Ein in zwei Punkten befestigtes, vollkommen biegsames und unausdehnbares Seil bildet, wenn nur parallele Schwerkräfte auf dasselbe wirken, eine Seil- oder Kettencurve. Sind die Schwerkräfte außerdem einander gleich, ist z. B. das Seil überall von gleicher Dicke und Dichtigkeit, so ist diese Curve die gemeine Kettenlinie. Sind dagegen die Schwerkräfte verschieden, ändert sich z. B. der Querschnitt oder die Dichtigkeit des Seils, so entstehen, sobald diese Änderung eine continuirliche ist, Seilcurven von verschiedener Gestalt. Ist nun eine Seilcurve ihrer Gestalt nach bekannt, so ist die erste Frage nach dem Gesetze, welches die an ihr wirkenden Schwerkräfte und die Spannungen innerhalb des Seils bei ihrer Änderung befolgen. Nicht minder interessant ist das umgekehrte Problem, für ein vorgeschriebenes Änderungsgesetz der Kräfte oder Spannungen die Gestalt der Kettencurve zu finden. Auch die Krümmung und der Schwerpunkt dieser Gebilde sind in Untersuchung zu ziehen, und zeigen gerade sehr allgemeine und einfache Resultate.

Nachdem ich in einem früheren Programme (*) die Seilpolygone und die gemeine Kettenlinie behandelt habe, will ich jetzt die allgemeinen und einige besondere Seilcurven nach den angedeuteten Richtungen untersuchen. Die Ausgangspunkte hierfür, nämlich die Differentialgleichungen der Seilcurven, werde ich, ohne mich auf jene Arbeit speciell zu beziehen, aus den dort ausführlicher entwickelten Grundeigenschaften der Seilpolygone in aller Kürze zu gewinnen suchen. Diese Methode, jene Gleichungen abzuleiten, welche von Poinsot in den Éléments de Statique § 220 vorgezeichnet ist, scheint mir naturgemäß und für den vorliegenden Zweck von hinreichender Allgemeinheit.

Grundrelationen.

§ 1.

Wenn auf Seilpolygone oder Kettencurven nur parallele Schwerkräfte wirken, wie dies im Folgenden vorausgesetzt wird, so liegen sie in einer durch die Aufhängepunkte gelegten Vertikal-Ebene.

Die Bedingungen des Gleichgewichts eines Seilpolygons ergeben sich durch Gleichsetzung der Spannungen in jeder Seite. Diese Spannungen sind die Componenten der in den Eckpunkten vereinigt gedachten Gewichte der Seiten, die man nach der Richtung der Seiten zerlegt denkt. Mögen nun A_0, A_1, A_2 2c. vom tiefsten anfangend die auf einander folgenden Eckpunkte, U_0, U_1, U_2 2c. die in ihnen angebrachten Schwerkräfte, φ_0, φ_1, φ_2 2c. die Neigungswinkel der Seiten $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ 2c. zur Horizontalen, und V_0, V_1, V_2 2c.

*) Beitrag zur Theorie der Seilpolygone und der Kettenlinie. Programm des Herzogl. Carls-Gymnasiums zu Bernburg. Mich. 1852.

die Spannungen dieser Seiten sein; so erhält man durch Zerlegung zweier auf einander folgenden Kräfte U_n und U_{n+1} nach der Richtung der sie verbindenden Seite $A_n A_{n+1}$:

$$U_n : V_n = \sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) : \cos\varphi_{n-1},$$
$$U_{n+1} : V_n = \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n) : \cos\varphi_{n+1},$$

und daraus die Gleichung:

$$U_n : U_{n+1} = \sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \cos\varphi_{n+1} : \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n) \cos\varphi_{n-1},$$

oder nachdem man durch $\cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_n \cos\varphi_{n+1}$ dividirt hat:

$$U_n : U_{n+1} = \mathrm{tg}\varphi_n - \mathrm{tg}\varphi_{n-1} : \mathrm{tg}\varphi_{n+1} - \mathrm{tg}\varphi_n.$$

Im Besondern folgt daraus:

$$U_1 : U_2 = \mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_0 : \mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1.$$
$$U_2 : U_3 = \mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1 : \mathrm{tg}\varphi_3 - \mathrm{tg}\varphi_2.$$
$$U_3 : U_4 = \mathrm{tg}\varphi_3 - \mathrm{tg}\varphi_2 : \mathrm{tg}\varphi_4 - \mathrm{tg}\varphi_3.$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Der allgemeine Ausdruck des Gleichgewichts beim Seilpolygon ist daher:

»Irgend zwei Kräfte verhalten sich wie die Differenzen der Tangenten der Neigungswinkel der von ihnen angegriffenen Seiten.«

Ferner folgt daraus:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n : U_1 = \mathrm{tg}\varphi_n - \mathrm{tg}\varphi_0 : \mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_0,$$

oder indem man

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots U_n = \Sigma(U_n)$$

setzt:

$$\Sigma(U_n) = U_1 \cdot \frac{\mathrm{tg}\varphi_n - \mathrm{tg}\varphi_0}{\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_0}.$$

Für den Fall, daß die unterste Seite des Polygons $A_0 A_1$ horizontal, also $\varphi_0 = 0$ ist, erhält man daraus die Relation:

$$\Sigma(U_n) = U_1 \cdot \frac{\mathrm{tg}\varphi_n}{\mathrm{tg}\varphi_1},$$

welche sich noch einfacher darstellen läßt, sobald man bemerkt, daß

$$\frac{U_1}{\mathrm{tg}\varphi_1} = V_0,$$

nämlich der Spannung der horizontalen Seite gleich ist. Daher

$$\Sigma(U_n) = V_0 \cdot \mathrm{tg}\varphi_n.$$

Da die Gültigkeit dieser Formel von der Zahl und Größe der Seiten des Polygons unabhängig ist, so gewährt sie einen allgemeinen Ausdruck des Gleichgewichts auch für die Kettencurven, in welche die Seilpolygone durch unendliche Verkürzung ihrer Seiten übergehen. Bezeichnet man also durch U die in irgend einem Punkte einer Kettencurve auf die Längeneinheit des Bogens wirkende Schwerkraft, durch φ den Winkel, welchen die Richtung des Bogenelements ds in jenem Punkte mit der Horizontalen bildet, und durch v die Spannung in dem Punkte der Curve, dessen Bogenelement mit der Horizontalen zusammenfällt, und bezieht man endlich den Bogen s auf diesen Punkt als seinen Anfang, so gewinnt jene Formel die Gestalt:

