Die Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung vom 6. October 1859, so wie der Lehrplan für den Unterricht im Zeichnen vom Jahre 1863 fordert für die Realschulen erster Ordnung eine genaue auf mathematischen Grundlagen aufgebaute Kenntniß der beschreibenden Geometrie zu dem Zweck, alle graphischen Darstellungen in ihrem wahren Grunde verstehen und demzufolge für gegebene oder gedachte Raumgebilde verwenden zu können. Eine graphische Darstellung soll aber ein Raumgebilde entweder so wiedergeben, daß sein Bild auf das Auge des Beobachters denselben Eindruck macht, wie das Raumgebilde selbst, oder sie soll es möglich machen, die wirkliche Größe und gegenseitige Lage der Theile desselben aus ihr selbst ohne große Schwierigkeit erkennen zu können. Ersteres leistet die perspectivische oder Central-, letzteres die geometrische oder Orthogonal-Projection. Beide sind die einfachsten, gebräuchlichsten Projectionsarten, jene unentbehrlich für den Maler, diese für den Techniker. Die nächste Aufgabe des wissenschaftlichen Zeichenunterrichts muß daher sein, die Schüler von dem Zeitpunkte an, wo ihre mathematischen Kenntnisse es ermöglichen, theoretisch und praktisch mit allen wesentlichen Theilen dieser Projections-Arten innig bekannt zu machen. Da mir keine für uns brauchbare Behandlung des Gegenstandes bekannt war, so habe ich in unserm Schulprogramm vom Jahre 1864 eine solche zu geben versucht und glaube nach dem Urtheile sachverständiger Collegen und meiner eigenen seitherigen Erfahrung darin im Wesentlichen das Richtige getroffen zu haben. Ich habe mir aber schon damals nicht verhehlt, daß eine Beschränkung des mathematischen Zeichenunterrichts auf Perspective und einfache Orthogonal-Projection in Betracht des hervorragenden Werthes, den unsere Schulart auf alle mathematischen Disciplinen zu legen genöthigt ist, doch auf die Dauer wohl nicht genügen könne, ja ich glaube annehmen zu dürfen, daß die vorgesetzten Behörden eine solche bei Abfassung jener gedachten Verordnungen selber nicht im Sinne gehabt haben. Sollen wirklich alle gebräuchlichen graphischen Darstellungen vom Schüler verstanden und ihm nutzbar gemacht werden, so können nicht blos diejenigen gemeint sein, denen Perspective und einfache Orthogonal-Projection zu Grunde liegen, sondern auch die axonometrischen, wie Cavalier-, Vogel-Perspective u. s. w. und das um so mehr, als gerade diese, vor allen die ersteren die Vorzüge der Central- und orthographischen Projection in einem einzigen Bilde vereinen, d. h. nahezu die scheinbare Gestalt wiedergeben, und ganz genau auf die wirkliche schließen lassen. Außerdem möchte ich meinen, daß kein Theil der angewandten Mathematik dem gebildeten Manne nöthiger wäre, als das projectivische Zeichnen im Allgemeinen, seine wissenschaftlichen Gründe und seine praktische Anwendung. Es bleiben ihm ja sonst die einfachsten, tagtäglich benutzten bildlichen Darstellungen, ja selbst die einfachste Länderkarte, Vogelperspective, Perspective, Situationspläne u. s. w. ihrem Wesen nach vollkommen unverständlich. Es will mir demnach scheinen, daß unsere Schulart die gesammte Projectionslehre in ihren mathematischen und Zeichenunterricht aufnehmen müßte, vorausgesetzt, daß es die Rücksicht auf die Arbeits- und Fassungskraft unserer Schüler, wie auf den übrigen zu bewältigenden mathematischen Unterrichtsstoff gestattete. Der pädagogische Werth der Projectionslehre unterliegt keinem Zweifel. Kein anderer Theil der Mathematik möchte so wie sie geeignet sein, das Vorstellungs-Vermögen des Schülers zu bilden. Das liegt im Begriffe der Zeichnung überhaupt, welche Raumgebilde von drei Dimensionen in zweien darstellen soll. Mathematische Vorkenntnisse verlangt die Projectionslehre nur aus dem Bereiche des mathematischen Pensums unserer Schule bis inclusive Secunda, insonderheit die Stereometrie und ebene Trigonometrie, wenn man nicht wie Weisbach, der Begründer des axonometrischen Zeichnens, die Fundamental-Aufgaben desselben vermittelst der sphärischen Trigonometrie beweisen will, was nicht nöthig ist. Es könnte daher Perspective und orthographische Projection wohl noch als Schluß des Secundaner-Pensums der Stereometrie zugefügt und würde von allen verstanden werden, da man die wenigen in ihr vorkommenden trigonometrischen Größen für die der Trigonometrie noch nicht Kundigen übergehen oder durch geometrische Werthe ersetzen könnte. Dafür müßte etwa die neuere Geometrie als weniger nöthig und schwieriger nach Prima verlegt und die Gesammt-Projectionslehre in größter mathematischer Schärfe ebendaselbst behandelt werden. Das kann denn in wenigen Wochen geschehen, da die Kenntniß jener einfacheren Projectionsweisen vorausgesetzt und auf den früher gebrauchten Leitfaden zurückgewiesen werden darf. Eine im Grunert-schen Archiv, Theil 43, enthaltene von Curtze übersetzte und auf dem technischen Institut zu Turin dem mathematischen Zeichnen zu Grunde gelegte Schrift des italienischen Finanzministers Sella (Sui principii geometrici del disegno e specialmente dell' axonometrico dalle lezioni di geometria applicata alle arti di Quintino Sella) behandelt die geometrischen Principien des Zeichnens insbesondere die Axonometrie kurz und lichtvoll, doch nicht so umfassend, wie uns wünschenswerth und so einfach, wie uns möglich ist, da wir mathematische Kenntnisse voraussetzen dürfen, die man von den Schülern des Turiner Instituts nicht zu verlangen scheint. Doch hat mich die ausgezeichnete Schrift vor allen veranlaßt, darüber nachzudenken, ob und wie projectivisches Zeichnen im Allgemeinen, vornämlich das axonometrische, eine größere Berücksichtigung auf den Realschulen erster Ordnung finden könnte, als ihm bis dahin wohl zu Theil geworden ist. Sella behauptet, daß seine befähigteren Schüler sich mit großer Leichtigkeit in die axonometrische Darstellung gefunden hätten und auch ich habe keine Schwierigkeit bemerkt, die sich nicht mit einiger Aufmerksamkeit vermeiden ließe. Ich will daher in Folgendem versuchen, darzulegen, wie ich mir vom Gesichtspunkte der Kürze, Übersichtlichkeit und einheitlichen Entwickelung aus einen solchen Abriß der gesammten Projectionslehre denke und bitte erfahrene Fachgenossen, mir wie das mit meiner früheren Abhandlung über Perspective und Orthogonal-Projection zu meiner großen Freude geschehen ist, unumwunden mitzutheilen, was sie anders und besser wünschen. Was ich in den vortrefflichen Arbeiten von Sella, Weißhaupt und vornämlich Pohlke für meinen Zweck verwendbar fand und nicht besser machen konnte, habe ich ohne Weiteres angenommen.

Axonometrie im Allgemeinen.

§ 1. **Einleitung.** Die Lage eines Punktes in einer Ebene wird durch zwei Coordinaten, d. h. durch seine Entfernungen von zwei in der Ebene liegenden sich rechtwinklig schneidenden Geraden, Coordinatenachsen, X- und Y-Achse, bestimmt. Ihre absoluten Werthe allein geben vier Punkte, sie und ihre Richtungen (positive und negative Coordinaten), oder die Projectionen des Punktes auf die Achsen nur einen (Fig. 1). Drei Coordinaten, d. h. seine Entfernungen von dreien sich rechtwinklig schneidenden Ebenen bestimmen die Lage eines Punktes im Raume. Diese Ebenen heißen Coordinatenebenen, Ebene der XY, YZ, XZ, ihre Schnitte Coordinatenachsen, X-, Y-, Z-Achse, ihr gemeinsamer Punkt Anfangspunkt der Coordinaten. Die absoluten Werthe jener Entfernungen oder Coordinaten allein bestimmen 8 Punkte, in dem der Punkt in jedem der durch die Coordinatenebenen gebildeten 8 Raumwinkel (Fig. 2) liegen kann, die Richtung derselben nebst ihren Längen (positiv oder negativ) oder die drei Projectionen des Punktes nur einen. Drei durch den Punkt mit je einer der Coordinatenebenen parallel gelegte Ebenen bilden mit diesen ein rechtwinkliges Parallelepipedum von 3 mal vier einander parallelen Kanten, von denen je eine mit den Coordinatenachsen zusammenfällt (Fig. 3). Diese drei Kanten, welche den erwähnten Entfernungen des Punktes von den drei Coordinatenebenen gleich sind, heißen seine Coordinaten, x, y, z, und bestimmen also seine Lage im Raume. Sind demnach sämmtliche ein Raumgebilde bestimmenden Eckpunkte desselben durch ihre Coordinaten gegeben, so ist das Raumgebilde bestimmt. Wird nun das (Fig. 3) den Punkt p im Raume angebende Parallelepipedum auf eine beliebige im Allgemeinen mit keiner Coordinatenachse parallele Projectionsebene P projicirt, so sind die Projectionen jener 3 Systeme von je 4 unter sich parallelen Kanten je einander parallel und gleich, weil sie gleiches Verkürzungsverhältniß haben, und die je einer der 3 Systeme die Projectionen der Coordinaten des Punktes, dessen Projection auf P also durch die seiner Coordinaten vollkommen gegeben ist. Die allgemeine Methode des axonometrischen Zeichnens ist demnach folgende: Man projicirt die Coordinatenachsen, bestimmt das Verkürzungsverhältniß ihrer Maaßeinheit, trägt die gegebenen Coordinaten des zu projicirenden Punktes in der Weise auf ihnen ab, daß die abgetragenen Stücke dieselben Quoten der verkürzten Maaßeinheiten sind, welche die ursprünglichen Coordinaten von den ursprünglichen Maaßeinheiten der Achsen waren und vollendet durch Parallele die Projection des bestimmenden Parallelepipedums oder einfacher, man schneidet x' ab, zieht vom Abschnittspunkt y' parallel der Y'-Achse, vom Endpunkte des y' endlich z' parallel der Z'-Achse, so ist der Endpunkt von z' die verlangte Projection des durch seine Coordinaten gegebenen Punktes. Seien z. B. (Fig. 4) O'X', O'Y', O'Z' die projicirten Achsen, o'a', o'b', o'c' ihre Verkürzungsverhältnisse, so wäre p' die verlangte Projection des durch seine Coordinaten $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{4}$ gegebenen Punktes. In gleicher Weise findet man die Projectionen aller durch ihre Coordinaten in Grund- und Aufriß der gewöhnlichen Orthogonal-Projection gegebenen bestimmenden Punkte eines Raumgebildes und durch die Verbindungslinien dieser projicirten Punkte die Projection des Raumgebildes selbst. Axonometrie ist die Methode, die Projection eines Raumgebildes aus den Projectionen der Coordinaten seiner Bestimmungspunkte zu finden.

