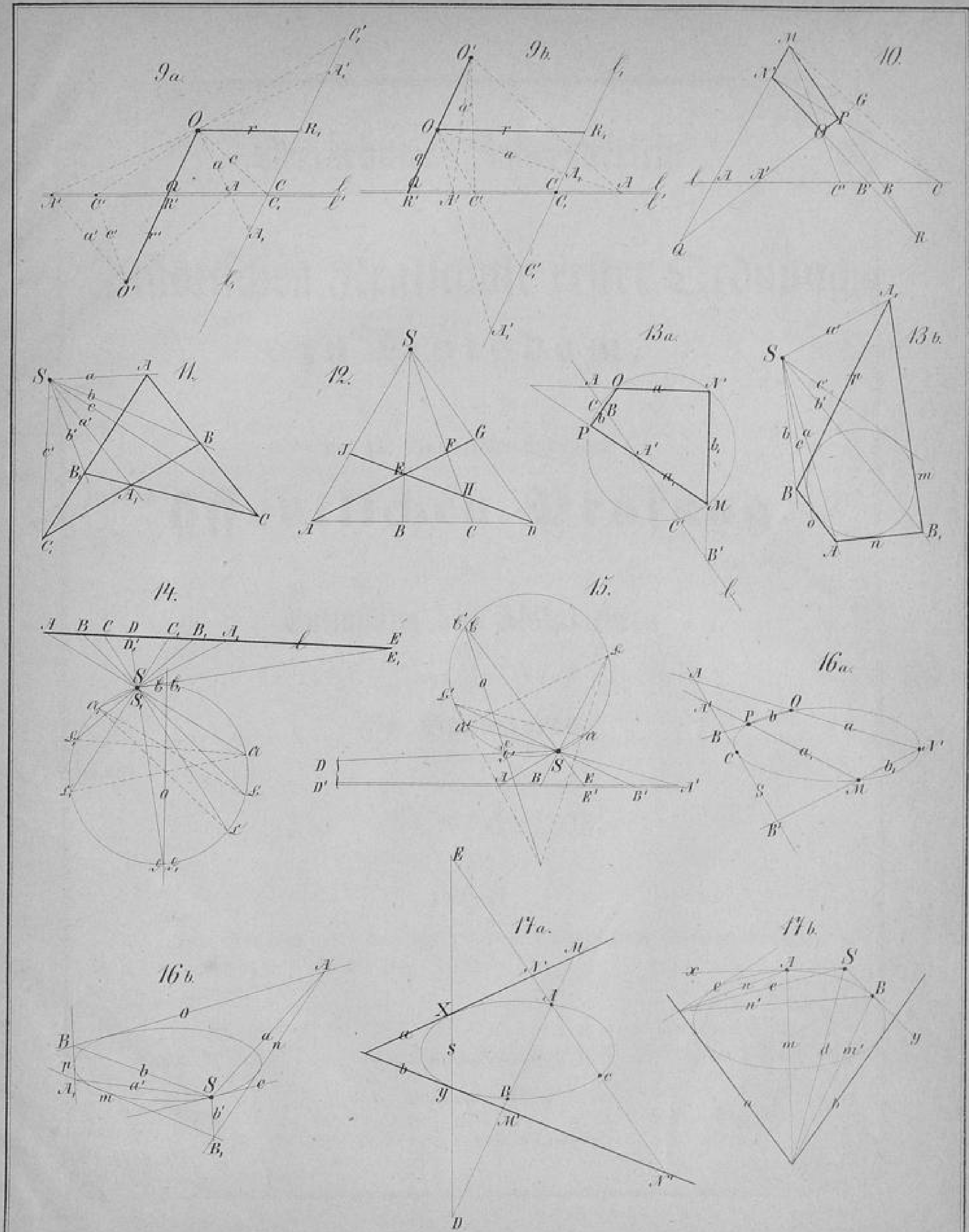
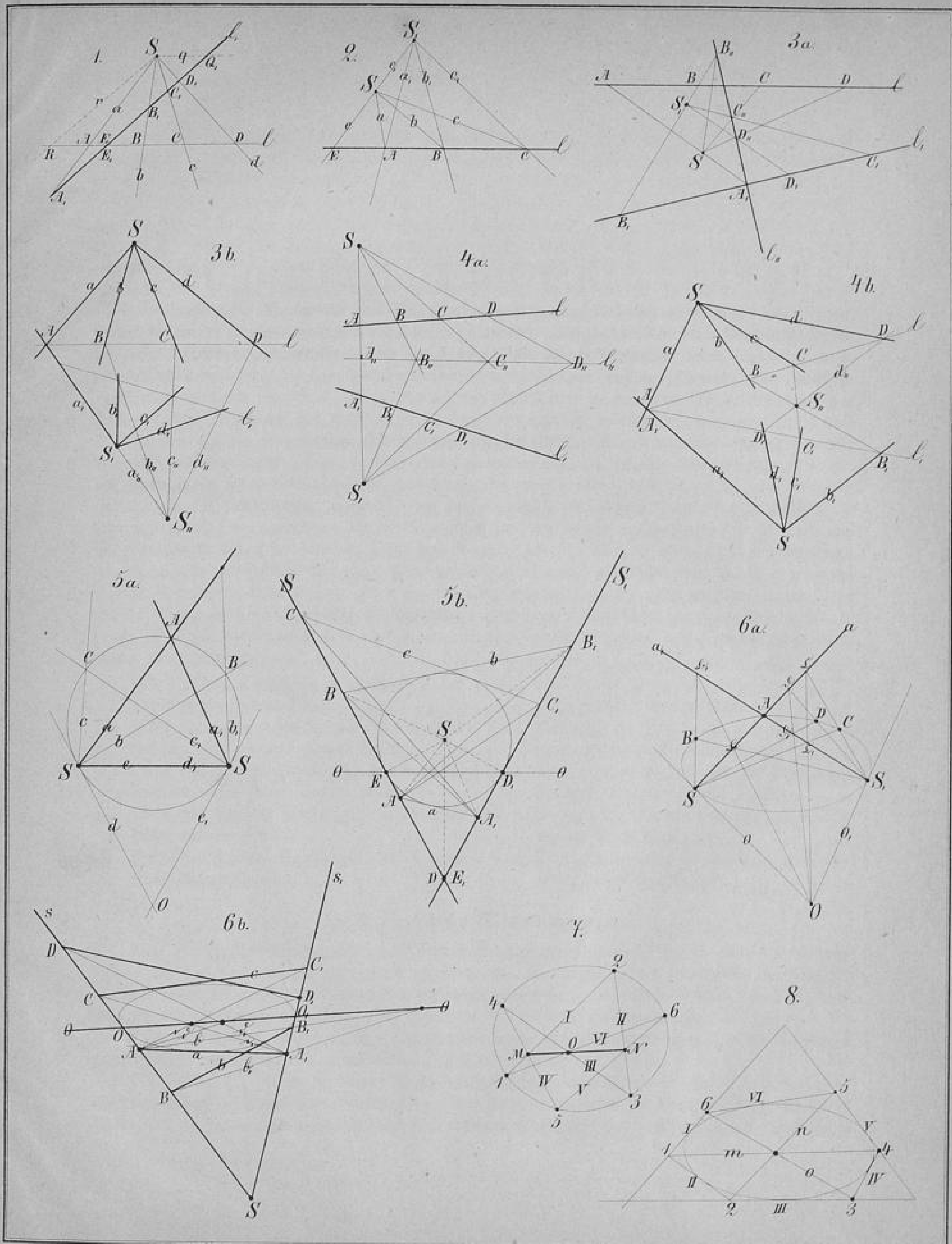


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Construction der Kegelschnitte aus fünf gegebenen Elementen bloß mit Hilfe des Lineals gehört sowohl zu den an sich interessanten Problemen der Geometrie, als sie auch den vortrefflichsten Stoff für den wissenschaftlichen Zeichenunterricht auf der obersten Stufe unserer Realschulen bieten kann. Ich werde im Folgenden versuchen, die dazu nöthige Vorbereitung in möglichst faßlicher Form zu geben, verbinde damit aber vorzüglich den Zweck, zu zeigen, wie die Kegelschnitte in rein geometrischer Ableitung ohne Hilfe metrischer Relationen aus Beziehungen der Lage von Punkten und Geraden hervorgehen. Da diese Methode sich auf die projectivischen Eigenschaften der geometrischen Elementargebilde stützt, diese aber außerhalb des Schulcursus liegen, so schien es daher nothwendig, die Elemente derselben, soweit sie für den vorliegenden Zweck unerläßlich sind, voranzuschicken, dabei aber jede Einmischung von metrischen Hilfsmitteln und Folgerungen, namentlich der anharmonischen Verhältnisse, so wirksam und wichtig sie auch sein mögen, zu vermeiden. An die Erzeugung der Kegelschnitte aus projectivischen Geraden und Strahlenbüscheln reihen sich dann die Sätze des Pascal und Briandchon als natürliche Folgerungen an, da auch sie als Schlüssel für einige Fälle der Aufgabe dienen. Die Theorie der Involution, wieder in rein geometrischer Entwickelung, führt auf den Satz des Desargues, und auf neue Lösungen der frühern Fälle, und erschließt endlich die Aufgaben zweiten Grades, welche in dem vorgelegten Probleme stecken. Dasselbe zerfällt nämlich in fünf Paare correspondirender Aufgaben, welche der bessern Übersicht wegen hier sogleich aufgezählt sind:

Einen Kegelschnitt zu construiren, der

I. Durch fünf gegebene Punkte geht.	I. a. Fünf gegebene Gerade berührt.
II. Durch vier gegebene Punkte geht, und in einem derselben eine gegebene Gerade berührt.	II. a. Vier gegebene Gerade und eine derselben in einem gegebenen Punkte berührt.
III. Durch drei gegebene Punkte geht, und in zweien derselben eine gegebene Gerade berührt.	III. a. Drei gegebene Gerade und zwei derselben in je einem gegebenen Punkte berührt.
IV. Durch vier gegebene Punkte geht, und eine gegebene Gerade berührt.	IV. a. Vier gegebene Gerade berührt, und durch einen gegebenen Punkt geht.
V. Durch drei gegebene Punkte geht, und zwei gegebene Gerade berührt.	V. a. Drei gegebene Gerade berührt, und durch zwei gegebene Punkte geht.

I. Projectivische Elementargebilde.

Zwei geometrische Gebilde heißen projectivisch zu einander, wenn sie sich in solche Lage bringen lassen, daß das eine entweder das andere projicirt, oder die Projection des andern ist. Projectivische Gebilde, welche die angegebene Lage wirklich innehaben, liegen perspectivisch, während sie sonst, wenn diese Bedingung hinsichts ihrer Lage nicht erfüllt ist, sich in schiefer Lage befinden.

Diese Begriffe und die gegenseitigen Beziehungen, welche zwischen projectivischen Gebilden stattfinden, sollen zunächst an den Elementargebilden der Ebene auseinandergesetzt werden.

