§. 1.

In quaestiones opticas, oblectationis plenas, referendum esse videtur problema, quod olim ab Alhazeno, clarissimo Arabum physico scriptis commendatum, ab eo ipso et a multis etiam gravissimis mathematicis prioris saeculi vario cum successu tractabatur et solvebatur. Alhazenus, cujus opus opticum vel maxima obscuritate et erratis liberatum atque omnino emendatum una cum Vitellonis Poloni optica edidit doctissimus Federicus Risnerus, inscriptione data: Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri septem, item Vitellonis Thuringopoloni Basileae 1622 in fol. in capite XXXIX libri quinti hanc proposuit quaestionem: „Puncto rei visae dato plus distante a centro speculi sphaerici convexi, quam centrum oculi, in superficie speculi inveniatur punctum reflexionis,“ eamque solvere conatus est. — Problema hoc ab Alhazeno propositum et solutum ad catoptricam pertinet, in speculo enim sphaerico convexo punctum quaeritur, in quod lucis radius ex corpore aliquo lucente emissus, incidere debeat, ut a speculo refractus ad punctum visus datum eodem, quo inciderit angulo perveniat. Quod quidem problema, re vera mathematicum est; quam ob rem non solum Alhazenus ipse, sed etiam alii, qui operam dabant, eandem rem ut exponerent, geometrice eam solvere conati sunt. Per utrumque enim lucis et visus punctum, nec non per sphaerae centrum cogitatione ficta planities secabit speculum circulo, in quo ex nota lucis natura punctum quaesitum erit, et totum illud problema novam habebit formam: „Duobus punctis extra lineam circuli datis, inveniendum est in ipso punctum, vel, si fieri potest, plura, a quo lineae rectae ductae ad utrumque datum punctum aut aequales, aut se ad duo recta supplentes angulos faciant.“ Alhazenus solutionem plane geometricam problematis nostri dedit, sed, quod toti ejus operi, idem et solutioni justo jure objici potest, quod tanta insolentia ac turba verborum conscripta est, ut oratio, quae lumen adhibere rebus debet, ea obscuritatem et tenebras afferat, atque lectorem, si non plane eum deterret, quominus legat, sane quam maxime defatiget.

Vitello in opere suo optico, quod in eodem thesauro a Federico Risnero in lucem edito, invenitur, Arabem plane secutus est, et hoc ei tantum imputari potest, quod Alhazeni sententias, quae propter maximam verborum turbam et obscuritatem vix conjectura assequuntur, clarius, etiamsi non minus copiose restituit. Tum in problemate nostro solvendo elaborabant Isaacus Barrow in opere, quod inscriptum est: Lectiones opticae et geometricae, auctore Isaaco Barrow, Londini 1764 (lectio IX pag. 65 et seq.); Hugenius in opere suo physico: Christiani Hugenii Zulichemii opera varia, Lugduni Batav. 1724 vol. I. pag. 759 et seq.; Kastnerus in Novis Commentariis Soc. R. Gott.

vol. VII ad annum 1776 p. 92: problematis Alhazeni Analysis trigonometrica, ubi invenitur solutio problematis, nec non in vol. VIII ex anno 1777 p. 96 in dissertatione: de objecti in spaeculo sphaerico visi magnitudine apparente; tum Kluegelius, Sluzius, Lhopitalus et Robertus Simson in Appendice ad sectiones conicas p. 223 solutiones varias proposuerunt, quarum omnium accuratissimam dedit nuper Eschweilerus in dissertatione optica, quam invenies in programmate scholae superioris Coloniensis, anno 1854 conscripto, ubi rem adeo accurate atque copiose tractavit, ut harum literarum studiosis plane satisfecisse videatur.