Zu diesem Zweck hat also die Axonometrie zwei Hauptaufgaben zu lösen:

1) Die Coordinatenachsen zu projiciren, d. h. die Winkel zu bestimmen, unter denen sich ihre Projectionen auf der Projectionsebene schneiden.

2) Die Verkürzungsverhältnisse zu finden, unter denen sich jene Achsen projiciren.

Um diese Aufgaben zu lösen, muß die Lage der Projectionsebene gegen die Coordinatenachsen angegeben werden. Das geschieht durch Feststellung des Neigungswinkels ε, den eine der Coordinatenebenen, z. B. die der XY, der Grundebene (G) mit der Projectionsebene P und des Winkels δ, den eine Neigungslinie der Grundebene gegen P mit einer der Achsen X oder Y, z. B. X, bildet. Die Spur der Grundebene auf P oder ihr Schnitt mit letzterer heißt Grundlinie (G'); sie steht auf der Projection der Z-Achse senkrecht, weil letztere auf der Grundebene, diese auf der die Z-Achse projicirenden Ebene, und P auf dieser senkrecht ist. Zwei Ebenen G und P sind also auf der die Z-Achse projicirenden Ebene senkrecht, ihr Durchschnitt G' also auch, darum dieser senkrecht auf der Projection der Z-Achse. (Siehe descript. Geom. § 18 c., Aufg. 1.) Man zieht die Projection der Z-Achse immer von oben nach unten, die der Grundlinie daher senkrecht darauf von links nach rechts.

§ 2. **Hauptaufgabe.** Die Coordinatenachsen zu projiciren und die Verkürzungsverhältnisse zu finden, wenn δ und ε gegeben sind.

a) Sei (Fig. 5 a) G' die Grundlinie, d. h. die Spur der unter dem Winkel ε gegen die Projectionsebene geneigten Grundebene; Grundebene und Neigungslinie of seien um G' nach oben, der Neigungswinkel ε um seine Projection f'o' seitwärts in P herabgeschlagen, so sind o'x', o'y' die Projectionen der X- und Y-Achse, o'z' die der Z-Achse, weil o'z' senkrecht auf G' ist, also in die gleichfalls senkrechte Projection der Neigungslinie fo' fällt. (Siehe descript. Geom. § 14, Aufg. 2.) Sind oh', oh'', oh''' die Maaßeinheiten, so sind o'm, o'n, o'f ihre respectiven Verkürzungen, α und β die spitzen Winkel, welche die projicirte Z=Achse respective mit der projicirten X= und Y=Achse bildet. Die gefundene Lage der Projectionen ist diejenige, wie sie dem in unendlicher Entfernung unter P und also O befindlichen Beobachter erscheint, wenn P die Bildebene für parallele senkrechte Strahlen ist, also für von unten gesehene Coordinaten, Fig. 5 b ist ihre Lage, wenn sie von oben betrachtet werden.

Sind demnach nur die Coordinatenachsen (Fig. 5 a) projicirt, so kann man ihre Verkürzungsverhältnisse leicht finden. Man lege nämlich senkrecht auf o'z' eine beliebige Grundlinie G', denke die X= und Y=Achse, die bei O in der Verlängerung von o'z' einen Rechten bilden, herabgeschlagen, trage auf ihnen von O an die Maaßeinheit ab in Oh und Oh', ziehe hn und h''m, verzeichne über o'f' als Kathete, und of' als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck fo'o, schlage es herab, errichte in o auf f'o die Maaßeinheit oh'', so ist deren Projection auf o'z', (in der Fig. 5 a = o'f') das Verkürzungsverhältniß der Z=Achse, o'm und o'n das der X= und Y=Achse, ε der Neigungswinkel der Grundebene.

b) Ist (Fig. 6) die Ebene des Papiers die der Grundebene, a'x', a'y' also die H=Projection der X= und Y=Achse und deren Einheit, a' die Projection der Z=Achse, a'b' die Neigungslinie der Grundebene gegen P, δ der Winkel, den sie mit der X=Achse bildet, so lege man durch a'b' senkrecht auf G eine Ebene P_3, deren Spur A_2 ist, projicire darauf x', y', z' in x''', y''' und z''' (letzteres nach rechts herabgeschlagen); lege dann senkrecht auf P_3 eine die Grundebene unter dem Winkel ε schneidende Ebene P_4, welche P_3 in A_3 (senkrecht über A_2) schneidet, projicire darauf x, y, z in x'''', y'''', z'''', so liegt x'''' links von x° um x'x''', y'''' rechts von y° um y'y''', a'''' und z'''' in A_3. Wird nun A_3 in die H=Ebene um A_2 gedreht, P_4 um A_3 nach oben, so fällt x°x'''' nach oben, y°y'''' nach unten und a''''x'''', a''''y'''',a''''z'''' sind die verlangten Projectionen der Achsen, (wäre die Z=Achse unterhalb G, so wäre ihre Projection a''''z''''' = a''''z'''', aber die Verlängerung dieser über a'''' nach links unten), (Fig. 7 giebt dieselben Resultate), α und β die Winkel, welche sie mit der Z=Projection bilden. Die Verkürzungsverhältnisse oder Reductions=Coefficienten der Achsen sind $\frac{a''''x''''}{a'x'} = q_x = \cos.\ \gamma_x$, $\frac{a''''y''''}{a'y'} = q_y = \cos.\ \gamma_y$, $\frac{a''''z''''}{a'z'} = q_z = \cos.\ \gamma_z$, wenn γ_x, γ_y, γ_z die Neigungswinkel der Achsen gegen P sind.

c) (Durch Rechnung.) Da die Projection der Z=Achse mit der der Neigungslinie der Grundebene gegen P zusammenfällt, so ist α die Projection des Winkels δ, den jene Neigungslinie mit der X=Achse bildet. Bildet nun irgend eine Linie (X=Achse) einer Ebene mit einer Neigungslinie einen Winkel δ (Fig. 8 a) und ist δ' (Fig. 8 b) seine Projection, so ist $\mathrm{tg.}\ \delta = \frac{nd}{na}$, $\mathrm{tg.}\ \delta' = \frac{nd}{na'}$, aber $na' = na \cdot \cos.\ \varepsilon$, also $\mathrm{tg.}\ \delta' = \frac{na \cdot \mathrm{tg.}\ \delta}{na \cdot \cos.\ \varepsilon} = \frac{\mathrm{tg.}\ \delta}{\cos.\ \varepsilon} = \mathrm{tg.}\ \delta \cdot \sec.\ \varepsilon$, also ist: I. $\mathrm{tg.}\ \alpha = \mathrm{tg.}\ \delta \cdot \sec.\ \varepsilon$,
und da die Y=Achse mit der Neigungslinie einen Winkel von $90 - \delta$ einschließt, so ist die tg. seiner Projection: II. $\mathrm{tg.}\ \beta = \mathrm{cotg.}\ \delta \cdot \sec.\ \varepsilon$.
Da $\sec.\ \varepsilon$ immer > 1, so ist $\alpha + \beta > 90$.

Nun ist (Fig. 5 a) $oh = oh' = oh''$ als Einheit angenommen $q_x = \cos.\ \gamma_x = o'm$, $q_y = \cos.\ \gamma_y = o'n$, $q_z = \sin.\ \varepsilon$. Aber in Fig. 8 a ist $ad = 1$ gesetzt, $dn = \sin.\ \delta$, $na = \cos.\ \delta$, und im Dreieck dna' ist $na' = na \cdot \cos.\ \varepsilon$, $da' = \sqrt{dn^2 + na'^2}$. Da nun das

Verkürzungsverhältniß von $\mathrm{da} = \frac{\mathrm{da}'}{\mathrm{da}} = \mathrm{da}'$ ist, so wird $\mathrm{da}' = \sqrt{\sin.\ \delta^2 + \cos.\ \delta^2\ \cos.\ \varepsilon^2}$,

also:

$$\text{III.}\quad q_x = \cos.\ \gamma_x = \sqrt{\sin.\ \delta^2 + \cos.\ \delta^2 \cdot \cos.\ \varepsilon^2},$$

$$\text{IV.}\quad q_y = \cos.\ \gamma_y = \sqrt{\cos.\ \delta^2 + \sin.\ \delta^2 \cdot \cos.\ \varepsilon^2},$$

$$\text{V.}\quad q_z = \cos.\ \gamma_z = \sin.\ \varepsilon.$$

§ 3. **Hauptaufgabe.** Die Coordinatenachsen zu projiciren, so wie δ und ε zu finden, wenn die Verkürzungsverhältnisse gegeben sind.

Der Neigungswinkel einer Achse X gegen eine Projectionsebene P ist gleich dem Neigungswinkel, den eine auf P senkrechte Linie, also eine projicirende, mit der auf jener X-Achse senkrechten Coordinatenebene (YZ-Ebene) bildet, denn (Fig. **9**) $\gamma_x + a = 90$, $a + b_x = 90$, also $\gamma_x = b_x$, also $\gamma_y = b_y$, $\gamma_z = b_z$, mit b_x, b_y, b_z jene Neigungswinkel bezeichnet. Sind aber b_x, b_y, b_z die Neigungswinkel einer Geraden gegen 3 rechtwinklige Coordinatenebenen, so ist (Fig. **10** a und b) $\sin.\ b_x^2 = \cos.\ b_z^2 - \sin.\ b_y^2 = 1 - \sin.\ b_z^2 - \sin.\ b_y^2$, also

$$\sin.\ b_x^2 + \sin.\ b_y^2 + \sin.\ b_z^2 = 1$$

und wenn man die sinus durch die cosinus ausdrückt $1 - \cos.\ b_x^2 + 1 - \cos.\ b_y^2 + 1 - \cos.\ b_z^2 = 1$, also $\cos.\ b_x^2 + \cos.\ b_y^2 + \cos.\ b_z^2 = 2$, darum auch

$\cos.\ \gamma_x^2 + \cos.\ \gamma_y^2 + \cos.\ \gamma_z^2 = 2$ oder

$$\text{VI.}\quad q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 2,\ 1 = \frac{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{2} = S, \text{ wenn } q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 2S.$$

$$\text{VII.}\quad \cos.\ \gamma_x^2 = \frac{2q_x^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = \frac{q_x^2}{S},\ \cos.\ \gamma_y^2 = \frac{2q_y^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = \frac{q_y^2}{S},$$

$$\cos.\ \gamma_z^2 = \frac{2q_z^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = \frac{q_z^2}{S}.$$

Da der cosinus immer ein echter Bruch (und nur in einem Falle $= 1$) ist, so muß $q_x^2 + q_y^2 > q_z^2$, $q_x^2 + q_z^2 > q_y^2$, $q_y^2 + q_z^2 > q_x^2$, d. h. so beschaffen sein, daß man aus Strecken, die den Quadraten ihrer Verkürzungsverhältnisse proportional sind, ein Dreieck construiren kann.