$$\int_0^s U ds = v \cdot \mathrm{tg}\varphi,$$

und ist die allgemeine Differentialgleichung der Seilcurven. — Um auch Ausdrücke für die Spannungen zu erhalten, wenden wir uns noch einmal zu dem oben betrachteten allgemeinen Seilpolygone. Durch Zerlegung der Kräfte erhält man:

$$V_n = U_n \cdot \frac{\cos \varphi_{n-1}}{\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1})}; \quad V_{n-1} = U_n \cdot \frac{\cos \varphi_n}{\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1})};$$

daher

$$V_{n-1} : V_n = \cos \varphi_n : \cos \varphi_{n-1},$$

und im Besondern:

$$V_0 : V_1 = \cos \varphi_1 : \cos \varphi_0,$$
$$V_1 : V_2 = \cos \varphi_2 : \cos \varphi_1,$$
$$V_2 : V_3 = \cos \varphi_3 : \cos \varphi_2,$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

woraus durch Zusammensetzung folgt:

$$V_n = V_0 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_n}.$$

Für den Fall, daß die Seite $A_0 A_1$ horizontal, also $\varphi_0 = 0$ ist, ergiebt sich daraus:

$$V_n = \frac{V_0}{\cos \varphi_n},$$

und in Anwendung auf die Kettencurven, wenn durch V die Spannung in dem Punkte bezeichnet wird, wo das Curvenelement die Neigung φ zur Horizontalen hat:

$$V = \frac{v}{\cos \varphi}.$$

»Bei allen Seilpolygonen und Kettencurven verhalten sich daher die Spannungen umgekehrt wie die Cosinus der Neigungswinkel dieser Spannungen zur Horizontalen.«

Kräfte und Spannungen gegebener Seilcurven.

§ 2.

Eine in der Vertikalebene liegende, durch ihre Gleichung gegebene Curve soll nun als Seilcurve gedacht werden, und ein Ausdruck für die in jedem Punkte auf die Längeneinheit des Bogens wirkende Schwerkraft U, und die Spannung V gefunden werden.

Die Coordinaten seien rechtwinklicht, die Axe der x horizontal, die Richtung der positiven y der Richtung der Schwere entgegengesetzt, und der Anfangspunkt der tiefste Punkt der Curve, dessen Bogenelement mit der Horizontalen zusammenfällt, den wir kurz Scheitel nennen werden. Da über die Richtung von U kein Mißverständniß statt finden kann, soll es auch im Folgenden als positiv betrachtet werden.

Nach § **1** ist nun:

$$\int_0^s U ds = v \cdot tg\varphi.$$

Die Gleichung der Curve, bezogen auf das festgesetzte Coordinatensystem, sei $y = f(x)$, woraus

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Durch Differentiation jener Gleichung erhält man daher

$$Uds = vdy',$$

mithin:

$$1. \qquad U = \frac{vdy'}{ds}.$$

Ferner ist nach § 1

$$V = \frac{v}{\cos\varphi},$$

woraus mit Berücksichtigung des Obigen:

$$2. \qquad V = v\sqrt{1+y'^2} = \frac{vds}{dx}.$$

Bei der Anwendung dieser Formeln auf besondere Fälle ist jedoch zu beachten, daß sie überhaupt nur auf solche Curven bezogen werden können, welche einen Scheitel in der festgesetzten Bedeutung besitzen, der zugleich der Anfang des Coordinatensystems ist. Da ferner U und V ihrer Natur nach das Zeichen nicht wechseln können, so sind unter diesen Curven wieder alle diejenigen oder die Theile derselben von der Möglichkeit, als Seilcurven zu gelten, ausgeschlossen, für welche V oder U einen negativen Werth annehmen würde. Eine negative Spannung läßt sich als ein Druck der Theilchen aufeinander erklären. Bei positiven U deutet daher ein negatives V auf eine s. gen. Gewölbecurve.

1. Der Kettenkreis.

Der Kreis hat, bezogen auf das angegebene Coordinatensystem, die Gleichung:

$$x^2 = 2ry - y^2.$$

Es ist daher:

$$y' = \frac{x}{r-y} \text{ und } dy' = \frac{r^2dx}{(r-y)^3},$$

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2} = \frac{rdx}{r-y};$$

folglich ist:

$$U = \frac{vr}{(r-y)^2} = \frac{vr}{r^2-x^2},$$

und

$$V = \frac{vr}{r-y}.$$

Der constante Werth, welchen U im Scheitel annimmt, soll mit u bezeichnet werden. Daher ist

$$u = \frac{v}{r} \text{ und } v = ur.$$

Setzt man dies in die obigen Formeln ein, so ist

$$U = u\frac{r^2}{(r-y)^2} = u\frac{r^2}{r^2-y^2},$$

$$V = u\frac{r^2}{r-y}.$$

Da endlich $\frac{r-y}{r} = \cos\varphi$, so lassen sie sich auch in folgender Form darstellen:

$$U = \frac{ur}{\cos\varphi^2}$$

$$V = \frac{u}{\cos\varphi}$$

»Die am Kettenkreise wirkenden Kräfte sind daher den Quadraten der Cosinus der Neigungswinkel umgekehrt, den Quadraten der Spannungen aber direct proportional.«

Ferner ergiebt sich, daß im tiefsten Punkte U sein Minimum $= u$ habe, und nach beiden Seiten des Bogens wachse. Ist die Kettencurve ein Halbkreis, so sind die äußersten Kräfte unendlich groß. Die Spannung wächst ebenfalls von ihrem Minimum im tiefsten Punkte, $v = ur$, bis zu den Endpunkten des Halbkreises in's Unendliche. Übersteigt y die Größe von r, d. h. betrachtet man den nach oben gerichteten Halbkreis, so nimmt U positiv bleibend, wiederum ab, dieselben Werthe durchlaufend, bis zum Minimum u im höchsten Punkte. Die Spannung dagegen wird negativ, d. h. verwandelt sich in einem Druck der Curventheilchen aufeinander. Den kleinsten absoluten Werth erhält sie ebenfalls im höchsten Punkte.