Datis linea circuli, cujus centrum C, duobus punctis extra eam A et B (fig. I) et puncto X, quod in linea circuli quaeritur, facile intelligi potest, punctum X ita accipiendum esse, ut ductis lineis AC et AB, angulus AXC angulo BXC sit aequalis, vel ang. $AXC = 2R - BXC$, si aut utrobique, aut in una ac eadem parte radii CX jacent. Si enim lineae AC et BC ducuntur, quatuor quantitates habes: $AC = a$, $BC = b$, ang. $ACB = 2a$ et radium r, et locus puncti X designabitur, si ejus coordinatae orthogoniae, pertinentes ad duos axes, quorum situs notus est, declaratae erunt. Nam si punctum C centrum et initium coordinatarum accipimus, lineam CD, angulum $2a$ bifariam dividentem, axem ordinatarum positivarum, lineam vero CE, perpendiculariter in ea erectam, abscissarum axem, porro si coordinatas puncti quaesiti designamus x et y, angulum vero, quem radius CX cum linea CD facit φ, habebimus:

$$x = r \,.\, \sin\varphi,\ y = r \cos\varphi$$

et in utroque triangulo ACX et BCX erit, ut facile intelligitur:

$$\text{tg. } AXC = \frac{a \,.\, \sin(a+\varphi)}{r - a\cos(a+\varphi)}$$

$$\text{tg. } BXC = \frac{b \sin(a+\varphi)}{r - b\cos(a-\varphi)}.$$

Cum porro ang. AXC angulo BXC aequalis sit oportet, ponendum est:

$$1)\quad \frac{a \,.\, \sin(a+\varphi)}{r - a\cos(a+\varphi)} = \frac{b \sin(a+\varphi)}{r - b\cos(a-\varphi)}$$

sive punctum X inter lineas AC et BC, sive extra utramque jacet.

Quum autem punctum X in peripheria circuli dati jacere debeat, aequatio superior (1) una cum aequatione circuli:

$$2)\quad x^2 + y^2 = r^2$$

ad designandum punctum quaesitum X sufficient.

Aequatione 1) resoluta habes:

$$ar \sin(a+\varphi) - ab \sin(a+\varphi)\cos(a-\varphi) = br \sin(a-\varphi) - ab \sin(a-\varphi)\cos(a+\varphi)$$

vel:

$$ar \sin(a+\varphi) - br \sin(a-\varphi) = ab \left\{ \sin(a+\varphi)\cos(a-\varphi) - \sin(a-\varphi)\cos(a+\varphi) \right\}$$

unde porro sequitur:

$$ar \sin(a+\varphi) - br \sin(a-\varphi) = ab \sin 2\varphi, \text{ nec non:}$$

$$(a+b) r \sin\varphi \ \cos a + (a-b)\, r \cos\varphi \sin a = 2ab \sin\varphi \cos\varphi.$$

et quia erat:

$$r \sin \varphi = x,\ r \cos \varphi = y,$$

aequatio extrema mutatur in:

$r^2 (a + b)\, x \cos \alpha + r^2 (a - b)\, y \sin \alpha = 2abxy$, quae quidem aequatio, adjuvante aequatione circuli $x^2 + y^2 = r^2$ ad inveniendas coordinatas x et y puncti quaesiti sufficiet. Cujus quidem aequationis forma jam demonstrat, punctum quaesitum in hyperbola aequilatera jacere, transeunte per centrum circuli dati, cujus asymptotae aeque distant ab utraque coordinata.

Ponatur brevitatis causa:

$$\frac{r^2 (a + b) \cos \alpha}{2ab} = A$$

$$\frac{r^2 (a - b) \sin \alpha}{2ab} = B$$

et aequatio superior transmutabitur in $Ax + By = xy$, quae cum aequatione $x^2 + y^2 = r^2$ dat:

$$x^4 - 2Bx^3 + (A^2 + B^2 - r^2)\, x^2 + 2Brx - B^2 r^2 = o.$$

aequationem quarti ordinis, ex quibus solutionem problematis nostri a solutione hujus aequationis pendere, manifeste apparet. Veteres mathematici, qui rem explicare aggressi sunt, aut incepto destiterunt, aut aequationem secundum aliquam methodorum notarum solvere conati sunt. Harum rerum studiosus lector in dissertatione Eschweileri novam solvendi rationem invenire potest, in qua non solum analytica solutio, verum etiam geometrica quantitatum adhibitarum significatio invenitur. Quorum id interest, delegamus ad eam dissertationem, quum in nostra, quam proponimus, dissertatione varias methodos et rationes, quibus problema in initio propositum ad solutionem perduci possit, colligere, describere ac demonstrare cogitaverimus.

§. 2.

Punctum B (Fig. II) sit centrum visus, A punctum rei visae, C centrum speculi sphaerici convexi, ducanturque lineae AC et BC, et inveniendum est in linea circuli punctum X, ita ut sit ang. AXC = ang BXC. Dividatur porro angulus ACB in duas aequales partes, ducta linea CD, secante peripheriam circuli in puncto D, ita ut sit ang. ACD = ang. BCD.