§ 1. (Fig. 1.) Wird ein ebener Strahlenbüschel S von einer Geraden l, welche nicht durch das Centrum S geht, geschnitten, so entspricht jedem Strahle a, b, c, d ein Punkt der Geraden A, B, C, D; dem Parallelstrahle q aber der unendlich entfernte Punkt Q dieser Geraden, zu dem man gelangt,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sowohl rechts, wie links auf ihr fortschreitend, der jedoch nur als einer angesehen werden kann, da jeder Strahl die Gerade nur in einem Punkte schneidet. Umgekehrt entspricht jedem Punkte der Geraden ein Strahl des Büschels. Indem man nun dies gegenseitige Entsprechen von Strahlen und Punkten festhält, in welche gegenseitige Lage der Büschel und die Gerade auch versetzt werden, sind dieselben projectivisch zu einander. In der eben betrachteten Lage sind beide Gebilde perspectivisch und der Punkt S heißt dann Projectionspunkt. Dächte man aber die Gerade in eine andere Lage versetzt, immer jedoch die gegenseitige Lage der Punkte A, B, C, D auf ihr festhaltend, so befänden sich der Büschel und die Gerade in schiefer Lage. Unter einer projectivischen Geraden ist daher eine Reihe von Punkten in fest bestimmter gegenseitiger Lage, deren Träger die Gerade ist, zu verstehen, und ebenso unter einem projectivischen Strahlenbüschel eine Folge von Strahlen desselben Centrums in fest bestimmter gegenseitiger Lage. Projectivische Gerade werden daher auch projectivische gerade Punktreihen genannt. Die Strahlen des Büschels und die Punkte der Geraden werden als die Elemente dieser Gebilde bezeichnet.

Lehrsatz. Ein ebener Büschel S und eine gerade Punktreihe l sind projectivisch zu einander, wenn nur drei Elemente des einen a, b, c dreien Elementen der andern A, B, C entsprechen.

Beweis. Denke man beide Gebilde in schiefer Lage, und suche sie in perspectivische zu bringen, die Gerade als festliegend betrachtet. Da die Winkel (ab) und (bc) und ebenso die Strecken AB und BC gegeben sind, so hat der Projectionspunkt S seinen Ort auf den beiden Kreisperipherien, die über diesen Strecken die entsprechenden Winkel als Peripheriewinkel fassen. Daraus ergiebt sich, daß die Lage des Projectionspunktes bestimmt ist, und mithin die Gebilde projectivisch sind. Freilich befindet sich auf der entgegengesetzten Seite der Geraden noch eine Stelle für S; indeß ist sogleich ersichtlich, daß der darin centrirende Strahlenbüschel dem ersteren congruent ist.

Aus diesem Fundamentalsatze ergiebt sich, daß drei Elemente ausreichen, eine Gerade und einen ebenen Büschel als projectivisch zu bestimmen, sie aus der schiefen in die perspectivische Lage zu bringen, und zu jedem vierten Elemente des einen Gebildes das entsprechende des andern zu finden.

§ 2. (Fig. 1.) Wird ein ebener Strahlenbüschel S von zwei verschiedenen Geraden l und l_1, welche nicht durch das Centrum S gehen, geschnitten, so entspricht jedem Punkte A, B, C, D der ersten Geraden l vermöge der Projectionsstrahlen a, b, c, d wieder je ein Punkt A_1, B_1, C_1, D_1 der zweiten Geraden l_1 und umgekehrt. Indem man nun dies gegenseitige Entsprechen der Punkte der beiden Geraden festhält, heißen sie projectivisch zu einander. Befinden sich zwei projectivische Gerade in einer solchen Lage, daß die eine die Centralprojection der andern ist, so liegen sie perspectivisch, und der Punkt S ist ihr Projectionspunkt. Jede andere Lage heißt eine schiefe. In der perspectivischen Lage haben sie stets ihren Durchschnittspunkt EE, als entsprechenden Punkt gemein.

Bemerkenswerth ist, daß im Allgemeinen dem unendlich fernen Punkte der einen Geraden ein endlicher Punkt der andern, wie Q und Q_1, und R und R_1 entspricht. Dies findet nur in den besondern Fällen nicht statt, wenn 1) die beiden Geraden prallel sind, 2) der Projectionspunkt selbst unendlich entfernt, die Projectionsstrahlen daher parallel sind. In diesen Fällen nennt man die Geraden projectivisch ähnlich (weil die entsprechenden Abschnitte gleiches Verhältniß haben: $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$). Bei projectivisch ähnlichen Geraden entsprechen sich ihre unendlich fernen Punkte gegenseitig. Sind aber endlich 1) die beiden Geraden sowohl, wie auch die Projectionsstrahlen parallel, oder 2) die Projectionsstrahlen parallel und die beiden Geraden unter gleichen Winkeln nach verschiedener Seite zu ihnen geneigt, oder 3) die Geraden parallel und liegt der Projectionspunkt in der Mitte zwischen ihnen, so nennt man die beiden Geraden projectivisch gleich (weil die entsprechenden Abschnitte auf beiden gleich sind: $AB = A_1B_1$). Auch bei diesen sind die unendlich fernen Punkte entsprechende.

Nach der Erklärung sind zwei Gerade projectivisch, wenn sie mit demselben Strahlenbüschel projectivisch sind. Umgekehrt läßt sich aber auch behaupten:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) „daß, wenn zwei gerade Punktreihen projectivisch sind, sie auch zu einunddemselben Strahlenbüschel projectivisch sind, d. h. sich in solche Lage bringen lassen, daß die eine die Projection der andern ist.“

Denn legt man sie so, daß sie sich in zwei entsprechenden Punkten E und E_1 schneiden, so bestimmen die beiden Strahlen AA_1 und BB_1 einen Punkt S, welcher das Centrum eines Büschels ist, der vermöge des dritten gemeinsamen Strahles SEE, nach dem Fundamentalsatze des § 1 mit beiden Punktreihen projectivisch ist.

Es folgt hieraus, daß wenn zwei projectivische Gerade sich in einem Punkte schneiden, der in beiden ein entsprechender ist, sie allemal in perspectivischer Lage sind. Ferner ergiebt sich aus dem Beweise des obigen Satzes, daß drei Paare entsprechender Punkte vollkommen genügen, um zwei projectivische Punktreihen in perspectivische Lage zu bringen, was ausgesprochen ist im folgenden

Fundamentalsatze 2. „Zwei gerade Punktreihen sind projectivisch, wenn nur drei Punkte der einen dreien Punkten der andern entsprechen.“

Projectivische Gerade sind daher durch drei Paare entsprechender Punkte vollständig bestimmt; ähnliche projectivische Gerade sogar durch zwei Paare, da die gemeinsamen unendlich fernen Punkte das dritte Paar bilden, und gleiche projectivische Gerade sogar durch ein Paar, weil bei ihnen jede zwei äquidistanten Punkte ein Paar entsprechender ist.

§ 3. (Fig. 2.) Wird eine Gerade l in jedem ihrer Punkte A, B, C von je einem Strahle zweier ebener Strahlenbüschel S und S_1 geschnitten, ist mithin die Gerade zu jedem der Büschel perspectivisch, so nennt man diese Strahlenbüschel projectivisch zu einander. Diese besondere Lage derselben, bei der sie beide dieselbe gerade Punktreihe projiciren, heißt die perspectivische, und diese Gerade ihr projectivischer Durchschnitt oder ihre *Projectionslinie*. Jede andere Lage der beiden Büschel ist eine schiefe. In der perspectivischen Lage haben sie den Strahl, welcher die beiden Centra S und S_1 verbindet, mit einander gemein.

Sind zwei projectivische Strahlenbüschel von der Beschaffenheit, daß die entsprechenden Strahlen in beiden gleiche Winkel bilden, daß also $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$, $\angle(ac) = \angle(a_1c_1)$, so nennt man sie *projectivisch gleich*. Solche Strahlenbüschel gehen aus zwei perspectivischen hervor, 1) wenn man die Projectionslinie ins Unendliche rücken läßt, wobei außer dem gemeinsamen Strahle durch die Centra alle übrigen Strahlen paarweise parallel werden; 2) wenn man die Projectionslinie in die Mitte zwischen die Centra senkrecht auf den gemeinsamen Strahl legt. Dabei ist zu bemerken, daß in dem erstern Falle die Strahlen der beiden Büschel in derselben Richtung, entweder rechts oder links herum, folgen, im andern Falle dagegen bei beiden Büscheln in verschiedener Richtung. Jene nennt man *gleichgewendete*, diese *ungleichgewendete* Büschel.

Nach der Erklärung sind zwei Strahlenbüschel projectivisch, wenn sie mit derselben Geraden projectivisch sind. Umgekehrt läßt sich aber auch behaupten:

1) „daß, wenn zwei Strahlenbüschel projectivisch sind, sie zu einundderselben geraden Punktreihe projectivisch sind, d. h. sich in solche Lage bringen lassen, daß sie dieselbe Punktreihe projiciren.“

Denn legt man sie so, daß zwei entsprechende Strahlen e und e_1 auf einander fallen, so bestimmen die Durchschnittspunkte der entsprechenden Paare aa_1 und bb_1 eine Gerade, welche vermöge des dritten Durchschnittspunktes mit dem gemeinsamen Strahle ee, nach dem Fundamentalsatze des § 1 zu beiden Büscheln projectivisch ist.

Es folgt hieraus, daß wenn die Centra zweier projectivischer Büschel auf einem Strahle liegen, der in beiden ein entsprechender ist, sie allemal in perspectivischer Lage sind.

Ferner ergiebt sich aus dem Beweise dieses Satzes, daß drei Paare entsprechender Strahlen vollkommen genügen, um zwei projectivische Strahlenbüschel in perspectivische Lage zu bringen, was ausgesprochen ist in folgendem.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fundamentalsatze 2. „Zwei ebene Strahlenbüschel sind projectivisch, wenn nur drei Strahlen des einen dreien Strahlen des andern entsprechen."

Projectivische Strahlenbüschel sind daher durch drei Paare entsprechender Strahlen vollständig bestimmt; gleiche projectivische Büschel sogar durch ein Paar, da jede zwei gleichgeneigte Strahlen ein entsprechendes Paar ist.

Als Folgerungen aus dem Bisherigen werden noch folgende Sätze hervorgehoben:

a) Zwei gerade Punktreihen, welche zu einer dritten projectivisch sind, sind unter sich projectivisch.

b) Zwei ebene Strahlenbüschel, welche zu einem dritten projectivisch sind, sind es auch unter sich.

§ 4. Die bisher betrachteten Elementargebilde stehen in einer bemerkenswerthen Beziehung gegenseitiger Analogie, welche in den Erklärungen und allen Eigenschaften derselben deutlich hervortrat, welche aber auch in allen weitern Entwickelungen wiedererscheinen wird, überhaupt als ein wesentlicher Character geometrischer Gebilde hervorgehoben werden muß. Diesem Gesetze der Reciprocität sind nämlich die räumlichen Elementargebilde durchweg unterworfen, und ihm verdankt die neuere Geometrie vor allem die Einheit und Durchsichtigkeit, wodurch sie sich vor der älteren Betrachtungsweise auszeichnet. Wir beschränken uns hier auf die Gebilde der Ebene, und benutzen zur Erläuterung dieses Gesetzes das gebräuchliche Mittel, die reciproken Elemente einander gegenüberzustellen.

In

der geraden Punktreihe	dem ebenen Strahlenbüschel
sind reciproke Elemente:	
Der Träger l.	Das Centrum S.
Die Punkte A, B, C.	Die Strahlen a, b, c.
Die Strecke AB.	Der Winkel (ab).
Der Projectionspunkt S.	Die Projectionslinie s.
Die Projectionsstrahlen a, b, c.	Die Durchschnitte der Projectionslinie A, B, C.
Tritt noch hinzu:	
eine zweite gerade Punktreihe,	ein zweiter ebener Büschel,
so sind reciprok:	
Der Durchschnittspunkt.	Die Verbindungslinie beider Centra.
Die Verbindungslinie entsprechender Punktpaare.	Der Durchschnittspunkt entsprechender Strahlen.