Aus V. und VII. folgt $\cos.\ \varepsilon^2 = 1 - \cos.\ \gamma_z^2 = 1 - \frac{2q_z^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = \frac{q_x^2 + q_y^2 - q_z^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$

also

$$\text{VIII. a)}\quad \cos.\ \varepsilon = \sqrt{\frac{q_x^2 + q_y^2 - q_z^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}} = \sqrt{\frac{S - q_z^2}{S}}$$

$$\text{b)}\quad \sec.\ \varepsilon = \sqrt{\frac{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{q_x^2 + q_y^2 - q_z^2}} = \sqrt{\frac{S}{S - q_z^2}}.$$

Aus III. und VII. ist $\cos.\ \gamma_x^2 = q_x^2 = \frac{2q_x^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = \sin.\ \delta^2 + \cos.\ \delta^2 \cdot \cos.\ \varepsilon^2 = \sin.\ \delta^2\,(1 - \cos.\ \varepsilon^2) + \cos.\ \varepsilon^2$ und für $\cos.\ \varepsilon^2$ seinen Werth aus VIII. a substituirt

$$\text{IX. a)}\quad \sin.\ \delta = \sqrt{\frac{q_x^2 - q_y^2 + q_z^2}{2q_z^2}} = \sqrt{\frac{S - q_y^2}{q_z^2}}.$$

$$\text{b)}\quad \cos.\ \delta = \sqrt{\frac{-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{2q_z^2}} = \sqrt{\frac{S - q_x^2}{q_z^2}},$$

demnach

$$\text{X. a)}\quad \mathrm{tg.}\ \delta = \sqrt{\frac{q_x^2 - q_y^2 + q_z^2}{-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}} = \sqrt{\frac{(S - q_y^2)}{(S - q_x^2)}}.$$

$$\text{b) } \operatorname{cotg}.\,\delta = \sqrt{\frac{-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{q_x^2 - q_y^2 + q_z^2}} = \sqrt{\frac{(S - q_x^2)}{(S - q_y^2)}},$$

und setzt man VIII. b, X. a und b in I. und II. ein, so ist

$$\text{XI. a) } \operatorname{tg}.\,\alpha = \sqrt{\frac{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) \cdot (q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)}{(q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)\,(-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)}} = \sqrt{\frac{S \cdot (S - q_y^2)}{(S - q_z^2) \cdot (S - q_x^2)}}.$$

$$\text{b) } \operatorname{tg}.\,\beta = \sqrt{\frac{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\,(-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)}{(q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)\,(q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)}} = \sqrt{\frac{S \cdot (S - q_x^2)}{(S - q_z^2)\,(S - q_y^2)}}.$$

Setzt man für q_x, q_y, q_z die proportionalen Werthe m, n, p, so ist die Einheit des Maaßstabes für die Achsen proportional dem Werthe $\sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}}$, die wahren Werthe von q_x, q_y, q_z werden dann aus den Gleichungen VII. gefunden.

Ist z. B. $m : n : p = \frac{9}{10} : \frac{1}{2} : 1$, so ist $\sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}} = 1{,}0149$, $\delta = 62^\circ\ 2'$, $\varepsilon = 80^\circ\ 10'$, $\alpha = 84^\circ\ 49'$, $\beta = 72^\circ\ 11'$, $q_x = 0{,}88476$, $q_y = 0{,}49267$, $q_z = 0{,}98534$, $\gamma_x = 27^\circ\ 32'$, $\gamma_y = 60^\circ\ 29'$, $\gamma_z = 9^\circ\ 50'$.

Sollen nun die Coordinatenachsen ohne Anlegung der gefundenen Winkel α und β projicirt werden, so verzeichne man ein Dreieck (Fig. 11) ABC aus q_x^2, q_y^2, q_z^2 oder aus Größen, die ihnen proportional sind (m^2, n^2, p^2), halbire die Winkel, so sind die Halbirungslinien die Projectionen der Achsen und schneiden sich unter den Winkeln α und β. Denn nach Sätzen der ebenen Trigonometrie ist $\sin.\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b-c) \cdot (a-b+c)}{4bc}}$

$\cos.\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b+c)\,(-a+b+c)}{4bc}}$, also $\operatorname{tg}.\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{(a+b+c)\,(-a+b+c)}}$

$$= \sqrt{\frac{(q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)\,(q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)}{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\,(-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)}} = \sqrt{\frac{(m^2 + n^2 - p^2)\,(m^2 - n^2 + p^2)}{(m^2 + n^2 + p^2)\,(-m^2 + n^2 + p^2)}},$$

was (s. XI. b) die tg. des Complements von β ist. $\frac{1}{2}A$ ist also $= 90 - \beta$, was auch aus der Figur hervorgeht, wenn Winkel CMN $= \beta$ gesetzt wird. Denn $\beta = \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{2}(180 - A) = 90 - \frac{1}{2}A$, also $\frac{1}{2}A = 90 - \beta$. Die Einheit des Maaßstabes für Grund- und Aufriß, wie für die mit der Projectionsebene parallelen Strecken ergiebt sich ohne Weiteres aus Fig. 12 als od = 1, oder für $m : n : p = \frac{9}{10} : \frac{1}{2} : 1 = 9 : 5 : 10$ resp. zu 1,0149 od und 10,149 od. Macht man oa′, ob′, oc′ respective = oa, ab, bc, so sind die von ihnen und od eingeschlossenen in den rechtwinkligen Dreiecken oda′ u. s. w. liegenden Winkel $= \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$.

§ 4. **Hauptaufgabe.** Ein Raumgebilde, welches durch Grund- und Aufriß oder (siehe unten) nach der Methode der cotirten Ebenen, wie durch beigefügten Maaßstab gegeben ist, auf eine gegebene Ebene axonometrisch zu projiciren.

Man bestimme die Lage der Projectionsebene, d. h. die Winkel ε und δ, finde (nach § 2 a oder b) durch Construction die Winkel α und β oder die Lage der projicirten Achsen gegeneinander und ihre Verkürzungen, oder berechne beide nach 2 c, oder sind die Verkürzungsverhältnisse (unter Beobachtung der in § 3 aufgeführten Bedingungen) gegeben, so berechne oder construire man die Lage der projicirten Achse nach § 3, zeichne sodann die 4 Maaßstäbe, den des Grund- und Aufrisses, wie die 3 aus den Verkürzungsverhältnissen der Achsen ersichtlichen in 14 a, b, c, d und die gleichen Theilen der Einheit ab von 14 a entsprechenden Theile dieser verkürzten Achsen wie Fig. 13 ohne Erklärung ergiebt. Sie sind nach der Annahme $m:n:p = \frac{9}{10}:\frac{1}{2}:1$ oder $q_x = 0{,}88476$, $q_y = 0{,}49267$, $q_z = 0{,}98534$ gezeichnet. Nach diesen Maaßstäben werden endlich die Coordinaten jedes das Raumgebilde kennzeichnenden Punktes unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen aufgetragen (siehe Einleitung) und ihre Verbindungslinien erzeugen die axonometrische Projection des Raumgebildes. In Bezug auf die Zeichnung bemerke man, daß man die Projectionen derjenigen Kanten durch ausgezogene Linien angiebt, welche in der Richtung der auf der Projectionsebene senkrechten Projectionsstrahlen gesehen werden können, und daß man die verdeckten entweder gar nicht zeichnet oder durch punktirte oder doch unterbrochene Linien bezeichnet.

Aufgabe 1. Einen in einer Coordinatenebene liegenden Punkt axonometrisch zu projiciren.

Der Punkt p habe die Coordinaten $x = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$, liege also in der Ebene XZ, so trage man vom Anfangspunkte der projicirten Achsen auf X′ die Hälfte der Einheit des X′-Maaßstabes (Fig. 14 b. Die Maaßstäbe Fig. 14 werden allen folgenden Aufgaben der allgemeinen Axonometrie zu Grunde liegen), auf Z′ die Hälfte der Einheit des Z′-Maaßstabes, ziehe durch die Endpunkte dieser Stücke gegenseitig Parallelen, so ist deren Durchschnitt die axonometrische Projection von p. In gleicher Weise finden sich die Projectionen jedes durch seine Coordinaten (positive oder negative) gegebenen Punktes einer Coordinatenebene; derselbe kann 12 verschiedene Lagen haben.

Aufgabe 2. Eine in einer Coordinatenebene liegende Gerade axonometrisch zu projiciren.

Die Gerade liege in der Ebene XY und schneide die Achsen X und Y in der Entfernung respective ab und ac vom Anfangspunkt. Man trage ab und ac nach den Maaßstäben der X′- und Y′-Achse auf diesen Achsen ab, verbinde b′ mit c′, so ist b′c′ die axonometrische Projection von bc, ihr Verkürzungsverhältniß $\frac{b'c'}{bc}$. Schneidet sie die Achse nur einmal oder gar nicht im Zeichenraum, so projicire man 2 ihrer Punkte durch Abtragung ihrer Coordinaten und verbinde beide Projectionen derselben. Linien, welche einer der Achsen ihrer Ebene parallel sind, bedürfen zu ihrer Projicirung nur des Abtragens ihrer Entfernung von der andern.

Aufgabe 3. Eine in einer Coordinatenebene liegende krumme Linie axonometrisch zu projiciren.

Man projicire so viel Punkte derselben aus ihren dem geometrischen Risse entnommenen Coordinaten, als zur Darstellung nöthig erscheinen.

Aufgabe 4. Jede geradlinigte Figur, welche in einer Coordinatenebene liegt, axonometrisch zu projiciren.