Tum sumatur alia linea hx (Fig. III) et dividatur in puncto f ita, ut sit proportio: $hf : fx = AC : BC$, item dividatur eadem hx in duas aequales partes in puncto g, a quo educatur perpendicularis indefinita, ad quam ducatur a puncto x linea xm, tenens cum ipsa angulum gxm aequalem angulo $\frac{1}{2}$ ACB. Denique per punctum f ducas lineam fc talem, ut retro producta concurrat cum linea perpendiculari in puncto g erecta in puncto a, et ut sit:

$$ac : cx = AC : CD \text{ (Fig. II et III).}$$

Quam quidem lineam fc ut accipias, ducenda est e puncto f linea fn aequidistans lineae perpendiculari, et quoniam angulus nfx rectus est, circulus diametro nx descriptus transibit per punctum f. Juncto porro puncto m cum puncto f, secetur ex angulo fnx angulus fnp, qui angulo fmx aequalis est, et e puncto p ducatur ad diametrum nx et usque ad circumferentiam circuli linea plo, secans diametrum in puncto l ita, ut linea lo inter diametrum et lineam circuli jacens, quarta sit proportionalis ad lineas AC, CD, fm, et ut habeas proportionem:

$AC : CD = fm : lo$, quod facile efficitur.

Hac constructione facta, sequitur quoque proportio superior:

$ac : cx = AC : CD$, id, quod hac demonstratione probatur:

Quia ang. $fop = fnp = fmx$, est $\triangle\, fmc \sim \triangle\, col$, unde sequitur:

$$fm : mc = lo : oc;$$

quia porro ang. $fox = fnx = amx$, est quoque $\triangle\, amc \sim \triangle\, ock$, et:

$mc : ac = oc : ck$, unde sequitur:

$fm : ac = lo : cx$, vel

$$fm : lo = ac : cx;$$

et quia propositum erat:

$fm : lo = AC : CD$, est quoque:

$$ac : cx = AC : CD.$$

Per constructionem lineae afc accepimus angulum fcx, qui cum secetur ab angulo ACB (Fig. II) ad latus ejus AC, prodibit angulus ACX aequalis angulo acx, et linea circuli secetur in puncto X, qui est punctum reflexionis, et erit ang. $AXC =$ ang. BXC.

Et si contingat, ut in nostra figura, quod a puncto p possint duci duae lineae lo et $l'o'$ tales, ut sit non solum:

$ac : cx = AC : CD$ sed etiam:

$$a'c' : c'x = AC : CD,$$

erit quoque punctum X' quaesitum.

Ea, quae modo prolata sunt, sequenti demonstratione probantur. Jungatur punctum a, linea cf retro producta in perpendiculari acceptum, cum puncto x, porro secetur ex angulo CXA angulus CXG aequalis ang. cxg (Fig. II et III), et erit, ut facile intelligitur:

$$\triangle\, CXG \sim \triangle\, cxf$$
$$\triangle\, AXF \sim \triangle\, axf$$
$$\triangle\, AXC \sim \triangle\, axc$$

$\triangle\, AFG \sim \triangle\, afg$, in quo triangulo AFG linea AG sit perpendicularis.

Ex his sequitur:

$$GF : AF = gf : af$$

$AF : FX = af : fx$ porro:

$$GF : FX = gf : fx$$

$2GF : FX = 2gf : fx$, et ducta linea $GH = GX$ nec non linea AH,

erit quoque: $HF : FX = hf : fx$, et quia proposuimus supra $hf : fx = AC : BC$,

erit quoque: $HF : FX = AC : BC$.