Die Lösung der folgenden Fundamental-Aufgabe bietet das beste Beispiel, um daran diese Reciprocität zu veranschaulichen.

§ 5. Aufgabe.

Wenn drei Paare entsprechender Punkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 zweier projectivischer Geraden l und l_1 gegeben sind, zu irgend einem vierten Punkte D der einen den entsprechenden D_1 der andern zu finden.

Wenn drei Paare entsprechender Strahlen a, b, c und a_1, b_1, c_1 zweier projectivischer ebener Büschel S und S_1 gegeben sind, zu irgend einem vierten Strahle d des einen den entsprechenden d_1 des andern zu finden.

Auflösung.

1. Die beiden Geraden haben ein Paar der gegebenen Punkte A und A_1 gemein — sie befinden sich in perspectivischer Lage.

Man ziehe die Strahlen BB_1 und CC_1. Ihr Durchschnitt ist der Projectionspunkt S. Der Strahl SD bestimmt D_1.

1. Die beiden Büschel haben ein Paar der gegebenen Strahlen a und a_1 gemein — sie befinden sich in perspectivischer Lage.

Man suche die Durchschnittspunkte bb_1 und cc_1. Ihre Verbindungslinie ist die Projectionslinie s. Der Punkt sd bestimmt d_1.

2. Die beiden Gebilde befinden sich in schiefer Lage.

(Fig. 3 a.) Man lege durch $A_{,}$ irgend eine dritte Gerade $l_{,,}$, ziehe den Strahl $AA_{,}$, nehme auf demselben einen beliebigen Punkt S als Projectionspunkt an, so bestimmen die Strahlen durch B, C, D auf $l_{,,}$ die entsprechenden Punkte $B_{,,}$, $C_{,,}$, $D_{,,}$, und $l_{,,}$ ist projectivisch zu l. Daher ist sie auch projectivisch zu $l_{,}$. Da aber $l_{,,}$ und $l_{,}$ den Punkt $A_{,}$ entsprechend gemein haben, so sind sie in perspectivischer Lage. Zieht man daher die Strahlen $B_{,,}B_{,}$ und $C_{,,}C_{,}$, so ist der Durchschnittspunkt $S_{,}$ der Projectionspunkt. Durch den Strahl $S_{,}D_{,,}$ wird daher endlich $D_{,}$ auf $l_{,}$ bestimmt.

(Fig. 3 b.) Man lege irgend einen dritten Strahlenbüschel $S_{,,}$, der den Strahl $a_{,}$ enthält, in die Ebene, suche den Durchschnittspunkt $aa_{,}$, und ziehe durch ihn eine beliebige Gerade l als Projectionslinie, so bestimmen die Durchschnittspunkte derselben mit b, c, d die entsprechenden Strahlen $b_{,,}$, $c_{,,}$, $d_{,,}$ des Büschels $S_{,,}$, und $S_{,,}$ ist projectivisch zu S, daher auch projectivisch zu $S_{,}$. Da aber $S_{,,}$ und $S_{,}$ den Strahl $a_{,}$ entsprechend gemein haben, so sind sie in perspectivischer Lage. Verbindet man daher die Punkte $b_{,,}b_{,}$ und $c_{,,}c_{,}$, so ist diese Gerade $l_{,}$ die Projectionslinie. Der Durchschnittspunkt von $d_{,,}$ mit $l_{,}$ bestimmt daher den Strahl $d_{,}$.

Eine zweite Lösung dieser wichtigen Aufgabe, welche noch bequemer für die practische Ausführung scheint, ist folgende:

(Fig. 4 a.) Man projicire die beiden Geraden l und $l_{,}$ durch zwei ebene Strahlenbüschel S und $S_{,}$, deren Centra auf der Geraden $AA_{,}$ liegen. Dieselben sind projectivisch, aber auch in perspectivischer Lage. Sucht man daher die Durchschnittspunkte der Strahlen SB und $S_{,}B_{,}$, wie von SC und $S_{,}C_{,}$, und legt durch dieselben eine Gerade $l_{,,}$, so ist diese die Projectionslinie. Auf ihr wird durch den Strahl SD der Punkt $D_{,,}$ und durch den Strahl $S_{,}D_{,,}$ der Punkt $D_{,}$ bestimmt.

(Fig. 4 b.) Man schneide die beiden Büschel S und $S_{,}$ durch zwei Gerade l und $l_{,}$, welche durch den Schnittpunkt $aa_{,}$ gehen. Dieselben sind projectivisch, aber auch in perspectivischer Lage. Verbindet man daher B mit $B_{,}$ und C mit $C_{,}$, so ist der Durchschnittspunkt dieser Strahlen der Projectionspunkt $S_{,,}$. Durch den Punkt D wird der Strahl $d_{,,}$, und durch den Punkt $D_{,}$ der Strahl $d_{,}$ bestimmt.

Auf die soeben gelösten ist nun die folgende Aufgabe leicht zurückzuführen:

„Wenn drei Paare entsprechender Elemente einer Geraden und eines dazu projectivischen Büschels gegeben sind, zu jedem vierten Elemente des einen das entsprechende des andern zu finden."

Denn schneidet man den Büschel durch eine zweite Gerade, oder projicirt man die Gerade durch einen zweiten Büschel, so hat man zwei gleichartige Gebilde projectivisch auf einander zu beziehen, wie in den vorigen Aufgaben.

§ 6. Die Gesammtheit aller Ebenen, die sich in derselben geraden Linie schneiden, heißt ein Ebenenbüschel, und diese Gerade die Axe desselben.

Wird ein Ebenenbüschel von einer Geraden geschnitten, welche nicht die Axe schneidet (oder ihr parallel ist), so entspricht jeder Ebene ein Punkt der Geraden, und umgekehrt. In Bezug hierauf wird die Gerade projectivisch zu dem Ebenenbüschel genannt.

Wird ein Ebenenbüschel von einer Ebene geschnitten, welche nicht die Axe enthält, so ist der Durchschnitt ein ebener Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt, und dessen Strahlen den einzelnen Ebenen entsprechen. In Bezug hierauf ist dieser Strahlenbüschel projectivisch zu dem Ebenenbüschel.

Wird ein Ebenenbüschel von zwei Ebenen durchschnitten, die nicht die Axe enthalten, so sind die beiden entstandenen Strahlenbüschel projectivisch. Denn verlängert man die beiden Ebenen bis zum Durchschnitt, so ist die Durchschnittslinie sowohl mit dem einen, wie mit dem andern Strahlenbüschel projectivisch. Zwei ebene Strahlenbüschel, welche in demselben Ebenenbüschel liegen, sind daher stets projectivisch.

Leicht ist zu folgern, daß jede Gerade, welche einem Ebenenbüschel projectivisch ist, zu jeder andern den Ebenenbüschel schneidenden Geraden und zu jedem in ihm liegenden Strahlenbüschel projectivisch ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Erzeugung des Kreises durch projectivische Elementargebilde.

§ 7. Jede ebene Curve kann auf doppelte Weise erzeugt werden.

1) Durch Bewegung eines Punktes nach einem gewissen Gesetze, d. h. durch Aneinanderreihung von allen Punkten, welche die Curve bilden.
2) Durch Bewegung einer Geraden nach einem gewissen Gesetze, d. h. durch Aneinanderreihung aller Geraden, welche die Curve berühren. Die Curve ist dann die Einhüllende aller dieser Geraden.

In Bezug hierauf unterscheidet man:

1) Curven n^{ter} Ordnung, wenn der erzeugende Punkt n mal dieselbe Gerade überschreitet, oder wenn eine Gerade die Curve n mal durchschneidet.
2) Curven n^{ter} Classe, wenn die erzeugende Linie n mal durch einen in der Ebene liegenden Punkt geht, oder wenn sich von einem Punkte n Tangenten an dieselbe ziehen lassen.

§ 8. (Fig. 5 a.) Nimmt man zwei Punkte S und S_1 auf der Peripherie eines Kreises als Mittelpunkte zweier Strahlenbüschel an, und projicirt beliebige andere Punkte A, B, C der Peripherie durch die entsprechenden Strahlen a, b, c und a_1, b_1, c_1, so ergiebt sich aus der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen, daß die beiden Strahlenbüschel S und S_1 projectivisch gleich, und zwar gleichgewendet sind. Da sie aber keinen entsprechenden Strahl gemein haben, so sind sie in schiefer Lage. Den zusammenfallenden Strahlen e und d_1 entsprechen vielmehr die Tangenten e_1 und d.

Die Peripherie eines Kreises wird daher durch den Durchschnitt aller entsprechender Strahlenpaare zweier projectivisch gleicher gleichgewendeter Büschel in schiefer Lage erzeugt, und geht durch die Mittelpunkte dieser Büschel.

Von diesen Durchschnittspunkten liegen in derselben Geraden immer nur zwei. Denn lägen drei derselben in einer Geraden, so befänden sich die beiden projectivischen Büschel in perspectivischer Lage, und es würden auf dieser Geraden alle Schnittpunkte liegen. Der Kreis wird von einer Geraden eben nur in zwei Punkten geschnitten: er ist eine Curve 2ter Ordnung.

Da projectivisch gleiche Strahlenbüschel durch ein einziges Paar entsprechender Strahlen bestimmt sind, so folgt, daß durch drei Punkte S, S_1, A, welche nicht in gerader Linie liegen, der Kreis bestimmt ist.

Der Strahl a, insofern er von dem Büschel S_1 projicirt wird, ist mit ihm projectivisch; ebenso ist der Strahl a_1 projectivisch mit dem Büschel S. Mithin ist auch a projectivisch zu a_1, und da diese beiden Geraden einen entsprechenden Punkt, nämlich A, gemein haben, so liegen sie perspectivisch. Bedenkt man nun, daß die Punkte S und S_1 den Durchschnittspunkten der Tangenten d und e_1 mit resp. a_1 und a entsprechen, so ergiebt sich, daß der Projectionspunkt der Geraden a und a_1 der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten de_1 ist. Diese Betrachtungen eröffnen einen Weg zu der interessanten Aufgabe: „einen Kreis, der durch drei gegebene Punkte geht, zu construiren, ohne den Mittelpunkt zu benutzen."

§ 9. (Fig. 5 b.) Legt man an zwei Punkte E und D_1 einer Kreisperipherie die Tangenten s und s_1, und darauf eine beliebige dritte Tangente a, welche die ersteren in A und A_1 schneidet, und zieht man vom Mittelpunkte des Kreises S Strahlen nach diesen Schnittpunkten, so ist leicht erweislich, daß der $\angle ASA_1$ von constanter Größe, nämlich $= \angle ESD = \angle E_1SD$, ist. Läge aber die dritte Tangente am größern Bogen des Kreises, etwa wie b, so wäre $\angle BSB_1$ ebenfalls von constanter Größe, nämlich $=$ dem Supplemente des $\angle ASA_1$. Denkt man sich daher die dritte Tangente am Kreise herumbewegt, und ihre Schnittpunkte mit den beiden Tangenten s und s_1 aus dem Mittelpunkte S des Kreises projicirt, so entstehen zwei projectivisch gleiche Strahlenbüschel desselben Centrums. Die beiden festen Tangenten s und s_1 sind daher in Bezug auf die Schnittpunkte der beweglichen Tangente die Träger zweier projectivischen Punktreihen. Da sie keinen entsprechenden Punkt gemein haben, befinden sie sich in schiefer Lage. Ihrem Durchschnittspunkte DE_1 entsprechen vielmehr die Berührungspunkte D_1 und E.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Peripherie eines Kreises wird daher durch alle Strahlen, welche die entsprechenden Punkte zweier projectivischer Geraden in schiefer Lage verbinden, als Einhüllende derselben erzeugt, und berührt diese Geraden selbst in den Punkten, welche dem Durchschnittspunkte derselben entsprechen.