Man projicire ihre Endpunkte aus deren Coordinaten, und verbinde die Projectionen, oder bestimme, wenn die Figur und der Zeichenraum es gestattet, die Durchschnitte der einzelnen (verlängerten) Seiten mit den entsprechenden Achsen, projicire diese Seiten, so bestimmen die Durchschnitte aller ihrer Projectionen die gesuchte Projection. Fig. 15 ist die axonometrische Projection eines in der ZY-Ebene symmetrisch um den Anfangspunkt gelegenen regelmäßigen Sechsecks vom Radius 1 des umgeschriebenen Kreises und die eines ebenso in der Ebene XY gelegenen Quadrats.

Aufgabe 5. Einen außerhalb der Coordinatenebene gelegenen Punkt axonometrisch zu projiciren.

In Fig. 16a sei der Punkt p durch die Coordinaten $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{4}{5}$, $z = \frac{2}{5}$ gegeben, in Fig. 16b ist π seine axonometrische Projection; π', π'', π''' heißen sein axonometrischer Grund-, Auf- und Seitenriß. Der axonometrische Grundriß eines Punktes im Raume wird also folgendermaßen gewonnen: Man projicirt ihn zunächst auf die Grundebene (in p'), dann diese Projection auf die gegen die Grundebene unter einem Winkel ε geneigte Projectionsebene in π', so daß π' also eine Doppelprojection des in π direct auf die Projectionsebene projicirten Punktes p ist. Die Verbindungslinien der axonometrischen Grundrisse aller Eckpunkte einer Raumfigur geben den axonometrischen Grundriß derselben.

Aufgabe 6. Eine gerade Linie im Raume axonometrisch zu projiciren.

Man projicire ihre aus dem Grund- und Aufriß, respective Seitenriß zu entnehmenden Spuren durch deren Coordinaten, und verbinde ihre Projectionen oder bei begrenzten Linien zwei ihrer aus jenen Rissen ersichtlichen Punkte und verbinde sie. Gerade im Raume können der Projectionsebene oder einer der Achsen parallel oder weder jener noch diesen parallel sein. Im ersten Falle ist ihre Projection ihr selbst gleich und wird wie sie mit dem geometrischen Maaßstabe gemessen, im zweiten Falle ist ihr Verkürzungsverhältniß das derjenigen Achse, welcher sie parallel ist, sie wird daher nach deren Maaßstabe gezeichnet, im dritten Falle erscheint sie doppelt verjüngt.

Aufgabe 7. Ein beliebiges Raumgebilde axonometrisch zu projiciren.

Man projicire die maaßgebenden Punkte desselben und verbinde sie. Das ist in Fig. 19 und 20 mit den in Fig. 17 und 18 durch Grund-, Auf- und Seitenriß gegebenen Körpern, einem Würfel und einem Grabkreuze geschehen.

§ 5. Geometrischer Werth axonometrischer Zeichnungen. Jeder Raumpunkt ist durch seine Coordinaten (siehe § 4 Aufg. 5) axonometrisch zu projiciren; soll seine Lage im Raume, d. h. sein geometrischer Grund-, Auf- und Seitenriß, also umgekehrt aus der axonometrischen Zeichnung erkannt werden, so muß dieselbe diese Coordinaten, natürlich in den entsprechenden Verkürzungen und Lagen, enthalten, oder sie müssen doch aus der Zeichnung zu entnehmen sein. Die axonometrische Projection eines Punktes allein bestimmt daher dessen Lage noch nicht, es ist vielmehr nöthig, daß man (Fig. 16b) zu diesem Zwecke einen axonometrischen Grundriß π' zeichnet und dadurch die axonometrischen Coordinaten $o'\pi^{\circ}$, $\pi^{\circ}\pi'$, $\pi'\pi$ gewinnt. Diese respective auf den X'-, Y'-, Z'-Maaßstäben (Fig. 14) abgemessen und die darauf gefundenen Quoten der Einheit auf dem geometrischen Maaßstabe 14a genommen liefern die 3 Coordinaten des Raumpunktes. Bei verwickelteren Raumgebilden ist es der Deutlichkeit wegen angemessen, der axonometrischen Projection in einiger Entfernung unter derselben einen axonometrischen Grundriß beizugeben, dem die X- und Y-Coordinaten entnommen werden; die Z-Coordinaten ergiebt die Projection mit Leichtigkeit. Alle der Projectionsebene parallelen Geraden projiciren sich in ihrer wahren Länge, ihre Projectionen werden daher nach dem geometrischen Maaßstab 14a, die den Achsen parallelen dagegen nach dem Maaßstabe der Achsen gemessen, denen sie parallel sind. Die Rücksicht auf die Richtung der Schwerkraft nöthigt zur Annahme senkrechter und die auf ihre Verwendbarkeit empfiehlt für Bauwerke die wagerechter, sich rechtwinklig schneidender Begränzungslinien, so daß als ihre Grundform im Allgemeinen ein rechtwinkliges Parallelepipedum angenommen werden kann. Bringt man ein solches Bauwerk demnach in die einfachste Lage zur H- und V-Ebene, d. h. seine Grundfläche parallel mit ersterer oder noch besser mit ihr zusammenfallend, seine senkrechten Längsflächen parallel zur V-Ebene, so sind die Coordinaten seiner Eckpunkte am einfachsten aus seinen Rissen erkennbar und fast alle Geraden ohne Weiteres aus seiner axonometrischen Projection mit den entsprechenden Maaßstäben zu messen. Eine Gerade dagegen, welche zu keiner Coordinatenachse, auch nicht zur Projectionsebene parallel ist, also eine doppelt schiefe Stellung hat, kann aus ihrer axonometrischen Projection nicht unmittelbar nach einem der Maaßstäbe entnommen werden. Es geschieht dies vielmehr in folgender Weise. Ist (Fig. **21**) ab die axonometrische Projection einer solchen Linie, a′b′ die ihrer H-, a″b″ die ihrer V-Projection, so ist ab die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks AB′B, dessen eine Kathete B′B die auf dem Z′-Maaßstabe genommene und auf dem geometrischen **14** a abgetragene Linie bb′ ist. Die andere Kathete AB′ wird gefunden, indem man b′d auf dem X′-, ad auf dem Y′-Maaßstabe nimmt, ihre Größen in die des geometrischen umwandelt und aus den umgewandelten ein bei d rechtwinkliges Dreieck verzeichnet. Die Hypotenuse desselben ist AB′. Ist nur die Strecke bc projicirt, so findet man ihre wahre Länge aus einem ganz ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke CC‴B, BC‴ wie früher BB′ und C‴C wie früher B′A, hier aus dem Dreiecke b′c′e′. Oder man verwandelt die axonometrischen Risse einer solchen Raumlinie in geometrische und bestimmt ihre wahre Länge nach den in der descriptiven Geometrie gegebenen Regeln. Nach eben diesen Regeln verwandelt man am besten die axonometrischen Risse eines Raumwinkels in geometrische und schlägt den Winkel herab. (Siehe descriptive Geometrie, § **10** b Hauptaufgabe.) Ein gleiches Verfahren wendet man an um die wahre Größe eines von zwei Ebenen gebildeten Winkels zu finden, (descript. Geom. § **20** b Hauptaufg. **2**) wenn derselbe nicht unmittelbar aus der Projection erkennbar sein sollte.

§ 6. Vortheile des axonometrischen Zeichnens. Die axonometrische Projection eines Raumgebildes giebt ein mehr oder minder anschauliches Bild desselben, wie es einem in sehr großer Entfernung darüber oder darunter befindlichen Auge in der Richtung der Projectionsstrahlen erscheint, ein mehr oder minder anschauliches, je nachdem die Projection möglichst viel und vor allem die das Gebilde vorzüglich charakterisirenden Begrenzungsflächen entwickelt. Nach diesen Erfordernissen muß die Lage der zu projicirenden Coordinatenachsen, d. h. müssen die Winkel ε und δ oder die von diesen abhängigen Verkürzungsverhältnisse der Achsen in jedem einzelnen Falle gewählt werden. Mit der zunehmenden Größe des Winkels ε nimmt nämlich die Entwickelung aller mit der Grundebene parallelen Begrenzungsflächen ab, und umgekehrt. Die der Z-Achse parallelen Seiten des Raumgebildes zeigen sich je größer ε, desto mehr entwickelt, die der XZ- und YZ-Ebene parallelen Flächen der Länge, d. h. der Höhe Z nach auch; wie sie sich dagegen der Breite nach entwickeln sollen, das hängt von der Größe des Winkels δ ab. Wächst nämlich δ von **0** — **90**, so nimmt die Breite der der XZ-Ebene parallelen Flächen, d. h. ihre Entwickelung in der X-Richtung von **0** bis **1**, d. h. bis zu ihrer wirklichen Breite zu, die der YZ-Ebene parallelen in der Breite Y in demselben Maaße ab, ist $\delta = 45°$, so zeigen sich die Flächen beider letzten Kategorien gleichmäßig verkürzt. Dasselbe ergiebt sich aus der Größe der Verkürzungsverhältnisse. Je größer nämlich das Verkürzungsverhältniß der Z-Achse im Vergleich zu dem der übrigen gewählt wird, desto weniger entwickeln sich die der XY-Ebene parallelen Flächen und umgekehrt, je größer das der X-Achse, desto größer die Breite der X-Ausdehnung der der XZ parallelen und je größer die Verkürzung der Y-Achse, je größer die Y-Ausdehnung der der YZ parallelen Flächen. Der Zeichner hat es also stets in der Hand, ε und δ oder was dasselbe ist, die

Verkürzungsverhältnisse so zu wählen, wie es seinem jedesmaligen Zwecke entspricht. Das axonometrische Bild gewährt also passend, d. h. nach obigen Gesichtspunkten entworfen, fast dieselbe Anschaulichkeit also auch Möglichkeit, mit einem Blicke begriffen zu werden, als das rein perspectivische und giebt die wahren Größenverhältnisse, was letzteres nicht thut, in den meisten Fällen ohne alle Schwierigkeit und das mit Ausnahme der einfach orthogonalen Projection, bei der zwei auch drei Bilder oder Risse nöthig sind, in einem einzigen Bilde.

Axonometrische Projectionsarten.