2. Die Kettenparabel.

Die Gleichung der als Seilcurve betrachteten Parabel sei

$$x^2 = 2py.$$

Dann ist:

$$y' = \frac{x}{p},\ dy' = \frac{dx}{p},\ ds = \frac{1}{p}\sqrt{p^2 + x^2} \cdot dx.$$

Daher:

$$U = \frac{v}{\sqrt{p^2 + x^2}} = \frac{v}{\sqrt{p^2 + 2py}},$$

$$V = \frac{v}{p}\sqrt{p^2 + x^2} = \frac{v}{p}\sqrt{p^2 + 2py}.$$

Für $x = 0$ nimmt U den constanten Werth u an:

$$u = \frac{v}{p},\ v = up.$$

Daher ist auch:

$$U = u \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2 + x^2}},$$

$$V = u \cdot \sqrt{p^2 + x^2}.$$

Führt man den Neigungswinkel durch die Gleichung $\cos\varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + x^2}}$ ein, so ist endlich:

$$U = u \cdot \cos\varphi,$$

$$V = \frac{up}{\cos\varphi}.$$

»Bei der Kettenparabel verhalten sich die an den einzelnen Curvenelementen angebrachten Kräfte 1) wie die Projectionen dieser Curvenelemente auf den Horizont, 2) umgekehrt wie die Spannungen.«

Im tiefsten Punkte hat U sein Maximum $= u$, und V sein Minimum $= up$. Für wachsende x nimmt U ab, sich endlich dem Werthe 0 nähernd.

Das Seil, welches die überall gleich schwere Fahrbahn einer Kettenbrücke trägt, ist, insofern man das Gewicht des Seils gegen das der Fahrbahn vernachlässigen darf, in dem Falle einer Kettenparabel. Die Belastungen der einzelnen Theile desselben sind proportional den Projectionen dieser Theile auf die horizontale Fahrbahn.

3. Die gleichseitige Hyperbel als Seilcurve.

Ist die Gleichung derselben

$$x^2 = 2py + y^2,$$

so ergiebt sich:

$$y' = \frac{x}{p+y}, \quad dy' = \frac{p^2 dx}{(p+y)^3}, \quad ds = \frac{\sqrt{p^2 + 2x^2}}{p+y} dx.$$

Daher

$$U = \frac{vp^2}{(p^2 + x^2)\sqrt{p^2 + 2x^2}},$$

$$V = v\sqrt{\frac{p^2 + 2x^2}{p^2 + x^2}}.$$

Im Scheitel erhält man

$$u = \frac{v}{p}, \quad v = up.$$

Daher ist auch:

$$U = u \cdot \frac{p^3}{(p^2 + x^2)\sqrt{p^2 + 2x^2}},$$

$$V = up\sqrt{\frac{p^2 + 2x^2}{p^2 + x^2}}.$$

Im tiefsten Punkte hat U sein Maximum, und nimmt mit wachsendem y ab, sich endlich der Gränze 0 nähernd.

Im negativen Hyperbelzweige, dessen höchster Punkt der Ordinate $y = -2p$ entspricht, sind die Kräfte zwar ebenfalls positiv, und nehmen vom Maximum $= u$ im höchsten Punkte nach beiden Seiten in demselben Maaße wie auf dem positiven Zweige ab, sich endlich der Gränze 0 nähernd. Die Spannungen dagegen sind negativ; weshalb dieser Theil der Hyperbel nicht mehr als Seilcurve betrachtet werden darf.

4. Die Kettencycloide.

Die Gleichungen, der Cycloide bezogen auf den Scheitel als Anfangspunkt, sind

$$y = \frac{d}{2}(1 - \cos\omega),$$

$$x = \frac{d}{2}(\omega + \sin\omega),$$

worin d den Durchmesser des Erzeugungskreises und ω den Wälzungswinkel bedeutet.

Daraus ergiebt sich

$$y' = \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$$

$$dy' = \frac{dx}{2d \cos \frac{\omega}{2}^4}, \quad ds = \frac{dx}{\cos \frac{\omega}{2}}.$$

Setzt man dies in die allgemeinen Formeln ein, so erhält man

$$U = \frac{v}{2d \cos \frac{\omega}{2}^3},$$

$$V = \frac{v}{\cos \frac{\omega}{2}}.$$

Aus den Gleichungen der Cycloide folgt aber

$$\cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{d - y}{d}}.$$

Daher ist endlich:

$$U = \frac{v\sqrt{d}}{2\sqrt{(d-y)^3}},$$

$$V = \frac{v\sqrt{d}}{\sqrt{d-y}}.$$

Im Scheitel der Kettencycloide hat U sein Minimum:

$$u = \frac{v}{2d}.$$

Das Maximum erreicht die Kraft, wenn $y = d$ ist, d. h. in den Endpunkten der Curve, wo sie unendlich wird. Liegt der betrachtete Punkt in der halben Höhe der Curve, $y = \frac{d}{2}$, so ist $U = \frac{v\sqrt{2}}{d} = \frac{v}{2d} \cdot 2\sqrt{2}$. Bis zur Mitte der Höhe wächst daher die Kraft noch nicht um das Vierfache. Die Spannung wächst ebenfalls in's Unendliche. In der halben Höhe ist sie $v\sqrt{2}$. Ferner ergiebt sich aus den gefundenen Gleichungen:

$$\frac{V^3}{U} = v^2 d.$$

»Die Kräfte verhalten sich bei der Kettencycloide wie die Cuben der Spannungen.«

Seilcurven gegebener Kräfte oder Spannungen.

§ 3.

Sind die an einer Kettencurve wirkenden Schwerkräfte oder Spannungen gegeben, und wird die Gestalt derselben gesucht, so führt die Integration der allgemeinen Differentialgleichung der Kettencurven

3. $$\int_0^s U ds = v dy',$$

so fern dieselbe ausführbar ist, zu diesem Ziele. Der Gang der Rechnung hängt wesentlich von der Funktion U ab. Ist nun U eine Funktion nur einer Veränderlichen, so kann sie 1) vom Bogen s, 2) von den Coordinaten x oder y, 3) von dem Neigungswinkel φ abhängen. Nach dieser Eintheilung soll das gestellte Problem im Folgenden behandelt werden. Wenn U constant ist, so kann die Aufgabe jedem der genannten Fälle untergeordnet werden.

Als Coordinatensystem setzen wir wiederum das bisher angewendete voraus, in dessen Anfang dann der Scheitel der gesuchten Curve liegen muß.

§ 4.

