/8 = 3,0 : 8 = 0,36248624 ..
         160                    24              124998 ..
         128                   ---                  13 ..
        ----                    60
          320                   48       = 0,375
          256                  ---
         ----                   120
           640 u. s. w.          ...
```

(im Quotienten bilden die schräg von links unten nach rechts oben stehenden Ziffern die zusammengehörige Zahl, z. B. im Quotient für $\frac{1}{8}$ ist die erste 1 unten und die 6 oben eine 16, d. i. das Doppelte der vorigen 8.)

Allgemeiner: wenn bei Entwicklung von $^1/_a$ nach der $n$ten Division der Rest ϱ bleibt, so ist der Rest nach der $2n$ten $\varrho.\varrho = \varrho^2$, nach der $3n$ten $\varrho.\varrho.\varrho = \varrho^3$ u. s. w.; überhaupt folgt auf irgend welchen Rest n Stellen weiter der ϱmal so grosse Rest (nur hat man zu berücksichtigen, dass Nenner a so oft es ging abgezogen wurde), und diess Gesetz gilt nicht nur für die Reste in der primären Periode, sondern auch in den Nebenperioden, da diese Vielfache jener sind.

Weil also z. B. in der Periode für $\frac{1}{17}$ (p. 10) der 5te Rest oder die auf die anfangs überschriebne 1 folgende 5te Ziffer 6 ist, so ist 5 Stellen weiter der Rest 6.6 d. i. 36 — 2.17 = 2, wieder 5 Stellen weiter der Rest 6.2 = 12 zu finden. Ebenso weil 3 der 4te Rest in Periode $\frac{1}{13}$ ist, so findet sich 4 Stellen weiter (man muss sich natürlich beim Abzählen die Periode fortgesetzt denken, also immer wieder vorn anfangen) der Rest 9, wieder 4 Stellen weiter 27 — 2.13 = 1; aber auch in der Nebenperiode $\frac{2}{13}$ ist der 4 Stellen auf 7 folgende Rest 21 — 13 = 8.

Nicht selten kann man das hier in Rede stehende Gesetz benutzen, um den Decimalbruch für $1/a$ schnell zu finden, wenn nämlich der nach n berechneten Decimalen erhaltene Rest ϱ klein ist. Man schliesst, dass von hier an der ganze Decimalbruch ϱmal so gross als von vorn herein sein muss, dass also die folgenden n Stellen ϱmal so gross als die ersten, die 3ten n Stellen ϱmal so gross als die 2ten sein müssen u. s. w. Z. B. für $\frac{1}{19}$ erhält man die 5 ersten Stellen 05263 mit dem Reste 3; daher müssen die nächsten 5 Stellen 05263 $\times$ 3 = 15789 u. s. w. sein und man hat:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{19} = 0{,}05263 \text{ (diess} \times 3 =) \\
\qquad\qquad\qquad 15789 \text{ (diess} \times 3 =) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 47367 \text{ (diess} \times 3 =) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1421\,01 \text{ (diess} \times 3 =) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 426303 \\
\hline
\quad = 0{,}052631578947368421|05263 \ldots.
\end{array}$$

Man konnte auch die 10 ersten Stellen 3,3 = 9mal nehmen um die nächsten 10 Stellen zu finden. Auch bemerke man, dass der 6te Rest 30 so viel als 30 — 19 = 11, daher der 12te Rest 11.11 = 121 so viel als 7, der 18te 11.7 = 77 so viel als 1 ist, dass sich somit die Periode nach 18 Stellen beim Striche schliesst.

Nimmt man eine Quotientziffer um 1 zu gross, so erhält man einen negativen Rest. Statt zu sagen: 11 ist 3mal in 40 enthalten mit Rest 7, kann man sagen: es ist 4mal enthalten mit Rest — 4. Die Reste 7 und — 4, ebenso 8 und — 3 u. s. w. sind für den Divisor 11 die Reste von ein und derselben Zahl. Beim Dividiren mit a kann man also für die Reste $a-1$, $a-2$, $a-3$, ... kurz $-1, -2, -3$, ... setzen, kann mit den negativen Resten weiter rechnen und erhält negative Quotientziffern, die an sich dieselben Zahlen sind, welche sie bei positiven Resten sein würden.