§ 7. **Einleitung.** Die Winkel ε und δ bestimmen nach obigem die Lage der Achsen und die Gestalt des Projectionsbildes. Ihre Größen liegen zwischen 0° und 90°. Darnach unterscheiden sich 3 Gruppen von axonometrischen Projectionen. Die erste ergiebt sich unter der Annahme, daß beide Winkel keine anderen Werthe, als 0° und 90° haben, die zweite, daß einer von ihnen die Grenzwerthe 0° oder 90 hat, die dritte endlich, daß die Werthe beider immer zwischen 0 und 90° liegen.

I. Einfach orthogonale oder geometrische Projection.

Beide Winkel, ε und δ haben die Grenzwerthe 0° und 90°.

1. Geometrische Vertikalprojection oder Aufriß.

$$\varepsilon = 90,\ \delta = 90.$$

§ 8. Nach der Grundgleichung III. ($q_x = \cos.\ \gamma_x = \sqrt{\sin.\ \delta^2 + \cos.\ \delta^2\ \cos.\ \varepsilon^2}$) wird $q_x = 1$, nach IV. ($q_y = \cos.\ \gamma_y = \sqrt{\cos.\ \delta^2 + \sin.\ \delta^2\ \cos.\ \varepsilon^2}$) $q_y = 0$, nach V. ($q_z = \cos.\ \gamma_z = \sin.\ \varepsilon$) $q_z = 1$, d. h. die Ebene XZ ist mit der Projectionsebene parallel, projicirt sich und die in ihr liegenden Figuren also in ihrem wahren Werthe. Aufriß des Grabkreuzes in Fig. 18 a.

2. Geometrische Seitenprojection oder Seitenriß.

$$\varepsilon = 90,\ \delta = 0.$$

§ 9. Nach Grundgleichung III. ist $q_x = 0$, nach IV $q_y = 1$, nach V. $q_z = 1$, d. h. die Ebene YZ ist mit der Projectionsebene parallel, sie und ihre Figuren projiciren sich in ihrem wahren Werthe. Seitenriß des Grabkreuzes Fig. 18 b.

3. Geometrische Horizontalprojection oder Grundriß.

$$\varepsilon = 0.$$

§ 10. Ist $\varepsilon = 0$, so fällt die XY-Ebene mit der Projectionsebene zusammen oder ist ihr parallel, hat also keine Neigungslinie gegen dieselbe und der Winkel δ fällt aus. Nach III. ist $q_x = 1$, nach IV. $q_y = 1$, nach V. $q_z = 0$. Sämmtliche Figuren der Grundebene projiciren sich in ihrer wahren Größe; Grundriß des Grabkreuzes Fig. 18 c. Diese Projectionen 1, 2, 3 sind die der descriptiven Geometrie. Sie geben von allen axonometrischen Projectionsarten das am wenigsten anschauliche Bild, aus dem nur durch mathematische Schlüsse die wirklichen Formen und Größenverhältnisse abgeleitet werden können, entbehren also am meisten der scheinbaren Wahrheit des Perspectivbildes, haben aber dafür das größte Maaß objectiver. Auch geben sie einzeln keinen übersichtlichen Gesammteindruck, sondern erst in der Combinirung aller drei Bilder. Nichts desto weniger sind sie in der Technik die gebräuchlichsten, weil sie leicht entworfen und die wahren Größenverhältnisse ohne Schwierigkeit aus ihnen entnommen werden können. Alle den Coordinatenebenen parallelen Geraden des Raumgebildes können nämlich aus den ihnen ganz gleichen Projectionen unmittelbar entnommen und die nicht parallelen aus ihren Projectionen durch einfache Constructionen verzeichnet werden. Aus diesem Grunde gebührt der einfach orthogonalen oder geometrischen Projection unter allen Projectionsarten die erste Stelle, ja sie heißt, da vielen alle andern Projectionsarten unbekannt sind, auch wohl Projection überhaupt. (Siehe descriptive Geometrie im Programm von 1864.)

4. Methode der cotirten Ebenen.

§ 11. Wird ein Punkt p im Raume auf die mit dem Papier zusammenfallende H- oder XY-Ebene projicirt und der dadurch verzeichneten H-Projection p′ die Höhe in Zahlen zugefügt, in welcher p über (positiv) oder unter (negativ) p′ liegt, so ist der Punkt p dadurch gerade so genau bestimmt, als hätte man ihn auf 2, statt auf eine Coordinatenebene projicirt. (Fig. 22.) Ebenso verfährt man mit der H-Projection einer Linie, indem man zu zwei projicirten Punkten derselben ihre Höhen schreibt (Fig. 23), so wie mit der eines Körpers (Fig. 24). Die den Projectionen beigefügten Zahlen nennt man ihre Coten und die Methode selbst die der cotirten Ebenen. Ist der Körper nicht blos von Ebenen sondern auch von krummen Flächen begrenzt, so denkt man sich denselben parallel mit und in gleichen Abständen von der H-Ebene von Ebenen durchschnitten, projicirt dann die Durchschnittscurven, äquidistante Horizontalen oder auch blos Horizontalen genannt, und fügt die Coten ihrer Höhen hinzu. Je unregelmäßiger die krumme Fläche ist, desto mehr Horizontalen werden nöthig sein, um sich ein deutliches Bild derselben zu verschaffen. Sehr unregelmäßige Körper nöthigen zu Projectionen mit vielen Coten, welche die Zeichnung undeutlich machen und Irrungen veranlassen. Für solche Fälle sind die cotirten Ebenen also nicht zu empfehlen. Vornämlich wendet man sie beim Situationszeichen an. Situationspläne sind Horizontalprojectionen meist wenig oder gar nicht gegen die wagerechte XY-Ebene geneigter Erdoberflächenstücke, also nicht Bilder dieser selbst, sondern wenn die Stücke sehr geneigt sind, wesentlich davon verschieden und im umgekehrten Verhältniß ihrer Neigung verkleinert. Erhöhungen werden darauf am einfachsten durch Coten, übersichtlicher noch durch äquidistante Horizontalen unter Angabe ihrer Höhen und Neigungslinien ihrer Zwischenflächen (Fig. 25), malerischer noch durch sogenannte Bergstriche nach dem Gesichtspunkte bezeichnet, daß die von oben senkrecht auf den Berg fallenden Lichtstrahlen seine Seitenflächen im Verhältniß des Cosinus der Neigungswinkel beleuchten, welche sie mit der H-Ebene bilden. Je stärker diese daher geneigt sind, oder je näher die Äquidistanten einander liegen, desto dunkler müssen die Striche oder muß die statt ihrer jetzt gewöhnlich benutzte Farbe gehalten werden.

5. Centralprojection oder Perspective.

§ 12. Die Projectionen der gewöhnlichen descriptiven Geometrie veranschaulichen, wie erwähnt, einen Gegenstand am wenigsten, so groß auch ihr geometrischer Werth ist. Dieser Mangel an Anschaulichkeit wächst mit der Complicirtheit der projicirten Gegenstände. Es ist daher zumal für den Anfänger wünschenswerth, eine Darstellung des Gegenstandes zu haben, welche ihm, wenn auch auf Kosten jenes geometrischen Werthes, beim ersten Anblick eine klare Idee von der Form und Lage desselben zu geben vermag. Eine solche Darstellung ist die perspectivische Zeichnung. Sie entsteht, wenn man die Schnittpunkte verbindet, welche die von dem Auge nach den Ecken des Gegenstandes gezogenen Strahlen mit einer gewöhnlich senkrecht zwischen dem Auge und dem Gegenstande auf der H-Ebene stehenden Bildebene machen muß und ist in meiner früheren Abhandlung (descriptive Geometrie, Programm **1864**) ausführlich besprochen worden. Der zur Erlangung perspectivischer Bilder gewöhnlich und auch dort eingeschlagene Weg ist ein selbständiger, der keinerlei andere Lehren der geometrischen Projection voraussetzt, als die Kenntniß des Entwurfes eines Grund- und Aufrisses des abzubildenden Gegenstandes, sich sonst aber aus Betrachtungen ergiebt, zu denen die Lage des Auges, der Bildebene und des Gegenstandes unmittelbar veranlaßt. Aber auch durch Anwendung reiner Lehren der descriptiven Geometrie lassen sich perspectivische Bilder finden, so daß dann Centralprojection nur als ein Theil und zwar der angewandten einfachen orthogonalen zu betrachten wäre. Sind nämlich p' und p'' die H- und V-Projection eines Punktes, o' und o'' die des Auges (Fig. **26**), hgg' die senkrecht auf der H-Ebene stehende Tafel, gg' die Grundlinie, $o'p'$ und $o''p''$ die Projectionen eines nach dem Punkte p gehenden die Bildebene schneidenden Strahls, so denke man sich durch denselben eine auf der H-Ebene senkrechte also ihn projicirende Ebene, welche die Bildebene in einer auf der H-Ebene senkrechten Geraden schneiden wird, deren H-Projection a' und deren V-Projection $a''b''$ ist, b'' ist zugleich die V-Projection des Durchschnitts des nach p gerichteten Strahls und der Bildebene, also die des perspectivischen Bildes von p selber. Dasselbe liegt also um $a''b''$ senkrecht über a'. Wird nun die Bildebene nach rechts oder links in die V-Ebene gedreht, so liegt die Perspective von p senkrecht in gleicher Höhe über dem mitgedrehten a' in π. Bei complicirteren Körpern, deren Aufriß mit dem perspectivischen Bilde theilweise zusammenfallen, dasselbe also undeutlich machen würde, empfiehlt es sich, die Bildebene nach der anderen Seite, also hier nach links zu drehen. Das perspectivische Bild ist dasselbe, nur mit dem kleinen Unterschiede, daß es rechts liegend als von links, links liegend als von rechts gesehen erscheint. Fig. **27** und **28** sind perspectivische Bilder des in Fig. **17** und **18** gegebenen Würfels und Grabkreuzes. Geometrischen Werth hat ein perspectivisches Bild gar nicht, wenn man außer ihm nichts weiter kennt, denn (Fig. **29**) $a'b'$ kann die Perspective von ab und AB und von unzählig vielen verschieden langen und verschieden gerichteten zwischen den Geraden OA und OB in der Ebene dieser Schenkel gelegenen Linien sein. Beachtet man jedoch, daß die allergrößte Mehrzahl der Bauwerke und auch Maschinen begrenzenden Linien senkrecht oder wagerecht sind, so ist ihre Richtung von vornherein bekannt. Senkrechte Gerade erzeugen senkrechte Perspectiven. Wäre (Fig. **30**) $a'b'$ eine solche und kennte man den Abstand des Auges Oa' von der Perspective a' so wie den der Perspective a' von a, so wäre $Oa' : Oa' + a'a = a'b' : ab$ z. B. $2 : 6 = a'b' : x$, also $x = 3 . a'b'$. Man kann also unter diesen Umständen auf die Größe des Gegenstandes und umgekehrt aus dieser auf den Abstand schließen. Die Maler pflegen ersteres dem Beschauer dadurch zu erleichtern, daß sie neben den abgebildeten Gegenständen solche mitzeichnen, deren wahre Größe jedermann kennt, z. B. Menschen, aus deren Perspective und wahrer Größe also die Entfernung und damit die Größe des Hauptgegenstandes gefolgert werden kann.