I. U ist eine Function des Bogens.

Setzt man

$$\int_0^s U ds = f(s),$$

so ist nach der Gleichung 3 des vor. §

$$y' = \frac{f(s)}{v}.$$

Da aber allgemein

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2} \cdot dy,$$

so ist nach der Substitution des obigen Werthes

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{f(s)}{v}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \left(\frac{v}{f(s)}\right)^2} \cdot dy,$$

mithin:

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{f(s)}{v}\right)^2}},$$

$$dy = \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{f(s)}\right)^2}}.$$

Durch Integration erhält man hieraus zwei Gleichungen, aus denen durch Elimination von s die Gleichung der gesuchten Curve hervorgeht.

1. Beispiel. U ist constant = u.

$$\int_0^s u ds = us = f(s);$$

daher

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{u^2 s^2}{v^2}}} = \frac{v ds}{\sqrt{v^2 + u^2 s^2}},$$

$$dy = \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2 s^2}}} = \frac{us ds}{\sqrt{v^2 + u^2 s^2}}.$$

Die Integration der ersten Gleichung giebt

$$x = \frac{v}{u} \log \left(us + \sqrt{v^2 + u^2 s^2} \right) + C,$$

worin, wie auch im Folgenden, log einen Logarithmus der Basis e bezeichnen soll.

Da x und s zugleich verschwinden, so ist $C = -\frac{v}{u} \log v$; daher

$$x = \frac{v}{u} \log \frac{us + \sqrt{v^2 + u^2 s^2}}{v}.$$

Die Integration der zweiten Gleichung führt auf:

$$y = \frac{\sqrt{v^2 + u^2 s^2}}{u} + c,$$

$$c = -\frac{v}{u},$$

daher

$$y = \frac{\sqrt{v^2 + u^2 s^2} - v}{u}.$$

Durch Elimination von s aus dieser und der für x erhaltenen Gleichung ergiebt sich

$$x = \frac{v}{u} \log \frac{\sqrt{2uy + u^2 y^2} + v + uy}{v},$$

oder in anderer Form

$$y = \frac{v}{2u} \left(e^{\frac{ux}{v}} + e^{-\frac{ux}{v}} \right) - \frac{v}{u}.$$

Dies ist die Gleichung der gemeinen Kettenlinie, wie bei der Annahme, daß die wirkenden Kräfte überall gleich sein sollten, zu erwarten stand. Gewöhnlich wird diese Aufgabe unter der Kategorie $U = F(x)$ behandelt. Die so eben befolgte Methode hat den Vorzug, nebenbei die Rectification der Curve zu geben. Aus den obigen Gleichungen folgt nämlich:

$$s = \frac{\sqrt{2uvy + u^2 y^2}}{u} = \frac{v}{2u} \left(e^{\frac{ux}{v}} - e^{-\frac{ux}{v}} \right).$$

2. Beispiel.

$$U = \frac{vq^2}{\sqrt{(q^2 - s^2)^3}},$$

worin q einen constanten Parameter bedeuten soll. Im Scheitel der gesuchten Curve ist daher $U = u = \frac{v}{q}$, und wächst von da aus mit dem Bogen nach beiden Seiten, und wird für $s = \pm q$ unendlich groß, und bei weiterer Ausdehnung des Bogens imaginair.

$$\int_0^s \frac{vq^2 ds}{(q^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{vs}{\sqrt{q^2 - s^2}} = f(s).$$

Daher nach Obigem:

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{q^2 - s^2}}} = \frac{1}{q} ds \cdot \sqrt{q^2 - s^2},$$

$$dy = \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{q^2 - s^2}{s^2}}} = \frac{sds}{q}.$$

Integrirt man die letztere Gleichung zuerst, so erhält man

$$y = \frac{s^2}{2q},$$

ohne Constante, und nach Umformung

$$s^2 = 2qy,$$

worin man schon die Rectificationsgleichung einer Cycloide erkennt, deren Durchmesser $d = \frac{q}{2}$ ist. Dies bewährt sich durch Integration der ersten Gleichung:

$$x = \frac{s}{2q}\sqrt{q^2 - s^2} + \frac{q}{2} \arc\sin \frac{s}{q},$$

wobei wieder keine Integrationsconstante hinzuzufügen ist, und durch Elimination von s, wodurch sich ergiebt, wenn $\frac{q}{2} = d$ gesetzt wird:

$$x = \sqrt{dy - y^2} + d \arc\sin \sqrt{\frac{y}{d}}.$$

Da nun $d \arc\sin \sqrt{\frac{y}{d}} = \frac{d}{2} \arc\sin \frac{\sqrt{dy - y^2}}{\frac{d}{2}}$, so ist auch

$$x = \sqrt{dy - y^2} + \frac{d}{2} \arc\sin \frac{\sqrt{dy - y^2}}{\frac{d}{2}}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Cycloide für den Scheitel als Anfang der Coordinaten.

§ 5.

II. U ist eine Function einer der Coordinaten des Angriffspunktes.

Aus der allgemeinen Relation des § 4 erhält man

$$Uds = vdy'.$$

Ist nun U eine Function von y, so substituire man

$$ds = \frac{1}{y'}\sqrt{1 + y'^2} \cdot dy,$$

und sondere die Unbekannten:

$$Udy = \frac{vy'dy'}{\sqrt{1 + y'}},$$

und integrire:

$$\int Udy = v\sqrt{1 + y'^2} + C.$$

Bezeichnet man nun, nachdem die Constante bestimmt ist, $\frac{\int Udy - C}{v}$ mit Y, so ist

$$y' = \sqrt{Y^2 - 1},$$

und daher

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{Y^2 - 1}} + c'$$

die Gleichung der gesuchten Curve.

Ist dagegen U eine Function von x, so ergiebt sich aus

$$Uds = vdy'$$

durch Substitution von $ds = dx\sqrt{1 + y'^2}$ und Sonderung

$$Udx = \frac{vdy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

und daraus

$$\int Udx = v \log (y + \sqrt{1 + y'^2}) + C.$$

Bezeichnet man nun nach Bestimmung der Constante $\dfrac{\int Udx - C}{v}$ kurz durch X, so ist ferner:

$$e^X = y' + \sqrt{1 + y'^2},$$

$$y' = \frac{e^X - e^{-X}}{2},$$

woraus die Gleichung der gesuchten Curve

$$y = \tfrac{1}{2} \int \left(e^X - e^{-X}\right) dx + \text{const}$$

hervorgeht.