Ist die Periode für $1/a$ $a-1$stellig, umfasst sie also alle $a$tel, so muss beim Dividiren auch der Rest $a-1$ oder -1 vorkommen. Dieser muss in der Mitte der Periode als $\frac{a-1}{2}$ter Rest stehen, denn es müssen auf ihn dieselben Quotientziffern negativ folgen, die auf den 1sten Zähler 1 positiv folgten. Man kann somit die 2te Periodenhälfte als negative 1ste Hälfte schreiben, wenn man deren Schlussziffer um

1 erhöht, damit eben in der Mitte -1 statt $a-1$ als Rest bleibt; so hat man z. B. die Periode für $\frac{1}{7}$ nämlich: $142857 = 143000 - 143$.

Dasselbe Gesetz kann man mit andern Worten so ausdrücken: die Ziffern der 2ten Hälfte 857 ergänzen die der ersten 142 zu Neunen.

Der Rest -1 kommt aber nicht nur bei Perioden vor die alle Bruchtheile umfassen, sondern überhaupt bei jeder geradstelligen primären Periode in der Mitte, wie folgende allgemeinere Betrachtung zeigt.

Ist die Periode für $1/a$ in gleiche Abtheilungen, etwa in fünf mit je α Ziffern, zerlegbar, besteht sie also aus $5.\alpha$ Stellen, so ist kein früherer als der 5αte Rest 1. Wenn nun der αte Rest r ist, so wird der 2αte Rest r^2, der 3αte r^3 u. s. w., von denen man den Nenner a so oft es geht abzuziehen hat. Der 5αte d. h. hier Schlussrest r^5 muss also eine Zahl sein von welcher 1 übrig bleibt, wenn man a mehrmals davon abzieht, folglich muss umgekehrt r^5-1 eine durch a theilbare Zahl sein. Nun lehrt die Buchstabenrechnung, dass r^5-1 in die beiden Faktoren $(r^4+r^3+r^2+r+1)\times(r-1)$*) zerfällt, von denen der letztere $r-1$ durch a nicht theilbar ist, weil a Primzahl und grösser als r ist, daher muss der erstere $r^4+r^3+r^2+r+1$ durch a theilbar sein. Dieser Ausdruck bedeutet nichts anderes als die Summe der Schlussreste von den Abtheilungen, zu denen der ursprüngliche Zähler 1 als 0ter Rest gehört. Dieselben Schlüsse kann man für jede Anzahl Abtheilungen machen und hat somit das Gesetz:

Giebt der Bruch $1/a$ eine $m.\alpha$stellige Periode, so ist die Summe des 0ten, αten, 2αten bis $(m-1)\,\alpha$ten Restes durch a theilbar. Dasselbe gilt von der Summe der hierauf folgenden 1sten, $\alpha+1$sten, $2\alpha+1$sten u. s. w. Reste, sowie von den entsprechenden Resten der Nebenperioden, da sie gleiche Vielfache jener Hauptreste sind.

So ist z. B. bei der 3stell. Periode von $\frac{4}{37}$ der 0te, 1ste und 2te Rest: 4, 3 und 30, zusammen 37; bei $\frac{1}{19}$ war der 0te, 6te und 12te Rest: 1, 11 und 7, zusammen 19. Ebenso sind sämmtliche Reste bei $\frac{2}{13}$ nämlich $2+7+5+11+6+8=39=3.13$. Enthält die Periode für $1/a$ alle $a$tel, also alle Zahlen von 1 bis $a-1$ als Reste, so ist die Summe derselben $=\frac{1}{2}\,(a-1).\,a$.

Bei jeder geradstelligen Periode, wo man 2 Abtheilungen hat (auch wenn man diese wieder theilen könnte), vereinfacht sich obige Summe $r^4+r^3+\ldots$

*) Die Reihe $r^4+r^3+r^2+r+1$ giebt, $r-1$mal genommen, r^5-1.

auf $r+1$. Diess kann also nur a selbst sein, d. h. der Mittelrest r ist $a-1$ oder kurz -1. Für eine Nebenperiode z/a wird folglich der 0te und αte Rest z und $-z$.

Bei einer in 3 Abtheil. zerlegbaren oder 3αstelligen Periode wird r^2+r+1 durch a theilbar, also ebenfalls a selbst, da jeder der beiden Reste r^2 und r kleiner als a ist und folglich r^2+r+1 noch nicht $2a$ sein kann. Der Rest -1 hat sich auf die Summe r^2+r vertheilt, -1 selbst kommt als Rest in der primären Periode (sie müsste denn zugleich geradstellig sein) überhaupt nicht vor. Für die Nebenperiode ist $r^2+r=-z$.