Producatur porro linea XI aequidistans lineae AH et erit ang. $IXG =$ ang. $H =$ ang. AXG, unde sequitur:

$AH : XI = HF : FX$ nec non:

$AH : XI = AC : BC.$

Secetur tum ex angulo IXA angulus IXK aequalis angulo ACB, producatur linea KX, donec concurrat cum linea CB, quod fieri necesse est. — Sit punctum, in quo utraque linea concurrat, B'; dico, necesse esse punctum B' cum puncto B coincidere. Est enim:

$$\triangle KXI \sim \triangle KCB', \text{ unde:}$$
$$KC : CB' = KX : XI.$$

Producatur tandem linea tangens circulum in puncto X, quae sit TX, et erit:

$$\text{ang. } FXT = R - CXG = R - cxg = gmx = \tfrac{1}{2} ACB.$$
$$2FXT = ACB = IXK$$
$$2AXF \quad = AXI \text{ ergo:}$$
$$2AXF - 2FXT = AXI - IXK \text{ vel:}$$

$2AXT = AXK$ unde manifestum est, lineam tangentem XT dividere angulum reflexionis AXK in duas aequales partes. Est porro:

$AC : KC = AX : KX$, et quia erat supra:

$KC : CB' = KX : XI$, est ergo etiam:

$AC : CB' = AX : XI$ et:

$AC : CB = AX : XI$, unde sequitur:

$AC : CB' = AC : CB$, vel punctum B' cum puncto B coincidit.

Hanc problematis solutionem primus Alhazenus dedit, sed datae valde obscuram et prolixam adjunxit demonstrationem. Qui eum secuti sunt Vitello noster et J. Barrow, nihil novi protulerunt, et paucis tantum immutatis, in re demonstranda vix feliciores erant.

§. 3.

Problema, quod tractatur, ad problemata Maximorum Minimorumque pertinere, quis est, quin videat? Quum enim radius lucis e puncto lucente in speculum sphaericum incidens ex lucis natura cum refracto viam brevisimam faciat, problema nostrum est hoc: Duobus punctis extra lineam circuli datis inveniendum est in ipsa punctum, e quo lineae ad utrumque datum punctum ductae, Minimum sint. Sit punctum C (Fig. IV) centrum sphaerae, in qua punctum X quaesitum accipiatur, ita, ut sit angulus $AXC =$ ang. BXC; sit porro X' aliud punctum in peripheria circuli. Lineas $AX + BX$ Minimum esse demonstratione probatur. Ducatur linea TT' tangens circulum in puncto X, nec non AX', BX', BD; quia ang. $AXC = BXC$, $TXC = T'XC$, est ergo $AXT = BXT'$. Sed $BDT' < BXT'$, $ADT > AXT$, quamobrem $ADT > AXT$, et $ADT > BDT'$, ergo $AD + BD > AX + XB$; quia vero $AX' + X'B > AD + DB$, ergo $AX' + X'B > AX + XB$. Quum autem res non mutetur accepto puncto X' aliove, facile intelligitur $AX + XB$ Minimum esse. Sed ut punctum X per constructionem inveniatur, id quod facillimum esse videtur, veremur, ne non liceat. Transeamus igitur ad solvendi rationes ab Hugenio propositas.

§. 4.

Data sunt, ut supra puncta A et B extra circulum, cujus centrum sit C, et inveniendum punctum X in eodem plano in peripheria circuli ita situm, ut lineae AC et BC cum CX faciant angulos inter se aequales. Punctum C jungatur (Fig. V) cum punctis A et B lineis, circulum in punctis D et E secantibus, et reperiantur puncta F et G, ita ut sit:

$$AC : CD = CD : CF$$
$$BC : CE = CE : CG$$

Factis porro lineis $CI = IF$, $CK = CG$, ducantur lineae FH et GH paralleli ad CB et CA nec non linea KL parallelos ad CA. E puncto L desecentur lineae $LM = LN$, utraque aequalis $\sqrt{GK^2 - KL^2}$, et producatur linea $NO = MN$ et parallelos ad AC, et lateribus NM et NO describatur hyperbola, quae transibit per puncta G et H. Quae quidem linea curva GNH occurrit circulo in puncto X, qui quaeritur. Hoc ut demonstretur, ducamus XP et XQ lineas parallelos ad HF et HG, quarum altera XQ occurrit lineae IN in puncto R.

E natura hyperboles sequitur esse rectangulum:

$$MS \,.\, NS = HS^2 = FI^2 \text{ et}$$
$$MR \,.\, NR = XR^2 = PI^2, \text{ quo a superiore detracto habes:}$$
$$IR \,.\, RS \text{ vel } CQ \,.\, QG = CP \,.\, PF.$$

Est ergo:
$$PF : CQ = QG : CP$$
$$PF : PX = QG : QX$$

et ductis lineis XF et XG accipies:

$$\triangle\, FPX \sim \triangle\, GQX$$

ergo angulus $CFX =$ ang. CGX.