1. Beispiel. $\quad U = \dfrac{2v}{p} e^{\frac{y}{p}}.$

Unter dieser Voraussetzung haben die Schwerkräfte das Minimum $u = \dfrac{2v}{p}$ im Anfang der Coordinaten, und wachsen mit y in's Unendliche. In der Form der Function ist ausgesprochen, daß während y in arithmetischer Progression wächst, U in geometrischer zunimmt. Um dies besser übersehen zu können, diene folgende Zusammenstellung:

$$\text{Für } y = o \text{ ist } U = \frac{2v}{p} = u.$$

$$y = p \text{ » } U = \frac{2v}{p} \cdot e = ue.$$

$$y = 2p \text{ » } U = \frac{2v}{p} e^2 = ue^2.$$

etc.

Gehen wir zur Ermittelung der Curve über, welche diesen Bedingungen entspricht, so haben wir nach dem Obigen

$$\frac{2v}{p} e^{\frac{y}{p}} dy = \frac{vy'dy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

woraus durch Integration

$$2e^{\frac{y}{p}} = \sqrt{1 + y'^2} + 1,$$

mithin

$$y' = 2\sqrt{e^{\frac{2y}{p}} - e^{\frac{y}{p}}},$$

und

$$dx = \frac{dy}{2\sqrt{e^{\frac{2y}{p}} - e^{\frac{y}{p}}}}.$$

Die Integration ergiebt, weil die Constante verschwindet

$$x = \pm p\sqrt{1 - e^{-\frac{y}{p}}},$$

oder nach leicht ersichtlicher Umformung:

$$y = p \log \frac{p^2}{p^2 - x^2}.$$

Die Spannung dieser Kettencurve, welche nach Formel 2 des § 2

$$V = v \cdot \frac{p^2 + x^2}{p^2 - x^2}$$

sein muß, ist mithin für alle reellen Werthe von y, d. h. in der ganzen Erstreckung der Curve, positiv. Da dies auch von U gilt, so ist daher die ganze durch die gefundene Gleichung dargestellte Curve als Kettencurve zu betrachten. Die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften, dieser in mehrfacher Hinsicht interessanten Linie soll im nächsten § folgen.

2. Beispiel. $$U = \frac{2pv(p^2 - x^2)}{(p^2 + x^2)\sqrt{p^4 + 6p^2x^2 + x^4}}.$$

Diese Function hat für $x = 0$, also im Scheitel, ein Maximum $u = \frac{2v}{p}$, nimmt ab bis $x = \pm p$, wo sie verschwindet, und wird für größere Werthe von x negativ; es ist daher nur ein Theil der durch sie bedingten Curve, und zwar der zwischen $x = \pm p$ liegende als Kettencurve zu betrachten. Suchen wir diese, so ist zuerst $\int Udx$ zu bestimmen. Zu dem Zweck schreiben wir die gegebene Function:

$$U = \frac{2pv(p^2 - x^2)}{(p^2 + x^2)^2\sqrt{1 + \left(\frac{2px}{p^2 + x^2}\right)^2}},$$

und setzen

$$\frac{2px}{p^2 + x^2} = z,$$

wodurch

$$\frac{2p(p^2 - x^2)\,dx}{(p^2 + x^2)^2} = dz,$$

daher

$$\int Udx = v\int\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = v \log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right).$$

Nach der obigen allgemeinen Entwickelung ist daher

$$v \log(z + \sqrt{1 + z^2}) = v \log(y' + \sqrt{1 + y'^2}),$$

weil die Constante verschwindet. Daraus folgt weiter

$$y' = \frac{2px}{p^2 + x^2},$$

und durch Integration dieser Gleichung:

$$y = p \log \frac{p^2 + x^2}{p^2}.$$

Die Spannung dieser Kettencurve berechnet sich demnach zu

$$V = v \cdot \frac{\sqrt{p^4 + 6p^2x^2 + x^4}}{p^2 + x^2}$$

und ist daher im ganzen Verlauf derselben positiv. Ihre geometrischen Eigenschaften erörtern wir ebenfalls im nächsten §.

§ 6.

a. Die Curve $x = \pm p \sqrt{1 - e^{-\frac{y}{p}}}$ oder $y = p \log \frac{p^2}{p^2 + x^2}$. Fig. 1.

Sie hat zwei sich in das Unendliche ausdehnende congruente Arme auf beiden Seiten der Ordinatenaxe, deren Asymptoten zwei parallele Linien sind, welche im Abstande $x = \pm p$ vom Anfangspunkte auf der Abscissenaxe senkrecht stehen. Für negative y wird x imaginair. Die Curve hat daher unterhalb der Abscissenaxe keine Erstreckung.

1. Der allgemeine Ausdruck ihres Krümmungsradius ist

$$\varrho = \frac{(p^2 + x^2)^2}{2p(p^2 - x^2)}.$$

Im Scheitel der Curve ist mithin

$$\varrho' = \frac{p}{2}.$$

2. Rectification.

$$ds = \frac{p^2 + x^2}{p^2 - x^2} \cdot dx.$$

$$s = \int_0^x \frac{p^2 + x^2}{p^2 - x^2}\, dx = -x + p \log \frac{p + x}{p - x}.$$

2. Quadratur.

Wir bezeichnen die gesuchte Fläche AMN mit F.

$$F = \int_0^x x dy = \int_0^x \frac{2px^2 dx}{p^2 - x^2} = -2px + p^2 \log \frac{p + x}{p - x}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch schreiben:

$$p\left(-x + p \log \frac{p + x}{p - x} - x\right).$$

Bemerkt man nun, daß, wie bereits gefunden,

$$-x + p \log \frac{p+x}{p-x} = s,$$

so ergiebt sich die höchst einfache Quadratur dieser Curve:

$$F = p(s-x).$$

Die Größe eines Segments der Curve, das durch eine mit der Abscissenaxe parallele Sehne MR abgeschnitten wird, ist daher

$$= 2p(s-x),$$

gleich der Fläche eines Rechtecks über der Entfernung der beiden Asymptoten von der Höhe: $s - x$.