Keine ungeradstellige primäre Periode kann den Rest -1 haben; folglich muss es dazu wenigstens eine Nebenperiode für $-1/a$ (oder $\frac{a-1}{a}$) geben, mit gleichen jedoch negativen Ziffern und Resten, die also zur primären addirt, Null liefert (oder a, wenn $\frac{a-1}{a}$ statt $-1/a$ genommen wird). Giebt es überdiess eine Nebenperiode z/a, deren Zähler z und zugehörigen Reste also verschieden von denen bei $1/a$ sind, weil sonst eine Periode in die andre übergehn müsste, so giebt es auch hierzu die Ergänzungsperiode $-z/a$ oder $\frac{a-z}{a}$. Ungeradstellige Perioden zerfallen in je 2 Ergänzungsgruppen, geradstellige ergänzen sich selbst von der Mitte an, und können eine ungerade Anzahl Gruppen liefern, wie z. B. die 8stelligen Perioden der 73stel 9 Gruppen bilden.

Weil die Summe des 0ten, αten bis $(m-1)\alpha$ten Restes a, oder $2a$, oder $3a$ u. s. w. ist, so sind auch die bei diesen Stellen angefangenen Decimalbrüche zusammengerechnet 1 oder 2 oder mehr Ganze. Man erhält folglich, wenn eine Periode von der 0ten, αten, 2αten .... Ziffer angefangen unter einander geschrieben und addirt wird, lauter Neunen mit 0, oder 1 oder mehr Ganzen z. B.

Per. für $\frac{3}{7}$ von der		Per. für $\frac{1}{19}$ von der	
0ten Stelle:	42847	0ten St:	05263 ....
3ten -	57142	6ten St:	57894 ....
	99999	12ten St:	36842 ....
			99999 ....

Schliesslich möge noch einer Eigenschaft der Perioden gedacht werden, die durch die gewöhnlichen Brüche, aus denen die Perioden entstanden, sich leicht erklären lässt. Jede Periode behält im Allgemeinen ihre Stellenzahl, wenn man eine beliebige andre, jedoch gleichvielstellige hinzu addirt. Z. B. eine 4stellige zu einer andern 4stelligen addirt, giebt wieder 4stellige Periode: 9999stel zu 9999steln addirt giebt 9999stel. Dabei kann man die eine Periode um 1,2,... Stellen verschieben, so entstehen 1,2, ... Vorziffern: man hat hierbei etwa 999900tel zu 9999teln addirt und damit 999900tel erhalten. Wollte man jedoch eine 6stellige und eine 9stellige Per. addiren, so bekäme man eine 18stellige, denn erst bei der 18ten Stelle fällt der Periodenschluss des einen Bruchs mit dem des andern zusammen. Offenbar ist der kleinste Dividuus (der Hauptnenner) für die gegebnen Periodenzahlen zu suchen: es geben 9_αtel zu 9_βteln addirt den Hauptnenner $9_{\alpha\beta'}$, wo β' den Faktor in β bezeichnet, der nicht schon in α enthalten war.

Gleiches gilt für Subtraktion von Perioden.

Jedoch kann hierbei gewissermaassen als Ausnahme der Fall eintreten, dass die Summen- (oder Differenz-) Periode in aliquote Theile, also in noch kleinere Perioden zerfällt, als jener Dividuus angiebt. So führen z. B. die 6stelligen Perioden $\frac{1}{21} = 0{,}047619$ und $\frac{1}{77} = 0{,}012987$ durch Addition auf die 2stellige Periode 0,060606 .., nämlich weil die Summe $\frac{1}{21} + \frac{1}{77}$ 231stel giebt, die sich auf 33stel kürzen lassen.

Ebenso behält die Periode ihre Stellenzahl, wenn man sie mit irgend welcher Zahl multiplicirt. Auch hierbei kann der Fall eintreten, dass die Produkt-Periode in kleinere Perioden zerfällt. Es geschieht diess nie, sobald der Nenner des Bruchs, welcher die gegebne Periode lieferte, eine einfache Primzahl ist, kann aber geschehn, wenn der Nenner zwei (oder mehr) Faktoren $a.b$ hat, und wenn man die Periode mit a oder mit b multiplicirt, denn man führt dadurch die Periode der abtel auf die der $b$tel oder $a$tel zurück. Diese Bemerkung möge Veranlassung geben zur näheren Betrachtung der Perioden für zusammengesetzte Nenner.

Dritter Abschnitt.