E constructione erat: $AC : CX = CX : CF$ et
$$BC : CX = CX : CG,$$

ergo $\triangle\, ACX \sim \triangle\, CFX$ et $\triangle\, BCX \sim \triangle\, CGX$, quamobrem angulus $AXC =$ ang. CFX et ang. $BXC =$ ang. CGX. Quum vero demonstratum sit ang. CFX aequalem esse angulo CGX, igitur angulus $AXC = BXC$ q. e. d.

Si punctum H cadit in circumferentiam circuli, tum puncta H et K coincidunt, simili modo lineae HF, XF, XP nec non lineae HG, XG, XQ in unam lineam HF et HG, in quo casu hyperbola non indigemus.

§. 5.

Ut jam ad aliam solutionem transeamus, sit circulus datus ut supra, cujus centrum sit C (Fig. VI) et puncta extra circulum data A et B. Ductis lineis AC et BC fiat:

$$AC : R = R : CF \text{ et}$$
$$BC : R = R : CG.$$

Tum jungantur puncta F et G, linea FG partiatur bifariam, ita ut habeas $FE = EG$ et per punctum E ducatur linea HE parallelos ad lineam angulum ACB in duas aequales partes dividentem, et linea EI perpendicularis in lineam HE. Haec utraque linea est utraque asymptota ramorum hyperboles, quae construi potest per puncta F et G, quorum alter ramus transibit per punctum C, alter vero notabit punctum X inter lineas AC et BC situm, quarum omnes intersectiones cum peripheria circuli notant puncta reflexionis quaesita. Anguli AXC et BXC sibimet aequales esse demonstrari potest. Ut vero demonstratio melius intelligatur, quaedam interponenda nobis videntur.

Sit punctum O (Fig. VII) centrum hyperboles aequilaterae, cujus rami transeunt per puncta F, C et X, G. Si punctum quodlibet hyperboles aequilaterae cum extremis punctis cujuscunque diametri connectitur, lineae satis productae cum utraque asymptota aequos angulos faciunt. Sit jam X punctum in hyperbola, extrema vero puncta diametri F et G. Proponamus porro, lineam FX secare utramque asymptotam in punctis M, N, lineam GX autem in punctis M', N'. Secundum notam hyperboles naturam est $N'X = GM'$, $XN = MF$. Si porro ex punctis X, G, F projiciantur lineae perpendiculares ad asymptotam, quae sunt XS, GP', FP, erit quoque $OS = P'M'$ et $OS = PM$, ergo etiam $P'M' = PM$. Quia autem porro $\triangle\, OFP \cong \triangle\, OGP'$, est ergo $FP = GP'$. Quae cum ita sint, et quia $P'M' = PM$, sequitur, esse quoque $\triangle\, PMF \cong \triangle\, P'M'G$, vel angulus $FMP = P'M'G$, vel ang. $XMM' =$ ang. $XM'M$, unde denique sequitur, esse quoque angulum $XNN' =$ ang. $XN'N$, unde propositum nostrum patet.

Si porro duo quaecunque puncta, exempli causa X et C hyperboles aequilaterae cum extremis punctis cujuslibet diametri FG conjungantur, angulus XFC semper est aequalis angulo XGC aut angulo deinceps cum eo juncto, sive trianguli CFX et CGX in utraque parte lineae CX, sive in eadem jacent. Quodsi enim producantur lineae CF et XG, donec concurrant cum asymptotis, erit secundum theorema modo demonstratum ang. $XMM' =$ ang. $XM'M$. Si lineae CF et CG secant asymptotas in punctis R et R', ang. $CRR' =$ ang. $CR'R$, ex quibus sequitur, si trianguli CFX et CGX in utraque parte lineae CX jaceant, angulum $XMM' + CRR' = XM'M + CR'R$ vel ang. $CFX = CGX$ esse; id quod parum mutatur, si uterque triangulus in eadem parte lineae CX jacet.