4. Inhalt des Conoids, das durch Rotation der Curve um die Axe der y entsteht.

$$K = \pi \int_0^x x^2 dy = 2p\pi \int_0^x \frac{x^3 dx}{p^2 - x^2}.$$

$$K = \pi p^3 \log \frac{p^2}{p^2 - x^2} - \pi p x^2.$$

Da nun $y = p \log \frac{p^2}{p^2 - x^2}$, so ist auch:

$$K = p^2 \pi \cdot y - x^2 \pi \cdot p.$$

»Der Inhalt dieses Conoids ist gleich der Differenz zweier Cylinder, deren Radien p und x, deren Höhen bezüglich y und p sind.«

5. Mantel dieses Conoids.

$$S = 2\pi \int_0^x x ds = 2\pi \int_0^x \frac{x(p^2 + x^2)\,dx}{p^2 - x^2},$$

$$S = 2\pi p^2 \log \frac{p^2}{p^2 - x^2} - \pi x^2.$$

Substituirt man wiederum y, so ist

$$S = 2p\pi \cdot y - x^2 \pi.$$

»Der Mantel des Conoids ist gleich dem Mantel eines Cylinders vom Radius p und der Höhe y, vermindert um den Inhalt des Kreises, der von x beschrieben wird.«

Fig. 2. b. Die Curve $x = \pm p \sqrt{e^{\frac{y}{p}} - 1}$ oder $y = p \log \frac{p^2 + x^2}{p^2}$.

Auch diese zur Klasse der logarithmischen gehörige Linie hat zwei sich in das Unendliche ausdehnende congruente Arme auf beiden Seiten der Ordinatenaxe. Da

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2p(p^2 - x^2)}{(p^2 + x^2)^2},$$

so hat sie in jedem Arme einen Wendungspunkt (M und R) von der Abscisse $\pm p$. Das Stück zwischen diesen beiden Wendungspunkten ist convex, die darüber hinausliegenden Theile concav gegen die Abscissenaxe. Wir haben schon im vorigen § bemerkt, daß nur das convexe Stück als Kettencurve zu betrachten ist, daß die Schwerkraft in den Wendungspunkten $= 0$ ist, und in den concaven Theilen ihr Zeichen ändern würde. Die Tangente im Wendungspunkte ist unter $45°$ zur Abscissenaxe geneigt.

Der Krümmungshalbmesser bestimmt sich zu:

$$\varrho = \frac{(p^4 + 6p^2x^2 + x^4)^{\frac{3}{2}}}{2p(p^2 + x^2)(p^2 - x^2)}.$$

Im Scheitel ist daher wiederum

$$\varrho = \frac{p}{2}.$$

Die Quadratur gelingt sehr leicht:

$$F = \int_0^x x dy = \int_0^x \frac{2px^2dx}{p^2 + x^2}.$$

$$F = 2p\left(x - p \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{p}\right).$$

Hinsichts der Cubatur des Rotationsconoids stellt sie sich der vorher betrachteten Curve, deren Gleichung sich nur durch die Vorzeichen unterscheidet, vollkommen zur Seite:

$$K = \pi \int_0^x x^2 dy = 2p\pi \int_0^x \frac{x^3 dx}{p^2 + x^2}.$$

$$K = p\pi\left(x^2 - p^2 \log \frac{p^2 + x^2}{p^2}\right).$$

$$K = x^2\pi \cdot p - p^2\pi \cdot y.$$

Dies Conoid ist ebenfalls der Differenz der genannten Cylinder, aber mit entgegengesetzten Zeichen genommen, gleich.

Beschreibt man beide Curven mit gleichem Parameter p auf dasselbe Coordinatensystem ineinander, so stehen sie im gemeinsamen Scheitel in einem Contact der dritten Ordnung, weil die Differential-Quotienten bis zum dritten incl. für $x = 0$ dieselben Werthe annehmen.

§ 7.

III. U ist eine Function des Winkels φ.

Das Verfahren, das man bei der Integration der Gleichung

$$U ds = v dy'$$

im Allgemeinen zu befolgen hat, besteht darin, daß man mit Hülfe der Relation

$$y' = \operatorname{tg}\varphi$$

φ eliminirt, und die Veränderlichen sondert, so daß

$$dx = \frac{v dy'}{U\sqrt{1 + y'^2}}$$

erscheint, und endlich diese Gleichung zu integriren sucht.

1. **Beispiel.** Es wird diejenige Kettencurve gesucht, bei der die wirkenden Kräfte den Spannungen in ihren Angriffspunkten proportional sind.

Ist u die Kraft und v die Spannung im Anfangspunkte der Coordinaten, so muß also

$$U = \frac{u}{v} V,$$

oder, weil bei allen Kettencurven $V = \frac{v}{\cos\varphi}$ ist,

$$U = \frac{u}{\cos\varphi}$$

sein. Es ist daher von der Gleichung

$$\frac{u\,ds}{\cos\varphi} = v\,dy'$$

auszugehen. Weil nun $tg\varphi = y'$, daher $\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1+y'^2}$, so geht dieselbe in folgende über:

$$u\,dx = \frac{v\,dy'}{1+y'^2},$$

deren einmalige Integration

$$ux = v \operatorname{arc} tgy'$$

giebt, weil $\operatorname{arc} tgy'$ mit x verschwindet. Durch wiederholte Integration erhält man nun

$$y = \frac{v}{u} \log \sec \frac{ux}{v},$$

wobei wiederum die Constante verschwindet.

Soll nun diese Kettencurve von einem materiellen Seile dargestellt werden, auf das keine andern als seine Schwerkräfte wirken, so muß dasselbe von variabeln Querschnitt sein, welcher der Größe U allenthalben proportional ist. Da nun U nach der Annahme auch den Spannungen proportional ist, so würde in diesem Seile die Spannung, welche auf die Einheit seines Querschnitts fällt, also die Spannung seiner einzelnen Fasern allenthalben dieselbe sein. Die gefundene Curve wird daher die gleichgespannte Kettenlinie genannt.

Da x unter dem Functionszeichen sec steht, so hat die Curve zwei congruente Arme auf beiden Seiten der Ordinatenaxe, welche sich in's Unendliche erstrecken, aber ganz in dem Raume liegen, der von zwei auf der Abscissenaxe in der Entfernung $\pm\frac{v\pi}{2u}$ senkrechten Graden eingeschlossen wird.