Es seien $a, b, c, \ldots$ Primfaktoren (nicht 2 oder 5, da diese nur Vorziffern geben), deren jeder für sich eine $\alpha, \beta, \gamma \ldots$.stellige Periode liefert. Es ist also α höchstens $= a - 1$, allgemeiner: $m\alpha = a - 1$, ebenso $n\beta = b - 1$, $p\gamma = c - 1 \ldots$; und es geht a in 9_α, b in 9_β, c in $9_\gamma \ldots$ auf.

Hat nun ein Nenner nur 2 Faktoren $a.b$, so kann $\beta = \alpha$ sein, d. h. b geht zugleich mit a in 9_α auf, dann hat die Periode für ab nicht mehr Stellen als für das einfache a oder b. So liefert $\frac{1}{91}$ ebenso wie $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{13}$ nur 6stellige Periode, denn 7 und 13 gehen in 9_6 (oder 1_6) auf.

Ist aber β relative Primzahl zu α, so muss die Periode $\alpha.\beta$ Stellen haben, da $a.b$ erst in $9_{\alpha\beta}$ aufgehn kann. Da z. B. 27 eine 3stellige, 101 eine 4stellige Periode giebt, so ist die Periode für $27 \times 101 = 2727$ 12stellig: denn 27 geht in 111 auf, daher nicht in 1111, auch nicht in 11111, wohl aber wieder in 111111, also überhaupt nur in 1_3, 1_6, 1_9, 1_{12}, ..., sowie 101 nur in 1_4, 1_8, 1_{12} ...., folglich 27.101 nur in 1_{12}.

Eine gleiche Betrachtung zeigt, dass, wenn β einen Faktor hat den auch α enthält, der kleinste Dividuus $\alpha.\beta'$ die Stellenzahl angiebt. Da Nenner 7 eine 6stellige, 81 eine 9stell. Periode liefert, so ist die Periode für $7.81 = 567$ 18stellig.

Sonach wird, auch wenn der Nenner 3 und mehr verschiedne Primfaktoren $a.b.c$ .... hat, die Stellenzahl seiner Periode durch den kleinsten Dividuus $\alpha\,\beta'.\gamma'$ .... bestimmt, wo γ' die Faktoren von γ bezeichnet, die weder in α noch in β' da waren u. s. w. Zu denselben Resultaten konnte man, im Anschluss an die kurz vorher entwickelten Eigenschaften, in folgender Weise gelangen. Addirt man die Brüche $1/a$ und $1/b$, so erhält man den (nicht kürzbaren) Bruch $\frac{b+a}{a.b}$, dessen Periode von derselben Art wie die des einfachen Bruchs $1/ab$ ist: folglich giebt Nenner $a.b$ eine Periode von der Art wie die durch Addition der Perioden von $1/a$ und $1/b$ entstehende. Dieselbe Vorstellung lässt sich auf mehr Brüche ausdehnen.

Es giebt $ab-1$ abtel, nämlich $\frac{1}{ab}$, $\frac{2}{ab}$, $\frac{3}{ab}$, ... bis $\frac{ab-1}{ab}$. Unter diesen Brüchen sind $a-1$ einfache $a$tel und $b-1$ einfache $b$tel enthalten, oder: von den $ab-1$ Brüchen lassen sich $a-1$ Brüche durch b und $b-1$ durch a kürzen, die übrigen sind nicht kürzbar. Die Anzahl der übrigen ist daher $ab-1$ vermindert um $a-1$ und $b-1$, wodurch man $(a-1).(b-1)$ erhält. Wird die Periode für $1/ab$ successive mit 2,3,... bis $ab-1$ multiplicirt, so reducirt sie sich $a-1$ mal auf eine αstellige, $b-1$ mal auf eine βstellige, $(a-1).(b-1)$ Perioden bleiben $\alpha.\beta'$stellig.

Die Anzahl $\alpha.\beta'$ ist höchstens $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$, denn α und β sind höchstens $a-1$ und $b-1$, die beide gerade Zahlen sind (weil a und b prim), so dass von $b-1$ mindestens der mit $a-1$ gemeinsame Faktor 2 wegfällt. Die Periode für ab hat folglich stets wenigstens eine Nebenperiode, sie kann nicht alle $(a-1)(b-1)$ unkürzbaren Brüche umfassen, weil sie nicht $(a-1)(b-1)$ sondern nur $\alpha.\beta'$stellig ist. Es entstehen mithin so viele Gruppen als wie oft $\alpha\beta'$ in $(a-1)(b-1)$ enthalten ist, also $\frac{(a-1)(b-1)}{\alpha\;.\;\beta'} = \frac{a-1}{\alpha} \cdot \frac{b-1}{\beta'}$ Gruppen. Z. B. die 118 119tel liefern in 6 Fällen 6stellige 7tel, in 16 Fällen 16stellige 17tel, die übrigen $(7-1).(17-1) = 96$ 119tel bilden $\frac{7-1}{6} \cdot \frac{17-1}{8} = 2$ Gruppen mit $6.8 = 48$stell. Perioden.