Quod quidem theorema ad nostrum problema si transfertur, facile intelliges, lineas ex punctis A et B (Fig. VI) ad punctum inventum X ductas cum radio CX aequos facere angulos, vel angulum AXC esse $=$ ang. BXC. Est enim:

$$CA : CX = CX : CF \text{ et}$$
$$CB : CX = CX : CG, \text{ ergo}$$
$$\triangle\, CAX \sim \triangle\, CXF$$
$$\triangle\, CBX \sim \triangle\, CGX,$$

unde sequitur ang. $AXC =$ ang. CFX, ang. $BXC =$ ang. CGX; quia vero ang. $CFX =$ ang. CGX, est ergo etiam:

$$\text{ang. } AXC = \text{ang. } BXC.$$

§. 6.

In §. 1 proposita erat aequatio:

$$r^2 (a + b)\, x \cos a + r^2 (a - b)\, y \sin a = 2abxy$$

quae, aequatione circuli $x^2 + y^2 = r^2$ adducta, sufficit ad inveniendas coordinatas x et y puncti in peripheria circuli quaesiti. Aequationes modo prolatae praebent nobis facultatem construendae hyperboles, quae quidem constructio primum in hac forma ab Eschweilero prolata parum ab ea differt, quam modo tractavimus. Jam quidem forma aequationis indicare videtur, punctum quaesitum esse punctum hyperboles aequilaterae, cujus centrum C est centrum circuli dati, cujusque asymptotae utrique coordinatae sunt aequidistantes. Sit punctum O centrum hyperboles, cujus abscissa est m, ordinata vero n. Si $x = m + x'$, $y = n + y'$; in aequationem superiorem substituitur, accipies aequationem, cujus forma apud Eschweilerum est haec:

$$2abx'y' = x' [r^2 (a + b) \cos \alpha - 2abn] + y' [r^2 (a - b) \sin \alpha - 2abm] +$$
$$r^2 (a + b) m \cos \alpha + r^2 (a - b) n \sin \alpha - 2abmn.$$

Debet ergo esse: $r^2 (a + b) \cos \alpha - 2abn = o$

$r^2 (a - b) \sin \alpha - 2abm = o$, unde sequitur:

$$m = \frac{r^2 (a - b) \sin \alpha}{2ab} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{a} \right) \sin \alpha$$
$$n = \frac{r^2 (a + b) \cos \alpha}{2ab} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{a} \right) \cos \alpha$$

quibus substitutis aequatio hyperboles reducitur in:

$$x'y' = \frac{r^4 (a^2 - b^2) \sin 2\alpha}{8a^2b^2} = mn.$$

Forma proxima valorum m et n statim ad constructionem persimplicem eorum ipsiusque hyperboles ducit. In lineis CA et CB accipiantur ut supra puncta F et G, ita ut sit:

$$CA : r = r : CF, \text{ vel } CF = \frac{r^2}{a}$$
$$CB : r = r : CG, \text{ vel } CG = \frac{r^2}{b}$$

Sit quoque $FE = EG$; E erit centrum hyperboles, est enim $CF = \frac{r^2}{a}$, $CG = \frac{r^2}{b}$ ergo

abscissa puncti $F = -\frac{r^2}{a} \sin \alpha$

abscissa puncti $G = \frac{r^2}{b} \sin \alpha$

ordinata puncti $F = \frac{r^2}{a} \cos \alpha$

ordinata puncti $G = \frac{r^2}{b} \cos \alpha$, unde sequitur esse:

abscissam centri E, i. e. $m = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{a} \right) \sin \alpha$

ordinatam centri E, i. e. $n = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{b} = \frac{r^2}{a} \right) \cos \alpha.$

Centro hyperboles designato, asymptotarum situs datus est, quarum altera aequidistans est lineae CD angulum ACB bifariam secanti, altera vero in illa perpendicularis. Hyperboles ipsa non solum per punctum C, sed etiam per puncta F et G transit; F et C in uno curvae ramo jacent, qui lineam circuli necessario in duobus punctis secat; G vero in altero ejus ramo positum est, qui lineam circuli aut in duobus punctis secat, aut eum tantum tangit, aut plane non tangit.