Der Krümmungsradius dieser Curve ist

$$\rho = \frac{v}{u} \sec \frac{ux}{v}.$$

Da $y' = tg\varphi = tg\frac{ux}{v}$, so ist, weil φ und $\frac{ux}{v}$ stets innerhalb der Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen,

$$\varphi = \frac{ux}{v}.$$

Daher mit Berücksichtigung, daß $V = \frac{v}{\cos\varphi}$, auch

$$\rho = \frac{V}{u}.$$

Der Krümmungsradius im Scheitel daher

$$\rho' = \frac{v}{u}.$$

»Die Krümmungshalbmesser sind bei der gleichgespannten Kettenlinie den Spannungen, daher auch den Schwerkräften proportional.«

2. Beispiel. Will man eine Kettencurve suchen, bei der die Kräfte den Spannungen umgekehrt proportional wären, so hat man, weil jetzt

$$U = u \cos \varphi$$

ist, folgendermaßen zu rechnen:

$$u \cos \varphi ds = v dy',$$

$$u ds = v \sqrt{1 + y'^2}\, dy',$$

$$u dx = v dy',$$

$$u x = v y',$$

$$x^2 = 2 \frac{v}{u} y.$$

Dieser Bedingung leistet also eine Parabel vom Parameter $\frac{v}{u}$ Genüge. Vergl. § 2. 2.

3. Beispiel. Sollen die Kräfte den Quadraten der Spannungen proportional werden, soll also

$$U = \frac{u}{\cos \varphi^2}$$

sein, so ist die Differentialgleichung:

$$u dx = \frac{v dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

zu integriren. Dies ergiebt zuvörderst

$$u x = \frac{v y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

und durch abermalige Integration:

$$y = \frac{v - \sqrt{v^2 - u^2 x^2}}{u},$$

oder

$$x^2 = 2 \frac{v}{u} y - y^2.$$

Die gesuchte Curve ist also ein Kreis vom Radius $\frac{v}{u}$, wie nach § 2. 1 zu erwarten stand.

Krümmung der Kettencurven im Scheitel.

§ 8.

Lehrsatz. »Alle Kettencurven haben im Scheitel eine Krümmung vom Radius

$$\varrho' = \frac{v}{u},$$

wenn u die Schwerkraft und v die Spannung bezeichnen, welche im Scheitel wirken.«

Beweis. Da mit Beibehaltung der frühern Bezeichnung allgemein

$$\varrho = \frac{ds^3}{dx^2 dy'},$$

und

$$U = \frac{v dy'}{ds},$$

so erhält man durch Elimination von dy'

$$\varrho = \frac{v ds^2}{U dx^2} = \frac{v(1 + y'^2)}{U}.$$

Im Scheitel, wo das Curvenelement horizontal ist, verschwindet y', und wird $U = u$; daher

$$\varrho' = \frac{v}{u}.$$

»Alle Kettencurven, welche mit denselben Constanten v und u construirt werden, sind daher im Scheitel gleich gekrümmt, und werden von einem Kreise osculirt, dessen Radius $\frac{v}{u}$ ist.«

Wir wollen für die in den bisherigen Beispielen betrachteten Curven die geometrischen Parameter zusammenstellen, mit denen sie beschrieben werden müssen, um als zusammengehörige, mit denselben mechanischen Constanten v und u construirte Kettencurven zu gelten. Mit einer gemeinen Kettenlinie von den Constanten v und u gehört nach dem Frühern zusammen:

ein Kreis vom Radius $r = \frac{v}{u}$,

eine Parabel, $x^2 = 2px$, vom Parameter $p = \frac{v}{u}$,

eine gleichseitige Hyperbel, $x^2 = 2py + y^2$, vom Parameter $p = \frac{v}{u}$,

eine Cycloide, bei welcher der doppelte Durchmesser $2d = \frac{v}{u}$,

eine Curve $y = p \log \frac{p^2}{p^2 - x^2}$, bei der $\frac{p}{2} = \frac{v}{u}$,

eine Curve $y = p \log \frac{p^2 + x^2}{p^2}$, bei der $\frac{p}{2} = \frac{v}{u}$,

eine gleichgespannte Kettenlinie, vom Parameter $= \frac{v}{u}$.

Der in dieser Reihe vorkommende Kreis osculirt mithin alle die andern Curven im gemeinsamen Scheitel. Bei den drei letzten fanden wir dies bereits als Resultat besonderer geometrischer Ermittlung, und durch eine solche ist auch für die übrigen bekannt, was durch den obigen Lehrsatz als allgemeine Eigenschaft der Seilcurven ausgesprochen wird.

Schwerpunkt der Kettencurven.

§ 9.

Es ist vom Schwerpunkte des Systems von Schwerkräften die Rede, welches eine Kettencurve darstellt. Bezeichnet man mit Σ die Summe dieser Kräfte vom Anfangspunkte der Coordinaten längs dem Bogen der Curve gerechnet, mit x_1 y_1 aber die Coordinaten des Schwerpunktes, so bestehen bekanntlich folgende Gleichungen:

$$\Sigma = \int_0^s U ds;$$

$$\Sigma \cdot x_1 = \int_0^s x U ds; \quad \Sigma \cdot y_1 = \int_0^s y U ds.$$

Da nun nach Früherem allgemein

$$U = \frac{v dy'}{ds},$$

so gestalten sich diese Gleichungen folgendermaßen:

$$\Sigma = vy';$$

$$\Sigma \cdot x_1 = v\int_0^x x dy'; \quad \Sigma \cdot y_1 = v\int_0^x y dy'.$$

Durch partiellele Integration erhält man daraus:

$$\Sigma \cdot x_1 = vxy' - vy,$$

$$\Sigma \cdot y_1 = vyy' - v\int_0^x y'^2 dx.$$

Die Schwerpunkts-Coordinaten ergeben sich daher:

$$x_1 = x - \frac{y}{y'},$$

$$y_1 = y - \frac{\int_0^x y'^2 dx}{y'}.$$

Setzt man in der ersten Gleichung für $\frac{1}{y'} = \text{cotg}\varphi$, so ist

$$x_1 = x - y\,\text{cotg}\varphi;$$

worin eine äußerst einfache Construction der Schwerpunkts-Abscisse ausgesprochen ist. Um dieselbe für den Bogen AM (Fig. **1**) zu finden, lege man in M eine Tangente an denselben, und verlängere sie zum Schnitt mit der Abscissenaxe in C; so ist AC die gesuchte Abscisse.

Für die gemeine Kettenlinie finden wir diese Construction schon von Leibnitz (Acta Eruditorum **1691**) angegeben.

§ 10.

Unter den oben näher betrachteten Kettencurven bietet besonders die Kettenparabel, oder Kettenbrücklinie, in Bezug auf den Schwerpunkt interessante Resultate.