Hat der Nenner 3 Faktoren abc, so sind unter diesen $abc-1$ Brüchen enthalten:

$ab-1$ abtel, wovon $(a-1)(b-1)$ nicht kürzbar,
$ac-1$ actel, „ $(a-1)(c-1)$ „ „
$bc-1$ bctel, „ $(b-1)(c-1)$ „ „

sowie $a-1$, $b-1$ und $c-1$ einfache $a$tel, $b$tel und $c$tel. Es bleiben übrig: $abc-1$ vermindert um $(a-1)(b-1)+(a-1)(c-1)+(b-1)(c-1)+a-1+b-1+c-1$, diess giebt $(a-1)(b-1)(c-1)$*) nicht kürzbare abctel. Diese liefern $\alpha.\beta.'\gamma'$ stellige Perioden, welche in $\frac{a-1}{\alpha}\cdot\frac{b-1}{\beta'}\cdot\frac{c-1}{\gamma'}$ Gruppen zerfallen.

So weiter gehend findet man das allgemeine Gesetz: Es giebt $(a-1)(b-1)(c-1)\ldots.$ nicht kürzbare Brüche mit dem Nenner $abc\ldots.$, welche $\alpha.\beta.'\gamma'\ldots.$stellige in $\frac{a-1}{\alpha}\cdot\frac{b-1}{\beta'}\cdot\frac{c-1}{\gamma'}\ldots.$ Gruppen zerfallende Perioden liefern.

Das hierbei bewiesene, mit andern Worten so lautende Gesetz: „in der Zahlreihe von 1 bis $abc\ldots.$ giebt es $(a-1)(b-1)(c-1)\ldots.$ Zahlen die sich durch $a,b,c,\ldots$ nicht kürzen lassen", kann man sich auch in folgender Weise veranschaulichen. Man denke sich eine Reihe kleiner Felder mit den Zahlen $1,2,3,\ldots$ bis $a.b$. Man durchstreiche das je $a$te Feld, dann das je $b$te: In keinem früheren als erst im letzten abten Felde trifft der 2te Strich auf den ersten; die Striche sind über den ganzen Raum symmetrisch vertheilt, von vorn nach hinten so wie umgekehrt. Man setze die Reihe fort bis zur Zahl abc, mache sie also $c$mal so gross, so hat man c ganz gleiche Abschnitte vor sich, begrenzt von den zweigestrichnen Feldern ab, $2ab$, $3ab,\ldots.$ Man durchstreiche nun das je $c$te Feld, so trifft dieser 3te Strich mit 2 Strichen nicht früher als im letzten abcten Felde zusammen, denn keine frühere Zahl kann durch alle 3 Primfaktoren theilbar sein. Es bilden sich zwei neue Reihen zweigestrichener Grenzfelder ac, $2ac$, $3ac,\ldots.$ und bc, $2bc$, $3bc,\ldots$; das Ganze ist symmetrisch trotz der scheinbaren Unregelmässigkeit einzelner Theile. Man kann die Reihe wieder mit einer 3ten Zahl d vervielfachen und so fort. Durch die 1sten Striche wurden von den sämmtlichen $N = abc\ldots.$ Zahlen je a Zahlen auf $a-1$ zurückgeführt, es blieben also $(a-1)bc\ldots$ Zahlen. Von diesen reduciren sich je b auf $b-1$ durch die 2ten Striche, es bleiben $(a-1)(b-1)\,c\ldots.$

*) Um sich von der Richtigkeit dieser Zusammenziehung leichter zu überzeugen, denke man sich jede der Zahlen a, b, c vorläufig um 1 grösser, so hat man $(a+1)(b+1)(c+1)-1$ (statt $abc-1$) zu vermindern um $ab+ac+bc+a+b+c$; der Ausdruck $(a+1)(b+1)(c+1)-1$ wird entwickelt, dann subtrahirt, so bleibt abc, wofür dann wieder $(a-1)(b-1)(c-1)$ zu schreiben ist

Zahlen, und diese werden durch die 3ten Striche im Verhältnisse von c zu $c-1$ auf $(a-1)(b-1)(c-1)\ldots.$ zurückgeführt: denn wegen der symmetrischen Vertheilung werden die 3ten Striche verhältnissmässig so oft auf bereits gestrichne Felder treffen, als diese überhaupt in N Feldern vorkommen. Die stehen bleibenden Felder sind nun eben alle Zahlen bis N (oder $N-1$), in denen $a,b,c,\ldots$ nicht aufgeht.