Von diesen Erzeugungsstrahlen schneiden sich in demselben Punkte immer nur zwei. Denn schnitten sich drei derselben in einem Punkte, so befänden sich die beiden projectivischen Geraden in perspectivischer Lage, und es würden sich in diesem Punkte alle Strahlen schneiden. An den Kreis führen von einem Punkte eben nur zwei Tangenten: er ist eine Curve 2ter Classe.

Da ferner die Lage der Berührungspunkte E und D_1 durch irgend eine dritte Tangente bestimmt wird, wodurch also drei Paare entsprechender Punkte auf beiden Geraden gegeben sind, so folgt, daß durch drei gerade Linien, die nicht sich in einem Punkte schneiden oder parallel sind, ein Kreis bestimmt wird.

Projicirt man die Gerade s_1 von A, und die Gerade s von A_1 aus, so sind diese beiden Strahlenbüschel projectivisch, und da sie den Strahl a entsprechend gemein haben, auch in perspectivischer Lage. Bedenkt man nun, daß die Berührungspunkte E und D_1 dem Schnittpunkt der Geraden E_1D entsprechen, so ergiebt sich, daß die Projectionslinie der beiden Büschel A und A_1 die durch die beiden Berührungspunkte gezogene Gerade o ist. Diese Betrachtungen führen wieder zu einer bemerkenswerthen Aufgabe: „einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene Gerade berührt, ohne den Mittelpunkt zu benutzen.“

III. Erzeugung der Kegelschnitte durch projectivische Gebilde.

§ 10. Wenn ein Kreis von irgend einem Punkte außerhalb seiner Ebene projicirt wird, so bilden die Projectionsstrahlen seiner Peripherie einen Kegelmantel, und seine Projectionen auf andere Ebenen sind daher bekanntlich Kegelschnitte. Denken wir uns noch eine Ebene parallel der Projectionsebene durch das Projectionscentrum gelegt, die wir Centralebene nennen wollen, und die dadurch ausgezeichnet ist, daß die Projectionen aller ihrer Gebilde in die Unendlichkeit fallen, so kann der zu projicirende Kreis eine dreifache Lage gegen dieselbe haben:

1) Der Kreis liegt ganz auf einer Seite der Centralebene, ohne sie zu berühren. Dann liegen alle Punkte der Projection im Endlichen und bilden eine geschlossene Curve. Die Projection ist eine Ellipse, in besondern Fällen ein Kreis. Jede Tangente des erzeugenden Kreises projicirt sich wieder als Tangente in endlicher Entfernung.
2) Der Kreis liegt ganz auf einer Seite der Centralebene, und berührt dieselbe. Dann fällt die Projection des Berührungspunktes ins Unendliche, die entstandene Curve ist daher nach einer Seite unbegrenzt, sie ist eine Parabel. Jede Tangente des Kreises projicirt sich als Tangente der Parabel in endlicher Entfernung, mit Ausnahme derjenigen, welche durch den Berührungspunkt mit der Centralebene geht. Denn diese projicirt sich in die unendlich entfernte Gerade.
3) Der Kreis wird von der Centralebene geschnitten. Dann fallen die Projectionen der beiden Durchschnittspunkte ins Unendliche. Die entstandene Curve ist daher nach zwei Seiten unbegrenzt und besteht aus zwei gesonderten Theilen; sie ist eine Hyperbel. Zwei Tangenten derselben sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre Berührungspunkte in unendliche Entfernung fallen, während sie sich in endlicher Entfernung schneiden. Es sind dies diejenigen, welche durch Projection der beiden Tangenten in den Durchschnittspunkten des Kreises mit der Centralebene entstehen. Da sich die letztern außerhalb der Centralebene schneiden, so schneiden sich ihre Projectionen eben in der Endlichkeit. Diese ausgezeichneten Tangenten der Hyperbel heißen Asymptoten.

Diese aus der Projicirung eines Kreises fließenden Beziehungen der Lage von Punkten und Tangenten sind die Merkmale, welche die rein geometrische Betrachtung zur Unterscheidung der drei Arten von Kegelschnitten benutzen kann. Für ihre generelle Erzeugung in der Ebene, welche uns hier vornehm-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lich beschäftigt, eröffnet sich ebenfalls durch projectivische Übertragung der in II. entwickelten Kreistheoreme ein fruchtbarer Gesichtspunkt. Die Prinzipien dieser Übertragung, welche sich aus den Elementen in I. ableiten, sind folgende:

a) Die Centralprojectionen von projectivischen Geraden oder ebenen Strahlenbüscheln auf eine andere Ebene sind selbst projectivische Gerade oder ebene Strahlenbüschel.

b) Befinden sich dabei die projectivischen Geraden oder Büschel in perspectivischer oder schiefer Lage, so befinden sich ihre Projectionen ebenfalls resp. in perspectivischer oder schiefer Lage.

§ **11**. (Fig. **6** a.) Da nach § **8** die Peripherie des Kreises als der Ort des Durchschnitts zweier projectivisch gleicher Strahlenbüschel in schiefer Lage betrachtet werden kann, so folgt durch Projicirung des Kreises auf irgend eine andere Ebene, nach den eben ausgesprochenen Prinzipien, daß:

„jeder Kegelschnitt durch den Schnitt aller entsprechender Strahlenpaare zweier projectivischer ebener Strahlenbüschel in schiefer Lage erzeugt wird, deren Träger selbst Punkte dieses Kegelschnitts sind."

Da projectivische Strahlenbüschel durch drei Paare entsprechender Strahlen bestimmt sind, so folgt, daß ein Kegelschnitt im Allgemeinen durch fünf Punkte seiner Peripherie bestimmt ist, von denen nämlich zwei S und S_1 die Träger der Strahlenbüschel, die drei andern aber A, B, C die drei Strahlenpaare bestimmen. Ferner ist ersichtlich, daß nicht drei der fünf Punkte in gerader Linie liegen können, weil sonst die beiden Büschel, deren Träger die beiden andern sind, in perspectivischer Lage, ihr Durchschnitt daher eine Gerade sein würde. Die Kegelschnitte werden daher von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten — sie sind Curven zweiter Ordnung.

Ferner ergiebt sich aus ähnlichen Betrachtungen wie im § 8, daß dem Doppelstrahl SS_1 die beiden Tangenten in S und S_1 entsprechen, und daß der Durchschnittspunkt dieser Tangenten O der Projectionspunkt für zwei entsprechende Strahlen a und a_1 ist, die selbst projectivische Punktreihen in perspectivischer Lage tragen. Da mithin durch die Lage der fünf Punkte S, S_1, A, B, C auch die Lage dieses Projectionspunktes O bestimmt wird, so ist damit der Schlüssel gefunden, beliebig viele andere Punkte des Kegelschnitts, und zwar mit alleiniger Anwendung des Lineals zu construiren, wie dies im § **13** gezeigt werden soll.

§ **12**. (Fig. **6** b.) In § **9** ist erwiesen, daß der Kreis auch als Einhüllende aller Strahlen betrachtet werden kann, welche die entsprechenden Punkte zweier projectivischer Punktreihen in schiefer Lage verbinden. Durch Projection des Kreises auf irgend eine andere Ebene ergiebt sich daraus mit Anwendung des am Schlusse des § **10** Ausgesprochenen, daß:

„jeder Kegelschnitt als Einhüllende aller Strahlen erzeugt wird, welche die entsprechenden Paare zweier projectivischer gerader Punktreihen in schiefer Lage verbinden, deren Träger selbst Tangenten dieses Kegelschnitts sind."

Da projectivische Punktreihen durch drei entsprechende Paare bestimmt sind, so folgt, daß ein Kegelschnitt im Allgemeinen durch fünf Tangenten bestimmt ist, von denen nämlich zwei s und s_1 die Träger der Punktreihen sind, die drei andern a, b, c aber die drei Punktpaare auf ihnen bestimmen. Ferner ist ersichtlich, daß nicht drei dieser Tangenten sich in demselben Punkte schneiden dürfen, weil sonst die beiden Punktreihen, deren Träger die beiden andern sind, in perspectivischer Lage, die Strahlen durch ihre Punktpaare daher einen ebenen Büschel bilden würden. An einen Kegelschnitt lassen sich daher von einem Punkte höchstens zwei Tangenten legen, — Kegelschnitte sind Curven 2ter Classe. Man nennt daher auch den Inbegriff aller seiner Erzeugungsstrahlen einen Strahlenbüschel 2ter Ordnung.

Weiter ergiebt sich wie in § **9**, daß dem Doppelpunkte S (dem Schnitt der beiden Tangenten s und s_1) die beiden Berührungspunkte O und O_1 entsprechen, und daß die Gerade o, welche durch diese Berührungspunkte geht, die Projectionslinie für die beiden Büschel A und A_1 ist, die projectivisch und in perspectivischer Lage sind. Da mithin durch die Lage der fünf Tangenten s, s_1, a, b, c die Lage dieser

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Projectionslinie o bestimmt wird, so ist damit die Möglichkeit erwiesen, beliebig viele andere Tangenten des Kegelschnitts, und zwar durch rein lineare Construction zu finden.

Die Ergebnisse dieses und des vor. § sind wiederum vollkommen analog, und indem wir sie nun zur Lösung der folgenden Hauptaufgaben anwenden, wollen wir durch Gegenüberstellung diese Reciprocität für sich selbst sprechen lassen.

§ 13. I. Aufgabe.

Wenn fünf Punkte in der Ebene gegeben sind, beliebig viele andere Punkte durch lineare Construction zu finden, welche in dem durch jene gehenden Kegelschnitt liegen.

Wenn fünf Gerade in einer Ebene gegeben sind, beliebig viele andere Gerade durch lineare Construction zu finden, welche den von jenen berührten Kegelschnitt berühren.

Auflösung.

(Fig. 6a.) S, S_1, A, B, C seien die fünf gegebenen Punkte. Man ziehe von S und S_1 Strahlen nach A, B, C, resp. a, b, c und a_1, b_1, c_1, und bringe die entstandenen Büschel zum Schnitt mit den entsprechenden Strahlen a_1 in $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$, und a in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, welche dadurch zu Trägern zweier projectivischer Punktreihen in perspectivischer Lage werden. Legt man daher durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ und durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ Strahlen, so schneiden sich dieselben im Projectionspunkte O. Zieht man nun von O einen beliebigen Strahl, welcher a in $\mathfrak{D}$ und a_1 in $\mathfrak{D}_1$ schneidet, und zieht von S nach $\mathfrak{D}_1$ und von S_1 nach $\mathfrak{D}$, so schneiden sich diese Strahlen in D, einem neuen Punkte des Kegelschnitts. Auf diese Weise kann man daher beliebig viele, beliebig eng an einander liegende Punkte des Kegelschnitts construiren.