Ist nämlich $x^2 = 2py$ ihre Gleichung, so ist $y' = \frac{x}{p}$, daher:

$$x_1 = x - \frac{y}{y'} = \frac{x}{2},$$

Und weil $\int_0^x y'^2 dx = \frac{x^3}{3p^2}$, so ist

$$y_1 = y - \frac{\int_0^x y'^2 dx}{y'} = y - \frac{x^2}{3p} = \frac{y}{3}.$$

»Die Schwerpunkte aller vom Scheitel anfangenden Bogen einer Kettenparabel liegen daher wieder in einer Parabel, deren Scheitel und Axe mit der erstern zusammenfallen, deren Parameter aber $\frac{4}{3}$ des Parameters der gegebenen ist.«

Auch ist bemerkenswerth, daß hinsichtlich der Coordinate $y_1 = \frac{y}{3}$ die Kettenparabel mit der gewöhnlichen als homogen schwer gedachten Cycloide übereinstimmt, so fern man auch letztere auf Scheitelcoordinaten bezieht.

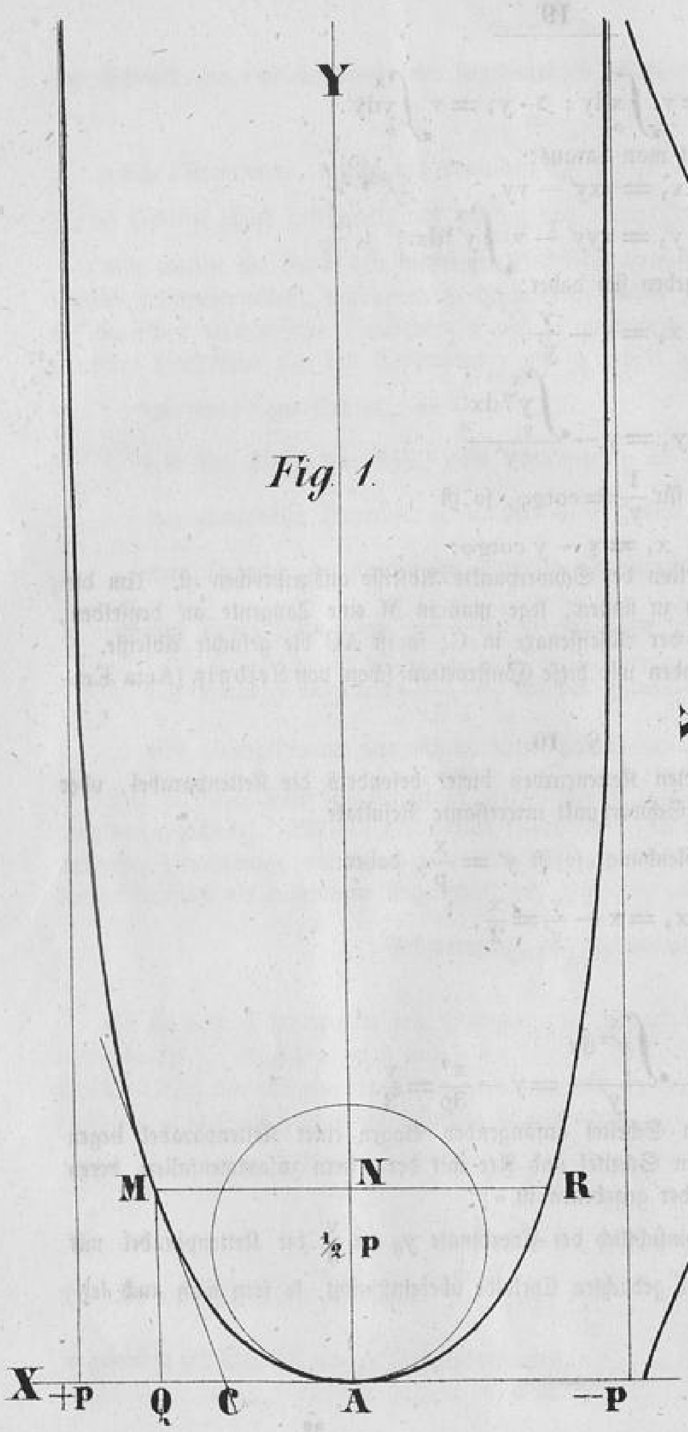

Fig. 1.

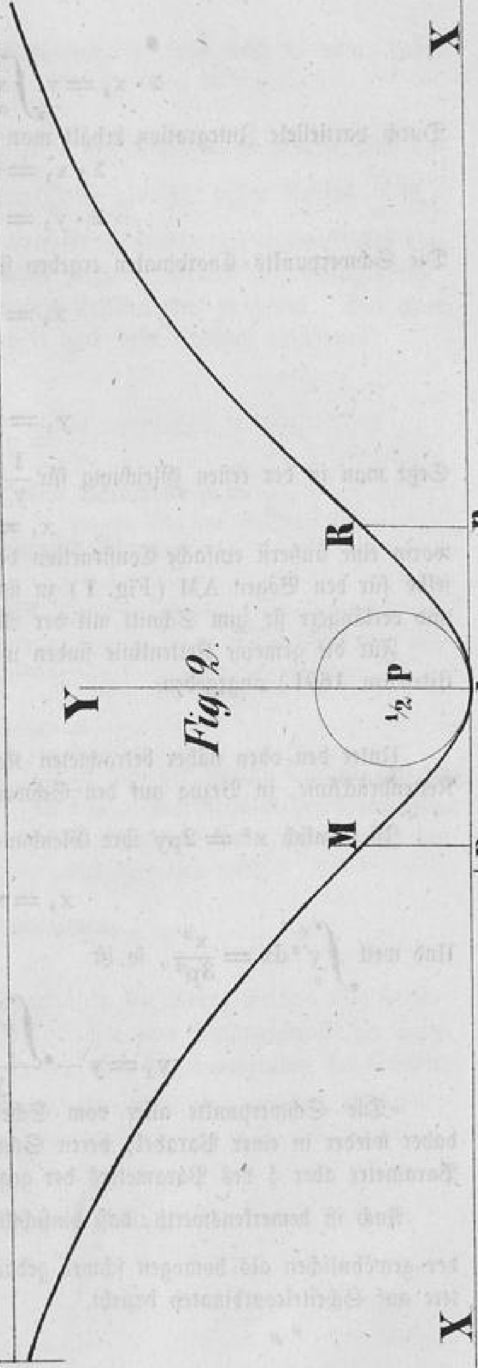

Fig. 2.