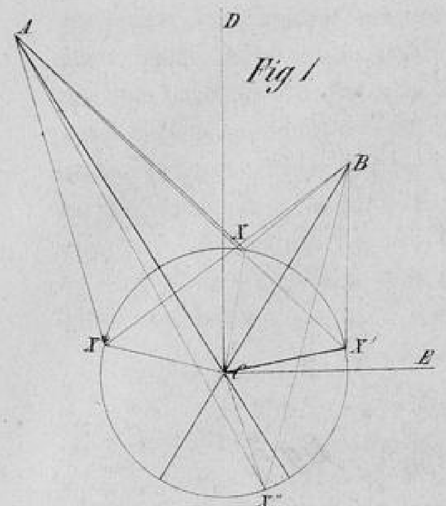


Fig 1.

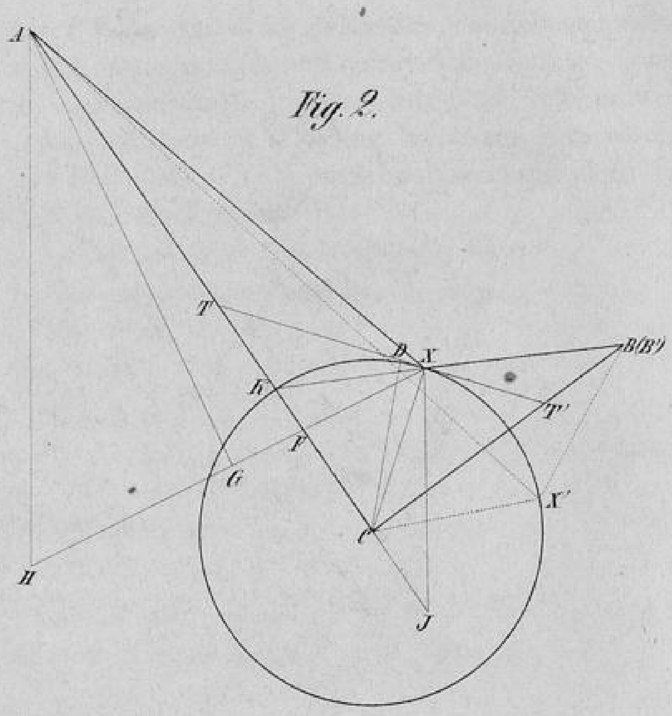


Fig. 2.

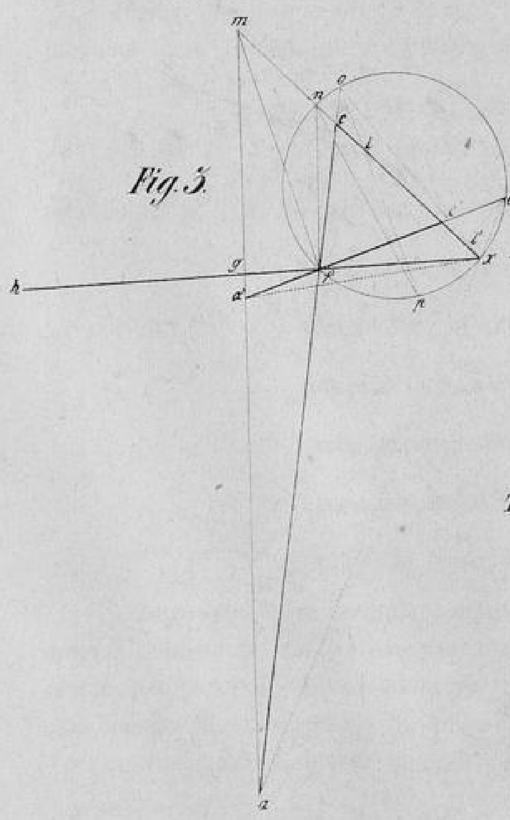


Fig. 3.

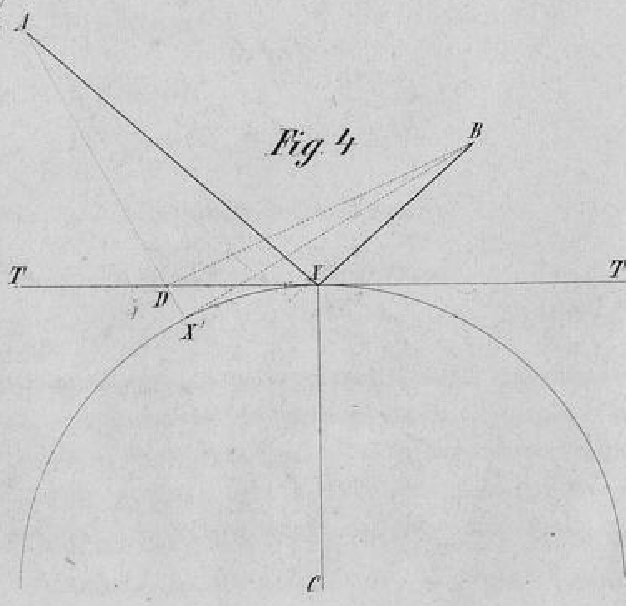


Fig. 4.