Wollte man die Zahlreihe bis abc nicht $d$mal, sondern wieder $c$mal nehmen, so würde, da keine 4ten Striche noch stehende Felder löschten, die Anzahl der in 1 bis $abcc$ enthaltnen und durch a,b,c untheilbaren Zahlen, sich nicht auf $(a-1)(b-1)(c-1)(c-1)$ vermindern, sondern $(a-1)(b-1)(c-1)c$ bleiben. Kommen in $abc\ldots.$ einige Faktoren wiederholt vor, so ist also jedesmal nur vom 1sten derselben die 1 abzuziehn: in den Zahlen 1 bis $a.^r b.^s c^t \ldots.$ giebt es $(a-1)(b-1)(c-1)\ldots. \times a^{r-1}.b^{s-1}.c^{t-1}\ldots.$ durch $a,b,c,\ldots.$ untheilbare Zahlen.

Diese Bemerkung veranlasst die Perioden für solche Nenner noch schliesslich zu betrachten, die einen oder mehr Faktoren wiederholt enthalten.

Da der Nenner ab eine $\alpha\beta'$stellige Periode liefert, d. h. da ab schon in $9_{\alpha\beta'}$ aufgeht, so könnte man meinen, dass für den Nenner aa höchstens $9_{\alpha\alpha}$ nöthig wäre. Dem ist jedoch nicht so, wie folgende Betrachtung zeigt.

Angenommen es gehe Primzahl a in 9_4, oder, was abgesehn von dem Falle $a = 3$ dasselbe sagt, in $1_4 = 1111$ auf, dann geht a auch in den mit 4 Einsen geschriebenen Zahlen auf bei denen man je eine, oder je zwei, nicht aber je drei Nullen einschaltet, also in 1010101 und in 1001001001, nicht in 1000100010001. Denn multiplicirt man die 1ste dieser 3 Zahlen mit 11, die 2te mit 111, so erhält man die vollen Zahlen 1_8 und 1_{12}, in denen a aufgeht; da nun a in den hinzutretenden Faktoren 11 oder 111 nicht aufgeht, so muss es eben in jener 1sten und 2ten Zahl aufgehn. Anders ist es mit der 3ten Zahl. Diese wird durch Zutritt des Faktors 1111 zwar auch zur vollen 1_{16}, in der a aufgeht, wovon jedoch nicht mehr wie vorhin der Grund nothwendig in jener Zahl liegt, sogar nicht liegen kann. Denn schreibt man jene Zahl so: $1000\overset{2}{1}000\overset{3}{1}000\overset{4}{1}$, und dividirt mit a hinein, so müssen an den mit 2,3,4 überschriebnen Stellen die Reste 2,3,4 bleiben. Weil nämlich a in 1111, also auch in 9999 aufgeht, so bleibt von 10000 der Rest 1, und zu diesem kommt obige 1 mit überschriebner 2, so dass man Rest 2 erhält. Dieser verursacht eben so viel Stellen weiter ebenfalls den Rest 2, der durch die dort hinzukommende 1 zu 3 wird, und so fort. Man sieht also, dass man, ehe a aufgehn kann, jene Zahl so weit fortsetzen müsste bis sie selbst a

Einsen enthält. Multiplicirt man diess dann mit 1111, so entsteht die volle 1_{4a}, und erst in dieser kann a zweimal Faktor sein, a^2 aufgehn. Man kann nun diese 1_{4a} als Faktor der unendlichen Reihe 111 . . . . . . herausheben, so bleibt eine Reihe von Einsen mit je $4a-1$ eingeschalteten Nullen. Hierin kann ein 3ter Faktor a ebenfalls erst bei der $a$ten Eins aufgehn, also in einer Reihe die durch den Faktor 1_{4a} zur vollen $1_{4a.a}$ wird.

Man erkennt hieraus dass, wenn a eine αstellige Periode liefert, die Perioden für a^2, a^3, ... nicht weniger als αa, αa^2, . . . Stellen haben müssen.