(Fig. 6b.) s, s_1, a, b, c seien die fünf gegebenen Geraden. Man fixire die Durchschnittspunkte von s und s_1 mit a, b, c resp. A, B, C und A_1, B_1, C_1. Die beiden entsprechenden Punkte A und A_1 verbinde man darauf mit den Durchschnittspunkten durch die Strahlen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, welche dadurch zu Trägern zweier projectivischer Büschel in perspectivischer Lage werden. Verbindet man daher die Durchschnittspunkte von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ und von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ durch eine Gerade o, so ist dieselbe die Projectionslinie. Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt in o Strahlen aus A und A_1, welche s in D und s_1 in D_1 schneiden, so ist die Linie DD_1, eine neue Tangente des Kegelschnitts. Auf diese Weise kann man beliebig viele, beliebig eng an einander liegende Tangenten des Kegelschnitts construiren.

Zusatz.

Da nach § 11 der Projectionspunkt O mit dem Durchschnittspunkt der beiden in S und S_1 Berührenden zusammenfällt, so ergiebt sich sogleich, wie in jedem der fünf Punkte die Tangente des Kegelschnitts linear construirt werden kann, ohne denselben zu haben.

Da nach § 12 die Projectionslinie o sich mit den beiden Tangenten s und s_1 in den Berührungspunkten derselben schneidet, so ergiebt sich, wie auf jeder der fünf Geraden der Berührungspunkt mit dem Kegelschnitt linear construirt werden kann, ohne ihn zu haben.

II. Aufgabe.

Einen Kegelschnitt linear zu construiren,

der durch vier gegebene Punkte geht, und in einem derselben eine gegebene Gerade berührt.

der vier gegebene Gerade, und die eine derselben in einem vorgeschriebenen Punkte berührt.

Auflösung.

(Fig. 6a.) Die gegebenen Punkte seien S, S_1, A, B und die gegebene Gerade o. Betrachtet man wieder S und S_1 als Träger der projectivischen Büschel, welche den Kegelschnitt erzeugen, so

(Fig. 6b.) Die gegebenen Geraden seien s, s_1, a, b und der gegebene Berührungspunkt O. Betrachtet man wieder s und s_1 als Träger der projectivischen Punktreihen, welche den Kegelschnitt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bestimmen die Punkte A und B den Projectionsstrahl BB,, welcher auf der Linie o den Projectionspunkt O trifft. Damit ist die Construction auf die in I. links zurückgeführt.

erzeugen, so bestimmen die Geraden a und b die Strahlen b und b,, deren Durchschnittspunkt von der Projectionslinie o mit O verbunden wird. Damit ist die Construction auf die in I. rechts zurückgeführt.

III. Aufgabe.

Einen Kegelschnitt linear zu construiren,

der durch drei gegebene Punkte geht, und in zweien derselben gegebene Gerade berührt.

der drei gegebene Gerade, und zwei derselben in gegebenen Punkten berührt.

Auflösung.

Betrachtet man als die gegebenen Punkte S, S,, A und als die gegebenen Geraden o und o,, so ist der Punkt O mitgegeben, und die Construction auf I. links zurückgeführt.

Betrachtet man als die gegebenen Geraden s, s,, a und als die gegebenen Punkte O und O,, so ist die Projectionslinie o mitgegeben, und die Construction auf I. rechts zurückgeführt.

IV. Die Sätze des Pascal und Brianchon.

§ 14. Der Lehrsatz des Pascal. Liegen auf der Peripherie eines Kegelschnitts sechs Punkte, und verbindet man dieselben in beliebiger Ordnung zu einem einbeschriebenen Sechseck, so liegen die drei Schnittpunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten in einer Geraden.

(Fig. 7.) Die sechs Punkte seien **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** und die Seiten des Sechsecks I, II, III, IV, V, VI. Es ist zu zeigen, daß die Schnittpunkte (I IV), (II V), (III VI) in einer Geraden liegen.

Beweis. Betrachtet man zwei Punkte ungerader Nummer, wie **1** und **3**, als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln, und die von dem dritten ungeraden Punkte **5** ausgehenden Seiten IV und V als Schneidende dieser Büschel, so sind die letztern nach § **11** projectivische Gerade, und liegen auch perspectivisch. Der Schnittpunkt O der Strahlen VI und III ist der Projectionspunkt dieser Geraden. Die Strahlen I und II, welche den Punkt **2** projiciren und mithin entsprechend sind, müssen daher die Geraden IV und V in Punkten M und N schneiden, welche mit O in gerader Linie liegen.

Zusätze. 1. Vom einbeschriebenen Fünfeck.

Bei jedem, einem Kegelschnitt einbeschriebenen Fünfeck **12345** liegt der Durchschnittspunkt einer Seite III und der Tangente im Gegenpunkte **1** mit den Schnittpunkten der beiden andern Paare Gegenseiten (I, IV) und (II, V) in gerader Linie.

Der Beweis ist die Wiederholung des obigen, wenn man nur an Stelle der Seite VI die Tangente in **1** setzt. Der Projectionspunkt der Geraden IV und V ist nun der Durchschnittspunkt O der Seite III und der Tangente in **1**.

2. Vom einbeschriebenen Viereck.

Bei jedem, einem Kegelschnitt einbeschriebenen Viereck **1234** liegen die Durchschnittspunkte zweier Paare Gegenseiten (I, III) und (II, IV) mit dem Durchschnittspunkte der in zwei Gegenecken **1** und **3** gezogenen Tangenten in einer geraden Linie.

Betrachtet man wieder **1** und **3** als Träger zweier Strahlenbüschel, so sind die Geraden I und II projectivisch und liegen perspectivisch. Ihr Projectionspunkt ist der Schnittpunkt der beiden in **1** und **3** berührenden Tangenten. Mithin liegen die Projectionen des Punktes **4** mit ihm in gerader Linie.

§ 15. Satz des Brianchon. Liegen an einem Kegelschnitt sechs Tangenten und verlängert man dieselben in beliebiger Ordnung zu einem umbeschriebenen Sechsseit, so schneiden sich die drei Verbindungslinien der drei Paare Gegenecken desselben in einem Punkte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(Fig. 8.) Die sechs Tangenten seien I, II, III, IV, V, VI und die Ecken des Sechsseits **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**. Es ist zu zeigen, daß die Geraden (**1**, **4**), (**2**, **5**), (**3**, **6**) sich in einem Punkte schneiden

Beweis. Betrachtet man zwei Seiten ungerader Nummer, wie I und III als Träger der Punktreihen, welche von den übrigen Seiten bestimmt werden, und die Eckpunkte der dritten ungeraden Seite V, nämlich **4** und **5**, als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln, auf welche diese Punktreihen bezogen werden, so sind nach § **12** diese Strahlenbüschel projectivisch und liegen auch perspectivisch. Die Verbindungslinie o der Punkte **3** und **6** ist die Projectionslinie derselben. Die Schnittpunkte **1** und **2** des Strahls II müssen daher aus **4** und **5** durch zwei Strahlen m und n projicirt werden, welche sich in einem Punkte von o schneiden.

Zusätze. **1.** Vom umbeschriebenen Fünfseit.

Bei jedem, einem Kegelschnitt umbeschriebenen Fünfseit I II III IV V schneiden sich die Verbindungslinie eines Eckpunktes **3** mit dem Berührungspunkte der Gegenseite I und die zwei Verbindungslinien der beiden andern Paare von Gegenecken (**1**, **4**) und (**2**, **5**) in einem Punkte.

Der Beweis ist die Wiederholung des obigen, wenn man nur statt des Eckpunktes **6** den Berührungspunkt der Seite I setzt. Die Projectionslinie der Büschel **4** und **5** ist jetzt nämlich die Verbindungslinie des Eckpunktes **3** mit diesem Berührungspunkte.

2. Vom umbeschriebenen Vierseit.

Bei jedem, einem Kreise umbeschriebenen Vierseit I II III IV schneiden sich die Verbindungslinien der zwei Paare Gegenecken (**1**, **3**) und (**2**, **4**) und die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier Gegenseiten I und III in einem Punkte.

Betrachtet man wieder I und III als Träger zweier Punktreihen, so sind die Büschel **1** und **2** projectivisch und liegen perspectivisch. Ihre Projectionslinie geht durch die Berührungspunkte von I und III. Mithin schneiden sich die Projectionsstrahlen von **3** und **4** auf dieser Linie.

Daß die Sätze des Pascal und Brianchon reciproke Eigenschaften der Kegelschnitte aussprechen, und ihre Ableitung aus projectivischen Grundgebilden ebenfalls dem Gesetz der Reciprocität unterliegen, kann nicht entgangen sein. Diese Sätze führen auf eine zweite Methode, die in § **13** behandelten Aufgaben zu lösen, bei der dies Gesetz wieder zu Statten kommt, wie es der folgende § zeigen wird.

§ **16**. I. Aufgabe.

Wenn fünf Punkte gegeben sind, durch welche ein Kegelschnitt bestimmt wird, auf einer durch einen derselben gelegten Geraden den Punkt zu finden, in dem sie den Kegelschnitt schneidet.

Wenn fünf Gerade gegeben sind, durch welche ein Kegelschnitt bestimmt wird, durch einen Punkt einer derselben eine Gerade zu ziehen, welche den Kegelschnitt berührt.

Auflösung.

(Fig. 7.) Seien **1**, **2**, **3**, **4**, **5** die gegebenen Punkte und VI die gegebene Gerade. Es ist klar, daß die Punkte O und M und dadurch N bestimmt sind, mithin der Schnittpunkt **6** gefunden ist.

(Fig. 8.) Seien I, II, III, IV, V die gegebenen Geraden und **6** der gegebene Punkt. Es ist klar, daß die Geraden o und m und dadurch auch n bestimmt sind. Daher kann die Tangente VI gezogen werden.

Es leuchtet sogleich ein, daß sich hierauf wiederum eine rein lineare Construction eines Kegelschnitts durch beliebig viele Punkte oder Tangenten gründen läßt.

Mit Anwendung des Zusatzes im § **14** vom einbeschriebenen Fünfeck ist es ferner leicht, durch jeden der gegebenen fünf Punkte die Tangente des Kegelschnitts zu ziehen.

Mit Anwendung des Zusatzes im § **15** vom umbeschriebenen Fünfseit ist es nun leicht, in jeder der fünf Geraden den Berührungspunkt zu finden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Ausführung dieser und der folgenden Constructionen scheint aber genug vorbereitet zu sein. Es sei daher nur bemerkt, daß die beiden folgenden Aufgaben, die bereits im § **13** auf andere Weise behandelt sind, eine noch einfachere Lösung aus den in den beiden letzten §§ vorgetragenen Sätzen erhalten.

II. Aufgabe.

Wenn vier Punkte und durch einen derselben eine Gerade als Bestimmungsstücke eines Kegelschnitts gegeben sind, den Durchschnittspunkt desselben mit irgend einer durch einen der Punkte gelegten Geraden zu finden.

Wenn vier Gerade und in einer derselben ein Punkt als Bestimmungsstücke eines Kegelschnitts gegeben sind, die Tangente desselben zu ziehen, welche durch irgend einen Punkt einer der Geraden geht.

III. Aufgabe.

Wenn drei Punkte und durch zwei derselben je eine Gerade als Bestimmungsstücke eines Kegelschnitts gegeben sind, einen vierten Punkt desselben zu finden.

Wenn drei Gerade und auf zwei derselben je ein Punkt als Bestimmungsstücke eines Kegelschnitts gegeben sind, eine vierte Tangente desselben zu finden.