Fig. 5

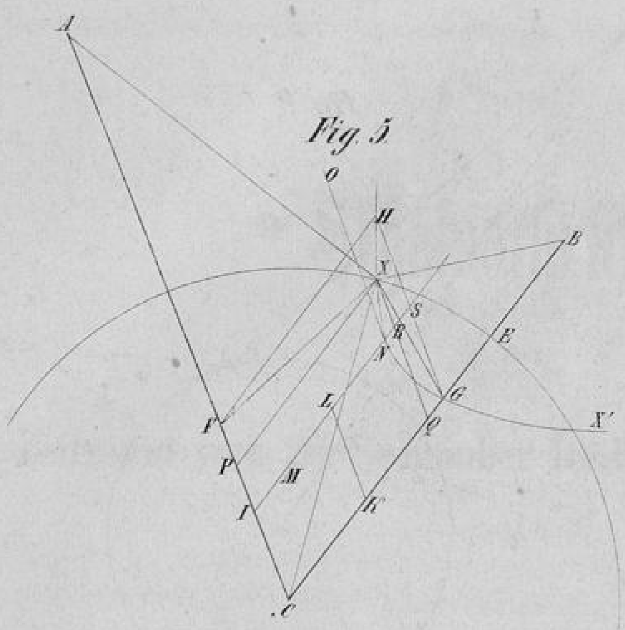


Fig 7.

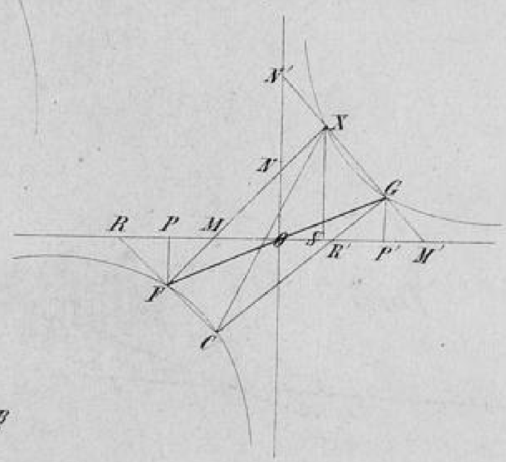
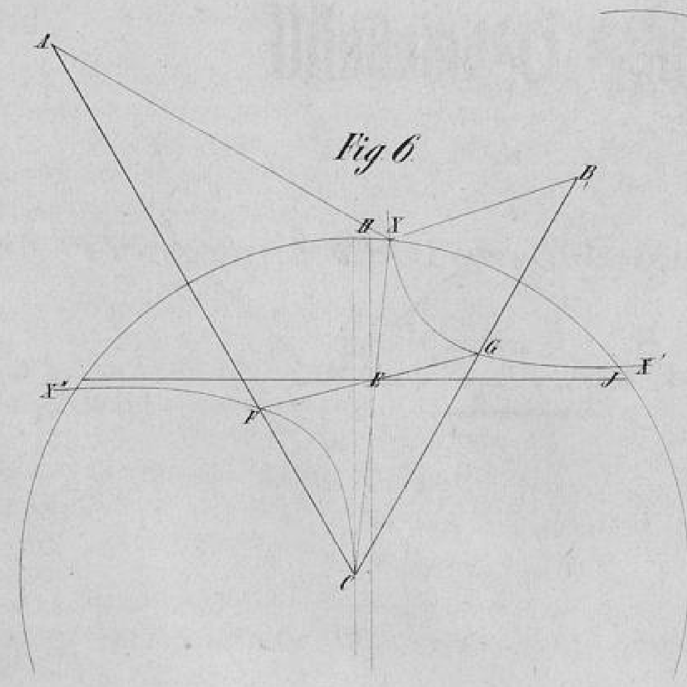


Fig 6.



Lit. M. Jaroczyńskiego.