6. Stereographische Projection.

§ **13.** Denkt man sich die Erde als eine durchsichtige Kugel, die Ebene des Äquators als eine durchsichtige Ebene, das Auge im N-Pol und von ihm Gerade nach den Punkten der südlichen Halbkugel gezogen, so werden diese die Äquatorialebene schneiden. Die Schnittpunkte sind die Stellen, welche jene Punkte auf der Karte der südlichen Halbkugel einnehmen werden. Um die der nördlichen Halbkugel zu zeichnen, setzt man das Auge in den S-Pol und verfährt ebenso. Für die westliche und östliche Halbkugel nimmt man das Auge im Äquator und zwar **90°** resp. östlich oder westlich vom ersten Meridian an, dessen Ebene als Bildebene gebraucht wird. Unsere Planiglobien sind so entworfen, und sind demnach, wie natürlich auch kleinere Abschnitte von ihnen, also unsere Landkarten, perspectivische Bilder, die man auf folgende Weise entwerfen kann. AO′A′C (Fig. **31**.) sei die Ebene des Äquators, AA′ die darauf projicirte senkrechte Ebene des ersten Meridians, zugleich die Grundlinie der Bildebene, ein Ort P habe die Länge $l = AB$, die Breite $b = BP$. Man trage AB von A auf ACA′ ab, verbinde B mit D, lege durch BD eine auf der Äquatorialebene senkrechte Ebene, welche die Kugel in dem Breitenkreise von P schneidet; wird dieser seitwärts, hier nach rechts in die Äquatorialebene herabgeschlagen, so fällt P auf P_1, da seine Breite $= b = BP_1$ ist. Fällt man nun von P_1 auf DB das Perpendikel $P_1P'_1$, so ist P'_1 die Projection des Ortes auf die Äquatorialebene, $O'P'_1$ die H-Projection des von dem in O′ befindlichen Auge nach dieser Ortsprojection gezogenen Strahls, welche AA′ in p'_1 schneidet. Ein auf P'_1 der Linie $O'P'_1$ und der Äquatorialebene errichtetes Perpendikel muß gleich P'_1P_1 sein. Schlägt man die durch dasselbe und $O'P'_1$ gelegte Ebene herunter (hier rechts), so ist P_2 der heruntergeschlagene Ort, $O'P_2$ der nach ihm im Raume gezogene heruntergeschlagene Strahl und p_1p_2 die heruntergeschlagene Höhe, in welcher er die Bildebene über p_1 schneidet. Denkt man sich p_1p_2 zurückgeschlagen und (siehe § **12**) seine V-Projection gezeichnet, so ist $o''p_2$ die V-Projection des nach dem Orte P gerichteten Strahls. Wird endlich AA′ also auch p_1 in die V-Ebene gedreht, so ist p die Lage des Ortes P auf der Karte. Es ist klar, daß Orte südlicher Breite unterhalb der X-Achse oder des Äquators der Karte ihre Stelle finden werden, und daß die Construction fast ganz dieselbe sein müßte. Ebenso verhält es sich mit der Projection der nördlichen und südlichen Halbkugel, bei denen die Äquatorialebene die Bildebene ist, nur mit dem Unterschiede, daß man die Breite auf dem Kreise AO′A′C von A aus abschneidet und die Länge herabschlägt.

7. Schiefe Projection oder Parallelperspective.

§ **14**. Rückt das Auge in immer größere Entfernung von der Bild- oder Projectionsebene, so bilden die vom Auge nach den Eckpunkten des Gegenstandes gezogenen Geraden am Auge selbst immer kleinere Winkel mit einander, bis sie bei unendlicher Entfernung von einander parallel werden. Ihre Schnitte mit der Bildebene bestimmen die Parallelperspective des Gegenstandes, die wenn die Strahlen senkrecht zur Bildebene sind, nichts weiter als die gewöhnliche Orthogonalprojection ist. Die Parallelperspective eines Gegenstandes unterscheidet sich von der Centralperspective desselben beim ersten Blick dadurch, daß sämmtliche Parallellinien des Gegenstandes in jener auch parallel sein müssen, dagegen in dieser mit Ausnahme der der Grundlinie parallelen und senkrechten in dem Maaße einander näher kommen, als sie sich beim Gegenstande von der Bildebene entfernen. Das parallelperspectivische Bild kann also als auf ganz ähnliche Weise, wie das perspectivische entstanden gedacht werden, und daher kommt sein Name. Ist in Figur **32** (wie in **27**) hgg′ die Bildebene, sind A′ und A″ Grund- und Aufriß des in Fig. **17** gegebenen Würfels, O′a′, O′b′ u. s. w. die H-Projectionen der nach den

Grund- und Höhenpunkten des Würfels geführten Strahlen, O''c'' O''F'' u. s. w., ferner O''a'' O''c'' u. s. w. die V-Projectionen der respective nach den Höhen- und Grundpunkten gerichteten, (von denen natürlich sämmtliche H- und V-Projectionen respective unter sich parallel sein müssen, weil alle parallele Gerade im Raume parallele H- und V-Projectionen haben), so schneidet beispielsweise die durch Oc gelegte projicirende Ebene die Bildebene in einer Geraden, deren H-Projection m' und deren V-Projection p'n' ist; n' ist demnach die V-Projection der Parallelperspective von c. Dreht man die Bildebene wieder (hier nach links) in die V-Ebene, so fällt c' = n' um p'n' über m'. Ganz ähnlich werden die übrigen Punkte des parallelperspectivischen Bildes A''' gefunden. Nur solche Bilder nennt man im eigentlichen Sinne parallelperspectivische, die durch Schnitte zwar paralleler aber unter einem schiefen Winkel gegen die Bildebene geneigter Strahlen auf dieser entstanden sind. Schiefe Projectionen werden sie genannt, wenn man sie ähnlich wie die orthogonalen, so gebildet denkt, daß die Eckpunkte des Körpers durch unter sich parallele aber nicht zur Projectionsebene senkrechte Projectionsstrahlen auf eine H- oder V-Ebene projicirt wurden. Gewöhnlich nimmt man die Projectionsebene senkrecht auf der Grundebene an, so daß $\varepsilon = 90°$ ist, die schiefe Projection also nur eine schiefe V-Projection oder eine Verbindung der V-Spuren unter sich paralleler durch die Ecken des Körpers gehender schiefer Geraden wird. Der in der Schattenlehre der descriptiven Geometrie (Programm **1864**) construirte Schlagschatten, den ein Körper auf die V-Ebene wirft, ist deshalb seine schiefe Projection. In Fig. **33** ist auf diese Weise P als schiefe Projection eines durch H- und S-Projection gegebenen Würfels und als auf die V-Ebene fallender Schlagschatten desselben für Strahlen gefunden, die der Diagonale eines mit einer Seitenfläche der V-Ebene parallelen Würfels parallel sind, deren H- und V-Projectionen also AA' und deren S-Projectionen die hier herabgeschlagene A'A'' unter **45**° schneiden, eine Annahme, wie sie für den Schlagschatten in der descriptiven Geometrie gemacht zu werden pflegt. In gleicher Weise, d. h. durch Bestimmung der V-Spuren oder V-Projectionen, findet man die schiefe Projection jedes Raumgebildes für jede Art paralleler Projectionsstrahlen, wenn deren orthogonale Projectionen nur gegeben sind. Es ist klar, daß alle Strecken, welche der Projectionsebene parallel sind, in ihrer Projection gar nicht verkürzt werden, was also von allen auf der H- oder Grundebene senkrechten, also auch von der Z-Achse gilt, oder man kann auch sagen, daß das Verkürzungsverhältniß derjenigen Strecken = **1** ist, die ihrer Projection parallel sind. Dasselbe gilt von solchen Strecken, die ihrer Projection antiparallel sind, d. h. bei denen die Projectionsstrahlen mit der Strecke und ihrer Projection nach derselben Seite hin gleiche Winkel bilden. So ist in Fig. **34** ersichtlich, daß die Projection a'b' = ab wird, weil $\alpha = \beta$ ist. Die schiefe Projection einer mit den Projectionsstrahlen parallelen Geraden ist natürlich ein Punkt. Unter den schiefen Projectionsarten sind jetzt und waren früher noch mehr besonders folgende zwei im Gebrauch:

7a. Cavalier-Perspective oder Projection.

§ **15**. Ist (Fig. **36**) die X-Achse parallel der Projectionsachse AA', oder mit ihr zusammenfallend und sind die Projectionsstrahlen gegen die V-Ebene unter einem Winkel von **45**° gegen die H- und S-Ebene aber unter gleichen Winkeln geneigt, so nennt man das unter solcher Annahme entstehende Bild eines Gegenstandes seine Cavalier-Perspective oder Projection. In diesem Falle sind die Neigungswinkel der Strahlen gegen die H- und S-Ebene beide $=30°$. Denn nach § 3 ist die Summe der Quadrate der Cosinusse der Neigungswinkel, welche eine Gerade mit den Coordinatenebenen bildet $=2$, also $\cos. \gamma_1{}^2 + \cos. \gamma_2{}^2 + \cos. \gamma_3{}^2 = 2$ (Fig. 35), $2 \cos. \gamma_1{}^2 + \frac{1}{2} = 2$, $\cos. \gamma_1{}^2 = \cos. \gamma_3{}^2 = \frac{3}{4}$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 30°$. Der Winkel c, den die V-Projection eines solchen Strahls mit der X-Achse einschließt, ist auch $=45°$, denn $\sin. c = \frac{\sin. \gamma_1}{\cos. \gamma_2}$ (immer op $=1$ gesetzt) $= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, c also $=45°$; $\sin. b = \frac{\sin. \gamma_2}{\cos. \gamma_1} = \frac{\sin. 45}{\cos. 30} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $b = 54° \; 44' \; 8''$; $\sin. a = \frac{\sin. \gamma_2}{\cos. \gamma_3} = \frac{\sin. 45}{\cos. 30} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $a = 54° \; 44' \; 8''$. Fig. 36 ist das unter solchen Verhältnissen gezeichnete Bild, also die Cavalier-Perspective eines Würfels. Die Z- und X-Achse projiciren sich in ihrem wahren Werthe und ihre Projectionen schneiden sich unter einem rechten Winkel (§ 14), die Y-Achse fällt mit der V-Projection des Strahls zusammen, schneidet die X-Achse also auch unter 45° und ihr Verkürzungsverhältniß ist außerdem $=1$, denn denken wir uns in D senkrecht auf die V-Ebene die Achseneinheit von Y oder c'd' und durch c' seinen Projectionsstrahl, so bildet derselbe in dem rechtwinkligen Dreieck c'DC bei C und c' Winkel von 45°, weshalb die Y-Achse und ihre Projection antiparallel, also gleich sind. Man nennt diese schiefe Projectionsart wegen jener Lage der Projectionsstrahlen auch die 45-Grad-Perspective. Sie ist, da alle 3 Achsen sich gleich und ohne Verkürzung projiciren, ungemein einfach und daher auch sehr gebräuchlich. Ihr geometrischer Werth liegt vor Allem in der Eigenschaft, daß man alle den Achsen parallele Grade eines Raumgebildes unmittelbar aus seiner Cavalier-Perspective mit dem geometrischen Maaßstabe messen kann. Fig. 37 ist das in Fig. 18 gegebene Grabkreuz nach den Regeln der Cavalier-Perspective dargestellt.

7 b. Vogel- oder Militairperspective.

§ 16. Ist der projicirende Strahl gegen die V-Ebene unter 45° geneigt und der S-Ebene parallel, schneidet die H-Projection desselben also die Projectionsachse AA' unter 90°, so nennt man das unter dieser Annahme projicirte Bild eines Gegenstandes seine Vogel- oder Militairperspective. Fig. 38 ist die Vogelperspective eines Würfels. Da Grund- und Projectionsebene antiparallel sind, so ist jede Figur der ersteren ihrer Projection congruent, die X'- und Y'-Achse bilden also 90°, die Z'-Achse steht senkrecht und schneidet die X'-Achse unter dem Winkel δ, d. h. nach Früherem unter demjenigen Winkel, welchen die Neigungslinie der Grundebene mit der X-Achse bildet. Ist $\delta = 45$, so schneidet die Z'-Achse die X'- und Y'-Achse unter 45°. Die Figuren, deren Ebenen respective den anderen beiden Coordinatenebenen parallel sind, zeigen sich dann wie bei der Cavalier-Perspective gleichmäßig entwickelt. Der geometrische Werth der Vogelperspective ist gleich demjenigen jener, indem alle den Achsen parallele Gerade auch hier aus dem Bilde unmittelbar mit dem geometrischen Maaßstabe gemessen werden können. In ihrer Anschaulichkeit stehen die Bilder beider schiefer Projectionen gegen die der eigentlichen Perspective sehr zurück, was die Vergleichung von Fig. 28 mit Fig. 37 und 39, der Vogelperspective des Grabkreuzes, ergeben wird. Fig. 37 und 39 sind bereits nach der axonometrischen Methode unter Zugrundelegung der projicirten Achsen gezeichnet. Überhaupt ist die Anwendung derselben auf die Zeichnung schief projicirter Bilder ungemein viel einfacher, als auf dem Wege der descriptiven Geometrie und vor allem die

Lage der Achsen gegeneinander und ihre Verkürzung in vollkommener Allgemeinheit zu finden, wenn man hier wie dort aus den bestimmenden Größen Grundformeln bildet, aus denen dieselben für jeden einzelnen gegebenen Fall zu entnehmen sind. Das geschieht auf folgende Weise: Es sei (Fig. 40) A_2 die H-Spur der der V-Ebene parallelen senkrechten Projectionsebene, die X- und Y-Achse liegen in der H-Ebene, die erstere gegen A' um $90 - \delta$ geneigt, a' die H-Projection der Z-Achse; die Lage der Projectionsstrahlen gegen die Projectionsebene sei durch ihre Neigung γ gegen dieselbe wie durch den Winkel d bestimmt, den ihre V-Projectionen mit der Z-Achse bilden, s' und s'' seien die H- und V-Projection eines solchen Strahls, a'x', a'y', a''z'' seien die Achseneinheit, so sind, wie aus der Figur im Hinblick auf die Constructionsweise der descriptiven Geometrie unmittelbar ersichtlich, $a''x_1''$ und $a''y_1''$ die projicirte X- und Y-Achse und zugleich ihre Verkürzungs- respective Verlängerungsverhältnisse, α und β die Winkel, welche sie mit der projicirten Z-Achse einschließen. Lage und Verkürzung wären damit durch einfache Construction gefunden. Durch Rechnung ergeben sie sich folgendermaßen: $\text{tang.}\ \alpha = \frac{a''b'' - b''p}{px_1''}$; $a''b'' = a'b' = c'y' = \sin.\ \delta$; $b''p = b''x_1'' \sin.\ d$; $b''x_1'' = b'x' \ \text{cotang.}\ \gamma$ aus dem auf der Grundlinie b'x' stehenden, mit der anderen Ecke um px_1'' senkrecht über x_1' liegenden rechtwinkligen Dreiecke $x_1b'x'$; $b'x' = \cos.\ \delta$; also $b''p = \cos.\ \delta\ .\ \text{cotang.}\ \gamma\ .\ \sin.\ d$; $px_1'' = b''x_1'' \cos.\ \delta = \cos.\ d\ .\ \text{cotg.}\ \gamma\ .\ \cos.\ d$; darum endlich

$$\text{tang.}\ \alpha = \frac{\sin.\ \delta \mp \cos.\ \delta\ .\ \text{cotg.}\ \gamma\ .\ \sin.\ d}{\cos.\ \delta\ \text{cotg.}\ \gamma\ .\ \cos.\ d}$$

$$\text{I.} \quad = \text{tang.}\ \delta\ .\ \text{tang.}\ \gamma\ .\ \text{sec.}\ d \mp \text{tang.}\ d.$$

$\text{tg.}\ \beta = \frac{a''c'' \pm c''q}{qy_1''}$; $a''c'' = \cos.\ \delta$; $c''q = c''y_1'' \sin.\ \delta$; $c''y_1'' = c'y_1$ (y_1 senkrecht um qy_1'' über y_1') $= c'y' \ \text{cotg.}\ \gamma$; $c'y' = \sin.\ \delta$, also $c''q = \sin.\ \delta\ \text{cotg.}\ \gamma\ .\ \sin.\ d$; $qy_1'' = c''y_1'' \cos.\ d = \sin.\ \delta\ .\ \text{cotg.}\ y\ .\ \cos.\ d$,

darum
$$\text{tang.}\ \beta = \frac{\cos.\ \delta \pm \sin.\ \delta\ .\ \text{cotg.}\ \gamma\ .\ \sin.\ d}{\sin.\ \delta\ .\ \text{cotg.}\ \gamma\ .\ \cos.\ d.}$$

$$\text{II.} \quad = \text{cotang.}\ \delta\ .\ \text{tang.}\ \gamma\ .\ \text{sec.}\ d \pm \text{tang.}\ d.$$

Aus den beiden schiefwinkligen Dreiecken $a''b''x_1''$ und $a''c''y_1''$ findet man $a''x_1'' = q_x = \sqrt{b''x_1''^2 + a''b''^2 \mp 2a''b''\ .\ b''p}$ und nach Einsetzung der trigonometrischen Werthe jener Strecken.

$$\text{III.} \quad q_x = \sqrt{\sin.\ \delta^2 + \cos.\ \delta^2\ .\ \text{cotg.}\ \gamma^2 \mp 2 \sin.\ \delta\ .\ \cos.\ \delta\ .\ \text{cotg.}\ \gamma\ .\ \sin.\ d},$$

ebenso
$$\text{IV.} \quad q_y = \sqrt{\cos.\ \delta^2 + \sin.\ \delta^2\ .\ \text{cotg.}\ \gamma^2 \pm 2 \sin.\ \delta\ .\ \cos.\ \delta\ .\ \text{cotg.}\ \gamma\ .\ \sin.\ d}.$$

Soll nun $q_x = q_y = q_z = 1$ sein, so wird nach Quadrirung und Addirung von III. und IV. $q_x^2 + q_y^2 = \sin.\ \delta^2 + \cos.\ \delta^2 + (\sin.\ \delta^2 + \cos.\ \delta^2)\ \text{cotg.}\ \gamma^2 = 1 + \text{cotg.}\ \gamma^2$, also $\text{cotg.}\ \gamma = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 - 1} = 1$, γ also $= 45^\circ$, was wie oben angegeben, bei der Cavalier- und Vogelperspective statt findet, und da in III. wie IV. die Summe der beiden ersten Summanden dann schon $= 1 = q_x = q_y$ ist, so muß für $\gamma = 45^\circ$ der dritte in beiden $= 0$, also entweder $\delta = 90$, $\delta = 0$ oder $d = 0$ sein. Ist 1., $\delta = 90$, so fällt X in die Projectionsebene, tang. α ist dann (siehe I.) $= \infty$, $\alpha = 90$, tang. β = tang. d (siehe II.) und wenn zugleich $d = 45^\circ$ ist, tang. $\beta = 1$, $\beta = 45^\circ$. Ist 2., unter sonst gleicher Voraussetzung, d. h. $\gamma = 45^\circ$, $d = 45^\circ$, der Winkel $\delta = 0$, so fällt die Y-Achse in die Projectionsebene,

$\alpha = 45^\circ$, $\beta = 90^\circ$. Beide Fälle sind die der Cavalier-Perspective. Die Annahme $\gamma = 45$, $d = 0$, giebt tang. α = tang. δ, tang. β = cotg. δ und für $\delta = 45^\circ$ endlich $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$, ersteres die allgemeine, letzteres die besondere Vogelperspective. Ist γ größer oder kleiner als 45°, so werden die Verkürzungsverhältnisse oder X'- und Y'-Achse verschieden von 1, wird $\delta = 45^\circ$, so sind q_x und q_y gleich.

II. Über-Eck-Projection.

Einer der Winkel ε und δ hat den Grenzwerth 0 oder 90, der andere einen beliebigen unter 90°.

1. Über-Eck-Projection A.

$\varepsilon = 90$, δ beliebig.

§ 17. In diesem Falle ist nach I. § 2 (tg. α = tg. δ . sec. ε) tg. $\alpha = \infty$, α also $= 90^\circ$, nach II. (tg. β = cotg. δ . sec. ε) tg. $\beta = \infty$, β auch $= 90$, nach III. ($q_x = \sqrt{\sin. \delta^2 + \cos. \delta^2 \cos. \varepsilon^2}$) $q_x = \sin. \delta$, nach IV. ($q_y = \sqrt{\cos. \delta^2 + \sin. \delta^2 \cos. \varepsilon^2}$) $q_y = \cos. \delta$. Nach V. ($q_z = \sin. \varepsilon$) $q_z = 1$. P die Projectionsebene ist parallel der Z-Achse und die verkürzten beiden anderen Achsen fallen in eine die Z-Achse senkrecht schneidende Gerade auf beiden Seiten, links und rechts von Z. Das Bild entwickelt die der XZ-Ebene parallelen Figuren desto mehr, je größer δ ist, die der YZ-Achse parallelen umgekehrt desto weniger, beide Gruppen gleichmäßig, wenn $\delta = 45^\circ$ ist. Alle der XY-Ebene parallelen entwickeln sich gar nicht, sondern bilden gerade der X'Y'-Achse parallele Strecken. Fig. 41 ist diese Projection des Grabkreuzes Fig. 18. ($\delta = 60^\circ$.)

2. Über-Eck-Projection B.

ε beliebig, $\delta = 90$.

§ 18. In diesem Falle ist nach I. $\alpha = 90^\circ$, nach II. $\beta = 0$, nach III. $q_x = 1$, nach IV. $q_y = \cos. \varepsilon$, nach V. $q_z = \sin. \varepsilon$. P ist der X-Achse parallel; die Entwickelung der der XY-Ebene parallelen Begrenzungsflächen wächst mit der Abnahme, die der XZ parallelen mit der Zunahme von ε, die der YZ parallelen projiciren sich als gerade Linien. Fig. 42. ($\varepsilon = 60^\circ$.)

3. Über-Eck-Projection C.

ε beliebig, $\delta = 0$.

§ 19. Unter dieser Annahme wird nach I. $\alpha = 0$, nach II. $\beta = 90^\circ$, nach III. $q_x = \cos. \varepsilon$, nach IV. $q_y = 1$, nach V. $q_z = \sin. \varepsilon$. P ist der Y-Achse parallel; die der XY-Ebene parallelen Begrenzungsflächen nehmen in ihrer Projection zu mit der Abnahme, die der YZ-Ebene parallelen mit der Zunahme von ε, die der XZ-Ebene parallelen projiciren sich als gerade Linien. Das Bild ist dasselbe, wie Fig. 42, wenn die X- und Y-Coordinaten verwechselt werden.

Ist $\varepsilon = 0$, δ beliebig, so fällt die Projectionsebene mit der H- oder XY-Ebene zusammen oder ist ihr parallel; die Projection selber ist dann nichts weiter als ein geometrischer Grundriß. Die Über-Eck-Projection liefert also in allen 3 Fällen Bilder, welche von den 3 Systemen der den Coordinatenebenen parallelen Begrenzungsflächen des abzubildenden Gegenstandes jedes Mal je zwei entwickeln, das dritte in geraden Linien projicirt zeigen; die geometrische einfache Projection dagegen entwickelt jedes Mal nur ein System. Die Über-Eck-Projection steht also in Bezug auf die Anschaulichkeit der Bilder zwischen dieser und der axonometrischen im Besonderen. Die wahre Größe der Coordinaten ergiebt sich stets für die eine Achse unmittelbar, für die beiden anderen aus den ihren Verkürzungsverhältnissen entsprechenden Maaßstäben.

III. Axonometrische Projection im engeren Sinne.

Keiner der Winkel ε und δ hat den Grenzwerth $0°$ oder $90°$.

1. Isometrische Projection.

$$q_x = q_y = q_z.$$

§ 20. Unter der Annahme, daß die Verkürzungsverhältnisse aller 3 Achsen, also ihre Neigung gegen die Projectionsebene, gleich sind, heißt die axonometrische Projection eine isometrische. In diesem Falle ist nach XI. a (§ 3)

$$\text{tg.}\,\alpha \left(= \sqrt{\frac{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\,(q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)}{(q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)\,(-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)}}\right) = \sqrt{3}), \ \alpha = 60°, \text{ nach XI. b.}$$

$$\text{tg.}\,\beta \left(= \sqrt{\frac{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\,(-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)}{(q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)\,(q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)}}\right) = \sqrt{3}), \ \beta = 60°.$$

Nach VII. $\left(q_x^2 = \frac{2q_x^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}\right.$ u. s. w.) wird $q_x = q_y = q_z = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$

Nach VIII. a $\left(\cos.\,\varepsilon = \sqrt{\frac{q_x^2 + q_y^2 - q_z^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}}\right)$ $\cos.\,\varepsilon = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, $\varepsilon = 54°\ 44'\ 8{,}12''$;

nach X. a $\left(\text{tg.}\,\delta = \sqrt{\frac{q_x^2 - q_y^2 + q_z^2}{-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}}\right)$ $\text{tg.}\,\delta = 1$, also $\delta = 45°$.

Die isometrische Projection ist für die Ausführung sehr bequem, weil für die Projection aller 3 Coordinatensysteme nur ein Maaßstab nöthig ist, dessen Einheit sich zu der geometrischen oder wahren wie $\sqrt{\tfrac{2}{3}} : 1$ verhält. Da sich jedoch alle ebenen Figuren der Oberfläche eines Gegenstandes, welche der Halbirungsebene der von 2 Coordinatenebenen eingeschlossenen Winkel parallel sind, als gerade Linien projiciren, also in der Zeichnung gar nicht entwickeln, so würde die isometrische Projectionsmethode für solche Gegenstände weniger, für unregelmäßige dagegen mit großem Vortheil zu verwenden sein. Fig. 43.

2. Monodimetrische Projection.

$$q_x = q_y \gtrless q_z \text{ oder } q_x = q_z \gtrless q_y \text{ oder } q_y = q_z \gtrless q_x.$$

§ 21. Haben die Projectionen zweier Achsen gleiches, die der dritten ein anderes Verkürzungsverhältniß, so heißt die axonometrische Projection eine monodimetrische oder dimetrische, weil zwei Verkürzungsmaaßstäbe, der eine für eine, der zweite für die beiden anderen Achsen nöthig sind. Die beiden gleich verkürzten Achsen neigen sich gegen die Projectionsebene unter gleichen Winkeln und da die Projection der Neigungslinie ihrer Ebene als der Halbirungslinie ihres Winkels mit der Projection der dritten Achse in eine gerade Linie fällt, so halbirt die Projection der dritten Achse den von den Projectionen der beiden gleich verkürzten eingeschlossenen Winkel, zugleich auch folgt daraus, daß die in der Ebene dieser Halbirungslinie und der dritten Achse liegenden oder mit ihr parallelen Begrenzungsflächen alle in geraden Linien projicirt werden, also im Bilde gar nicht entwickelt erscheinen. Sind nun die Verkürzungsverhältnisse dem jedesmaligen Falle am besten entsprechend gewählt worden, so ergeben sich die dazu gehörigen Winkel aus den Grundformeln des § 3. Ist z. B. $q_x : q_y : q_z = 2 : 1 : 2$, so wird nach XI. a und b der Winkel $\alpha = 82° 49'$, $\beta = 48° 35'$, nach VIII. a Winkel $\varepsilon = 70° 32'$, $\delta = 69° 18'$. Fig. 44 ist darnach entworfen. Die folgende Tabelle giebt die Winkelwerthe für verschiedene Annahmen der Verkürzungsverhältnisse:

	q_x, q_y, q_z; oder m, n, p;	α,	β,	ε,	δ,
1)	2, 1, 2;	82° 49′,	48° 35′,	70° 32′,	69° 18′,
2)	3, 1, 3;	86° 49′,	46° 36′,	76° 44′,	76° 22′,
3)	4, 1, 4;	88° 13′,	45° 54′,	79° 58′,	79° 49′,
4)	7, 7, 8;	65° 23′,	65° 23′,	62° 44′,	45°,
5)	5, 5, 6;	68° 2′,	68° 2′,	66° 12′,	45°,
6)	3, 3, 4;	76° 22′,	76° 22′,	75° 58′,	45°.

3. Anisometrische oder trimetrische Projection.

q_x, q_y, q_z verschieden.

§ 22. Sind alle 3 Verkürzungsverhältnisse der Achsen verschieden, so sind keine zwei Coordinatenachsen unter gleichen Winkeln gegen die Projectionsebene geneigt, und die unter solcher Annahme statt findende axonometrische Projection heißt anisometrisch oder trimetrisch, weil keiner der drei Verkürzungsmaaßstäbe dem anderen gleich ist. Hat man (siehe § 6) je nach Bedürfniß, d. h. dem Wunsche gemäß, das eine oder das andere der 3 Flächensysteme mehr oder minder im Bilde entwickelt zu sehen, die Verkürzungsverhältnisse gewählt, so geben dieselben in die Formeln des § 3 gesetzt die die Lage der Achsenprojectionen wie der Coordinatenebenen bestimmenden Winkel; so folgt für $m : n : p = 9 : 5 : 10$ $\alpha = 84° 49'$, $\beta = 72° 11'$, $\varepsilon = 80° 10'$, $\delta = 62° 2'$, nach welchen Größen das Grabkreuz Fig. 20 verzeichnet wurde. Eine der obigen ähnliche anisometrische für verschiedene gebräuchliche Achsenverkürzungs-Verhältnisse geltende Tabelle ist folgende:

	m,	n,	p,	α,	β,	ε,	δ,
1)	9,	5,	10,	84° 49′,	72° 11′,	80° 10′,	62° 2′,
2)	5,	4,	6,	78° 50′,	71° 47′,	75° 14′,	52° 14′,
3)	23,	12,	24,	87° 45′,	69° 44′,	83° 4′,	71° 55′.

Axonometrische Beleuchtungs- und Schatten-Construction.

In § 22 der descriptiven Geometrie ist die Beleuchtungs- und Schattentheorie ausführlicher behandelt, durch physikalisch-mathematische Sätze begründet und auf Grund- und Aufrisse angewendet worden. So weit darf dieselbe demnach als bekannt vorausgesetzt werden. Die Gesetze der Beleuchtung sind nun für die axonometrischen Darstellungen dieselben. Man entwerfe daher Licht, Selbst- und Schlagschatten im geometrischen Grund- und Aufriß, construire den dadurch gegebenen Gegenstand und Schlagschatten axonometrisch und beleuchte das Bild, wie es in jenen Rissen beleuchtet wurde.