V. Involution der geraden Punktreihen und der ebenen Büschel.

§ **17**. (Fig. **9**.) Wenn zwei projectivische Punktreihen der Geraden l und l_1 in Bezug auf einen Projectionspunkt O perspectivisch liegen, so entspricht, wie in § **2** erörtert ist, dem unendlich fernen Punkte Q_1 der l_1 ein endlicher Punkt Q der l, nämlich der Schnittpunkt des Parallelstrahls q, und dem unendlich fernen Punkte R der l der endliche Punkt R_1 auf l_1. Die Punkte Q und R_1 werden Gegenpunkte genannt. Wir wollen uns nun die Gerade l_1 so auf l gelegt denken, daß R_1 mit Q zusammenfällt; — die verlegte Gerade heiße nun l' —. Dies kann aber auf doppelte Weise geschehen, nämlich daß die gemeinsamen Punkte C und C_1 entweder auf verschiedene, oder auf dieselbe Seite des Punktes QR' zu liegen kommen.

1. (Fig. **9** a.) Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Punkte C und C' auf verschiedenen Seiten von QR' liegen. Sind A und A_1 zwei entsprechende Punkte der Punktreihen l und l_1 und ist A' der A_1 entsprechende in l', so läßt sich behaupten:

> daß der Punkt, welcher dem A', sofern es als Punkt von l gedacht wird, entspricht mit dem A, sofern es als Punkt von l' gedacht wird, zusammenfällt; daß überhaupt auf der Doppellinie ll' jede zwei entsprechende Punkte, wie A und A' oder C und C', sich gegenseitig doppelt entsprechen.

Um dies (ohne alle Rechnung) zu beweisen, denken wir uns mit der Geraden l_1 auch den sie projicirenden Büschel O verlegt, wodurch sein Scheitel nach O' in die Verlängerung von OQ fällt, und $O'R' = OR_1$ wird. Projiciren wir nun den Punkt A' aus dem Centrum O auf die Gerade l_1, seine Projection heiße A_1', so ist (weil die Punkte $OAO'A'$ in einer Kreisperipherie liegen, und daher $\angle A_1'OR_1 = \angle AO'R'$ sein muß) durch Congruenz der Dreiecke OR_1A_1' und $O'R'A$ erwiesen, daß $A_1'R_1 = AR'$, daß mithin A_1' bei der Verlegung der Geraden l_1 mit A zusammenfallen muß.

2. (Fig. **9** b.) Im andern Falle liegen die Punkte C und C' auf derselben Seite des Punktes QR'. Sind nun A und A_1 zwei entsprechende Punkte der Punktreihen l und l_1, und ist A' der dem A_1 entsprechende in l', so wird wiederum behauptet:

> daß jede zwei entsprechende Punkte der Doppellinie ll', wie A und A', sich gegenseitig doppelt entsprechen.

Denken wir nämlich den projicirenden Büschel O mit der Geraden l_1 verlegt, so fällt sein Mittelpunkt O' auf OQ oder ihre Verlängerung auf dieselbe Seite von l, so daß $O'Q = OR_1$ wird. Projicirt man nun den Punkt A' aus O auf l_1, seine Projection heiße A_1', so ist aus ähnlichen Gründen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wie oben, $\Delta OR_1A_1' \cong \Delta O'QA$, daher wiederum $A_1'R_1 = AR'$, weshalb beim Zusammenlegen A_1' auf A fallen muß.

Fassen wir das Resultat dieser Erörterung zusammen, so erhalten wir folgenden Fundamentalsatz:

> Liegen zwei projectivische Punktreihen auf demselben Träger derart, daß ihre Gegenpunkte zusammenfallen, so entspricht sich jedes Punktpaar gegenseitig doppelt.

§ **18.** Der Fundamentalsatz des vor. § erlaubt aber auch die Umkehrung:

> Liegen zwei projectivische Punktreihen auf demselben Träger derart, daß irgend ein Paar entsprechender Punkte sich gegenseitig doppelt entsprechen, so fallen ihre Gegenpunkte zusammen.

Sind nämlich auf der Doppellinie ll' (Fig. 9) die Punkte C und C' doppelt entsprechende, so kann man sich l' in eine beliebige Lage gebracht denken, daß sie l schneidet, und bei der die Punkte C und C' zusammenfallen, etwa in die Lage l_1, wodurch das C der l' nach C_1' rückt. Da nun l mit l_1 perspectivisch liegt, so fällt der Projectionspunkt O irgendwo auf den Strahl $C'C_1'$. Durch die Parallelstrahlen werden die Gegenpunkte Q und R_1 bestimmt. Da aber nach der Voraussetzung $C'C = C_1C_1'$ ist, so ist immer $C_1'R_1 = OR_1 = QC$. Fällt daher in der Doppellinie C_1' mit C zusammen, so muß auch R_1 auf Q fallen.

Aus den beiden Fundamentalsätzen folgt daher auch:

> Wenn zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers irgend ein sich doppelt entsprechendes Punktpaar haben, so entsprechen sich alle Punktpaare derselben doppelt.

§ **19.** Von zwei projectivischen Punktreihen desselben Trägers, bei denen jedes Punktpaar sich doppelt entspricht, sagt man, sie befinden sich in *involutorischer Lage*.

Da zwei Punktreihen als projectivisch durch das Entsprechen *dreier* Punktpaare bestimmt sind, so werden nach dem vor. § zwei Punktreihen desselben Trägers in involutorischer Lage sein, wenn z. B.:

AA'B projectivisch A'AB'.

Werden zwei involutorisch liegende Punktreihen als ein einziges Gebilde betrachtet, so sagt man von den paarweis zugeordneten Punkten AA', BB', CC', sie befänden sich in *Involution*; und den Punkt (QR'), welcher dem unendlich fernen Punkte zugeordnet ist, nennt man den *Mittelpunkt der Involution*.

Das Resultat der bisherigen Entwickelungen läßt sich daher auch so aussprechen:

> Sind von einer Punktreihe in Involution zwei Paare zugeordneter Punkte gegeben, so ist zu jedem **5**ten Punkte der zugeordnete **6**te bestimmt.

Da (Fig. 9) OC'O'C und OA'O'A Kreisvierecke sind, mithin die Linie OO' die Chordale der beiden um diese Vierecke beschriebenen Kreise ist, so würde sich dadurch ein Mittel ergeben, jedes andere Paar der Involution zu bestimmen. Man hätte nur über den Strecken CC' und AA' als Durchmessern Kreise zu errichten, und die Chordale derselben zu suchen. Ihr Durchschnitt mit l wäre der Mittelpunkt der Involution Q, und zu jedem **5**ten Punkte B wäre durch die constante Potenz QB . QB' der zugeordnete B' bestimmt. Da wir aber für unsern Zweck einer linearen Construction den Vorzug geben, so begnügen wir uns mit dieser Andeutung, und suchen im Folgenden dem entsprechende Hilfsmittel.

§ **20.** Aus dem Bisherigen ergeben sich zwei Arten der Involution.

a) (Fig. 9 a.) Die zugeordneten Punkte fallen auf verschiedene Seiten des Mittelpunktes Q. Dann folgen sie auf beiden in derselben Ordnung: ABCQA'B'C'. Die Punkte bilden eine *gleichliegende* Involution.

b) (Fig. 9 b.) Die zugeordneten Punkte fallen auf dieselbe Seite des Mittelpunktes Q. Sie folgen in umgekehrter Ordnung: ABCC'B'A'Q. Dann bilden die Punkte eine *ungleichliegende* Involution.

Aus der Anordnung dieser Punktreihen ist es leicht ersichtlich, daß bei der gleichliegenden Involution niemals ein zugeordnetes Paar zu einem *Doppelpunkte* zusammenfallen kann; daß dagegen bei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der ungleichliegenden Involution es auf beiden Seiten des Mittelpunktes je einen Punkt geben muß, in dem ein Paar zugeordneter Punkte zu einem Doppelpunkt zusammenfällt.

§ **21.** Lehrsatz. Werden die Seiten und Diagonalen eines vollständigen Vierecks von einer Transversale durchschnitten, so bilden die sechs Durchschnittspunkte eine Involution, in welcher die Schnittpunkte der Gegenseiten und der beiden Diagonalen zugeordnete Paare bilden.

Beweis. (Fig. **10.**) Das Viereck sei MNOP und die Transversale l. Es ist zu zeigen, daß die sechs Punkte AA'BB'CC' eine Involution bilden. Man ziehe noch MC und verlängere OP bis G. Nun ist die Punktreihe AA'BC projectivisch zu QA'PG aus dem Mittelpunkte M.

QA'PG	„	„	QANM „ „ „	C.
QANM	„	„	A'AB'C' „ „ „	O.

AA'BC projectivisch zu A'AB'C',

folglich sind nach § **19** die sechs Punkte AA'BB'CC' in Involution.

Schneidet die Transversale die beiden Diagonalen entweder beide außerhalb, oder beide innerhalb des Vierecks, so ist die Involution eine ungleichliegende; schneidet sie die eine innerhalb, die andere außerhalb, so ist die Involution eine gleichliegende. Geht im ersteren Falle die Transversale durch eine Complementärecke des Vierecks oder durch den Schnitt beider Diagonalen, so entsteht ein Doppelpunkt. Geht sie zugleich durch zwei solcher Punkte, so enthält die Involution zwei Doppelpunkte; sie besteht also aus vier Punkten. Es ist aus bekannten Eigenschaften des vollständigen Vierecks ersichtlich, daß diese vier Punkte stets harmonisch liegen. Hieraus ergiebt sich der für die Theorie der Involution wichtige Satz:

Die beiden Doppelpunkte einer Involution liegen mit jedem Paare zugeordneter Punkte harmonisch; und ihr Abstand wird von dem Mittelpunkte der Involution halbirt.

§ **22.** Aufgabe. Zu fünf Punkten einer Involution den zugeordneten sechsten zu finden.

(Fig. **10.**) Es seien die Punkte AA'BB'C auf der Geraden l gegeben. Um C' zu finden, ziehe man von einem beliebigen Punkte M die Geraden MA und MB, darauf von C eine beliebige Transversale, welche die ersteren in N und P schneidet. Zieht man nun NB' und PA', deren Schnittpunkt O, so bestimmt endlich die Gerade MO den Punkt C' auf l. Daß diese Construction anwendbar bleibt, wenn ein oder zwei Paare der gegebenen Punkte zu Doppelpunkten vereinigt sind, ist einleuchtend.

§ **23.** Aus dem Begriff der involutorischen Punktreihe ergiebt sich der correspondirende des involutorischen Strahlenbüschels. In ihm liegen zwei projectivische Büschel concentrisch so, daß jedes Paar entsprechender Strahlen sich doppelt entspricht. Man hat ebenfalls eine gleichliegende und eine ungleichliegende Involution der Strahlen zu unterscheiden. Wird eine Punktreihe in Involution von einem Strahlenbüschel projicirt, so ist der letztere ebenfalls in Involution, und auf jeder Transversale, welche einen Strahlenbüschel in Involution schneidet, wird eine involutorische Punktreihe bestimmt. Aus dem Frühern folgt daher, daß ein Strahlenbüschel in Involution durch zwei Paare zugeordneter Strahlen bestimmt ist, und daß an die Stelle eines solchen Paars auch ein Doppelstrahl treten kann. Dem Satze § **21** correspondirt der folgende:

§ **24.** Lehrsatz. Werden die drei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits aus einem beliebigen Punkte der Ebene projicirt, so bilden die Strahlen einen Büschel in Involution.