Nur wenn a, welches in 9_α aufgeht, in dem Quotienten (der q heissen möge) nochmals aufginge, würde auch a^2 eine nur αstellige, und erst a^3 eine $\alpha.a$stellige Periode liefern, und so weiter. So geht nicht nur 3 in 9 auf, sondern auch 3^2, folglich wird die für 3 und 3^2 einstellige Periode erst durch den 3ten Faktor 3 d. i. für 27 3stellig, durch den 4ten d. i. für 81 9stellig. Ob es ausser 3 noch mehr Zahlen von der erwähnten Eigenschaft giebt, ist mir unbekannt.

Es wurde vorhin beispielsweise angenommen, dass a in 9999 aufgehe und zwar q mal. Wenn man nun in die Reihe $100\overset{2}{0}1000\overset{3}{1}$ . . . . . . $\overset{a-1}{1}000\overset{a-1}{1}000\overset{a}{1}$ mit a hinein dividirt, so wird der Quotient bis $\overset{2}{1}$ auch q, bis $\overset{3}{1}$ dann $2q$ u. s. w; von $\overset{a-1}{1}$ bis $\overset{a}{1}$ ist er $(a-1).\,q$ mit dem Reste a, d. h. er ist eigentlich um 1 grösser als $(a-1).q$, und dann geht die Division auf: man kann aber zu Ende den Rest a behalten, das nächstemal den Rest a $+$ 1 und so fort. Es ist sonach a in jener Reihe $q \times 100020003$ . . . . $(a-2)000(a-1)000(a)000(a+1)$ . . . . mal enthalten. Wollte man nun zum 3ten male mit a dividiren, so würde letztere Reihe für sich wiederum einen Quotient $q \times 100030006000(10)000(15)$ . . . . geben, dessen Ziffern 1,3,6,10, . . . durch Summation der Ziffern 1,2,3,4, . . . voriger Reihe entstehn, so nämlich, dass $3=1+2$, $6=1+2+3$, $10=1+2+3+4$ oder kürzer $=6+4$ ist.

Man kann diess beliebig fortsetzen. Der wiederholt sich herausstellende Faktor q ist nichts andres als die einfache Periode für $1/a$, so dass man hat:

$$1/a = q \times 1000100010001 \ldots, \quad (1/a)^2 = q^2 \times 1000200030004 \cdot \ldots$$
$$(1/a)^3 = q^3 \times 100030006000(10) \ldots \text{ u. s. w.}^{*})$$

*) Man erhält offenbar allgemein:
$$(1/a)^n = q^n \times 1\,[0_\alpha - 1]\,n\,[0_\alpha - 1]\,\frac{n.n+1}{1.\;2}[0_\alpha - 1]\,\frac{n.n+1.\,n+2}{1.\;2.\;\;3} \ldots\ldots,$$ wo $[0_\alpha - 1]$ die $\alpha - 1$ eingeschalteten Nullen bezeichnet.

Z. B. ist $\frac{1}{11} = 0,(09)\ldots$ $\quad \frac{1}{37} = 0,(027)\ldots$ $\quad \frac{1}{7} = 0,(142857)\ldots$

diess giebt: $q^2 = 0081$ $\quad q^2 = 000729$ $\quad q^2 = 020408122449$, also:

$0081 \times 1020304\ldots$	$000729 \times 1002003\ldots$	$0204081224\ldots \times$
		$1000002000003\ldots$
81	729	020408122449
162	1458	$40816\ldots$
243	2187	
324		
$0,008264462\ldots$	$0,0007304601\ldots$	$0,020408163265\ldots$
$= (\frac{1}{11})^2 = \frac{1}{121}$	$= (\frac{1}{37})^2 = \frac{1}{1369}$	$= (\frac{1}{7})^2 = \frac{1}{49}$

Von den $a^2 - 1$ Brüchen mit Nenner a^2, lassen sich $a-1$ Brüche auf einfache $a$tel kürzen, die übrigen $(a-1)a$ Brüche geben $\alpha.a$stellige Perioden, und zerfallen in $\frac{a-1}{\alpha}$ Gruppen, welche Zahl auch 1 sein kann, wobei also keine Nebenperiode entsteht. Der Nenner a^3 liefert $(a-1).a^2$ nicht kürzbare Brüche mit $\alpha\, a^2$ stelligen Perioden; die Gruppenzahl bleibt wie vorhin, und so weiter. Man überzeugt sich so von der Richtigkeit des folgenden allgemeinen Gesetzes:

„Alle Brüche mit dem Nenner $a.^r\, b.^s\, c^t \ldots$, dessen Einzelfaktoren $a, b, c, \ldots$ „für sich $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ stellige Perioden geben würden, liefern Decimal„brüche mit $\alpha.\beta'.\gamma' \ldots \times a^{r-1}.b^{s-1}.c^{t-1}\ldots$ stelligen Perioden, welche in „$\frac{a-1}{\alpha}.\frac{b-1}{\beta'}.\frac{c-1}{\gamma}\ldots$ Gruppen zerfallen. Es ist dabei $\alpha.\beta'.\gamma' \ldots$ der kleinste „Dividuus für $\alpha.\beta, \gamma, \ldots$."

Faktoren 2 oder 5, die Vorziffern geben, sind hier nicht inbegriffen. Von etwaigen Faktoren 3 fallen die 2 ersten aus dem pag. 20 angeführten Grunde hinweg, werden aber für die Gruppenzahl berücksichtigt. Ob aus gleichem Grunde noch andre Faktoren gewisser Art und Grösse in Wegfall kommen können, ist meines Wissens bis jetzt noch nicht ermittelt.

Als Beispiel sei erwähnt der Nenner $8n = 8.3^4.37.11^2 = 8.362637$. Unter den $8n-1$ Brüchen dieses Nenners giebt es $4n-1$ Brüche mit geraden, $4n$ mit ungeraden Zählern; von jenen $4n-1$ Zählern sind $2n-1$ durch 4, $2n$ nur durch 2 theilbar, und endlich enthalten diese ersteren $2n-1$ Zähler $n-1$ durch 8 und n durch 4 theilbare Zähler. Man hat also $n-1$ Brüche, nämlich die $n$tel selbst, deren Periode ohne Vorziffer; n Brüche, nämlich die $2n$tel bei denen der Bruch $\frac{1}{2}$, mit einer Vorziffer und den Perioden der $n$tel; $2n$ Brüche, nämlich die $4n$tel mit den Brüchen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, mit 2 Vorziffern und den Perioden der $n$tel zweimal; endlich $4n$ Brüche, die $8n$tel nebst $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{8}$, mit 3 Vorziffern und den Perioden der $n$tel viermal. Unter den $n-1 = 362636$ Brüchen ohne Vorziffer sind, weil $n = 3^4.37.11^2$ ist, $2.3^3 \times 36 \times 10.11 = 213840$ unkürzbar, mit $3^2.2.11 = 198$stelligen Perioden (nämlich 3^4 giebt 3^2, 37 giebt keine, 11^2 giebt

2.11 Stellen), die sich von der Mitte an ergänzen und in $\frac{213840}{198} = 1080$ Gruppen vertheilen; die Perioden der übrigen $362636 - 213840 = 148796$ Brüche zerfallen in aliquote Theile, z. B in 18stell. Perioden, wenn sich ein Faktor 11 hebt.

Sind die Faktoren eines gegebnen Nenners grössere Primzahlen, so steigert sich die Schwierigkeit die Stellenzahl zu finden. Die Zahlentheorie giebt die einfachsten Regeln dafür. In der die Decimalbrüche besonders berücksichtigenden Abhandlung des Prof. Bertram im Programme des Cölnischen Realgymn. in Berlin (1849) sind für Primfaktoren bis 4000 die Stellenzahlen gegeben.

Für mässig grosse Zahlen z. B. 733 lässt sich auch nach den hier entwickelten Gesetzen die Stellenzahl α berechnen. Es ist nämlich α aliquoter Theil von $a-1 = 732 = 12.61$. Da nun α grösser als 12 ist (denn 733 gehört nicht zu den auf p. 9 angegebnen Faktoren der Zahlen 9_1 bis 9_{12}), so muss α eine der Zahlen 61,122,183,244,366,732 sein. Man hat also zu untersuchen, ob der 61ste, oder 122ste Rest u. s. w. 1 sei. Nun findet sich durch directe Division als 6ter Rest: 188. Hieraus folgt der 12te Rest: 188.188 d. i. reducirt 160; hieraus der 24ste Rest: 160.160 reducirt $-$ 55; hieraus der 48ste Rest: $+$ 55.55 reducirt 93; hieraus der 60ste Rest: 160.93 reducirt 220, und folglich der 61ste Rest: 2200 reducirt 1. Es beginnt sonach mit dem 61sten Reste die Periode von vorn, sie hat 61 Stellen. Die Perioden der 733stel zerfallen in $732 : 61 = 12$ Gruppen oder 6 Paare Ergänzungsgruppen. —