Beweis. (Fig. **11.**) Die Ecken des vollständigen Vierseits seien AA_1, BB_1, CC_1 und S der Punkt in der Ebene. Das Viereck $SBCA_1$ wird von der Seite AC_1 als einer Transversale geschnitten. Daher sind nach § **21** die Schnittpunkte der Gegenseiten und Diagonalen dieses Vierecks in Involution, mithin die Strahlen aa'bb'cc', welche die Punkte AA_1, BB_1, CC_1 projiciren, ebenfalls in Involution.

Liegt S auf einer der Diagonalen des Vierseits, so ist diese ein Doppelstrahl des involutorischen Büschels. Liegt S im Schnittpunkt zweier Diagonalen, so sind diese beiden Doppelstrahlen, und liegen zu dem andern Paare harmonisch. Hieraus ergiebt sich:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die beiden Doppelstrahlen einer Involution liegen mit jedem Paare zugeordneter Punkte harmonisch.

Das vollständige Vierseit bietet auch ein Mittel durch lineare Construction zu fünf Strahlen eines involutorischen Büschels den zugehörigen sechsten zu finden, was nach Analogie der Aufgabe § 22 leicht auszuführen ist. Übrigens ist das ebensogut durch Reduction auf jene Aufgabe möglich.

Indem wir uns nun zu den Beziehungen der involutorischen Elementargebilde zu den Kegelschnitten wenden, müssen wir jedoch einen Hilfssatz über projectivische Punktreihen voranschicken, der bei den spätern Beweisen unerläßlich ist.

§ 25. Hilfssatz. (Fig. 12.) Wenn man in einer geraden Punktreihe ABCD zwei Elemente und dann auch die beiden andern vertauscht, so entsteht eine neue Punktreihe, welche der ersten projectivisch ist.

Thes. ABCD projectivisch BADC projectivisch CDAB projectivisch DCBA.

Beweis. Die Punktreihe ABCD projicire man aus einem beliebigen Punkte S, schneide den Büschel durch die Transversalen AEFG und DHEJ. Nun ist:

	ABCD	projectivisch	AEFG	aus dem Mittelpunkte S
	AEFG	„	CHFS	„ „ „ D
	CHFS	„	CDAB	„ „ „ E
	ABCD	projectivisch	CDAB.	
Ferner ist	CDAB	projectivisch	HDJE	aus dem Mittelpunkte S
	HDJE	„	HCSF	„ „ „ A
	HCSF	„	DCBA	„ „ „ E
	CDAB	projectivisch	DCBA.	
Mithin auch	ABCD	projectivisch	BADC.	

Dasselbe Vertauschungsgesetz gilt von ebenen Strahlenbüscheln.

§ 26. Lehrsatz des Desargues.

Ist einem Kegelschnitt ein Viereck einbeschrieben, so bilden die Schnittpunkte einer beliebigen Transversale mit dem Kegelschnitt und den Gegenseiten des Vierecks eine Involution.

Ist einem Kegelschnitt ein Vierseit umbeschrieben, so bilden die Strahlen, welche aus einem beliebigen Punkte die Gegenecken des Vierseits projiciren, und die beiden Tangenten durch diesen Punkt eine Involution.

Beweis.

(Fig. **13** a.) $a\ b\ a_1\ b_1$ seien die Seiten des einbeschriebenen Vierecks und l die Transversale, C und C′ ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt, A A′ B B′ ihre Schnittpunkte mit den Seiten.

Aus den Eckpunkten (ab) und $(a_1 b_1)$ werden die Punkte des Kegelschnitts durch zwei projectivische Strahlenbüschel projicirt, es ist daher

ACBC′ projectivisch B′CA′C′.

Da aber nach § **25**

B′CA′C′ projectivisch A′C′B′C.

ACBC′ projectivisch A′C′B′C

Mithin ist die Punktreihe AA′BB′CC′ in Involution.

Aus § **21** folgt, daß auch die Schnittpunkte der Diagonalen des Vierecks mit der Transversale Punkte dieser Involution sind.

(Fig. **13** b.) $A\ B\ A_1\ B_1$ seien die Ecken des umbeschriebenen Vierseits, und S der Centralpunkt des Büschels, c und c′ die beiden Tangenten, a a′ b b′ die Strahlen durch die Gegenecken.

Die beiden Seiten AB und A_1B_1 sind in Bezug auf die Durchschnittspunkte der übrigen Tangenten des Kegelschnitts projectivisch; es ist daher:

acbc′ projectivisch b′ca′c′. Nach § **25**

b′ca′c′ „ a′c′b′c.

acbc′ projectivisch a′c′b′c.

Mithin ist der Büschel aa′bb′cc′ in Involution.

Aus § **24** folgt, daß auch die Strahlen nach den Complementärecken des Vierseits zugeordnete Elemente dieser Involution sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zusatz 1.

Fallen zwei Eckpunkte des Vierecks zusammen, so degenerirt das Viereck in ein Dreieck, und die eliminirte Seite in die Tangente durch eine Ecke des Dreiecks.

Fallen zwei Seiten des Vierseits zusammen, so degenerirt das Vierseit in ein Dreiseit, und die eliminirte Ecke in den Berührungspunkt der einen Seite.

Zusatz 2.

Degeneriren zugleich zwei Gegenseiten des Vierecks in Tangenten, wobei das andere Paar in die Berührungssehne zusammenfällt, so erhält man folgenden Satz:

Schneidet eine Transversale einen Kegelschnitt in C und C', zwei Tangenten desselben in A und A' und die Berührungssehne in B, so ist B ein Doppelpunkt zur Involution AA'CC'. Berührt die Transversale den Kegelschnitt, so daß C mit C' zusammenfällt, so sind ACA'B harmonische Punkte.

Degeneriren zugleich zwei Gegenecken des Vierseits in Berührungspunkte, wobei das andere Paar in den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten zusammenfällt, so erhält man folgenden Satz:

Zieht man von einem Punkte S die beiden Tangenten c und c' an einen Kegelschnitt, die Strahlen a und a' nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und dem Strahl b nach dem Schnittpunkt dieser Tangenten, so ist b ein Doppelstrahl zur Involution aa'cc'. Liegt der Punkt S auf dem Kegelschnitt, so sind aca'b harmonische Strahlen.

§ 27. Der Satz des Desargues und seine beiden Zusätze führen auf eine dritte lineare Lösung der in § 13 und § 16 bereits behandelten Aufgaben.

I. (Fig. 13 a.) Betrachtet man nämlich die fünf Punkte M N O P C als gegebene, so werden durch dieselben auf der beliebig durch C gelegten Transversale l die fünf involutorischen Punkte A A' B B' C bestimmt, deren zugeordneter sechster C' ein Punkt des Kegelschnitts ist.

Will man aber in einem der gegebenen fünf Punkte die Tangente construiren, so denke man die eine Seite a des Vierecks in eine Tangente degenerirt. Dieselbe wird bestimmt sein, wenn die fünf Punkte A' B B' C C' auf der Transversale l bestimmt sind. Dies ist aber der Fall, da die fünf Punkte P M O C C' des Kegelschnitts gegeben sind.

(Fig. 13 b.) Betrachtet man die fünf Tangenten m n o p c als gegeben, so werden durch dieselben in Bezug auf einen beliebig in c angenommenen Centralpunkt S die fünf involutorischen Strahlen a a' b b' c bestimmt, deren zugeordneter sechster c' eine Tangente des Kegelschnitts ist.

Will man auf einer der fünf gegebenen Geraden den Berührungspunkt finden, so denke man den Eckpunkt A des Vierseits in einen Berührungspunkt degenerirt. Nun wird derselbe bestimmt sein, wenn die fünf Strahlen a' b b' c c' des Büschels S bestimmt sind. Dies ist aber der Fall, da die fünf Tangenten p m o c c' des Kegelschnitts gegeben sind.

Die Aufgaben II. und III. des § 13 lassen sich in einer ganz analogen Weise vermittelst der Zusätze des vor. § ohne Schwierigkeit lösen.

VI. Construction der Doppelelemente einer Involution.

§ 28. Die Construction der Doppelpunkte einer Involution läßt sich unter verschiedene Gesichtspunkte stellen. Geht man davon aus, was in § 19 beiläufig bemerkt ist, daß der Mittelpunkt der Involution auf der gemeinschaftlichen Chordale aller Kreise liegt, welche über den Abständen je zweier zugeordneter Punkte als Durchmessern errichtet werden, so sind die Doppelpunkte als in Punkte degenerirte Kreise zu betrachten, und leicht durch die Länge eines Tangentenabschnitts zu finden. Andernseits ordnet sich aber dies Problem einem allgemeineren unter: „in zwei auf demselben Träger befindlichen projectivischen Punktreihen die gemeinsamen Punkte zu finden." Obgleich nun jene Betrachtungsweise eine recht bequeme Construction darbietet, so geben wir jedoch hier der letztern den Vorzug, und beschäftigen uns daher, Früheres zugleich ergänzend, mit jener allgemeinen Aufgabe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn auf demselben Träger zwei projectivische Punktreihen liegen, die gemeinsamen Punkte beider zu finden.

Auflösung. (Fig. **14.**) Drei oder mehr gemeinsame Punkte können zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers niemals haben; denn sonst würden sie überhaupt zusammenfallen. Da aber im Allgemeinen zwei Doppelpunkte vorhanden sind, so ist diese Aufgabe „zweiten Grades", und es ist daher unmöglich, durch bloß lineare Construction sie zu lösen. Es muß in die Construction ein Gebilde zweiten Grades, also ein Kegelschnitt eintreten. Um aber dem hier befolgten Prinzip nach Möglichkeit treu zu bleiben, wollen wir diesen Kegelschnitt, etwa einen Kreis, nur einmal, und in der Ebene der Construction als festliegend einführen.

Ist nun l der Träger der beiden projectivischen Punktreihen A, B, C und A_1, B_1, C_1, und außerdem in der Ebene ein Kreis gegeben, so nehmen wir auf seiner Peripherie irgend einen Punkt S als Mittelpunkt zweier Strahlenbüschel an, durch welche die beiden Punktreihen der l auf die Peripherie des Kreises projicirt werden; diese Projectionen seien 𝔄, 𝔅, ℭ und $𝔄_1$, $𝔅_1$, $ℭ_1$. Wenn man darauf aus 𝔄 die Punkte $𝔄_1$, $𝔅_1$, $ℭ_1$ projicirt, so ist nach § 8 der entstandene Büschel 𝔄 projectivisch dem Büschel S_1, der mit S concentrisch liegt. Ebenso ist der Büschel $𝔄_1$, welcher die Punkte 𝔄, 𝔅, ℭ projicirt, projectivisch dem Büschel S. Daraus ergiebt sich, daß der Büschel 𝔄 auch projectivisch dem Büschel $𝔄_1$, und da beide den Strahl 𝔄𝔄$_1$ gemein haben, mit ihm in perspectivischer Lage sei. Sucht man nun die Projectionslinie o dieser beiden Büschel, so sind die Schnittpunkte 𝔇 und 𝔈 derselben mit der Kreisperipherie offenbar Projectionen beider Büschel. Projicirt man daher 𝔇 und 𝔈 aus S auf die Gerade l, so sind diese Projectionen D und E die gesuchten gemeinsamen Punkte.

Aus der Lage der Geraden o läßt sich zugleich auf die Existenz und Zahl der gemeinsamen Punkte schließen. Je nachdem sie nämlich den Kreis schneidet, berührt oder nicht trifft, sind zwei, ein oder kein solcher Punkt vorhanden.

§ **29.** Aufgabe **1.** Wenn vier Punkte einer Involution gegeben sind, die zugehörigen Doppelpunkte mit Hilfe eines festliegenden Kreises auf linearen Wege zu finden.

Auflösung. (Fig. **15.**) A, B, B′, A′ seien die Punkte der Involution. Nach dem vor. § ergiebt sich folgende Construction: Nachdem die Punkte A, B, B′, A′ aus einem beliebigen Punkte des festliegenden Kreises auf seine Peripherie nach 𝔄, 𝔅, 𝔅′, 𝔄′ projicirt sind, verbindet man 𝔄 mit 𝔅′ und 𝔅, und 𝔄′ mit 𝔅 und 𝔅′, und bestimmt durch die erhaltenen Schnittpunkte die Lage der Projectionslinie o. Ihre Schnittpunkte mit der Peripherie 𝔇 und 𝔈 projicire man rückwärts aus S auf l nach D und E, so sind dies die gesuchten Doppelpunkte der Involution.

Bei gleichliegender Involution fällt die Projectionslinie nothwendig außerhalb des Kreises, die Schnittpunkte, mithin auch die Doppelpunkte sind imaginair.

Noch einfacher wird die Construction, wenn der festliegende Kreis durch zwei zugeordnete Punkte, wie A und A′, geht. Dann sind nur B und B′ zu projiciren. Daß mit Hilfe des festliegenden Kreises auch zu dem **5**ten Punkte einer Involution der **6**te gefunden werden kann, ist einleuchtend. Da ferner die Doppelpunkte zu jedem Paar zugeordneter Punkte harmonisch liegen, so ist hiermit auch die wichtige Aufgabe gelöst: „Zu zwei auf einer Geraden liegenden Punktpaaren die zu beiden harmonisch liegenden Punkte zu finden."

2. Wenn vier Strahlen eines Büschels in Involution gegeben sind, die zugehörigen Doppelstrahlen zu finden.

Auflösung. Die Construction der Doppelstrahlen läßt sich mit Hilfe eines festliegenden Kreises auf ganz ähnliche Weise auf linearem Wege ausführen, indem man die Büschel durch eine Transversale schneidet; am bequemsten aber, wenn der Kreis durch den Mittelpunkt S des Büschels selbst geht, da dann diese Transversale überflüssig ist, und die Strahlen nach den Schnittpunkten von o die gesuchten Doppelstrahlen selbst sind. Bei gleichliegender Involution sind die Doppelstrahlen imaginair.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun im Stande, uns den beiden noch übrigen Hauptaufgaben der Kegelschnittsconstructionen zuzuwenden.

§ 30. IV. Aufgabe.

Einen Kegelschnitt zu construiren,

der durch vier gegebene Punkte geht, und eine gegebene Gerade berührt.

der vier gegebene Gerade berührt, und durch einen gegebenen Punkt geht.

Auflösung.

(Fig. 16 a.) Die gegebenen Punkte seien M, N, O, P und die Gerade s. Die Punkte bilden ein Viereck, dessen Gegenseiten die Gerade s in den Punkten A, A', B, B' schneiden. Der unbekannte Berührungspunkt der Geraden, nämlich C, ist nach dem Satze des Desargues, wenn man die Tangente als Transversale betrachtet, ein Doppelpunkt der Involution der Punkte A, A', B, B'. Er kann daher nach dem vorigen § construirt werden. Dadurch ist diese Aufgabe auf eine frühere, nämlich I. links § 13 zurückgeführt.

Da es aber noch einen zweiten Doppelpunkt C' auf der Geraden s giebt, so genügen den Bedingungen der Aufgabe zwei Kegelschnitte. Hätte man die vier Punkte in einer andern möglichen Folge, wie MPNO zu einem Viereck verbunden, so resultirte nach § 26, Zus. 1 dieselbe Involution, welche daher auf dieselben Doppelpunkte führen würde. Es giebt daher auch nur zwei Lösungen.

(Fig. 16 b.) Die gegebenen Geraden seien m, n, o, p und der Punkt S. Diese Geraden bilden ein Vierseit, dessen Gegenecken durch die Strahlen a, a', b, b' aus S projicirt werden. Die unbekannte Tangente in S, nämlich c, ist nach dem correspondirenden Satze § 26, wenn man den Berührungspunkt als Mittelpunkt des Büschels betrachtet, ein Doppelstrahl der Involution der Strahlen a, a', b, b', der daher nach dem vor. § construirt werden kann. Dadurch ist diese Aufgabe auf eine frühere, nämlich I. rechts § 13 zurückgeführt.

Da es noch einen zweiten Doppelstrahl c' in dem Büschel S giebt, so genügen den Bedingungen der Aufgabe zwei Kegelschnitte. Hätte man die vier Geraden in einer andern möglichen Folge mpon zu einem Vierseit verlängert, so resultirte nach § 26, Zus. 1 dieselbe Involution, welche daher auf dieselben Doppelstrahlen führen würde, wie vorher. Es giebt daher nur zwei Lösungen.

§ 31. V. Aufgabe.

Einen Kegelschnitt zu construiren,

der durch drei gegebene Punkte geht, und zwei gegebene Gerade berührt.

der drei gegebene Gerade berührt, und durch zwei gegebene Punkte geht.

Auflösung.

(Fig. 17 a.) Die gegebenen Punkte seien A, B, C, die gegebenen Geraden a und b. Man lege durch A und B eine Transversale, welche die Geraden a und b in M und M' schneidet. Nach § 26, Zus. 3 bilden die vier Punkte A, B, M, M' eine Involution, deren Doppelpunkt D mit den beiden Berührungspunkten X und Y auf einer Geraden s liegt. Ebenso lege man durch A und C eine Transversale, welche die Geraden in N und N' schneidet, und suche zu diesen vier Punkten in Involution den Doppelpunkt E, der wiederum mit X und Y in gerader Linie liegen muß. Dadurch sind daher X und Y gefunden, und mithin ist der Kegelschnitt durch fünf Punkte bestimmt.

Da durch die drei Punkte noch eine dritte

(Fig. 17 b.) Die gegebenen Geraden seien a, b, c, die gegebenen Punkte A und B. Man ziehe aus dem Schnittpunkte (ab) die Strahlen m und m' nach den Punkten A und B. Nach § 26, Zus. 3 bilden die vier Strahlen a, b, m, m' eine Involution, deren Doppelstrahl d mit den beiden Tangenten x und y in einen Punkt S convergirt. Ebenso ziehe man aus dem Schnittpunkte (ac) die Strahlen n und n' nach den Punkten A und B, und suche zu diesen vier Strahlen in Involution den Doppelstrahl e, der wiederum mit x und y in den Punkt S convergiren muß. Dadurch sind die Berührungslinien x und y gefunden, und mithin ist der Kegelschnitt durch fünf Tangenten bestimmt.

Da durch die drei Geraden noch ein dritter

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Transversale, nämlich BC bestimmt ist, und auf jeder zwei Doppelpunkte liegen, so ist klar, daß von D vier verschiedene Berührungssehnen gezogen werden können, welche ebensoviele verschiedene Lösungen der Aufgabe begründen. Mehr als diese vier giebt es aber nicht. Denn wenn man einen andern der Doppelpunkte, z. B. E, als Ausgangspunkt der Berührungssehnen betrachten wollte, so würden dieselben mit den so eben gefundenen zusammenfallen, weil die Doppelpunkte auf den Seiten des Dreiecks ABC als harmonische Theilpunkte liegen, und nach einem bekannten Satze solche Theilpunkte der Seiten eines Dreiecks zu je dreien auf vier verschiedenen Geraden liegen.

Schnittpunkt, nämlich (bc), gegeben ist, und jeder zwei Doppelstrahlen trägt, so ist klar, daß auf d vier verschiedene Convergenzpunkte der in den Punkten A und B Berührenden liegen können, welche ebensoviele verschiedene Lösungen der Aufgabe nach sich ziehen. Mehr als diese vier giebt es aber nicht. Denn wenn man einen andern der Doppelstrahlen z. B. e als Träger der Convergenzpunkte der Berührungslinien betrachten wollte, so würden dieselben mit den eben gefundenen zusammenfallen, weil die Doppelstrahlen zu den Seiten des Dreiecks abc harmonisch liegen, und nach einem bekannten Satze sich je drei derselben immer in einem Punkte schneiden, so daß nur immer vier verschiedene Schnittpunkte hervorgehen.

§ 32. Durch die obigen Sätze erledigen sich auch folgende nahverwandte Aufgaben, deren Auflösung daher nur kurzer Andeutung bedarf.

1. Gegeben sind fünf Punkte. Auf einer gegebenen Geraden die Punkte zu finden, in welchen sie den durch jene fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt schneidet.

Auf der gegebenen Geraden sind durch zwei Strahlenbüschel zwei projectivische Punktreihen projicirt. Sucht man nun die gemeinsamen Punkte derselben, so sind dies die gewünschten Punkte. Je nach dem dieselben beide reel und verschieden, oder in einen zusammenfallen, oder imaginair sind, ist die Gerade eine Secante oder eine Tangente oder liegt ganz außerhalb des Kegelschnitts.

Gegeben sind fünf Gerade. Von einem gegebenen Punkte die beiden Tangenten an den durch jene Geraden bestimmten Kegelschnitt zu legen.

In dem gegebenen Punkte als Centrum sind zwei projectivische Strahlenbüschel vereinigt. Die gemeinsamen Strahlen derselben sind die gewünschten Tangenten. Je nach dem dieselben beide reel und verschieden, oder zusammenfallen, oder imaginair sind, liegt der gegebene Punkt außerhalb, oder auf der Peripherie oder innerhalb des Kegelschnitts.

Die Auflösung dieser Aufgaben gewährt daher zugleich eine nähere Bestimmung über die Lage der Geraden und des Punktes zum Kegelschnitt. Erwägt man aber die in § 10 angedeuteten Beziehungen der unendlich fernen Geraden zu den drei Arten der Kegelschnitte, so ergiebt sich aus der Aufgabe links eine Methode der Determination, in welche dieser besondern Arten der vorliegende Kegelschnitt fällt. Ist nämlich die gegebene Gerade die unendlich ferne, und ergeben sich zwei Schnittpunkte, so ist die Curve eine Hyperbel, fallen beide in einen zusammen, so ist sie eine Parabel, während zwei imaginaire Schnittpunkte eine Ellipse anzeigen.

2. Gegeben sind fünf Punkte, durch welche ein Kegelschnitt bestimmt wird. Von einem sechsten Punkte die beiden Tangenten an denselben zu ziehen.

Man suche nach § 13 die fünf Tangenten in den fünf gegebenen Punkten. Dann ist die Aufgabe auf die vorige reducirt.

Gegeben sind fünf Gerade, durch welche ein Kegelschnitt bestimmt wird. Auf einer sechsten Geraden die beiden Schnittpunkte mit demselben zu finden.

Man suche nach § 13 die fünf Berührungspunkte der gegebenen Tangenten. Dann ist die Aufgabe auf die in 1 rechts reducirt.

Hierdurch ist auch in dem Falle, wenn der Kegelschnitt durch fünf Gerade bestimmt wird, vermöge der unendlich fernen Geraden die Determination über die besondere Art des Kegelschnitts gewonnen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf