DAS SYSTEM

DER

ELEMENTAR-ARITHMETIK

und

einige sich daran schliessende Lehren.

Vorwort.

Je grösser der Reichthum des Wissens ist, welchen wir uns aneignen müssen, um uns auf das Niveau der Zeit zu erheben und um nicht einer verkümmernden Einseitigkeit zu verfallen, desto dringender tritt das Bedürfniss hervor in allen Zweigen des Wissens und Könnens einen möglichst graden, also kurzen Weg zum Ziele einzuschlagen.

So wie durch die Stenographie das Schreiben, durch die Eisenbahnen die Zeit des Reisens, durch die Telegraphie die Zeit für die Mittheilung der Gedanken an Abwesende verkürzt wird; so muss man auch in der Wissenschaft mehr und mehr auf Methoden bedacht sein, welche die Jugend bei der Fülle von dem, was ihr zu wissen nothwendig und gut ist, möglichst rasch und sicher das Ziel erreichen lassen.

Wie dies aber zu ermöglichen sei, ohne die Strenge der Methode aufzuopfern, ohne der Wissenschaft ihren Charakter zu rauben, ist eine nicht leichte Aufgabe der Pädagogik, an welcher die geübtesten Kräfte zu arbeiten haben. Der erfahrene Pädagoge wird nicht läugnen, dass noch viel Ballast zu beseitigen ist, ehe wir das Schiff, auf welchem die Jugend ihre Übungs- und Bildungsreise macht, recht flott bekommen. Auch pfropfen wir ihr immer noch zu sehr das ihr Fremde auf, ohne dass wir aus ihr entwickeln, was zu ihrem geistigen Eigenthume werden soll. Wir führen sie gleichsam mit verbundenen Augen bis zum Ziele, das sie dann verwundert anstaunt, statt dass wir sie das Ziel als ein erreichbares erkennen und sie nun mit Selbstbewusstsein den besten und kürzesten Weg zur Auffindung desselben einschlagen lassen.

Dass diese Übelstände nicht überall und nicht in allen Disziplinen in gleichem Grade vorkommen, versteht sich von selbst; es sollte nur hiermit bemerkt werden, dass die Forderungen der Zeit uns ernst mahnen an der Vervollkommnung der pädagogischen Methoden möglichst zu arbeiten. Jeder kleine Beitrag sollte willkommen sein und ich wünschte wohl, dass diese elementare Arbeit nicht als eine undankbare angesehen werden möchte.

Ich beschränke mich hier auf einen einzelnen, nur untergeordneten Zweig einer einzelnen Wissenschaft, nämlich der Mathematik. Sie ist es von jeher gewesen, welche ungeachtet ihrer entschieden bildenden Elemente bei der Jugend nicht immer den Eingang gefunden, zu welchem sie eine innere Berechtigung hat. Dies liegt theils darin, dass man dieselbe mit der Jugend behandelt, bevor ihre geistige Entwickelungsstufe die nöthige Empfänglichkeit voraussetzen lässt, theils darin, dass die Methode sowohl in objektiver, als subjektiver Hinsicht bisweilen verfehlt wird. Die nicht selten durch einen Mangel an Anlagen zur Mathematik motivirte Entschuldigung geringerer Leistungen ist eines der vielen thörichten Vorurtheile, welche traditionell fortwandern, ohne dass man reiflich über den wahren Grund oder Ungrund zu ihrer Entstehung nachdenkt. Menschen mit gesundem Menschenverstande sind auch für die in der Mathematik enthaltenen einfachen Gesetze des Denkens empfänglich, wenn sie nur in richtiger Weise auf die richtige Bahn geleitet werden. Soll aber die Mathematik wirklich fruchtbringend werden für die formale Geistesentwickelung, so muss man schon *in den ersten Elementen nach allen Richtungen hin die schärfste Schärfe des Denkens sich zum Gesetze machen.*

Die folgenden ganz elementaren Betrachtungen, welche als Leitfaden für den Anfänger in der Mathematik dienen können, sind eigentlich durch das Bedürfniss am hiesigen Königl. Marien-Gymnasium entstanden. Hier wird nämlich bis Secunda der Unterricht in polnischer Sprache ertheilt, nur in den beiden oberen Klassen in deutscher. Die Schüler werden also von Secunda an von einem neuen Lehrer in einer anderen, als der Muttersprache unterrichtet. Damit nun dieselben sich an die neue Terminologie und die neuen Verhältnisse überhaupt gewöhnen ist eine summarische Wiederholung des ganzen früheren Pensums erforderlich, wozu nicht allzuviel Zeit verwendet werden darf. Der ganze Stoff wird also in möglichst bündiger Weise systematisch zusammen gefasst. Das Abweichende von der üblichen Behandlungsweise ergibt sich von selbst oder wird gelegentlich durch Bemerkungen angedeutet.

ERSTE ABTHEILUNG.

Theorie.

EINLEITUNG.

§. 1. Jeder selbstständige Gegenstand heisst, insofern auf etwa vorhandene Theile desselben nicht Rücksicht genommen wird, ein *Ganzes.* Wenn man nun von den verschiedenen Eigenschaften der in der natürlichen Körperwelt vorkommenden Ganzen absieht, also nur den Begriff des ungetheilten Ganzen festhält; so heisst dieses abstrakte Ganze *Eins* (Unum).

Die Eins ist also der Ausdruck für ein abstraktes Ganzes.

§. 2. So wie ein physisches Ganzes wiederholt vorhanden sein kann, oder so wie man sich eine Vereinigung von Individuen, welche in jeder Hinsicht übereinstimmen, denken kann, so ist es auch mit der Eins der Fall und man hat dann ein Vielfaches der Eins, welches als Sammelbegriff eine *ganze Zahl* heisst.

So wie ferner ein physisches Ganzes aus übereinstimmenden Theilen zusammen gesetzt sein kann ohne den Begriff des Ganzen zu zerstören, eben so kann jede ganze Zahl auch als ein Ganzes angesehen werden, insofern man auf seine unmittelbar vorhandenen Bestandtheile, die Eins, nicht Rücksicht nimmt. Ein solches Ganzes heisst eine *Einheit* (Unitas).

§. 3. Wenn auch ein physisches Ganzes nicht unmittelbar aus Theilen besteht, so lässt sich dasselbe doch als aus Theilen zusammengesetzt vorstellen. Ebenso ist es mit jeder ganzen Zahl, jeder Einheit, also auch der ursprünglichen Einheit, der Eins selbst, der Fall. Hat nun von zwei Ganzen das eine eine gewisse Einheit, welche nicht die Eins zu sein braucht, als Theil eben so oft in sich, als die andere, so sind diese Ganzen einander *gleich* ($=$); wenn nicht, *ungleich* ($\angle$).

Da nun die Eins den Begriff des ungetheilten abstrakten Ganzen enthält, so *sind alle Einsen einander gleich und die Eins hat als Grösse einen absolut bestimmten Werth.*

Die Eins ist eine Normalzahl, so dass man durch die Beziehungen auf sie eine sichere Vorstellung von der Grösse aller übrigen Zahlen erhält.

§. 4. Aus der Zahl Eins entstehen auf doppelte Weise andere Zahlen:

1. durch ihre Vervielfältigung die *ganzen Zahlen*, für deren bestimmten Schriftausdruck die *Ziffern* gelten;
2. entstehen noch dadurch ganz bestimmte Zahlen, dass man die Eins *(nicht Einheit)* in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zerlegt und solcher Theile *(nicht von diesen)* eine beliebige Menge nimmt. Die so entstandenen Zahlen heissen *Brüche.*

Um die Brüche auszudrücken sind zwei Zahlnamen (in der Schrift zwei Zahlzeichen) erforderlich: der eine gibt an, in wie viele gleiche Theile die Eins zerlegt worden ist und heisst *Nenner;* der andere drückt die Menge der Theile aus und heisst *Zähler.* Ist der Zähler kleiner als der Nenner, so heisst der Bruch ein *ächter*, wenn nicht, ein *unächter.* Im letzten Falle kann der Zähler den Nenner in sich 1, 2, 3.....nmal enthalten (das 1, 2, 3.....nfache von ihm sein) und dann heisst der unächte Bruch ein *uneigentlicher*, weil er eigentlich den Werth einer ganzen Zahl hat; ist der Zähler nicht ein genaues Vielfache des Nenners, so ist der Bruch ein *gemischter*, weil er aus Ganzen und Bruchtheilen besteht.

Da die gleichen Theile der Eins um so kleiner sind, je mehre man aus ihr gemacht hat, so gibt der Nenner eine auf die Grösse sich beziehende Beschaffenheit der Theile an; der Zähler zählt ihre Menge. — Methode die Brüche auszusprechen und zu schreiben.

Brüche mit gleichen Nummern heissen *gleichnamige;* mit verschiedenen, *ungleichnamige.*

§. 5. Nun haben wir die Zahlengrössen als das Materiale für die *Arithmetik* entwickelt. Jetzt kommt es weiter darauf an diesen Stoff zu benutzen; zu untersuchen, in welchen Verknüpfungen und Beziehungen die Zahlen zu einander vorkommen können und so mittelst der erlangten Begriffe und zweifelloser Wahrheiten, der *Grundsätze*, nach und nach ein System absolut sicherer Wahrheiten aufzubauen. Sollen aber die aufzustellenden Betrachtungen eine allgemeine oder absolute Giltigkeit besitzen, so müssen wir uns allgemeiner Zahlzeichen, d. h. solcher Zeichen bedienen, deren jedes jede Zahl vertritt.

Die Art der Bezeichnung durch Buchstaben.

Grundsätze sind z. B.:

1. Jede Zahl ist sich selbst gleich (ist so gross als sie ist).
2. Statt einer Zahl kann eine ihr gleiche gesetzt werden.
3. Ist jede von zwei (mehren) Zahlen einer dritten (irgend einer) gleich, so sind sie einander gleich.

§. 6. Die Begiffe von Theilen und dem Ganzen sind unzertrennliche und ursprüngliche, also keiner weiteren Erörterung bedürfende. Die einfachste Verknüpfung findet statt zwischen einem Ganzen und zwei Theilen desselben.

Ein bestimmtes Ganzes kann zwar in verschiedene Paare von Theilen aufgelöst gedacht werden; ist aber einer von den beiden Theilen ein bestimmter, so kann der andere nicht willkührlich sein, weil, wenn es der Fall wäre, das Ganze selbst nicht ein bestimmtes sein würde, was gegen die Annahme ist; also muss wegen dieses Widerspruches der andere Theil auch ein bestimmter sein.

Wird zu einer Zahl eine zweite als Theil für ein aus ihnen zu bildendes Ganzes angesehen, so ist dieses bestimmt, wenn jene bestimmt sind und ändert sich auch nicht, wenn sich auch die Aufeinanderfolge in der Verbindung der Theile ändert.

Diese *erste* Verknüpfung dreier Zahlen lässt uns jede derselben aus den beiden anderen als absolut bestimmt, also auch als bestimmbar ansehen. Obwohl nun aus drei Elementen a, b, c drei Verbindungen zu je zweien möglich sind (ab, ac, bc), so lassen sich bei der angeführten Beziehung derselben doch nur zwei Aufgaben denken:

1. aus den beiden Theilen (*Summanden*, Addenden) das Ganze (*Summe*) zu finden: die *Addition;*

   formeller Ausdruck dafür: $a+b=c$ oder $b+a=c$;

2. aus dem Ganzen und einem seiner Theile, gleichgiltig welchem, den anderen zu finden: die *Subtraktion;*

   formeller Ausdruck: $c-a=b$ oder $c-b=a$,

   wobei das gegebene Ganze c *Minuendus*, der gegebene Theil a oder b *Subtrahendus* und der fehlende *Differenz* oder Rest heisst.

Begründung der Benennung aus der Natur der Sache. — Gleichgiltig ist es, ob b als Addend zu a oder a als Addend zu b angesehen wird; aber Minuend und Subtrahend dürfen nicht vertauscht werden.

§. 7. Ein Ganzes lässt sich auch aus mehr als zwei Theilen zusammengesetzt denken und wirklich zusammensetzen; man verbindet nämlich die beiden ersten Theile zu einem Theilganzen, dieses erhaltene mit dem dritten Theile auch zu einem Ganzen und so fort so lange noch ein Theil übrig ist; dann hat man das Totalganze.

Hierbei ist nun der Fall denkbar, dass die sämmtlichen Theile einander gleich sind, z. B. $a \underset{4}{+} a + a + a$, allgemein:

$$a + a + a \ldots\ldots n \text{mal} = c;$$

dann ist das Ganze c nur von zwei Zahlen abhängig und zwar:

1) von der als Theil wiederholt vorkommenden Zahl (a) und
2) von der Zahl, welche die Menge der Summanden angibt (n).

Diese zwei Zahlen sind aber nicht mehr Summanden zu einander und das Ganze ist auch nicht mehr eine Summe aus ihnen; sondern es findet eine neue und eigenthümliche Verbindung unter ihnen statt und daher sind auch neue Benennungen und Verbindungszeichen nothwendig. Die zu vervielfältigende Zahl a heisst *Multiplikandus*, die Anzahl n der Summanden heisst *Multiplikator* (auch Koeffizient) und das Ganze c heisst *Produkt;*

formeller Ausdruck: $n \times a = c$ oder $n . a = c$ oder $na = c$.

In dieser *zweiten* Verknüpfung dreier Zahlen steht fest, dass ein bestimmter Multiplikandus (a) und ein bestimmter Multiplikator (n) auch ein bestimmtes Produkt geben, weil eine bestimmte Zahl eine bestimmte Anzahl mal als Theil gesetzt ein bestimmtes Ganzes gibt; aber a und n können auch, ohne dieses Ganze zu ändern, ihre Bedeutung vertauschen, nämlich n kann als Theil amal gesetzt werden und sie dürfen desshalb denselben Namen, nämlich *Faktoren* des Produktes, führen.

Der Multiplikand ist der leidende, der Multiplikator der thätige Faktor.

Ändert sich einer von den beiden Faktoren, so ändert sich auch das Produkt. — Ist nun das Produkt und einer seiner beiden Faktoren bestimmt, so ist auch der andere absolut bestimmt, mithin auch bestimmbar; denn wäre der andere Faktor unbestimmt, so müsste es auch das Produkt sein, was gegen die Annahme ist; also ist wirklich der zweite Faktor nicht willkührlich. Aus dieser Verbindung dreier Zahlen ergeben sich also auch nur zwei Aufgaben:

1) aus den beiden Faktoren das Produkt zu finden ist die *Multiplikation;*

formeller Ausdruck dafür: $n . a = c$, und

2) aus dem Produkte und einem seiner beiden Faktoren den andern zu finden ist die *Division;*

formeller Ausdruck dafür: $a : c = n$ oder $n : c = a$,

wobei das gegebene Produkt *Dividendus*, der gegebene Faktor *Divisor* und der fehlende *Quotient* heisst.

Begründung dieser Benennungen. — Für $a : c = n$ soll untersucht werden, das Wievielfache c von a ist, was dadurch geschieht, dass man erforscht, wie oft a in c als Theil enthalten ist. Hierbei wird nun c in lauter dem a gleiche Theile aufgelöst (Dividendus) und n gibt an, wie oft (Quotient) a in c als Theil enthalten ist. — Divisor und Dividend können nicht vertauscht werden.

Da ein Produkt ein Vielfaches von jedem Faktor ist, so ist der Dividendus auch ein Vielfaches des Quotienten und Dividiren heisst auch: den Dividendus in so viele gleiche Theile zerlegen, als es der Divisor anzeigt und einen derselben angeben.

Es ist also entweder der Divisor oder der Quotient einer der gleichen Theile des Dividendus, deren Anzahl im ersten Falle der Quotient, im zweiten der Divisor angibt.

§. 8. Ein Produkt lässt sich auch aus mehr, als zwei Faktoren entstanden denken. Für $a . b . c . d \ldots$ würde man zunächst $a . b$ dadurch bestimmen, dass man b als Theil amal setzt und das Ganze als absolute Zahl (z. B. n) angibt; dann würde man n . c = v, ferner v . d u. s. w. bis zu Ende bestimmen.

Hierbei kann der Fall eintreten, dass die sämmtlichen Faktoren einander gleich sind, z. B. a . a . a, allgemein:

$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \ldots\ldots n \text{mal} = c.$$

Jetzt ist das Produkt c nur von zwei Zahlen abhängig und zwar von der als Faktor zum Grunde gelegten Zahl a und von der Anzahl n der gleichen Faktoren. Wird das Resultat der Verbindung nur von a und n als abhängig betrachtet, so sind a und n nicht mehr Faktoren des c; es ist also für sie eine neue Benennung und ein neuer formeller Ausdruck erforderlich. Der wiederholt vorkommende Faktor heisst *Basis*, die Anzahl der Faktoren *Exponent* und das Resultat der Verbindung *Potenz;*

formeller Ausdruck: $a^n = c$.

In dieser *dritten* Verknüpfung dreier Zahlen ist es nicht möglich, dass Basis und Exponent ihre Bedeutung vertauschen ohne dadurch die aus ihrer Verbindung entstehende Zahl zu ändern. Daher gibt es hier drei Aufgaben:

1. Wird eine bestimmte Zahl eine bestimmte Anzahl mal als Faktor gesetzt, so muss auch etwas Bestimmtes entstehen: aus der Basis und dem Exponenten die Potenz zu finden ist das *Potenziren.* Ändert sich die Basis oder der Exponent, so muss sich auch die Potenz ändern. Daraus folgt

2. wenn die Potenz und ihr Exponent bestimmt sind, dass die Basis nicht willkührlich sein kann, weil, falls dies bei einem bestimmten Exponenten statt fände, die Potenz gegen die Annahme willkührlich sein müsste. Aus der Potenz und dem Exponenten die Basis zu finden ist das *Radiziren*, Wurzelausziehen;

formeller Ausdruck dafür: $\sqrt[n]{c} = a$,

wobei c *Radikand*, n *Wurzelexponent* (zum Unterschiede von Potenzialexponent) und a *Wurzel* heisst.

3) Endlich kann für eine bestimmte Zahl c als Potenz (Radikand) und eine zweite a als Basis (Wurzel) der zu beiden gehörige Exponent n nicht willkührlich sein, sondern ist absolut bestimmt ($c = a^n$ oder $\sqrt[n]{c} = a$). Seine Auffindung ist in dem *Graduiren* (Grad der Potenz oder Wurzel) enthalten. (Logarithmiren.)

---

§. 9. Aus dem Wesen dieser möglichen Verknüpfungen zweier Zahlen, um eine dritte zu bilden, ergeben sich manche Vergleichungen und Schlüsse.

1. Das Multipliciren ist ein wiederholtes Addiren, das Potenziren ein wiederholtes Multipliciren; das Dividiren ein Zerlegen (des Dividendus) in gleiche Addenden, das Radiziren ein Zerlegen (des Radikanden) in gleiche Faktoren und die Angabe eines derselben.

2. *a*) Die Differenz addirt zum Subtrahend muss den Minuend, *b*) der Quotient multiplizirt mit dem Divisor muss den Dividendus, *c*) die Wurzel erhoben in die Potenz des Wurzelexponenten muss den Radikand geben.

Bedingte Proben.

3. Das Addiren, Multipliciren, Potenziren sind der Reihe nach dem Subtrahiren, Dividiren, Radiziren so entgegen gesetzt, dass sie paarweise, mit derselben Zahl vorgenommen, einander aufheben. Formeln:

$$a)\ (a+n)-n=a \text{ oder } (a-n)+n=a; \quad b)\ n:(n.a)=a \text{ oder } n(n:a)=a;$$

$$c)\ \sqrt[n]{(a^n)}=a \text{ oder } (\sqrt[n]{a})^n=a.$$

4. Das Geben eines Addenden, Subtrahenden, Faktors, Divisors, Potenzialexponenten, Wurzelexponenten ist der Reihe nach ein formelles Addiren, Subtrahiren, Multipliziren, Dividiren, Potenziren, Radiziren; aber das Nehmen derselben ist die wirklich ausgeführte entgegengesetzte Operation.

5. Wenn *a*) Gleiches zu Gleichem addirt, *b*) Gleiches von Gleichem subtrahirt, *c*) Gleiches mit Gleichem multiplicirt oder *d*) dividirt, *e*) Gleiches in gleich hohe Potenzen erhoben, *f*) aus Gleichem die Wurzel desselben Grades gezogen wird; so sind in jedem Falle die Resultate gleich; *g*) endlich müssen gleiche Potenzen mit gleichen Basen auch gleiche Exponenten haben.

6) Der Multiplikator muss nach seiner Bedeutung eine unbenannte Zahl sein; ist der Multiplikandus benannt (Namen physischer Gegenstände), so hat das Produkt dieselbe Benennung. Ist bei der Division der Dividendus benannt, so kann nur noch entweder der Divisor oder der Quotient benannt sein. (Zwei verschiedene Fragen.)

---

§. 10. Nur dann geben zwei Zahlen zusammen ein grösseres Ganzes, als jede von ihnen selbst ist, wenn sie in allen denkbaren Beziehungen oder Eigenschaften ausser in der Grösse mit einander übereinstimmen: z. B. 4 Rthlr. Vermögen + 3 Rthlr. Vermögen; 5 Rthlr. Schulden + 2 Rthlr. Schulden (Gewinne, Verluste; Hinwege, Rückwege auf derselben Bahn u. s. w.).

Aber wenn zwei gleichartige Zahlen in jenen Beziehungen verschieden sind, so können sie, wie z. B. bei Einnahme und Ausgabe wirklich der Fall ist, bei ihrer Verbindung zu einem Ganzen einander vermindern und werden, wenn sie gleich sind, einander aufheben: 4 Rthlr. Gewinn + 4 Rthlr. Verlust = 0. Im ersten Falle heissen die Zahlen *übereinstimmende*, im zweiten *entgegen gesetzte*. Denkt man sich jene auf das praktische Leben gehenden Ausdrücke (wie Vermögen, Schulden) weg und behält bei den abstrakten Zahlen nur die obige Beziehung bei, so heisst die eine von zwei entgegen gesetzten Zahlen *positiv*, die andere *negativ*. Die Zeichen dafür (+, —) werden den Zahlen vorgesetzt und heissen *Vorzeichen*.

Die Vorzeichen sind keine Rechnungszeichen; positive, so wie negative Zahlen können sowohl additiv als subtraktiv sein. Die Wahl obiger Vorzeichen kann entschuldigt werden, weil Addition und Subtraktion einander auch so entgegengesetzt sind, dass sie, mit derselben Zahl vorgenommen, einander aufheben.

Entgegen gesetzte Zeichen oder gleiche *Zeichen* sind falsche Ausdrücke; es gibt nur entgegen gesetzte oder übereinstimmende Zahlen.

§. 11. Da jede Zahl, sie mag positiv oder negativ sein, sich selbst gleich ist: $(\pm a)=(\pm a)$ und gleiche einander entgegen gesetzte Zahlen bei der Addition einander aufheben: $(+c)+(-c)=o$; so ist $(\pm a)+(+c)+(-c)=(\pm a)$.

Zieht man von diesen gleichen Zahlausdrücken Gleiches ab, das eine Mal $(+c)$, das andere Mal $(-c)$; so erhält man als Reste:

1. $(\pm a)+(-c)=(\pm a)-(+c)$ und
2. $(\pm a)+(+c)=(\pm a)-(-c)$; in einen Ausdruck vereint:

$$(\pm a)+(\mp c)=(\pm a)-(\pm c);$$

d. h.: *es ist einerlei* $(=)$ *ob man irgend eine Zahl* {sie mag negativ oder positiv sein, $(\mp c)$} *addirt oder diese Zahl, nachdem man sie entgegen gesetzt gemacht hat* $(\pm c)$, *abzieht;* oder: statt eine Zahl abzuziehen, kann sie, entgegen gesetzt gemacht, addirt werden, nämlich zu der anderen, dem Minuendus, welche ungeändert bleibt.

Im Obigen sind die Zahlen mit ihren Vorzeichen in Parenthesen enthalten; die Zeichen zwischen den Parenthesen sind Rechnungszeichen.

Die beiden Subtraktionen sind, die eine durch Auslassung eines Summanden, die andere durch das Geben eines Subtrahend bewerkstelligt.

Der letzte Ausdruck (Formel) enthält 4 einzelne Fälle; welche?

Eines der obigen Vorzeichen kann ausgelassen werden und ist dann selbstverständlich zu ergänzen; es geschieht dies für die positiven Zahlen; a ist ein positives a.

Da $-(-a)=+(+a)=+a$ (addirt a als positive Zahl) und
$+(-a)=-(+a)=-a$ (abgezogen a als positive Zahl) ist, so *gehen zwei Zeichen, von denen das eine Rechnungs-* (Additions- oder Subtraktionszeichen), *das andere Vorzeichen ist, in eines über* und zwar, jenachdem sie dieselben oder verschiedene sind, in das Additions- oder Subtraktionszeichen.

---

§. 12. Nach den bisherigen Betrachtungen lässt sich eine gewisse Zahl entweder durch ein einzelnes Zahlzeichen ausdrücken (absolute Zahlen) oder durch zwei oder mehre in einer gewissen Beziehung stehende (relative Zahlen). Die letzteren Beziehungen werden durch die sechs Operationen angegeben. Da aber Addition und Subtraktion in einander übergehen oder verwandelt werden können, so gibt es im Ganzen nur sechs verschiedene Zahlformen oder formelle Ausdrücke für die Zahlen. Nämlich:

1. die *absoluten* Zahlausdrücke $(+a, -a)$;
2. die durch die Addition oder Subtraktion oder durch beides aus zwei oder mehren Zahlen entstandenen Ausdrücke, die *Polynome:*
$$(-a)+(+b)+(-c)-(+d)-(-e)=-a+b-c-d+e;$$
3. die Form der *Produkte* ($n\,.\,a$ oder na),
4. die Form der *Quotienten* $(n:c)$,
5. die *Potenzialgrössen*, dargestellt durch Basis und Exponent (Potenzialexponent, a^n) und
6. die *Wurzelgrössen*, dargestellt durch Radikand und Exponent (Wurzelexponent, $\sqrt[n]{c}$).

Weil man wissen muss wie jede von den sechs Zahlformen in jeder von den sechs Rechnungsoperationen zu behandeln ist, so besteht der theoretische Theil der Elementararithmetik in 36 Aufgaben, deren Auflösung das zunächst vorgesteckte Ziel ist.

Es ist zwar nothwendig die Vorzeichen der Resultate bei der Behandlung einer jeden von den sechs Zahlformen zu bestimmen, aber es wird hinreichend sein die Regeln dafür bei den absoluten Zahlen anzugeben, weil für jeden relativen Ausdruck ein absoluter Werth sich denken lässt. In den zusammengesetzten Zahlformen wird also von den Regeln in Betreff der Vorzeichen nicht mehr die Rede sein.

Nachdem jede Zahlform für sich in ihrer einfachsten Gestalt in jeder von den Operationen behandelt worden, können verschiedene Zahlformen in einer Operation vorkommen, ohne dass es neuer Regeln bedarf.

Erster Abschnitt.

Die absoluten Zahlen.

1. Addition und 2. Subtraktion.

§. 13. A. $(+a)+(+c)=+(a+c)$.

$(-a)+(-c)=-(a+c)$.

$(+a)+(-c)=(+a)-(+c)$, wenn $a>c$.

$(+a)+(-c)=(-c)-(-a)$, wenn $c>a$.

$(-a)+(+c)=(-a)-(-c)$, wenn $a>c$.

$(-a)+(+c)=(+c)-(+a)$, wenn $c>a$.

B. $(+a)-(+c)$, wenn $a>c$.

$(+a)-(+c)=(+a)+(-c)$, wenn $a<c$.

$(-a)-(-c)$, wenn $a>c$.

$(-a)-(-c)=(-a)+(+c)$, wenn $a<c$.

$(+a)-(-c)=(+a)+(+c)$.

$(-a)-(+c)=(-a)+(-c)$.

Die Summe übereinstimmender Zahlen hat das Vorzeichen der Addenden und die Addition wird beibehalten; die Summe zweier entgegen gesetzten Zahlen ist, wenn sie gleich sind, Null und richtet sich, wenn sie ungleich sind, nach dem grösseren Summanden, wobei stets die Addition des kleineren in die Subtraktion verwandelt wird.

Sind mehre theils positive, theils negative Summanden vorhanden, so bildet man zwei Theilsummen, die eine aus den positiven, die andere aus den negativen Summanden und verfährt mit ihnen nach dem Obigen.

Sind Minuend und Subtrahend übereinstimmend, so wird die Subtraktion nur dann beibehalten, wenn jener grösser, als dieser ist; im entgegen gesetzten Falle wird sie in die Addition verwandelt. — Die Subtraktion entgegen gesetzter Zahlen wird stets in die Addition übereinstimmender verwandelt, wobei das Resultat sich nach dem Minuend richtet.

In welchen Fällen sind also die Summen und die Differenzen positiv, in welchen negativ? Besondere Beispiele.

Das Addiren und Subtrahiren wird durch ein doppeltes neben einander laufendes Zählen in der Weise bewirkt, dass man:

a) beim Addiren von dem einen Addend (dem grösseren) zu zählen anfängt und eine 1 so lange hinzufügt, bis dadurch der andere Addend erschöpft ist;

b) beim Subtrahiren von dem Subtrahend beginnend bis der Minuend erreicht ist, wobei die Menge der zugezählten Einsen der Rest ist.

Das blosse Zählen ist Gedächtnisssache, also etwas Mechanisches; Addiren und Subtrahiren aber eine Verstandesthätigkeit, weil eine Beurtheilung erforderlich ist.

3. Multiplikation und 4. Division.

§. 14. Die beiden bestimmenden Zahlen können entweder übereinstimmend oder entgegen gesetzt sein.

A. Ist der Multiplikator positiv $(+n)$, so zeigt er an, dass der Multiplikandus so wie er ist ($+a$ oder $-a$) als Theil (n mal) gesetzt werden soll, so dass sich für diesen Fall das Produkt nach dem Multiplikandus richtet.

1. $(+n).(+a)=(+a)+(+a)+(+a)\ldots\ldots$ n mal $=+na$,
2. $(+n).(-a)=(-a)+(-a)+(-a)\ldots\ldots$ n mal $=-na$.

Ist aber der Multiplikator negativ, soll man also eine Zahl $-n$ mal nehmen, so soll man jene Zahl entgegen gesetzt als Theil n mal setzen, wodurch das Produkt dem Multiplikandus entgegen gesetzt wird:

3. $(-n) . (+a) = (-a) + (-a) + (-a) \ldots\ldots n\,\text{mal} = -na$,

4. $(-n) . (-a) = (+a) + (+a) + (+a) \ldots\ldots n\,\text{mal} = +na$. Darin liegt das Gesetz: *Übereinstimmende Faktoren* (Fall 1. und 4.) *geben ein positives, entgegen gesetzte* (Fall 2. und 3.) *ein negatives Produkt.*

B. Da das Dividiren aus dem Produkte und einem seiner beiden Faktoren den anderen finden lehrt; so müssen, wenn der Dividendus (das gegebene Produkt) positiv ist, seine beiden Faktoren (Quotient und Divisor) übereinstimmend sein, oder der Quotient richtet sich nach dem Divisor:

1. $(+a) : (+c) = +n$, 2. $(-a) : (+c) = -n$.

Ist aber der Dividendus negativ, so muss der Quotient dem Divisor entgegen gesetzt sein.

3) $(+a) : (-c) = -n$, 4. $(-a) : (-c) = +n$.

Der Quotient übereinstimmender Zahlen ist positiv, der entgegen gesetzter negativ.

5. Potenziren und 6. Radiziren.

§. 15. A. Beim Potenziren können sich die denkbaren Fälle nur auf das Vorzeichen der Basis und auf die Grösse des Exponenten oder die Anzahl der gleichen Faktoren beziehen. Alle ganzen Zahlen zerfallen nämlich in solche, welche ein Vielfaches von 2 sind ($1 . 2$, $2 . 2$, $3 . 2, \ldots\ldots n . 2 = 2n$) und *grade* Zahlen heissen und in die anderen, die *ungraden* Zahlen (1, 3, 5, 7.....$(2n-1)$. Die Fälle sind also:

1. $(+a)^{2n} = (+a) . (+a) \ldots\ldots 2n\,\text{mal} = +a^{2n}$,

2. $(-a)^{2n} = (-a) . (-a) (-a) \ldots\ldots 2n\,\text{mal} = +a^{2n}$, indem man behufs der Ausführung der angedeuteten Multiplikation immer zwei und zwei negative Faktoren zu einem positiven Produkte verbinden kann und dann n positive Faktoren hat, welche ein positives Resultat geben.

3. $(+a)^{2n-1} = (+a) . (+a) . (+a) \ldots\ldots (2n-1)\,\text{mal} = +a^{2n-1}$,

4. $(-a)^{2n-1} = (-a) . (-a) . (-a) \ldots\ldots (2n-1)\,\text{mal} = -a^{2n-1}$, weil, wenn man bei der Ausführung der Multiplikation zwei und zwei negative Faktoren zu einem positiven Produkte zusammen fasset, *ein* negativer übrig bleibt, welcher das ganze Produkt negativ macht. Diese 4 Fälle lassen sich so zusammen fassen: *die Potenzen mit graden Exponenten sind positiv, die mit ungraden richten sich nach der Basis.*

B. Bei den Wurzeln kommt es auf das Vorzeichen des Radikanden und darauf an, ob der Wurzelexponent grade oder ungrade ist.

1. $\sqrt[2n]{(+a)} = \pm c$, weil $(\pm c)^{2n} = +a$ war;

2. $\sqrt[2n]{(-a)}$ ist unmöglich, weil jede Zahl, sie mag positiv oder negativ sein, erhoben in eine grade Potenz (die des Wurzelexponenten) nie etwas Negatives (den Radikand $-a$) gibt.

3. $\sqrt[2n-1]{(+a)} = +c$ und

4. $\sqrt[2n-1]{(-a)} = -c$, weil $(\pm c)^{2n-1} = \pm a$ gibt. Es sind also *die Wurzeln mit graden Exponenten aus positiven Zahlen sowohl positiv als negativ, aus negativen Zahlen unmöglich; die Wurzeln mit ungraden Exponenten richten sich nach dem Radikanden.*

Zweiter Abschnitt.

Die Polynome.

1. Addition und 2. Subtraktion.

§. 16. A. Soll ein Polynom addirt werden zu irgend einer Zahl, welche selbst auch ein Polynom sein kann, so addirt man nach und nach alle seine Glieder, wodurch diese sich mit ihren unveränderten Vorzeichen als Theile an jene Zahl schliessen.

$(-a+b)+(+r-n)=-a+b+r-n$, woraus dann noch $(b+r)-(a+n)$ gebildet werden kann.

B. Soll aber ein Polynom subtrahirt werden, so kann man es statt dessen addiren, nachdem es entgegen gesetzt gemacht worden ist. Da ein Polynom entgegen gesetzt gemacht wird, wenn man alle seine Theile entgegen gesetzt macht; so schliessen sich die Glieder des Subtrahend mit veränderten Vorzeichen als Theile an den unveränderten Minuend.

$$(-a+b)-(+r-n)=(-a+b)+(-r+n)=-a+b-r+n \text{ u. s. w.}$$

Es können auch dem Minuend die Glieder des Subtrahendus mit beiden Zeichen gegeben werden, ohne ihn zu stören; dann würden bei der Vollziehung der Subtraktion von ihm die Glieder des Subtrahend mit ihren Zeichen verschwinden und ihm die entgegen gesetzten Glieder desselben bleiben.

3. Multiplikation und 4. Division.

§. 17. In beiden Rechnungen sind drei Fälle denkbar: 1. Multiplikandus und Dividendus können Polynome sein, 2. Multiplikator und Divisor können es sein, 3. beide können Polynome sein.

A. *a*) Wie wird ein Polynom multiplicirt?

$a(b+c)=(b+c)+(b+c)+(b+c)\ldots\ldots a\,\text{mal}=$

$(b+b+b\ldots\ldots a\,\text{mal})+(c+c+c\ldots\ldots a\,\text{mal})=ab+ac$; also ist

$a(b+c)=ab+ac$ (§. 9., 1; §. 16., A.; §. 7.); d. h.: *ein Polynom wird multiplicirt, wenn man jedes seiner Glieder mit dem Multiplikator multiplizirt und die erhaltenen Theilprodukte addirt.*

b) Ein Polynom wird wahrscheinlich also dividirt, *wenn man jedes seiner Glieder dividirt und die erhaltenen Theilquotienten addirt:*

$a:(b+c)=(a:b)+(a:c)$, welches in der That der wahre Quotient ist, weil er, mit dem Divisor a multiplicirt, den Dividendus $(b+c)$ gibt; nämlich

$a.\{(a:b)+(a:c)\}=a(a:b)+a(a:c)=b+c$. (§. 17. A. *a.*; §. 9., 3.)

§. 18. Anwendung. Da jede ganze Zahl ein Vielfaches von 1 ist, so kann man auf sie diesen Fall der Division anwenden; nämlich

$a:c=a:(1+1+1\ldots\ldots c\,\text{mal})=(a:1)+(a:1)+(a:1)\ldots\ldots c\,\text{mal}$.

Soll nun a in 1 dividirt werden, so soll man die 1 in a einander gleiche Theile zerlegen, welche atel heissen, und einen derselben angeben, wodurch man (nach §. 4., 2.) $\frac{1}{a}$ erhält; also ist der letzte Ausdruck gleich

$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ldots\ldots c\,\text{mal}$; $\frac{1}{a}$ aber als Theil c mal gibt $\frac{c}{a}$, so dass

$a:c=\frac{c}{a}$ ist; d. h.: *jeder Quotient lässt sich als Bruch darstellen, wenn man den Dividen-*

dus zum Zähler und den Divisor zum Nenner macht. Dieses Verfahren heisst die *bruchweise Division.*

Das bruchweise Dividiren gibt nicht blos einen formellen Ausdruck für den Quotienten; $\frac{c}{a}$ ist in Wirklichkeit der a^{te} Theil von c; es ist eine ausgeführte Division. Man wendet sie an, wenn der Dividendus entweder kleiner ist, als der Divisor, z. B. $5:4=\frac{5}{4}$ oder wenn er kein genaues Vielfache von ihm ist, z. B. $5:19=5:(15+4)=3+\frac{4}{5}=3\frac{4}{5}$ (eine *gemischte* Zahl).

Die Gleichheit des Quotienten a:c mit dem Bruche $\frac{c}{a}$ berechtigt noch zu dem Schlusse, dass sich aus jedem Bruche ein Quotient bilden lässt, *wobei man den Nenner zum Divisor, den Zähler zum Dividendus macht.*

Darin liegt das Mittel die in einem unächten Bruche enthaltenen Ganzen (Einsen) zu finden.

Sind Zähler und Nenner übereinstimmende Zahlen $\frac{+c}{+a}$, $\frac{-c}{-a}$, so ist der Bruch positiv $+\frac{c}{a}$; ist aber einer von ihnen negativ $\frac{-c}{+a}$, $\frac{+c}{-a}$, so ist der Bruch negativ $-\frac{c}{a}$. Es ist also gestattet ohne die Grösse und das Beziehungszeichen eines Bruches zu stören Zähler und Nenner ins Entgegengesetzte zu verwandeln.

§. 19. B. *a*) Wie wird mit einem Polynome multiplicirt?

$(r+n)s=s(r+n)=sr+sn=rs+ns$, also ist auch

$(r+n)s=rs+ns$, d. h.: *mit einem Polynome multiplicirt man eine Zahl (s), wenn man letztere mit jedem Gliede multiplicirt und die erhaltenen Theilprodukte addirt.*

Beweisgründe: §. 7.; §. 17. A. *a.*; §. 7.; §. 5., 3. Die wiederholte Vertauschung der Faktoren geschah theils um auf den ersten Fall zu kommen, theils um r und n, die dem thätigen Faktor angehören, wieder als thätige Faktoren zu erhalten.

b. Die Division eines einzelnen Gliedes durch ein Polynom geschieht bruchweise:

$(r+n):s=\frac{s}{r+n}$.

§. 20. C. *a.* Wie wird ein Polynom durch ein anderes multiplizirt?

$(r+n).(b+c)=r(b+c)+n(b+c)=rb+rc+nb+nc$, d. h. *man multiplizirt mit jedem Gliede des Multiplikators jedes Glied des Multiplikandus und addirt die Theilprodukte.*

Beispiel: $(r+n)(r-n)=r^2-rn+nr-n^2=r^2-n^2$, also auch

$(r+n)(r-n)=r^2-n^2$, d. h.: das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen (r und n) ist gleich der Differenz der Quadrate dieser Zahlen. — Man kann daher auch umgekehrt aus der Differenz der Quadrate zweier Zahlen das Produkt aus der Summe und der Differenz ihrer Basen machen.

b. Bei der Division eines Polynoms durch ein anderes zieht man den Dividendus in sovielgliedrige Antheile zusammen, wie viele Glieder der Divisor hat, wobei eine gleichmässig nach den Gliedern des Divisors sich richtende Anordnung angemessen ist, und hat somit der Hauptsache nach den ersten Fall; also

$(r-n):\{(ar-an)+(-br+bn)+(+cr-cn)+d\}$.

Wie wird nun der ganze hier zweitheilige Divisor in die Binome des Dividendus dividirt? Es geschieht dieses durch einen vorläufigen Versuch, indem man zunächst ermittelt wie oft das erste Glied (r) des Divisors in dem erzten Gliede (ar) des Dividendus enthalten ist: $r:ar=a$ (das Auslassen eines Faktors ist eine Division). Der ganze Divisor $(r-n)$ ist nun in dem ganzen Antheile $(ar-an)$ des Dividendus wirklich amal enthalten, wenn das afache des Divisors den Antheil des Dividendus gibt, wie es hier der Fall ist. — Auf gleiche Weise wird nun mit den anderen Antheilen des Dividendus verfahren und der etwaige Rest (d) desselben, welcher wenigere Glieder als der Divisor hat, wird bruchweise diwidirt, so dass für den obigen Fall $a - b + c + \frac{d}{r-n}$ der ganze Quotient ist.

Sollte der ganze Divisor in dem ebensovielgliedrigen, zur jedesmaligen Division gezogenen Antheile des Dividendus nicht so oft enthalten sein, als das erste Glied in dem ersten Gliede, sondern bei der Subtraktion des Produktes aus dem ganzen Divisor und dem jedesmaligen Theilquotienten ein Rest bleiben; so benutzt man von den noch übrigen Gliedern des Dividendus zu diesem Reste nur so viele als nothwendig sind, um die Gliederzahl so gross als im Divisor zu machen.

Diese Methode wird ohne Abänderung für alle Fälle durchgeführt, z. B.

$$\begin{array}{l} (r - n) : (rr - nn) = r + n \\ \underline{rr - nr} \\ \quad + nr - nn \\ \quad \underline{+ nr - nn} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Wenn auch die Form der zu wählenden Glieder durch die bisherigen Betrachtungen beschränkt wird so ist doch die Methode des Verfahrens ganz allgemein.

5. Potenziren und 6. Radiziren.

Diese beiden Operationen werden hier nur für die Exponenten 2 und 3 durchgeführt.

§. 21. A. *a) Entwickelung des Quadrats* eines Polynoms. Das Quadrat von einem Monome a ist wieder ein Monom, a^2. Tritt zur Basis a ein zweiter Theil b, so ist

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, also

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; daher kommen, wenn b zur Basis a tritt, zum Quadrate von a zwei Theile, nämlich: *das doppelte Produkt beider Basistheile* (2ab) *und das Quadrat des zweiten Theiles* (b^2).

Kommt zur Basis $a + b$ ein dritter Theil c, so lässt sich die Entwickelung des Quadrates von $(a + b + c)$ sehr leicht auf die eines Binoms zurückführen; man darf nur $a + b = n$ annehmen; dann ist

$(a + b + c)^2 = (n + c)^2 = n^2 + 2nc + c^2$, worin wieder das obige Gesetz liegt, nämlich dass, wenn zur Basis $(a + b)$ ein neuer Theil c kommt, zum Quadrate der früheren Basis $\{n^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\}$ auch zwei Theile treten: das doppelte Produkt der früheren Basis und des neuen Theiles $\{2nc = 2(a + b)c\}$ und das Quadrat des neuen Theiles (c^2). Es ist also

$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$.

Diese Betrachtung kann mit aller Strenge für jeden neuen Basistheil fortgeführt und somit behauptet werden, dass seinetwegen zum Quadrate der früheren Basis zwei Ausdrücke treten: 1) *das doppelte Produkt aus der Summe aller früheren Theile mal dem neuen* und 2) *das Quadrat des neuen Theiles.*

Hat die Basis n Glieder, so hat das Quadrat deren $2n - 1$.

Die drei Theile des Quadrates eines Binoms sind positiv, wenn beide Basistheile entweder positiv oder negativ sind, ist aber einer von den Basistheilen negativ, so ist es auch das doppelte Produkt beider Theile.

Das Quadrat eines Polynoms besteht nicht nur aus den Quadraten aller einzelnen Basistheile, sondern auch noch aus den doppelten Produkten jedes neuen Theiles und der Summe aller ihm vorhergehenden.

§. 22. *b) Entwickelung der Quadratwurzel* aus einem Polynome. Um aus einem Polynome die Quadratwurzel zu ziehen müssen aus ihm als dem Radikanden die Theile des Quadrates eines Polynoms, der Wurzel, nach und nach abgezogen werden. Zu diesem Zwecke werden die Glieder des Radikand zunächst so geordnet, dass das erste eine Quadratzahl, ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren, ist; einer von diesen ist der erste Wurzeltheil.

$\sqrt{(a^2-2ab+b^2-2ac+2bc+c^2)}=a.$

Nachdem wegen des ersten Wurzeltheiles a sein Quadrat a^2 von dem Radikanden abgezogen worden, ist wegen des unbekannten zweiten Wurzeltheiles x in ihm zunächst enthalten das doppelte Produkt beider Basistheile. Es ist also das folgende Glied $-2ab=2.ax$, so dass der zweite Wurzeltheil $x=\frac{-2ab}{2a}=-b$ ist. Die Regel für die Auffindung des zweiten Wurzeltheiles ist: man dividire mit dem doppelten ersten Gliede der Wurzel in das folgende Glied des Radikanden oder dasjenige, bei welchem die Division aufgeht.

Ehe man zur Auffindung des dritten Wurzeltheiles schreiten kann, müssen von dem Radikanden abgezogen werden: das doppelte Produkt der beiden gefundenen Wurzeltheile und das Quadrat des zweiten; nämlich

$$\begin{array}{l}\sqrt{(a^2-2ab+b^2-2ac+2bc+c^2)}=a-b\\ \underline{a^2}\\ 2a:\ \ -2ab+b^2\\ \qquad \underline{-2ab+b^2}\\ \qquad\qquad 0\end{array}$$

Der dritte und jeder etwa noch folgende Wurzeltheil wird ganz so wie der zweite gefunden, wenn man die beiden ersten, überhaupt alle bisher gefundenen Theile als Ganzes betrachtet. Man wird also mit der doppelten Summe aller schon gefundenen Theile $(2a-2b)$ in den Rest des Radikanden, von welchem so viele Glieder $(-2ac+2bc)$ verwendet werden, als deren der Divisor hat, dividiren und wegen je eines Wurzeltheiles $(-c)$ von dem Radikand das doppelte Produkt des neuen Theiles und der Summe aller früheren, so wie das Quadrat des neuen abziehen. Für das obige Beispiel ist also die Wurzel genau $a-b-c$. Bliebe ein Rest, so würde das obige Verfahren auf dieselbe Weise fortgesetzt.

Ist der Radikand ein Binom, so gibt es daraus keine genau angebbare Wurzel; denn sie kann weder ein Monom sein, weil das Quadrat eines Monoms wieder ein Monom und kein Binom ist, noch ein Binom oder Polynom, weil die Quadrate davon mehr als zwei Glieder besitzen. Solche Wurzeln heissen *irrationale*.

§. 23. B. *a) Entwickelung des Kubus* eines Polynoms. Der Kubus eines Monoms (a) ist wieder ein Monom (a^3). Kommt zur Basis a ein zweiter Theil b, so ist

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3.$

Von diesen Gliedern können einerseits das zweite $2a^2b=a^2b+a^2b$ und das vierte a^2b in $3a^2b$, so wie andererseits das dritte ab^2 und fünfte $2ab^2=ab^2+ab^2$ in $3ab^2$ zusammen gezogen werden, so dass

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; also kommen, wenn zur Basis a ein zweiter Theil b tritt, zum Kubus von a, nämlich zu a^3 drei Glieder: *das dreifache Quadrat des ersten Theiles* *mal dem zweiten, das dreifache Produkt aus dem ersten mit dem Quadrate des zweiten und der Kubus des zweiten Theiles.*

Kommt zur Basis $a+b$ ein dritter Theil c, so lässt sich der Kubus von $a+b+c$ dadurch auf den eines Binoms zurück führen, dass man für $a+b$ das absolute Ganze n setzt. Nun ist

$$(a+b+c)^3=(n+c)^3=n^3+3n^2c+3nc^2+c^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3;$$

also kommen wegen des zur Basis tretenden dritten Theiles c im Kubus zu dem Kubus von $(a+b)$ auch drei Theile: das dreifache Produkt aus dem Quadrate der Summe der beiden ersten Theile und dem dritten Theile, das dreifache Produkt der Summe der beiden ersten Theile und des Quadrates des dritten und endlich der Kubus des dritten Theiles.

Diese drei Theile sind ganz wie die früheren, wenn man nur die Summe der beiden ersten Theile als ersten und den dritten Theil als zweiten ansieht.

Für je einen zur Basis kommenden neuen Theil erhält der Kubus der früheren Basis: 1. das dreifache Quadrat der Summe aller früheren Theile mal dem neuen, 2. das dreifache Quadrat des neuen mal der Summe der früheren, 3. den Kubus des neuen Theiles.

Hat die Basis n Glieder, so sind im Kubus $3n-2$ Gl.

Wie sind die Glieder folgender Kuben: $(a-b)^3$, $(-a+b^3$, $(-a-b)^3$?

Der Kubus eines Polynoms hat drei Arten von Gliedern; welche?

Die obigen Betrachtungen werden als richtige anerkannt, ohne dass man das allgemeine Gesetz für die Multiplikation eines Produktes $|a.(2ab)|$ und für die Addition von Produkten $|2a^2b+a^2b|$ kennt.

§. 24. *b) Entwickelung der Kubikwurzel* aus einem Polynome. Es müssen aus dem Radikand die Theile des Kubus der zu findenden Wurzel nach und nach genommen werden, zunächst also der Kubus des ersten, vorläufig noch nicht bekannten Wurzeltheiles. Desshalb wird der Radikand so geordnet, dass sein erstes Glied ein Kubus oder ein Produkt aus drei gleichen Faktoren (formell) ist oder als solches angesehen wird; einer dieser Faktoren ist der erste Wurzeltheil.

$$\sqrt[3]{(-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3+3a^2c-6abc+3b^2c-3ac^2+3bc^2+c^3)}=-a.$$

Nachdem der Kubus $(-a^3)$ des ersten Wurzeltheiles $(-a)$ von dem Radikand abgezogen worden, ist in ihm wegen des zweiten Wurzeltheiles zunächst enthalten das dreifache Quadrat des ersten $(3a^2)$ mal dem zweiten (x). Da nun $3a^2x=3a^2b$, so ist $x=b$ der zweite Wurzeltheil. Ehe man zur Auffindung des dritten schreiten kann sind die wegen des zu $-a$ gekommenen zweiten Wurzeltheiles b im Radikand noch enthaltenen drei Glieder $3a^2b$, $-3ab^2$ und b^3 zuerst abzuziehen.

Wegen des dritten Wurzeltheiles y steckt in dem Reste des Radikanden $(3a^2c-6abc+3b^2c)$ zunächst das dreifache Quadrat der Summe der beiden ersten Theile mal dem dritten: oder es ist

$$3(-a+b)^2y=3a^2c-6abc+3ab^2c, \text{ also}$$

$$y=\frac{3a^2c-6abc+3b^2c}{3a^2-6ab+3b^2}=+c;$$ d. h.: man findet den dritten Wurzeltheil, wenn man mit dem dreifachen Quadrate der Summe der beiden ersten Theile in die nächsten Theile des Restes dividirt.

Auch wegen des dritten Wurzeltheiles muss vom Radikand Dreierlei abgezogen werden, ehe man zur Aufsuchung des etwaigen vierten Theiles schreitet.

Die Berechnung der obigen Aufgabe würde sich auf folgende Weise gestalten:

$$\sqrt[3]{(-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3+3a^2c-6abc+3b^2c-3ac^2+3bc^2+c^3)}=-a+b+c.$$

$$\begin{array}{l}
-a^3 \\
\hline
3a^2 : 3a^2b-3ab^2+b^3 \\
\qquad 3a^2b-3ab^2+b^3 \\
\hline
\qquad (3a^2-6ab+3b^2) : (3a^2c-6abc+3b^2c \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3a^2c-6abc+3b^2c \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad o \qquad -3ac^2+3bc^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -3ac^2+3bc^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad o \qquad +c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +c^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad o
\end{array}$$

Statt die drei letzten Ausdrücke einzeln abzuziehen, kann man auch ihre Summe abziehen.

Auch für irrationale Wurzeln sind die Regeln des Verfahrens dieselben.

Das Methodische des Verfahrens ändert sich nicht, wenn die Glieder des Radikand auch andere Formen haben. Die obigen Produkte lassen sich nach dem Vorgetragenen behandeln (Vrgl. u. A. §. 9., 4.), ohne dass dem Folgenden vorgegriffen wird.

Dritter Abschnitt.

Die Produkte.

1. Addition und 2. Subtraktion.

§. 25. Es sind bei diesen zwei Rechnungen zwei Fälle denkbar: entweder haben die Produkte nur verschiedene Faktoren oder es kommen unter ihnen gegenseitig auch gleiche vor: *gleichnamige Zahlen.*

A. Im ersten Falle lassen sich die beiden Rechnungen nicht ausführen, sondern nur formell darstellen. Aber

B. *a*) $ab+cb=b+b+b\ldots a\,\text{mal}+b+b\ldots c\,\text{mal}=b+b+b\ldots(a+c)\,\text{mal}=(a+c)b$; also auch $ab+cb=(a+c)b$, d. h.: *Produkte, welche einen gleichen Faktor haben, werden addirt, wenn man mit der Summe der verschiedenen Faktoren den gleichen Faktor multiplicirt.*

b) Die Subtraktion lässt sich auf die Addition zurückführen, nämlich:

$ab-cb=ab+\{-cb\}=ab+\{(-c)b\}=\{a+(-c)\}b=(a-c)b$, also

$ab-cb=(a-c)b$; d. h.?

Die Koeffizienten werden bei der Addition oder Subtraktion nur dann addirt oder subtrahirt, wenn sie zu denselben Faktoren gehören. — Dasselbe Verfahren für mehr als zwei gleichnamige Glieder.

Die Richtigkeit des obigen Gesetzes kann auch aus §. 19. *a.* indirekt (analytischer Beweis) abgeleitet werden. b kann eine irgendwie benannte Einheit vertreten.

3. Multiplikation und 4. Division.

§. 26. Hier sind drei Fälle möglich: 1. es ist der Multiplikandus oder Dividendus ein Produkt, 2. der Multiplikator oder Divisor ist ein Produkt, 3. beide sind in jeder Rechnung Produkte.

A. *a*) Wie multiplicirt man ein Produkt?

a . bc = bc + bc + bc..... a mal = (c + c..... b mal) + (c + c... b mal) + ( ) + ... a mal = ab . c, also auch a . bc = ab . c, d. h.: *ein Produkt wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man nur einen seiner Faktoren multiplicirt und den anderen Faktor* (die anderen Faktoren) *als solchen unverändert lässt.*

b) Wie wird ein Produkt dividirt? — Wahrscheinlich wohl, *wenn man einen seiner Faktoren dividirt und den anderen Faktor als solchen unverändert lässt.* Nämlich:

a : bc = (a : b)c; denn setzt man
a : b = x, (§. 5, 2), so ist
b = ax, (§. 9, 2 *b*)
bc = axc, (§. 9, 5 *c*)
a : bc = xc, (§. 9, 5 *d*; §. 9, 4)
a : bc = (a : b)c, wie behauptet worden.

Darauf lässt sich auch §. 9, 6 zurückführen.

§. 27. B. *a*) Wie multiplicirt man mit einem Produkte?

rn . s = s . rn = sr . n = n . sr = n . rs, also auch

rn . s = n . rs, d. h. *mit einem Produkte* (rn) *multiplicirt man eine Zahl* (s), *wenn man sie mit einem Faktor* (r) *multiplicirt und das Erhaltene* (rs) *noch mit dem anderen Faktor*, u. s. f., wenn der Multiplikator noch Faktoren besässe.

Dieser Fall gründet sich also auf den ersten und die Umtauschung der Faktoren. Diese ist zuletzt wiederholt vorgenommen, um die Elemente des thätigen Faktors rn selbst auch als thätige Faktoren zu erhalten.

b) Dividirt wird mit einem Produkte wohl, *wenn man mit einem Faktor dividirt und das Erhaltene noch mit dem anderen* (u. s. w.), nämlich:

rn : s = n : (r : s); denn es sei (§. 5, 2)
n : (r : s) = x, so ist (§. 9, 2, *b*)
r : s = nx, (§. 9, 2, *b*)
s = rnx, (§. 9, 5, *d* und §. 9, 4)
rn : s = x, (§. 5, 2)
rn : s = n : (r : s), also die obige Vermuthung richtig.

§. 28. C. *a*) Wie multiplicirt man ein Produkt (bc) mit einem anderen (rn)?

rn . bc = n . (r . bc) = n . (rb . c) = rb . nc also auch

rn . bc = rb . nc, d. h.: ein Produkt multiplicirt man mit einem anderen, *wenn man die Faktoren des Multiplikandus der Reihe nach mit denen des Multiplikators multiplicirt und die Resultate als Faktoren zu einander betrachtet.*

Hätte der Multiplikandus mehr Faktoren, als der Multiplikator, so würden die übrigen unverändert als Faktoren bleiben; hätte der Multiplikator mehr Faktoren, so müsste man mit den übrigen noch multipliciren.

b) Division eines Produktes bc mit einem anderen rn.

rn : bc = n : (r : bc) = n : (r : b)c = (r : b) (n : c), also auch

rn : bc = (r : b) (n : c); d. h. ein Produkt wird durch ein anderes dividirt, *wenn man die Faktoren des Divisors der Reihe nach in die des Dividendus dividirt und die Resultate als Faktoren zu einander betrachtet.*

1) Wie, wenn die Anzahl der Faktoren im Divisor und Dividendus ungleich ist?

2) Die Koeffizienten werden bei der Multiplikation stets multiplicirt, bei der Division stets dividirt; z. B. $3n \,.\, 4c = 12nc$; $3n : 12c = 4 (n : c)$.

3) Wenn Divisor und Dividend einen gleichen Faktor haben, z. B. $rn : rc = (r : r)\,(n : c) = 1 (n : c) = n : c$; so kann dieser gleiche Faktor in beiden ausgelassen werden oder: *man kann, ohne einen Quotienten zu stören, seinen Divisor und Dividend mit derselben Zahl dividiren* (ihnen denselben Faktor nehmen).

4) Daraus, dass $n : c = rn : rc$ ist, folgt aber auch, dass man Divisor und Dividend mit derselben Zahl multipliciren darf, ohne den Quotienten zu stören.

5) Wegen §. 18. wird nun auch ein Bruch nicht gestört, wenn man seinen Zähler und Nenner entweder mit derselben Zahl multiplizirt *(erweitert)* oder mit derselben Zahl dividirt *(abkürzt* — nicht aufhebt).

6) Das Erweitern der Brüche gibt das Mittel ungleichnamige Brüche gleichnamig zu machen. Aus $\frac{a}{c}$ und $\frac{r}{n}$ wird $\frac{an}{cn}$ und $\frac{cr}{cn}$; aus $\frac{a}{ce}$ und $\frac{r}{cn}$ wird $\frac{an}{cen}$ und $\frac{er}{cen}$.

5) Potenziren und 6) Radiziren.

§. 29. $(ac)^n = ac \,.\, ac \,.\, ac \ldots\ldots n$ mal $= aaa \ldots\ldots n$ mal $.\, ccc \ldots\ldots n$ mal $= a^n \,.\, c^n$, also auch $(ac)^n = a^n \,.\, c^n$; d. h.: *ein Produkt* (ac) *wird in eine Potenz erhoben, wenn man jeden seiner Faktoren in diese Potenz erhebt und diese Potenzen als Faktoren zu einander setzt.*

§. 30. Darnach wird wohl aus einem Produkte radizirt, *wenn man jeden Faktor radizirt und die Wurzeln als Faktoren setzt*, nämlich

$\sqrt[n]{(ac)} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{c}$, was wirklich richtig ist, weil

$(\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n \,.\, (\sqrt[n]{c})^n = ac$ gibt. (§. 9, 2, *c*; §. 29; §. 9, 3)

Die Koeffizienten werden beim Potenziren und Radiziren stets potenzirt und radizirt.

Potenztafeln, Wurzeltafeln. Potenzen von und Wurzeln aus den absoluten Primzahlen.

Vierter Abschnitt.

Die Quotienten oder Brüche.

§. 31. Da jeder Quotient durch die bruchweise Division als Bruch sich darstellen lässt, so ist es theoretisch gleichgiltig, ob die Betrachtungen an Quotienten oder an Brüchen durchgeführt werden.

Da ferner bei jedem Bruche der Zähler die Menge derjenigen Einheiten angibt, deren Grössenwerth durch den Nenner angezeigt wird, so lässt sich jeder Bruch als Produkt ansehen, aus dem Zähler als Koeffizient und der Brucheinheit, deren Werth durch den Nenner angezeigt wird, als Multiplikand; z. B. $\frac{a}{c} = a \,.\, \frac{1}{c}$. Wenn demnach zwei Brüche ungleiche Nenner haben, so sind sie Vielfache ungleichnamiger Einheiten oder, es sind mit Recht ungleichnamige Brüche, z. B. $\frac{a}{c}$ und $\frac{r}{n}$ ($a \,.\, \frac{1}{c}$ und $r \,.\, \frac{1}{n}$); sind aber die Nenner gleich, so heissen sie mit Recht gleichnamige, z. B. $\frac{a}{c} = a \,.\, \frac{1}{c}$ und $\frac{r}{c} = r \,.\, \frac{1}{c}$. (Vergl. §. 4, §. 25).

1) Addition und 2) Subtraktion.

§. 32. Entweder sind die Brüche bei diesen Rechnungen ungleichnamig oder gleichnamig.

a) $\frac{a}{c} \pm \frac{r}{n} = a \,.\, \frac{1}{c} \pm r \,.\, \frac{1}{n}$; es lässt sich also (§. 25) die Rechnung mit ihnen unmittelbar nicht ausführen, sondern nur formell darstellen.

b) $\frac{a}{c} \pm \frac{r}{c} = a \,.\, \frac{1}{c} \pm r \,.\, \frac{1}{c} = (a \pm r)\frac{1}{c} = \frac{a \pm r}{c}$, also auch

$\frac{a}{c} \pm \frac{r}{c} = \frac{a \pm r}{c}$; d. h. man addirt oder subtrahirt gleichnamige Brüche, *wenn man der Summe oder Differenz ihrer Zähler den gemeinschaftlichen Nenner als solchen gibt.*

Es lässt sich auch leicht ein analytischer Beweis führen:

$\frac{a}{c} \pm \frac{r}{c} = \frac{a \pm r}{c}$, weil $\frac{a \pm r}{c} = c : (a \pm r) = (c : a) \pm (c : r) = \frac{a}{c} \pm \frac{r}{c}$ ist. (§. 18; §. 17, A. *b*).

Der erste Fall (*a*) lässt sich durch §. 28. auf den zweiten (*b*) bringen, so dass die Rechnung dann auch ausführbar ist.

3) Multiplikation und 4) Division.

§. 33. In jeder der beiden Rechnungen sind drei Fälle denkbar: 1) es ist der Multiplikandus und Dividendus ein Quotient oder Bruch, 2) der Multiplikator und der Divisor sind Quotienten oder Brüche, 3) beide sind Brüche.

A. *a.* 1) Aus $n : rs = (n : r)s = s(n : r)$, (§. 26. A. *b*; §. 7) folgt nach §. 5, 3 $s(n : r) = n : sr$, d. h.: *ein Quotient* $(n : r)$ *wird mit einer Zahl* (s) *multiplicirt, wenn man seinen Dividendus* (r) *multiplicirt*, wobei der Divisor (n) als solcher ungeändert bleibt.

2) Schon aus der einseitigen Betrachtung, dass ein Quotient wächst nicht nur mit wachsendem Dividendus, sondern auch mit abnehmendem Divisor, lässt sich entnehmen, dass ein Quotient auch multiplicirt wird, *wenn man seinen Divisor dividirt*, wobei der Dividend als solcher unverändert bleibt; nämlich

$s . (n : r) = (s : n) : r$; denn es sei
$(s : n) : r = x$, so ist
$r = x(s : n)$, mit x nach dem Obigen multiplicirt, gibt
$r = s : xn$,
$sr = xn$, durch n dividirt;
$n : sr = x$, und nun substituirt (Fall A. *a.* 1 und §. 5, 2):
$s(n : r) = (s : n) : r$, wie oben.

Wie wird demnach ein Bruch multiplicirt? $\left(s . \frac{r}{n} = \frac{sr}{n} \text{ oder} = \frac{r}{s : n} .\right)$ Welche Methode ist vorzuziehen?

b) Da das Dividiren dem Multipliciren entgegengesetzt ist, so wird ein Quotient wohl *dividirt werden, wenn man entweder seinen Dividendus dividirt oder seinen Divisor multiplicirt*, wobei im ersten Falle der Divisor, im zweiten der Dividendus ungeändert bleibt, nämlich:

1) $s : (n : r) = n : (s : r)$ oder
2) $s : (n : r) = sn : r$. Denn es sei für
1) $n : (s : r) = x$, so ist
$s : r = nx$
$r = snx$
$n : r = sx$
$s : (n : r) = x$, und für x seinen Werth gesetzt:
$s : (n : r) = n : (s : r)$, wie vermuthet wurde. Und für
2) $sn : r = s : (n : r)$ nach §. 27, *b*.

Wie wird also ein Bruch dividirt? $\left(s : \frac{r}{n} = \frac{s : r}{n} \text{ oder} = \frac{r}{sn} .\right)$ Welche Methode verdient den Vorzug?

$$\frac{r}{n} = a : \left(a . \frac{r}{n}\right) = \left\{ \begin{matrix} a : \frac{ar}{n} = \frac{ar}{an} \\ a : \frac{r}{a : n} = \frac{a : r}{a : n} \end{matrix} \right\}; \text{ also ist } \frac{r}{n} = \left\{ \begin{matrix} \frac{ar}{an} \text{ oder} \\ \frac{a : r}{a : n}, \text{ also wie §. 28, 5.} \end{matrix} \right.$$

§. 34. B. *a*) Da $m(c:a)=c:ma=c:am$ und

$m(c:a)=(c:a)m$ ist, so muss auch

$(c:a)m=c:am$ sein; d. h. *mit einem Quotienten* $(c:a)$ *multiplicirt man eine Zahl* m, *wenn man sie mit dem Dividend* a *multiplicirt und das Erhaltene mit dem Divisor* c *dividirt.*

Mit einem Bruche multiplicirt man eine Zahl, wenn man sie mit dem Zähler multiplicirt und das Erhaltene mit dem Nenner dividirt, wobei man auch mit der Division beginnen kann.

$$\frac{a}{c}\cdot m=\frac{am}{c}=a\cdot\frac{m}{c}.$$

Ist der Bruch ein ächter, so ist das Produkt kleiner, als der Multiplikandus.

b) *Mit einem Quotienten* $(c:a)$ *dividirt man eine Zahl* m *wenn man sie mit dem Dividendus* a *dividirt* $(a:m)$ *und das Erhaltene mit dem Divisor* c *multiplicirt*, nämlich:

$(c:a):m=c(a:m)$; denn $c(a:m)$ gibt nach §. 33 A. *a.* 2, $(c:a):m$.

Mit einem Bruche wird also eine Zahl dividirt, wenn man sie mit dem Zähler dividirt und das Erhaltene mit dem Nenner multiplicirt: $\frac{a}{c}:m=c\cdot\frac{m}{a}$.

Ist der Bruch ein ächter, so ist der Quotient grösser, als der Dividendus.

Statt mit einem Bruche $\frac{a}{c}$ zu dividiren, kann man mit dem umgekehrten, also mit $\frac{c}{a}$ multipliciren, indem in jedem der beiden Fälle mit a dividirt und mit c multiplicirt werden muss.

§. 35. C. Unmittelbar aus den obigen Fällen A und B ergibt sich, wie man zwei Quotienten oder Brüche multiplicirt, wie man sie dividirt.

$$a)\ \frac{a}{c}\cdot\frac{r}{n}=c:a\frac{r}{n}=\begin{cases} c:\frac{ar}{n}=\begin{cases}\frac{c:ar}{n},\\ \frac{ar}{cn},\end{cases}\\ c:\frac{r}{a:n}=\begin{cases}\frac{c:r}{a:n},\\ \frac{r}{c(a:n)}=\frac{r}{a:cn}.\end{cases}\end{cases}$$

Es gibt also vier Methoden für die Multiplikation zweier Brüche:

1) Das Produkt der beiden Zähler wird durch den Nenner des Multiplikators dividirt, wobei der Nenner des Multiplikandus ungeändert bleibt;

2) Das Produkt der Zähler wird Zähler, das der Nenner wird Nenner des Resultates;

3) Zähler und Nenner des Multiplikandus werden in dieser Ordnung durch Nenner und Zähler des Multiplikators dividirt und die Quotienten in derselben Ordnung zu Zähler und Nenner des Produktes gemacht;

4) Das Produkt der Nenner wird durch den Zähler des Multiplikators dividirt, wobei der Zähler des Multiiplikandus als solcher bleibt.

Die zweite Methode ist die immer anwendbare, die dritte aber ist die vortheilhafteste, wenn die Divisionen aufgehen.

b) Die Division eines Bruches durch einen Bruch.

$$\frac{a}{c}:\frac{r}{n}=c\cdot\left(a:\frac{r}{n}\right)=\begin{cases} c\cdot\frac{a:r}{n}=\begin{cases}\frac{c(a:r)}{n},\\ \frac{a:r}{c:n},\end{cases}\\ c\cdot\frac{r}{an}=\begin{cases}\frac{cr}{an},\\ \frac{r}{c:an}=\frac{r}{a(c:n)}.\end{cases}\end{cases}$$

Auch hier gibt es also vier Methoden:

1. der Quotient beider Zähler wird durch den Nenner des Divisors multiplizirt, wobei der Nenner des Dividendus als solcher bleibt;

2. es wird Zähler in Zähler, so wie Nenner in Nenner dividirt und diese Quotienten werden in der Ordnung zu Zähler und Nenner gemacht;

3. Zähler und Nenner des Dividendus werden in dieser Ordnung durch Nenner und Zähler des Divisors multiplizirt und die Produkte in der Ordnung zu Zähler und Nenner gemacht;

4. der Quotient der Nenner wird durch den Zähler des Divisors multiplizirt, wobei der Zähler des Dividendus als solcher bleibt.

Die dritte Methode ist stets anwendbar; die zweite aber ist die vortheilhafteste, wenn die Divisionen aufgehen.

5) das Potenziren und 6) das Radiziren.

§. 36. $\left(\frac{a}{c}\right)^n = \frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c}\ldots\ldots\text{n mal} = \frac{\text{aaa}\ldots\ldots\text{n mal}}{\text{ccc}\ldots\ldots\text{n mal}} = \frac{a^n}{c^n}$, also ist auch

$\left(\frac{a}{c}\right)^n = \frac{a^n}{c^n}$; d. h.: *ein Bruch wird potenzirt, wenn man Zähler und Nenner in die verlangte Potenz erhebt und diese Potenzen in der Ordnung zum Zähler und Nenner macht.*

Die Potenzen von ächten Brüchen mit Exponenten > 1 sind kleiner als die Basis.

§. 37. Dass das Radiziren aus einem Bruche dadurch geschieht, *dass man aus Zähler und Nenner die verlangte Wurzel zieht und diese Wurzeln in derselben Ordnung als Zähler und Nenner annimmt*, lässt sich bald nachweisen; nämlich

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}};\ \text{denn}\ \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{c}\right)^n} = \frac{a}{c}.\ (\text{§. 36.; §. 9, 2, } c. \text{ und 3, } c.)$$

Die Wurzeln aus ächten Brüchen mit Exponenten > 1 sind grösser als die Radikanden.

Fünfter Abschnitt.

Die Potenzialgrössen.

§. 38. Da es bei jeder Potenzialgrösse auf zwei Stücke, auf Basis und Exponent ankommt, so wird es in allen den Rechnungen, in welchen zwei Potenzialgrössen verbunden werden sollen, welches in den ersten vier Operationen geschieht, vier Fälle geben: es sind in den beiden Potenzialgrössen

1. die Basen und die Exponenten verschieden, a^r, c^n;

2. zu verschiedenen Basen gehören gleiche Exponenten, a^r, c^r (gleichartige Potenzen);

3. zu derselben Basis gehören verschiedene Exponenten, a^r a^n;

4. die Basen, so wie die Exponenten sind dieselben, a^r, a^r (gleichnamige Potenzen, *nicht gleichartige).*

1) Addition, 2) Subtraktion.

§. 39. In den drei ersten Fällen sind die Addition und Subtraktion unausführbar, also nur formell darstellbar; in dem vierten ist die Summe das Doppelte des einen Summanden (wenn sie übereinstimmend sind) und die Differenz Null.

6

$a^r \pm c^n$, $a^r \pm a^n$, $a^r \pm c^r$, $a^r + a^r = 2a^r$, $a^r - a^r = 0$.

Wie überhaupt Dinge, die nur gleichartig sind (Thaler und Silbergroschen als Geld betrachtet), noch nicht addirt werden können, sondern nur gleichnamige, so ist es auch hier. — Die Fälle in denen Potenzialgrössen Koeffizienten bei sich haben, gehören in die Betrachtungen von den Produkten. (§. 25. B. *a*, *b*.) z. B. $ba^r \pm ca^r = (b \pm c)a^r$.

3) Multiplikation und 4) Division.

§. 40. A. Für den *ersten Fall* sind die Rechnungen unausführbar (die Division nur bruchweise).

B. *Zweiter Fall.*

a) bei der Multiplikation.

Da $(ac)^r = a^r c^r$, so ist auch $a^r c^r = (ac)^r$; d. h.: *das Produkt der beiden Basen erhält den gleichen Exponenten als solchen.*

b) Bei der Division.

Weil $\left(\frac{a}{c}\right)^r = \frac{a^r}{c^r} = c^r : a^r$ war, so ist auch

$c^r : a^r = \left(\frac{a}{c}\right)^r$, d. h.: *der Quotient der beiden Basen erhält den gleichen Exponenten als solchen.*

C. *Dritter Fall.*

a) Bei der Multiplikation.

$a^r . a^n = aaa \ldots . r$ mal $. aa \ldots . n$ mal $= aaaa \ldots . (r + n)$ mal $= a^{r+n}$, also

$a^r . a^n = a^{r+n}$, d. h.: *die gemeinschaftliche Basis erhält die Summe der Exponenten als solchen.*

b) Bei der Division.

$a^r : a^n = a^x$, der Quotient kann als Potenz derselben Basis an angenommen werden, wovon aber der Exponent vorläufig nicht bekannt ist. Dann muss

$a^n = a^r a^x$ (§. 9. 2, *b*).

$a^n = a^{r+x}$ (§. 40. C. *a*.)

$n = r + x$ (§. 9, 5, *e*) also nach §. 9, 5, *b*

$n - r = x$ sein, was in den obigen Ausdruck substituirt

$a^r : a^n = a^{n-r}$ gibt, d. h.: *es wird von dem Exponenten des Dividendus abgezogen der des Divisors und diese Differenz als Potenzialexponent zur Basis gesetzt.*

Für die relative Grösse des r und n sind drei Fälle denkbar:

1. ist $n > r$, so ist $n - r$ positiv, z. B. $a^3 : a^5 = a^2$;
2. ist $n < r$, so ist $n - r$ negativ oder $-(r - n)$ gleich, z. B. $a^5 : a^3 = a^{-2}$;
3. ist $n = r$, so ist $n - r = o$ und
   $a^r : a^r = a^0$, aber auch
   $a^r : a^r = 1$, weil der Divisor gleich dem Dividendus und jede Zahl in einer gleichen oder sich selbst einmal enthalten ist. Daher ist nun auch
   $a^0 = 1$, d. h.: *jede Zahl mit dem Potenzialexponenten Null ist gleich eins.*

D. Der *vierte Fall* ist nach dem dritten zu behandeln, wobei in der Multiplikation das Resultat einen zusammenziehbaren Exponenten hat ($a^r . a^r = a^{r+r} = a^{2r}$) und in der Division 1 entsteht.

§. 41. Da wir auf negative Potenzialexponenten gekommen sind, so muss nun ihre Bedeutung untersucht werden.

Ist $n < r$, so war $a^r : a^n = a^{-(r-n)}$, es ist aber auch

$$a^r : a^n = \frac{a^n}{a^r} = \frac{aaa\ldots\ldots n \text{ mal}}{aa\ldots\ldots r \text{ mal}} = \frac{1}{aaa\ldots\ldots(r-n)\text{ mal}} = \frac{1}{a^{r-n}}, \text{ also ist}$$

$a^{-(r-n)} = \frac{1}{a^{r-n}}$, z. B. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; d. h. es soll die Basis, welche den negativen Exponenten hat, als Faktor zwar so oft gesetzt werden, als es der Exponent anzeigt, das Erhaltene soll aber als Nenner (Divisor) zu 1 als Zähler gesetzt werden, wenn nicht etwa ein anderer Faktor, als 1, bei jener Potenzialgrösse stand. Oder: *statt mit einer Potenzialzahl, die einen negativen Exponenten hat, zu multipliziren, kann man mit ihr, nachdem ihr Exponent positiv gemacht worden ist, dividiren* — nämlich die andere Zahl, welche bei ihr als Faktor stand. $ac^{-r} = \frac{a}{c^r}$.

§. 42. Da nun die Entstehung und Bedeutung der negativen Potenzialexponenten abgeleitet worden ist, so entsteht die Frage, ob die für positive Exponenten bei der Multiplikation und Division nachgewiesenen Regeln auch für negative Exponenten gelten.

Wenn $n < r$ ist, so war $a^r : a^n = a^{-(r-n)}$; also muss $a^r . a^{-(r-n)}$ den Dividendus geben, was nur dadurch geschieht, dass bei der Multiplikation auch dieser Potenzialgrössen, von denen die eine einen negativen Exponenten hat, die Summe der Exponenten zur gemeinschaftlichen Basis als Exponent gesetzt wird:

$a^r . a^{-(r-n)} = a^{-(r-n)+r} = a^n$; z. B. $a^5 . a^{-2} = a^3$. — Ist hierbei der negative Exponent grösser, als der positive ($s > r$), so hat das Produkt einen negativen Exponenten:

$a^r . a^{-s} = a^{-s+r} = a^{-(s-r)}$; z. B. $a^3 . a^{-5} = a^{-2}$.

Aus diesen Fällen für die Multiplikation lassen sich neue für die Division ableiten. Wenn man nämlich das Produkt als Dividendus, den einen seiner Faktoren als Divisor annimmt; so muss der andere Faktor Quotient werden.

Aus $a^r . a^{-(r-n)} = a^n$ wird $a^{-(r-n)} : a^n = a^{n - \{-(r-n)\}} = a^{r-}$; z. B. $a^{-2} : a^3 = a^5$;

aus $a^r . a^{-s} = a^{-(s-r)}$ wird $a^r : a^{-(s-r)} = a^{-(s-r)-r} = a^{-s}$; z. B. $a^3 : a^{-2} = a^{-5}$ und

$a^{-s} : a^{-(s-r)} = a^{-(s-r)-(-s)} = a^r$; z. B. $a^{-5} : a^{-2} = a^3$; also wenn auch bei der Division entweder blos der Exponent des Divisors oder der des Dividendus negativ ist oder wenn beide negativ sind, so wird doch die obige Regel, wie sie für positive Exponenten statt fand, angewendet.

Wenn im letzten Falle der Exponent des Dividendus grösser, als der des Divisors ist ($-m > -s$), so wird der Exponent des Quotienten auch negativ:

$a^{-s} : a^{-m} = a^{-(m-s)}$; z. B. $a^{-5} : a^{-7} = a^{-2}$. Daraus ergibt sich der letzte denkbare Fall für die Multiplikation, indem $a^{-(m-s)} . a^{-s}$ nur dann den Dividendus a^{-m} gibt, wenn man auch hier die (negativen) Exponenten addirt. $\{-(m-s)+(-s) = -m.\}$

§. 43. Es ist nicht nur $a^{-n} = \frac{a^{-n} . a^n}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$, sondern auch

$a^n = \frac{a^n . a^{-n}}{a^{-n}} = \frac{a^0}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}}$, *also jede Zahl, welche als Faktor* (auch blos zu 1) *steht, kann man statt dessen als Nenner setzen mit entgegen gesetztem Exponenten.*

Aber man kann auch umgekehrt die Division in eine Multiplikation verwandeln, nämlich:

$\frac{c}{a^r} = \frac{ca^{-r}}{a^r a^{-r}} = \frac{ca^{-r}}{a^0} = \frac{ca^{-r}}{1} = ca^{-r}$ und

$\frac{c}{a^{-r}} = \frac{ca^r}{a^{-r}a^r} = \frac{ca^r}{a^0} = \frac{ca^r}{1} = ca^r$; d. h.: statt mit einer Zahl zu dividiren, kann man mit ihr, nachdem ihr Exponent entgegen gesetzt gemacht worden ist, die andere Zahl multipliciren.

So wie bei der Verwandlung der Addition und Subtraktion in einander das Vorzeichen des Koeffizienten, so muss bei der Verwandlung der Multiplikation und Division in einander das Vorzeichen des Exponenten verändert werden. — Der positive Koeffizient zeigt an, wie oft der Multiplikandus als Summand, der negative wie oft er als Subtrahend (zu 0) gesetzt werden soll; der positive Exponent sagt, wie oft die Basis als Faktor, der negative wie oft sie als Divisor (zu 1) gesetzt werden soll.

5) Das Potenziren und 6) das Radiziren.

§. 44. Das *Potenziren.* Da das Vorhandensein negativer Potenzialexponenten erwiesen worden, so lassen sich vier Fälle denken.

a) $(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot a^r \ldots\ldots n \text{ mal} = a^{r+r+r \ldots \text{n mal}} = a^{nr}$, folglich ist $(a^r)^n = a^{nr}$ d. h. *eine Potenzialgrösse* (a^r) *wird in eine Potenz (die* nte) *erhoben, wenn man der Basis* (a) *das Produkt der Exponenten als Potenzialexponent gibt.* (Der Exponent der Basis wird mit dem der Potenz multiplicirt).

b) $(a^{-r})^n = \left(\frac{1}{a^r}\right)^n = \frac{1^n}{(a^r)^n} = \frac{1}{a^{nr}} = a^{-nr}$.

c) $(a^r)^{-n} = \frac{1}{(a^r)^n} = \frac{1}{a^{nr}} = a^{-nr}$.

d) $(a^{-r})^{-n} \frac{1}{(a^{-r})^n} = \frac{1}{a^{-nr}} = a^{nr}$. Die obige Regel ist also für alle Fälle giltig.

§. 45. Das *Radiziren.* Da man beim Potenziren mit dem Exponenten der verlangten Potenz musste multipliziren, so wird man beim Radiziren mit dem Exponenten der verlangten Wurzel den Potenzialexponenten des Radikanden wohl dividiren.

a) $\sqrt[n]{(a^r)} = a^{\frac{r}{n}}$, indem $\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^n = a^{n \cdot \frac{r}{n}} = a^r$ wiedergibt.

b) $\sqrt[n]{(a^{-r})} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^r}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^r}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{n}}} = a^{-\frac{r}{n}} = a^{\frac{-r}{n}}$, wie im ersten Falle.

Wenn $\sqrt{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$, so wie $\sqrt{a^{-n}} = a^{\frac{-r}{n}}$ ist, so lässt sich auch rückwärts schliessen, dass eine Potenzialgrösse mit gebrochenem Exponenten (*nicht „Bruchpotenz“*) gleich ist einer Wurzelgrösse, welche den Nenner als Wurzelexponent besitzt und wobei der Zähler als Potenzialexponent bei der Basis verbleibt. Dies ist die Bedeutung des gebrochenen Potenzialexponenten; z. B.: $1000^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1000^2} = \sqrt[3]{1000000} = 100$.

Was man mit Zähler und Nenner eines Bruches vornehmen kann ohne die Grösse und das Beziehungszeichen desselben zu ändern, dasselbe lässt sich auch mit den beiden Exponenten (Wurzel- und Potenzialexponent des Radikanden) einer Wurzelgrösse vornehmen. Daraus folgt, dass

c) $a^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{-r}{-n}} = \sqrt[-n]{a^{-r}}$ und

d) $a^{\frac{-r}{+n}} = a^{\frac{r}{-n}} = \sqrt[-n]{a^r}$ ist. Die allgemeine Regel für das Radiziren aus einer Potenzialgrösse ist also: *man dividirt den Exponenten des Radikanden durch den Wurzelexponenten und gibt diesen Quotienten der Basis als Potenzialexponenten.*

§. 46. Darnach lässt sich auch die Bedeutung des negativen Wurzelexponenten entnehmen. Es ist

$$\sqrt[-n]{c}=c^{\frac{1}{-n}}=c^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{c^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{c}};$$ d. h. man soll den Radikand (c) zwar in so viele gleiche Faktoren auflösen, als es der Wurzelexponent anzeigt, aber einen dieser Faktoren als Nenner setzen, wobei in Ermangelung eines anderen Faktors bei der Wurzelgrösse die 1 als Zähler steht; z. B. $\sqrt[-2]{9}=\frac{1}{3}$.

Jede Exponentialgrösse, sie mag Potenzial- oder Wurzelgrösse sein, lässt sich, wenn sie als Faktor steht, statt dessen als Nenner setzen mit entgegen gesetztem Exponenten und auch umgekehrt.

§. 47. Ferner ergibt sich auch:

$$\sqrt[n]{a^r}=a^{\frac{r}{n}}=\begin{cases} a^{\frac{sr}{sn}}=\sqrt[sn]{a^{sr}}, \\ a^{\frac{\frac{r}{s}}{\frac{n}{s}}}=\sqrt[\frac{n}{s}]{a^{\frac{r}{s}}}, \end{cases}$$ also $\sqrt[n]{a^r}=\sqrt[sn]{a^{sr}}$ oder $=\sqrt[\frac{n}{s}]{a^{\frac{r}{s}}}$, d. h.

beide Exponenten einer Wurzelgrösse lassen sich, ohne dieselbe zu stören, mit derselben Zahl entweder multipliziren oder dividiren.

Dadurch ist man auf gebrochene Wurzelexponenten gekommen. $\sqrt[\frac{n}{s}]{a}=a^{\frac{1}{\frac{n}{s}}}=a^{\frac{s}{n}}=\sqrt[n]{a^s}$; d. h.: ist der Wurzelexponent ein Bruch, so soll man den Radikand in die Potenz des Nenners erheben und daraus die Wurzel des Zählers ziehen; z. B. $\sqrt[\frac{2}{3}]{100}=\sqrt{100^3}=\sqrt{1000000}=1000$. Der Wurzelexponent könnte auch ein negativer Bruch sein; z. B. $\sqrt[-\frac{2}{3}]{100}=\frac{1}{1000}=0{,}001$.

Die Multiplikation beider Exponenten einer Wurzelgrösse enthält das Mittel aus Wurzeln mit verschiedenen Exponenten (ungleichartigen) solche, die gleiche Exponenten besitzen, (gleichartige) zu bilden. Aus

$\sqrt[r]{a^n}$ und $\sqrt[s]{b^x}$ wird $\sqrt[rs]{a^{ns}}$ und $\sqrt[rs]{b^{rx}}$, oder aus
$\sqrt[6]{a^5}$ und $\sqrt[8]{b^3}$ wird $\sqrt[24]{a^{20}}$ und $\sqrt[24]{b^9}$.

Sechster Abschnitt.

Die Wurzelgrössen.

§. 48. Da bei jeder Wurzelgrösse zwei Stücke vorkommen, Radikand und Wurzelexponent, so kommen in den Rechnungen, bei welchen zwei Wurzelgrössen in Verbindung treten, also in den vier ersten, vier Fälle vor: beide Stücke können verschieden sein, eines derselben kann verschieden sein, beide können gleich sein.

1) Addition und 2) Subtraktion.

$$\sqrt[r]{a}\pm\sqrt[n]{c};\ \sqrt[r]{a}\pm\sqrt[n]{a};\ \sqrt[r]{a}\pm\sqrt[r]{c};\ \sqrt[r]{a}+\sqrt[r]{a}=2\sqrt[r]{a},\ \sqrt[r]{a}-\sqrt[r]{a}=0.$$

Die Fälle, in denen Koeffizienten vorkommen, gehören nicht unmittelbar hierher. — Wurzelgrössen mit gleichen Exponenten (gleichartige) lassen sich nicht addiren und subtrahiren, sondern nur solche, die auch gleiche Radikanden haben (gleichnamige): $m\sqrt[r]{a}\pm n\sqrt[r]{a}=(m\pm n)\sqrt[r]{a}$.

3) Multiplikation und 4) Division.

§. 49. Für die zwei Fälle, in denen die Wurzelexponenten verschieden sind, lassen sich diese Rechnungen nicht unmittelbar ausführen, sondern sind nur formell darstellbar:

1) $\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[r]{a}:\sqrt[n]{c}$ und

2) $\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[r]{a}:\sqrt[n]{a}$; aber

3) *a)* $\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[r]{c}=\sqrt[r]{ac}$, weil nach §. 30. $\sqrt[r]{ac}=\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[r]{c}$ war und

b) $\sqrt[r]{a}:\sqrt[r]{c}=\sqrt[r]{\frac{c}{a}}$, weil nach §. 37. $\sqrt[r]{\frac{c}{a}}=\frac{\sqrt[r]{c}}{\sqrt[r]{a}}=\sqrt[r]{a}:\sqrt[r]{c}$ war. Darin ist auch der letzte Fall enthalten, nämlich:

4) *a)* $\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[r]{a}=\sqrt[r]{a^2}$ und

b) $\sqrt[r]{a}:\sqrt[r]{a}=\sqrt[r]{\frac{a}{a}}=\sqrt[r]{1}=1$. Also: Wurzelgrössen mit gleichen Wurzelexponenten werden multiplizirt oder werden dividirt, *wenn man in jenem Falle dem Produkte, in diesem dem Quotienten der Radikanden den gleichen Exponenten als solchen gibt.*

Die Rechnungen für die beiden ersten Fälle lassen sich auch ausführen, wenn die Wurzeln so umgeformt worden, dass ihre Exponenten gleich sind.

5) Potenziren und 6) Radiziren.

§. 50. $$\left(\sqrt[n]{a^r}\right)^s=\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^s=\begin{cases} a^{\frac{sr}{n}}=\sqrt[n]{a^{sr}}, \\ a^{\frac{r}{\frac{n}{s}}}=\sqrt[\frac{n}{s}]{a^r}; \end{cases} \text{ also } \left(\sqrt[n]{a^r}\right)^s=\sqrt[n]{a^{sr}} \text{ oder}=\sqrt[\frac{n}{s}]{a^r};\text{ d. h.}$$

eine Wurzelgrösse ($\sqrt[n]{a^r}$) wird in eine Potenz (die ste) erhoben, *wenn man entweder den Exponenten* (r) *des Radikanden mit dem Exponenten* (s) *der verlangten Potenz multiplizirt, oder den Wurzelexponenten* (n) *mit ihm dividirt, die andern Stücke aber unverändert lässt.*

Die Divisionsmethode ist vorzuziehen, wenn die Division aufgeht.

§. 51. $$\sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^r}\right)}=\sqrt[s]{\left(a^{\frac{r}{n}}\right)}=a^{s:\frac{r}{n}}=\begin{cases} a^{\frac{\frac{r}{s}}{n}}=\sqrt[n]{a^{\frac{r}{s}}}, \\ a^{\frac{r}{sn}}=\sqrt[sn]{a^r}; \end{cases} \text{ also } \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^r}\right)}=\sqrt[n]{a^{\frac{r}{s}}} \text{ oder}=\sqrt[sn]{a^r},\text{ d. h.:}$$

aus einer Wurzelgrösse ($\sqrt[n]{a^r}$) wird eine (die ste) Wurzel gezogen, *wenn man entweder den Exponenten* (r) *des Radikanden mit dem Exponenten* (s) *der verlangten Wurzel dividirt oder den Wurzelexponenten* (n) *mit ihm multiplizirt, die anderen Stücke aber unverändert lässt.*

Da $$\sqrt[n]{a^r}=\sqrt[s]{(\sqrt[n]{a^r})^s}=\begin{cases} \sqrt[s]{(\sqrt{a^{sr}})}=\sqrt[sn]{a^{sr}}, \\ \sqrt[s]{(\sqrt[\frac{n}{s}]{a^r})}=\sqrt[\frac{n}{s}]{a^{\frac{r}{s}}}; \end{cases}$$

so ist hierdurch die Bestätigung einer früheren Behauptung (§. 47.) gefunden.

Was geschieht mit einer Wurzelgrösse, wenn der Exponent ihres Radikand multiplizirt, wenn er dividirt; was, wenn der Wurzelexponent multiplizirt, wenn er dividirt wird?

Einige allgemeine Betrachtungen.

§. 52. Nachdem jede von den sechs Zahlformen in jeder von den sechs Rechnungen besonders ist behandelt worden, lassen sich, ohne dass es neuer Gesetze bedarf, verschiedene Zahlformen in jeder von den Rechnungen auch betrachten. So z. B. können in den Rechnungen mit Polynomen, für deren Behandlung namentlich beim Radiziren oben eine beschränktere Gestalt gewählt werden musste, aber ohne der Allgemeinheit der entwickelten Gesetze Eintrag zu thun, jetzt alle möglichen Formen für die Glieder gewählt werden.

Darnach können jetzt z. B. die Näherungswerthe irrationaler Wurzeln gefunden werden; auch lassen sich, wenn eine Division nicht aufgeht (wenn der letzte Rest des Dividendus weniger Glieder hat, als der Divisor), weitere Theilquotienten durch unveränderte Weiterführung der Regeln für die Auffindung der vorangegangenen Theile berechnen.

§. 53. Keine von den sechs Rechnungen ist unbedingt eine Vergrösserung oder eine Verkleinerung. Bei der Addition und Subtraktion kommt es darauf an, ob der Addend, oder ob der Subtrahend übereinstimmend sind mit der anderen Zahl oder ihr entgegen gesetzt; bei der Multiplikation und Division ob der Multiplikator oder ob der Divisor grösser oder kleiner als 1 sind. Beim Potenziren kommt es darauf an, ob die Basis grösser oder kleiner als 1 ist und ob in jenem oder in diesem Falle der Exponent grösser oder kleiner als 1 und ob er dabei positiv oder negativ ist. Beim Radiziren kann der Radikand grösser oder kleiner als 1 sein und in jedem der beiden Fälle der Exponent auch die angegebene vierfache Beschaffenheit haben, so dass sowohl beim Potenziren, als auch beim Radiziren acht Fälle gedacht werden können; welche?

Ist der Multiplikator oder Divisor 1, so ist das Resultat gleich der anderen Zahl; ist die Basis beim Potenziren und der Radikand beim Radiziren 1, so sind die Resultate auch 1.

Eins kann man als Faktor, Divisor und Exponent ergänzen, ohne dadurch den Werth der betreffenden Grösse zu stören. Wird diese Ergänzung bisweilen nothwendig?

Welche Veränderungen sind in den verschiedenen Rechnungen mit den Koeffizienten, welche mit den Exponenten vorgekommen? Wo mit Einschränkung, wo unbedingt?

§. 54. Bei der Verbindung der Zahlen kommt es auf drei Stücke an: auf die zwei zu verbindenden Zahlen und auf die, welche aus der Verbindung als eine absolute Zahl entsteht; es hat z. B. jeder formelle Quotient einen absoluten Werth. — Es gab im Ganzen drei verschiedenartige Verbindungen unter drei Zahlen:

1. zwei von den drei Zahlen erscheinen als Theile der dritten;

2. eine von den drei Zahlen zeigt an, wie oft eine der andern als Summand (Theil) gesetzt werden muss, um die dritte zu erzeugen;

3. eine von den drei Zahlen zeigt an, wie oft eine der andern als Faktor gesetzt werden muss, um die dritte zu erzeugen.

In jeder von den beiden ersten Verbindungen konnten zwei von den drei Zahlen ihre Bedeutung vertauschen und daher ergaben sich nur je zwei Rechnungen; aber in der dritten war keine Vertauschung möglich, so dass man auf drei ihrer Natur nach ganz verschiedene Rechnungen schliessen möchte. Das Logarithmiren aber tritt aus dem Kreise der übrigen Rechnungen so heraus, dass keine von den andern ihr entgegen gesetzt ist und dasselbe aufheben könnte.

§. 55. Jede Zahl kann in jeder von den vorgekommenen Zahlformen erscheinen. Sollen aber *alle* denkbaren Zahlen als Potenzialgrössen mit *derselben* Basis dargestellt werden, so darf die Basis nicht jede beliebige sein. Ausgeschlossen sind:

1. die *Eins*, weil alle Potenzen von 1 wieder 1 sind (1^{-n}, $1^{\frac{n}{r}}$ u. s. w.;)

2. die *ächten und gemischten Brüche*, weil keine Potenz von ihnen eine ganze Zahl sein kann (haben Zähler und Nenner eines Bruches keinen gemeinschaftlichen Faktor, so ist dies auch mit Zähler und Nenner jeder Potenz und jeder Wurzel von ihnen der Fall);

3. jede *negative Zahl*, weil nur die geraden Potenzen derselben positiv sind.

Die Basis muss für den obigen Zweck eine *ganze positive Zahl grösser als 1 sein.*

Die negativen Zahlen können nicht als Potenzen einer solchen Basis erscheinen.

§. 56. Wenn alle denkbaren Zahlen als Potenzen einer bestimmten Bazis b dargestellt wären, z. B. $a = b^r$, $c = b^n$ und es sollte ermittelt werden, die wievielte Potenz c von a oder die wievielte Wurzel a aus c ist, also aus $a^x = c$ oder $\sqrt[x]{c} = a$ das x angegeben werden; so stände statt $a^x = c$:

$(b^r)^x = b^n$ oder (§. 44, *a.*)

$b^{xr} = b^n$, woraus (§. 9, 5, *e.*) folgt, dass

$xr = n$ und $x = \frac{n}{r}$, d. h.: *der unbekannte Exponent wird gefunden, wenn man den zur Potenz gehörigen Exponenten* (Logarithmus) *durch den zur Basis gehörigen dividirt.*

Z. B. die wievielte Potenz ist eine Million von Tausend?

$1000000 = 1000^x$; $1000000 = 10^6$, $1000 = 10^3$; also $x = \frac{6}{3} = 2$.

Daraus folgt also, *dass das Graduiren oder Logarithmiren keine besondere und selbstständige Rechnung ist*, und es im Ganzen nicht sieben, sondern nur sechs Rechnungen gibt.

Da in dem Obigen alle theoretischen Beziehungen der Zahlen erschöpft sind, so werden die übrigen in der Elementararithmetik noch vorkommenden Betrachtungen entweder darauf gerichtet sein jene Gesetze auf besondere Fälle anzuwenden oder aus mannigfachen Beziehungen bekannter und unbekannter Zahlen die letzteren aus ersteren darzustellen, wobei zu einem einzelnen Zwecke oft verschiedene Operationen angewendet werden müssen.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Anwendung der Theorie auf besondere Zahlen.

§. 57. Benennung und Bezeichnung der besonderen Zahlen; die Ziffern. Entwickelung der Nothwendigkeit der Zahlensysteme. Grundzahlen, Einheiten der verschiedenen Ordnungen. Vortheile und Nachtheile grosser, so wie sehr kleiner Grundzahlen. Angemessenheit des dekadischen oder Dezimalsystems. Ökonomie in der Benennung der verschiedenen Ordnungen. Bildung desselben von den Einern nicht nur zu höheren, sondern auch zu niederen Ordnungen. Die Benennung geschriebener und das Schreiben ausgesprochener Decimalzahlen.

Die ganzen Zahlen werden stets als Einer dargestellt; bei den Dezimalbrüchen ist der Gesammtname von der niedrigsten gerade vorkommenden Ordnung genommen (die Zahlen aller höheren Bruchstellen sind auf die niedrigste Ordnung verwandelt).

So wie den Ganzen links können den Dezimalbrüchen rechts Nullen angehängt werden, ohne die Zahl zu stören, weil der Werth der Ganzen nach der Stellung von den Einern nach links, der Dezimalbrüche nach rechts sich richtet.

Die Dezimalbrüche sind in den verschiedenen Rechnungen durchaus nicht anders zu behandeln, als die ganzen Zahlen, weil sie genau demselben Bildungsgesetze unterworfen sind, wie diese; desshalb können sie auch *regelmässige Brüche* heissen.

Die unregelmässigen Brüche lassen sich dadurch auf regelmässige verwandeln, dass man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, wobei die Reste stets in Einheiten der nächst niederen Ordnung verwandelt werden; z. B.

$\frac{3}{4}=4:3=0{,}75$; $\frac{4}{11}=11:4=0{,}3636\ldots..$; $\frac{71}{495}=495:71=0{,}14343\ldots..$

Man erhält entweder einen genauen oder einen ins Unendliche fortgehenden (reinen, gemischten) Dezimalbruch.

Mittel jeden regelmässigen Bruch in einen unregelmässigen zu verwandeln.

Es ist hier nur Zweck die Hauptsache in allgemeinen Umrissen zu geben.

§. 58. Die durch Ziffern dargestellten Zahlen sind entweder *einziffrige* und dabei einfache Einheiten irgend einer Ordnung oder mehre Einheiten einer Ordnung oder sie sind *mehrziffrige*.

1. Alle Einheiten des dekadischen Zahlensystems sind Potenzen der Grundzahl 10, deren Exponenten so gross sind, dass sie anzeigen, in welcher höheren (nach links) oder niederen (nach rechts) Ordnung die betreffende Einheit steht und sind in jenem Falle positiv, in diesem negativ.

1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001 gibt
10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-1}	10^{-3} u. s. w.

So ist der Exponent zu 1 Million + 6, zu 1 Milliontel — 6.

2. Ist eine einstellige Zahl keine Einheit, so ist sie ein Produkt aus der geltenden Zahl und der zu der betreffenden Einheit gehörigen Potenz von 10; z. B.

$7000=7\,.\,1000=7\,.\,10^3$; $0{,}009=9\,.\,0{,}001=9^{-3}$.

3. Ist eine Zahl mehrstellig, so ist sie als ein Polynom darstellbar, dessen einzelne Glieder Produkte wie in Nr. 2. sind; z. B.

$743{,}28 = 7 . 10^3 + 4 . 10^2 + 3 . 10^0 + 2 . 10^{-1} + 8 . 10^{-2}$.

Darnach ist in den Rechnungen mit besonderen Zahlen vorzüglich anzuwenden die Theorie der Produkte, Potenzialgrössen und Polynome.

§. 59. Die *Addition* einstelliger Zahlen, welche derselben Ordnung angehören, geschieht durch ein doppeltes neben einander laufendes Zählen, indem man von dem einen Addenden (dem grösseren) zu zählen anfängt und eine neue 1 so lange hinzuzählt, bis dadurch der andere Summand erschöpft ist. Das Theoretische ist enthalten in $ab^n + cb^n = (a+c)b^n$.

Für mehre Summanden wird dasselbe Verfahren fortgesetzt. — Das blosse einfache Zählen ist etwas rein Mechanisches.

§. 60. Bei der *Subtraktion* solcher Zahlen fängt man von dem Subtrahend zu zählen an, bis man den Minuend erreicht hat; die Menge der dazu gezählten Einheiten ist die Differenz. $ab^n - cb^n = (a - c)\,b^n$.

Die Addition und Subtraktion mehrziffriger Zahlen gründet sich auf die der Polynome, deren Glieder Produkte sind, von denen der eine Faktor eine Potenzialgrösse ist.

§. 61. Die *Multiplikation* einstelliger Zahlen geschieht eigentlich durch eine wiederholte Addition. Wenn nun hierbei der Multiplikator aus Einern besteht, so hat das Produkt (wegen §. 26, *a.*: $5 . 3a = 15a$; $5 . 3b^n = 15b^n$; $2 . 4c^{-r} = 8c^{-r}$) den Ordnungsnamen des Multiplikandus; aber mit jeder nächst höheren Ordnung, die der Multiplikator einnimt, rückt auch das Produkt um je eine Ordnung aufwärts, so wie mit jeder nächst niederen Ordnung das Produkt um eine Ordnung herabtritt:

$5 . 0{,}003 = 5 . (3 . 10^{-3}) = 15 . (10^{-3})$;

$50 . 0{,}003 = 5 . 10^1 (3 . 10^{-3}) = 15 . (10^{-2})$;

$0{,}5 . 0{,}003 = 5 . 10^{-1} (3 . 10^{-3}) = 15 . (10^{-4})$. Ferner

$500 . 0{,}003 = 1{,}5$ und $0{,}05 . 0{,}003 = 0{,}00015$ u. s. w. (§. 40, C, a).

Daraus ergibt sich, dass, wenn Dezimalbrüche vorkommen, das Produkt um so viele Bruchstellen mehr, als im Multiplikandus vorhanden sind, besitzt, als deren der Multiplikator hat oder kurz: das Produkt hat so viele Bruchstellen, als beide Faktoren zusammen.

Wird bei einer Zahl das Einerkomma nach rechts gesetzt, so wird sie mit einer höheren Einheit multiplizirt. (§. 17. A. *a.*)

§. 62. Besteht bei der *Division* der Divisor nur aus Einern, selbst wenn auch deren Anzahl eine mehrziffrige Zahl gibt; so hat der Quotient den Ordnungsnamen des Dividendus (§. 26. *b.*):

$5 : 15a = 3a$; $5 : 15b^n = 3b^n$; $a . 10^0 : c . 10^n = (a : c)10^n$; $a . 10^0 : c . 10^{-n} = (a : c)10^{-n}$.

$12 : 3600 = 12 : 36 . 10^2 = 3 . 10^2 = 300$.

$12 : 0{,}036 = 12 : 36 . 10^{-3} = 3 . 10^{-3} = 0{,}003$.

Kommen mehrziffrige Zahlen vor, so ist die Theorie der Polynome anzuwenden. Ist die Division bis zur Benutzung der untersten Stelle des Dividendus geführt, so hat der Quotient so viele Bruchstellen, als der Dividendus.

Hat der Divisor auch Bruchstellen, so erhält man dadurch den vorigen Fall, dass man den Divisor und Dividendus mit derjenigen höheren Einheit multiplizirt, welche so viele Nullen hat, als der Divisor Bruchstellen besitzt. (Das Einerkomma wird im Divisor und Dividendus um so viele Stellen nach rechts gesetzt, als der Divisor Bruchstellen hat (§. 17. A. *a.*); hätte der Dividendus wenigere als der Divisor, so müssten ihm die fehlenden ersetzt werden).

Wird bei einer Zahl das Einerkomma nach links gesetzt, so wird sie mit einer höheren Einheit dividirt. (§. 17. A. *b.*)

§. 63. Werden beim *Potenziren* die mehrstelligen Zahlen wie die Polynome behandelt, so hat wegen je einer nächstfolgenden niedrigeren Ordnung in der Basis das Quadrat zwei, der Kubus drei nächst niedere Stellen, welche sich von dem Einerkomma zu beiden Seiten gleichmässig abgränzen.

1. $(a.b^2 + c.b^1 + db^0 + eb^{-1})^2 = a^2b^4 + 2acb^3 + c^2b^2 + 2(ab + c)db^1 + d^2b^0 +$
$2(ab^2 + cb^1 + db^0)eb^{-n} + e^2b^{-2}$

z. B. $347{,}6^2 = 9.10^4 + 24.10^3 + 16.10^2 + 476.10^1 + 49.10^0 + 4164.10^{-1} + 36.10^{-2}$.

2. $ab^1 + cb^0 + db^{-1})^3 = a^3.b^3 + 3a^2c.b^2 + 3ac^2.b^1 + c^3.b^0 +$
$3(ab^1 + cb^0)^2d.b^{-1} + 3(ab^1 + cb^0)d^2.b^{-2} + d^3.b^{-3}$

z. B. $46{,}2^3 = 64.10^3 + 288.10^2 + 432.10^1 + 216.10^0 + 12696.10^{-1} + 552.10^{-2} + 8.10^{-3}$.

Jede Quadratzahl besteht also aus Klassen zu je zwei, jede Kubikzahl aus Klassen zu je drei Stellen vom Einerkomma an. Die höchste Klasse braucht nich vollständig zu sein. Warum?

§. 64. Beim *Radiziren* wird der gegebene Radikand für das Quadratwurzelausziehen in Klassen zu je zwei, für das Kubikwurzelausziehen in Klassen zu je drei Stellen vom Einerkomma nach links und rechts getheilt. Die Anzahl der Klassen gibt die Menge der Stellen in der Wurzel und auch ihre Rangordnung an.

Ist die unterste Klasse bei vorkommenden Dezimalbrüchen nicht vollzählig, so kann sie zwar durch Nullen vollständig gemacht werden (§. 57.), die Wurzel ist aber irrational. Eben so bei ganzen Zahlen, wenn die unterste Klasse nicht etwa ganz, sondern nur in den unteren Stellen mit Nullen oder solchen Zahlen besetzt ist, wie sie daselbst nicht vorkommen unter den Quadrat- und Kubikzahlen der Zahlen von 1 bis 9.

Das Aufsuchen der einzelnen Wurzeltheile selbst geschieht nach den allgemeinen Gesetzen des Radizirens aus Polynomen. Nachdem man aus der in der höchsten Klasse stehenden Zahl die betreffende Wurzel genommen und von dieser Klasse deren Quadrat oder Kubus abgezogen hat, benutzt man für die Aufsuchung des zweiten Wurzeltheiles von der nächsten Klasse nur die höchste Stelle, weil nur von da an beim Quadrate das doppelte Produkt der beiden ersten Wurzeltheile, beim Kubus das dreifache Quadrat des ersten mal dem zweiten enthalten ist und dividirt in die so erhaltene Zahl bei der Quadratwurzel mit dem doppelten ersten Wurzeltheile, bei der Kubikwurzel mit dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles. Wegen des zweiten Wurzeltheiles sind von dem Radikanden im ersten Falle zwei, im zweiten drei Theile abzuziehen, entweder einzeln oder ihre Summe.

Für die Auffindung folgender Wurzeltheile sind keine neuen Regeln anzuwenden.

Höhere Wurzeln lassen sich durch das Quadrat- und Kubikwurzelausziehen finden, wenn die Wurzelexponenten in die Faktoren 2 und 3 auflösbar sind. (§. 51.)

§. 65. Sind alle Zahlen als Potenzen derselben Basis b dargestellt (§. 55.), so heissen solche Potenzialexponenten die *Logarithmen* dieser Zahlen. Ist $c=b^n$, so ist n der Logarithmus von $c.(n=\log c)$.

Da zu einer bestimmten Zahl ein bestimmter Logarithmus gehört und umgekehrt, so lassen sich in den Rechnungen statt der Zahlen ihre Logarithmen einführen, was in den vier letzten Operationen, in denen Veränderungen mit den Exponenten vorkamen, namhafte Vortheile gewähren wird.

Die Logarithmen sind Potenzialexponenten, aber nicht jeder Potenzialexponent ist Logarithmus.

§. 66. Ist $c=b^n$, also $\log c=n$ und

$a=b^r$, also $\log a=r$; so ist

1. $ac=b^{r+n}$, mithin $\log ac=r+n=\log a+\log c$;

2. $\frac{a}{c}=b^{r-n}$, mithin $\log\frac{a}{c}=r-n=\log a-\log c$; d. h.:

1. *der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Faktoren* und

2. *der Log. eines Bruches (Quotienten) ist gleich dem Log. des Zählers weniger dem Log. des Nenners.*

Der Log. von 1 oder $\frac{c}{c}$ ist Null. — Der Log. eines ächten Bruches ist negativ und um so grösser, je kleiner der Bruch ist; der Log. von Null ist unendlich negativ. — Der Log. einer gemischten Zahl wird angegeben, indem man dieselbe in einen gemischten Bruch verwandelt.

3. Ist wieder $a=b^r$, also $\log a=r$; so ist

$a^s=b^{sr}$, also $\log a^s=sr=s\log a$ und somit

$\log a^s=s.\log a$; d. h., *der Logarithmus einer Potenz* (a^s) *ist gleich dem Produkte aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis.*

$\log a^{-s}=-s\log a$ ist mit Benutzung des zweiten Falles leicht nachzuweisen.

4. Wenn $a^s=c$, also auch $\sqrt[s]{c}=a$ ist; so ist

$s.\log a=\log c$ und

$\log a=\frac{\log c}{s}$ oder

$\log\sqrt[s]{c}=\frac{\log c}{s}$; d. h.: *der Logarithmus einer Wurzel* ($\sqrt[s]{c}$) *ist gleich dem Log. des Radikanden, dividirt durch den Wurzelexponenten* (welcher auch negativ oder ein Bruch sein könnte).

Dadurch ist das Radiziren auch für grössere Exponenten als 2 und 3 oder andere als solche, die sich in die Faktoren 2 und 3 auflösen lassen, ausführbar gemacht. (§. 64. Anm.)

§. 67. Wenn man nun die sämmtlichen Zahlen, mit denen man die Aussicht hat zu rechnen, als Potenzen der Grundzahl 10 des dekadischen Zahlensystems ansieht (briggische Logarithmen, Logarithmentafeln); so sind schon nach dem Obigen (§. 58., 1.) die Logarithmen der verschiedenen Ordnungseinheiten ganze theils positive, theils negative Zahlen, welche anzeigen in der wievielten höheren oder niederen Ordnung die betreffende Einheit steht.

Für alle übrigen Zahlen sind dadurch die Gränzwerthe ihrer Logarithmen bestimmt. Jede Zahl nämlich liegt ihrem Werthe nach zwischen zwei Einheiten; also muss ihr Logarithmus auch zwischen den Logarithmen dieser Einheiten liegen; z. B.

1. $346{,}5 \begin{cases} > 100 \\ < 1000 \end{cases}$; $\log 346{,}5 \begin{cases} > 2 \\ < 3 \end{cases}$; $\log 346{,}5 = 2 + m$, wobei m der angemessene ächte Bruch (Dezimalbruch) sein soll (auch für die folgenden Fälle).
2. $84{,}29 \begin{cases} > 10 \\ < 100 \end{cases}$; $\log 84{,}29 \begin{cases} > 1 \\ < 2 \end{cases}$; $\log 84{,}29 = 1 + m$.
3. $7{,}513 \begin{cases} > 1 \\ < 10 \end{cases}$; $\log 7{,}513 \begin{cases} > 0 \\ < 1 \end{cases}$; $\log 7{,}513 = 0 + m$.
4. $0{,}38 \begin{cases} > 0{,}1 \\ < 1 \end{cases}$; $\log 0{,}38 \begin{cases} > -1 \\ < 0 \end{cases}$; $\log 0{,}38 = -n = 1 - n - 1 = m - 1$, wobei n ein ächter Dezimalbruch ist, so dass $1 - n = m$ einen positiven ächten Dezimalbruch gibt.
5. $0{,}047 \begin{cases} > 0{,}01 \\ < 0{,}1 \end{cases}$; $\log 0{,}047 \begin{cases} > -2 \\ < -1 \end{cases}$; $\log 0{,}047 = -(1+n) = 2 - (1+n) - 2 = m - 2$.
6. $0{,}0058 \begin{cases} > 0{,}001 \\ < 0{,}01 \end{cases}$; $\log 0{,}0058 \begin{cases} > -3 \\ < -2 \end{cases}$; $\log 0{,}0058 = -(2+m) = 3 - (2+m) - 3 = m - 3$.

Ist ein Logarithmus *ganz negativ*, so wird er dadurch *partiell negativ* mit positivem Dezimalbruche und negativer ganzer Zahl hergestellt, dass man zu ihm eine um 1 grössere Zahl, als die Ganzen des negativen Logarithmus anzeigen, positiv und negativ addirt und dann den negativen Logarithmus mit der positiven Zahl zusammenzieht.

Für alle Zahlen also, welche nicht Einheiten des dekadischen Zahlensystems sind, haben die Logarithmen zwei Bestandtheile: einen positiven Dezimalbruch (die *Mantisse*) und eine ganze Zahl, welche angibt, in der wievielten höheren oder niederen Ordnung, von den Einern an (diese nicht mitgezählt) gerechnet, die höchste Ziffer der Zahl steht (*Charakteristik*, sie charakterisirt die höchste Stelle der Zahl) und in jenem Falle positiv, in diesem negativ ist.

Es ist also nicht nothwendig in den Logarithmentabellen, welche übersichtlich die Zahlen mit ihren Logarithmen enthalten, die Ganzen der Logarithmen mit anzuführen.

Sowie aus der höchsten Stelle der Zahl die Charakteristik ihres Logarithmus, so wird auch aus der Charakteristik eines Logarithmus die Stelle der höchsten Ziffer der zugehörigen Zahl ganz wie oben für die Ordnungseinheiten erkannt, wenn nur die Mantisse immer positiv ist.

DRITTE ABTHEILUNG.

Einiges über Gleichungen.

§. 68. Eine gewisse Zahl kann durch zwei oder mehre andere auf verschiedene Weise dargestellt werden. Da nun jede Grösse sich selbst gleich ist, so können zwei solche Darstellungen durch = verbunden werden und geben dann eine *Gleichung*. Lässt sich die eine Seite durch Auflösung oder Zusammenziehung nicht auf die andere zurückführen, so heisst eine solche Gleichung eine *algebraische* (analytische, identische Gl.). Unter den vorkommenden Zahlen können auch eine oder mehre unbekannte sein: *bestimmte*, *unbestimmte* Gl. Es liegt nun der Zweck vor diese unbekannten Zahlen aus den bekannten zu finden (die Gl. *aufzulösen*) oder zu zeigen, wie die unbekannte Zahl aus den bekannten unmittelbar zusammengesetzt ist, was dann erreicht sein wird, wenn die unbekannte auf der einen Seite allein steht, während auf der anderen nur bekannte in verschiedenen Verbindungen vorkommen: *Endgleichung*.

§. 69. Um die in einer Gleichung stehende *eine* unbekannte Zahl in möglichst einfacher Weise aufzufinden und darzustellen, werden

1. die Nenner weggeschafft, (namentlich die, in welchen die Unbekannte vorkommt,) indem man die ganze Gleichung mit diesen Nennern multiplizirt, wenn sie relative Primzahlen sind, oder, wenn nicht, mit der Zahl, worin als der kleinsten alle Nenner ohne Rest enthalten sind.

Dabei kommen die Gesetze von der Multiplikation der verschiedenen Zahlformen zur Anwendung.

Aus $\frac{a}{x} - b = cx + \frac{a}{c}$ wird $ac - bcx = c^2x^2 + ax$.

2. Löset man diejenigen Parenthesen auf, worin die Unbekannte steht.

Kommt sie als Theil eines Faktors vor, so wird die ungedeutete Multiplikation des Polynoms vollzogen; steht sie in einem Radikand, so bringt man die Wurzelgrösse auf die eine Seite allein, und erhebt dann die Gleichung in die Potenz des Wurzelexponenten (wiederholtes Potenziren bei mehren Wurzelgrössen).

Aus $(x-a)b = c$ wird $bx - ab = c$;
aus $\sqrt{(a-x)} = c - \frac{r}{n}$ wird $a - x = c^2 - \frac{2cr}{n} + \frac{r^2}{n^2}$.

Nach diesen Verwandlungen zeigt sich, ob die unbekannte Zahl nur mit dem Exponenten 1 vorkommt (*einfache* Gl.) oder mit 2 als höchstem Exponenten (*quadratische* Gl.) oder mit einem noch höheren (*höhere* Gl.).

A. Ist die Gleichung eine *einfache*, so werden

3. alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf die eine Seite der Gleichung; alle übrigen auf die andere gebracht, wodurch sich ihr Vorzeichen ändert.

Additionen oder Subtraktionen; Rücksicht darauf dass x positiv werde.

Aus $-b + ax = -bx + c$ wird $ax + bx = c + b$.

4. Nun werden alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, addirt.

Produkte mit einem gleichen Faktor; §. 25.

Aus $ax + bx = c + b$ wird $(a+b)x = c + b$.

5. Endlich wird x von seinem Faktor (mit welchem man die ganze Gleichung dividirt) befreit.

Aus $(a+b)x = c + b$ wird $x = \frac{c+b}{a+b}$.

Dadurch ist nun die Gleichung, wenn sie eine einfache war, aufgelöst; war sie aber eine quadratische, so sind zwei Fälle denkbar, nämlich: es kommt entweder nur x^2 ein- oder mehrmal vor (*reine quadratische* Gl.) oder es kommt ausser x^2 noch x ein- oder mehrmal vor (*gemischte quadratische* Gl.).

B. Bei reinen quadratischen Gleichungen muss noch, nachdem die Glieder mit x^2 zusammen gezogen (Nr. 4.), x^2 von seinem Faktor befreit (Nr. 5.) und dadurch die Gleichung auf die Form $x^2 = \pm a$ gebracht worden,

6. aus beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel gezogen werden, wodurch man aus $x^2 = +a$ zwei gleiche entgegengesetzte Werthe: $x = \pm\sqrt{a}$ und aus $x^2 = -a$ etwas Unmögliches für x erhält. (§. 15., B.)

C. Ist nach Anwendung der beiden ersten obigen Regeln die Gleichung eine gemischte quadratische, so werden bei Nr. 4. zwei Zusammenziehungen vorgenommen: die Glieder mit

x^2 werden addirt und die mit x für sich auch; bei Nr. 5. befreit man nur x^2 von seinem Faktor und stellt es positiv dar. Dadurch hat man nun eine Gleichung von der Form

$x^2 \pm ax = \pm b$ erhalten.

Durch Ausziehung der Quadratwurzel aus dieser Gleichung würde man nicht zum Ziele kommen, weil die Wurzel aus einem Binome $(x^2 \pm ax)$ irrational ist. (Sie kann nicht ein Monom sein, weil jede Potenz eines Monoms wieder ein Monom ist; auch nicht ein Binom, weil das Quadrat eines Binoms drei Glieder enthält; eben so wenig ein Polynom.)

7. Das Binom $x^2 \pm ax$ ist aber der Art, dass es durch Ergänzung eines dritten Gliedes zu einem Quadrate vervollständigt werden kann. Nämlich x^2 ist das Quadrat von x und da $\pm ax$ den ersten Basistheil x als Faktor enthält, so kann es als doppeltes Produkt des ersten (x) und des noch unbekannten zweiten Wurzeltheiles (y), also $\pm ax = 2xy$ angesehen werden, so dass $y = \pm \frac{a}{2}$ sich als zweiten Wurzeltheil ergeben würde und sein Quadrat $(\pm \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ (d. i. das Quadrat des halben Koeffizienten von x) auf beiden Seiten der Gleichung nur addirt zu werden braucht, um auf der linken Seite das vollständige Quadrat eines Binoms

$\{x^2 \pm ax + \frac{a^2}{4} = (x \pm \frac{a}{2})^2\}$ zu erhalten.

Die neue Gleichung ist also

$x^2 \pm ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \pm b.$

8. Aus beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen, ergibt

$x \pm \frac{a}{2} = \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} \pm b)}$ und bei x

9. das $\pm \frac{a}{2}$ auf die andere Seite gebracht, führt auf

$x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} \pm b)}$ als Endgleichung.

Die allgemeine Grundgleichung sowie die Endgleichung enthält vier einzelne Fälle, nämlich:

1. $x^2 + ax = +b$, $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} + b)}$; 2. $x^2 - ax = +b$, $x = +\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} + b)}$;
3. $x^2 + ax = -b$, $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} - b)}$; 4. $x^2 - ax = -b$, $x = +\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} - b)}$.

Die unbekannte Zahl hat hier stets zwei verschiedene Werthe, die beide positiv (2, 4), beide negativ (1, 3) oder einander entgegengesetzt (1, 2, 3, 4) oder auch unmöglich sein können (3, 4). Welches sind die Bedingungen dafür?

10. D. Hat sich durch Anwendung der obigen fünf ersten Regeln eine Gleichung von der Form $x^n = \pm a$, d. i. eine *reine höhere* Gl. ergeben, so geschieht ihre weitere Auflösung im Allgemeinen durch Logarithmen, nämlich:

$x = \sqrt[n]{\pm a}$ und $\log x = \frac{\log \pm a}{n}$.

11. E. Endlich kann die unbekannte Zahl in einem Exponenten (Potenzial- oder Wurzelexponenten) vorkommen und dann kann die Gleichung nur durch Logarithmen aufgelöst werden: *logarithmische Gleichung.*

$a^x = c$ oder $\sqrt[x]{c} = a$ gibt $x = \frac{\log c}{\log a}$.

$a^{nx} = c$ oder $\sqrt[nx]{c} = a$ gibt $nx = \frac{\log c}{\log a}$ und $x = \frac{\log c}{n \log a}$.

$a^{\frac{x}{n}} = c$ oder $\sqrt[\frac{x}{n}]{c} = a$ gibt $\frac{x}{n} = \frac{\log c}{\log a}$ und $x = \frac{n \log c}{\log a}$ u. a.

§. 70. Bei Gleichungen mit *zwei* oder *mehren* unbekannten Zahlen lassen sich für diese nur dann absolut bestimmte Werthe finden, wenn so viele selbstständige (von einander unabhängige) Gleichungen vorkommen, als unbekannte Zahlen.

Sind zwei unbestimmte Gleichungen, mit denselben zwei unbekannten Zahlen in jeder gegeben, so schafft man eine der unbekannten Zahlen aus ihnen fort (eliminirt sie), um eine bestimmte Gleichung zu erhalten, aus welcher sich die darin vorkommende unbekannte Zahl nach dem Obigen finden lässt. Ist dieses geschehen, so setzt man ihren Werth in eine der gegebenen Gleichungen und findet dann daraus die andere Unbekannte.

Bei drei Gleichungen mit drei Unbekannten eliminirt man zweimal dieselbe Unbekannte, indem man von den drei Gleichungen zweimal zwei derselben verbindet (von den drei möglichen Kombinationen zwei wählt) und hat somit den vorigen Fall, nämlich 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

Ebenso bildet man aus 4 Gl. mit 4 Unbek. durch dreimaliges Eliminiren derselben unbekannten Zahl 3 Gl. mit 3 Unbek., wodurch der vorige zweite Fall erhalten worden. — Auf diese Weise ist das Verfahren ganz allgemein für n Gl. mit n Unbek.

Die Methode aus 2 Gleichungen eine unbekannte Zahl zu eliminiren kann darin bestehen

1. dass man für die wegzuschaffende Zahl aus der einen Gleichung den Werth sucht und denselben in die andere Gleichung allenthalben dahin setzt, wo jene Zahl steht (§. 5., 2. die *Substitution*);

2. dass man für die wegzuschaffende Zahl aus beiden Gleichungen den Werth sucht und diese beiden Werthe zu einer neuer Gleichung verbindet (§. 5., 3. die *Komparation*, *nicht Kombination*);

3. dass man die beiden Gleichungen addirt oder subtrahirt, wenn die wegzuschaffende Zahl in beiden Gleichungen auf derselben Seite mit denselben Faktoren, Nennern, Exponenten und beziehungsweise mit verschiedenen oder denselben Vorzeichen vorkommt *(Additions- und Subtraktionsmethode)*.

Die letzte Methode wird auch dann gewählt, wenn die Bedingungen für sie mit Leichtigkeit sich herstellen lassen.
Welche von den Eliminationsmethoden überhaupt zu wählen ist, ergeben die Umstände.

Wenn nicht alle unbekannte Zahlen in jeder von den in einer Aufgabe verbundenen Gleichungen vorkommen, so erreicht man das Ziel durch eine geringere Anzahl von Eliminationen.

Eliminationen führen bisweilen von niederen Gleichungen auf höhere und umgekehrt.

Algebraische Aufgaben.

§. 71. Wenn praktische Aufgaben Bedingungen zu algebraischen Gleichungen enthalten, so heissen sie *algebraische*. Sind so viele selbsständige Gleichungen in der Aufgabe enthalten, als unbekannte Zahlen, dann lassen sich für letztere absolut bestimmte Werthe durch Auflösung der Gleichungen finden und deshalb heissen solche Aufgaben *bestimmte;* sind aber weniger Gleichungen als unbekannte Zahlen in der Aufgabe, so ist diese (wie die Gleichungen) *unbestimmt.*

Um die in einer algebr. Aufgabe vorkommenden unbekannten Zahlen aufzufinden hat man nur nothwendig

a) alle in der Aufgabe vorkommenden Zahlen (auch die unbekannten) der Kürze und Allgemeinheit wegen mit einfachen allgemeinen Zahlzeichen zu bezeichnen,

b) den Zusammenhang der in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen so zu durchdenken, dass man in bündiger Weise den Inhalt der darin steckenden Gleichung (oder Gleichungen) und daraus die Gleichung selbst darstellen kann. Das weitere Verfahren ist in §. 69. und 70. enthalten.

Kommen zwei oder mehre unbekannte Zahlen vor, so lassen sich häufig aus einer derselben und ihrer Beziehung zu den Bekannten, die anderen unbekannten Zahlen darstellen. Man muss es vermeiden, mehr unbekannte Zahlen als unbedingt nothwendig ist, mit selbstständigen Zeichen zu bezeichnen.

Die Prüfung des Zusammenhanges der Aufgabe behufs Aufstellung der Grundgleichung kann nicht gelehrt werden, da es wegen der ausserordentlichen Mannigfaltigkeit der Aufgaben keine allgemeine Regel geben kann.

Einige Beispiele.

§. 72. I. Von dem Orte M gehe ein Körper A mit der Geschwindigkeit a, von dem um c Wegeinheiten (Meilen u. s. w.) vorwärts gelegenen Orte N gehe der Körper B mit der kleineren Geschwindigkeit b früher aus um d Zeiteinheiten (Tage, Stunden u. s. w.); wenn nun A den B. auf seiner Bahn in n Zeiteinheiten im Punkte O eingeholt hat, welches ist dann die Gleichung für das Zusammentreffen?

a) Der Weg des A ist na
der Weg des B ist (n+d)b } ein Produkt aus Zeit und Geschwindigkeit.

b) der Unterschied der Wege des A und des B ist gleich der Entfernung der Ausgangspunkte (MO—NO=MN), daher die Gleichung:

1. $na-(n+d).b=c.$

Aus dieser Gleichung lassen sich durch Veränderung einzelner Bedingungen andere bilden. Geht B nicht früher, sondern um d Zeiteinheiten später aus (freilich nicht so spät, dass A in der Zwischenzeit über N hinaus gekommen wäre); so ist statt +d zu setzen —d und die Gleichung ist:

2. $na-(n-d).b=c.$

Wenn beide zugleich ausgehen oder d=o ist:

3. $na-nb=c.$

Wenn B zwar früher ausgeht, aber A ihm von demselben Orte N aus nachfolgt oder c=o ist; so steht:

4. $na=(n+d)b.$

Wenn B. dem A entgegen geht, also seine Geschwindigkeit der des A entgegen gesetzt ist (+a, —b) und übrigens die Bedingungen des ersten Falles festzuhalten werden; so steht:

5. $na+(n+d).b=c$, indem hier die Summe der Wege Beider gleich der Entfernung der Ausgangspunkte ist.

Wenn für diesen Fall B später ausgeht:

6. $na+(n-d).b=c.$

Wenn sie zugleich ausgehen:

7. $na+nb=c.$

Jede von diesen sieben Gleichungen enthält so viele selbsständige Aufgaben, als verschiedene Zahlen in ihr vorkommen (im Ganzen 32).

II. Zwei Stoffe, von denen die Werthe der Masseinheiten a und b sind, werden zu einer Mischung (oder einem Gemenge) verbunden, deren Masseinheit den Werth c hat; wenn nun der zu einer Masseinheit der Mischung genommene Antheil von der ersten Sorte n, also der Antheil von der zweiten Sorte (1—n) ist; welches ist die Bedingungsgleichung? — Alligationsrechnung.

a) Der Werth des von der ersten Sorte genommenen Antheiles ist na,
. . . . . zweiten . . . . $(1+n)b$.

b) Die Summe der Werthe der Mischungsantheile ist gleich dem Werthe der Mischung, also:
$na+(1-n)b=c.$

Die Gleichung enthält vier Aufgaben. — Wie, wenn ein Mischungsantheil werthlos wäre (z. B. Wasser)? Sollen m Masseinheiten (nicht blos eine) gemischt werden, so ist die Gleichung $na+(m-n)b=mc$.

III. Welches ist die Gleichung für den künftigen Werth eines Kapitals, welches zu einfachen Zinsen angelegt ist?

a) Wenn C das Kapital, p die Prozente, n die in Jahren ausgedrückte Zeit ist; so sind die njährigen Zinsen $\frac{Cnp}{100}$.

b. Der künftige Werth K ist die Summe aus dem angelegten Kapitale (baaren Werthe) und seinen Zinsen, also die Gleichung:
$K=C+\frac{Cnp}{100}.$

Diese Gleichung lässt vier Aufgaben auflösen. — Die Diskontorechnung.

IV. Wenn man, statt a Rthl. nach m Jahren, b Rthl. nach n Jahren, c Rthl. nach o Jahren zu zahlen, $(a+b+c)$ Rthl. nach r Jahren (der *mittlere Zahlungstermin*) zahlte; welches wäre die Bedingungsgleichung?

a) Die Zinsen von a Rthl. zu p Prozent nach m Jahren sind $\frac{amp}{100}$,
. . . b . . . n . . $\frac{bnp}{100}$,
. . . c . . . o . . $\frac{cop}{100}$,
. . $(a+b+c)$ . . . r . . $\frac{(a+b+c)rp}{100}$.

b) Die Zinsen des Gesammtkapitales $(a+b+c)$ Rthl. nach r Jahren müssen, wenn weder Gläubiger noch Schuldner einen Verlust haben sollen, gleich sein der Summe der Zinsen von den einzelnen Raten; also
$$\frac{(a+b+c)rp}{100}=\frac{amp}{100}+\frac{bnp}{100}+\frac{cop}{100} \text{ oder } (a+b+c)r=am+bn+co.$$

V. Von zwei oder mehren Kräften bringt die erste allein einen gewissen Erfolg hervor in a Zeiteinheiten, die zweite allein denselben Erfolg in b Zeittheilen, die dritte allein in c u. s. w., alle Kräfte zugleich in Thätigkeit versetzt in n Zeiteinheiten; welches ist die Bedingungsgleichung?

a) Die erste Kraft bringt allein von dem Erfolge in 1 Zeittheile $\frac{1}{a}$, in n Zeit $\frac{n}{a}$,
. zweite . . . . $\frac{1}{b}$, . . . $\frac{n}{b}$,
. dritte . . . . $\frac{1}{c}$, . . . $\frac{n}{c}$ hervor.

b) Die Summe der Wirkungen der einzelnen Kräfte in n Zeit ist gleich der ganzen Wirkung, also die Gleichung:

$$\frac{n}{a}+\frac{n}{b}+\frac{n}{c}=1.$$

VI. Von zwei Kräften sei das eine Mal die eine durch a, die andere durch b Zeiteinheiten wirksam, um die Wirkung c hervorzubringen; ein anderes Mal wirke die erste durch m, die andere durch n Zeittheile und der Erfolg beider zusammen sei o; wenn nun in einer Zeiteinheit der Erfolg der ersten Kraft r, der zweiten Kraft s ist; welches sind dann die Bedingungsgleichungen?

a) Die Wirkung der ersten Kraft im ersten Falle ist ar,

. . . zweiten . . . . bs,

. . . ersten . zweiten . . mr,

. . . zweiten . . . . . ns.

b) Die Summe der Wirkungen beider Kräfte ist im ersten c, im zweiten o; also die Bedingungsgleichungen:

1. $ar+bs=c$,
2. $mr+ns=o$.

VII. Jemand diskontirt zwei Wechsel, den einen über a Rthl. zahlbar nach m Jahren (Monaten), den andern über b Rthl., zahlbar nach n Jahren und gibt für den ersten d Rthl. mehr als für den zweiten; welches ist die Bedingungsgleichung?

Aus der Formel für den künftigen Werth (Nr. III.) $K=C+\frac{Cnp}{100}$ ergibt sich $C=\frac{100\,K}{100+np}$; also für die obigen Fälle: $\frac{100\,a}{100+mp}-\frac{100\,b}{100+np}=d$.

VIERTE ABTHEILUNG.

Von den Verhältnissen, Proportionen, Progressionen und summirenden arithm. Reihen.

A. Von den Verhältnissen.

§. 73. Wird bei der Vergleichung zweier gleichartigen Zahlen a und b gefragt, um wieviel b grösser als a ist, so nennt man diese Vergleichung auch ein *arithmetisches Verhältniss*, wobei die Differenz $b-a$ die Frage beantwortet; wird aber gefragt, wieviel mal b grösser, als a ist, so heisst die Vergleichung ein *geometrisches Verh.* und die Frage wird durch den Quotienten $a:b$ beantwortet. Die absoluten Werthe c für jene Differenz und diesen Quotienten heissen *Verhältnisswerthe*, die verglichenen Zahlen *Glieder des Verhältnisses.*

Der Substrahend und Divisor werden zu Vordergliedern (in die erste Stelle), der Minuend und Dividendus zu Hintergliedern (in die zweite Stelle) gemacht. — Die Zeichen für die Differenz und den Quotienten werden als Verhältnisszeichen beibehalten und durch das Wörtchen *zu* gelesen; also $a-b=c$ und $a:b=c$. — Nicht jeder Quotient aus zwei Zahlen (3 : 15 Sth) kann als geometrisches Verhältniss angesehen werden, wohl aber umgekehrt. — Jenachdem das Hinterglied grösser oder kleiner als das Vorderglied ist, heisst ein Verhältniss steigend oder fallend.

§. 74. Die beiden Glieder eines Verhältnisses und sein Werth sind stets von einander so abhängig, dass aus zwei Stücken das dritte bestimmt werden kann: das Hinterglied des arithmetischen ist eine Summe, das des geometrischen ein Produckt aus Vorderglied und Verhältnisswerth. Daher kann

1. für $a-b=c$ gesetzt werden $a-(a\pm c)=\pm c$ und
2. für $a:b=c$ gesetzt werden $a:ac=c$.

Dieses sind solche allgemeine Formen der Verhältnisse, dass an ihnen das Wesen derselben erkannt wird, so dass sie zur Entwickelung allgemeiner Gesetze dienen.

Der Verhältnisswerth des steigenden arithmetischen Verh. ist positiv, des fallenden negativ; der des steigenden geometrischen grösser, des fallenden kleiner als 1. — Es ist falsch den Verhältnisswerth des geometr. Verhältnisses *Exponent* zu nennen.

§. 75. Was den Verhältnisswerth nicht ändert, stört auch das Verhältniss als solches nicht; daher:

1. $a-(a\pm c)=(a\pm n)-(a\pm c\pm n)=\pm c$ und
2. $a:ac=an:acn=\frac{a}{n}:\frac{ac}{n}=c$, d. h.:

man kann, ohne ein Verhältniss zu stören, sein Vorder- und Hinterglied, wenn es arithmetisch ist, um dieselbe Zahl vermehren oder vermindern und, wenn es geometrisch ist, mit derselben Zahl multipliziren oder dividiren.

1. $\frac{a}{r}:\frac{b}{r}=a:b$, d. h.: das geometrische Verhältniss gleichnamiger Brüche ist gleich dem Verhältnisse der Zähler.
2. $\frac{a}{r}:\frac{a}{n}=\frac{an}{rn}:\frac{ar}{rn}=an:ar=n:r$ und daher $\frac{a}{r}:\frac{a}{n}=n:r$, d. h.: Brüche mit einerlei Zähler verhalten sich wie umgekehrt ihre Nenner.

B. Von den Proportionen.

§. 76. Sind die Werthe gleichartiger Verhältnisse gleich, so sind es auch die Verhältnisse

1. für $a-(a\pm c)=\pm c$ und $e-(e\pm c)=\pm c$ ist $a-(a\pm c)=e-(e\pm c)$,
2. für $a:ac=c$ und $e:ec=c$ ist $a:ac=e:ec$.

Eine solche Verhältnissgleichung wird *Proportion* genannt; = wird durch *wie* gelesen.
Das Vorderglied des zweiten Verhältnisses kann gleich sein dem Hintergliede des ersten, also

1. $a-(a\pm c)=(a\pm c)-(a\pm 2c)$ und 2. $a:ac=ac:ac^2$.

Diese Proportionen heissen *stetige*, jene *getrennte*.

In jeder Proportion sind zwei Vorderglieder und zwei Hinterglieder, also zwei Paare homologer Glieder; dann zwei äussere und zwei innere, welche bei der getrennten ungleich, bei der stetigen gleich sind (das arithmetische, das geometrische Mittel).

Die an diesen allgemeinen Ausdrücken, welche zugleich das Wesen der verschiedenen Proportionen charakterisiren, sich ergebenden Wahrheiten sind allgemeine.

§. 77. Aus den allgemeinen Formen der Proportionen
$a-(a\pm c)=e-(e\pm c)$ und
$a:ac=e:ec$ ergibt sich, dass

1. *in jeder arithmetischen die Summe der äusseren Glieder* $a+(e\pm c)$ *gleich ist der Summe der inneren* $(a\pm c)+e$ und
2. *in jeder geometrischen das Produkt der äusseren Glieder* $a.ec$ *gleich ist dem Produkte*

der inneren Glieder $ac.c$, weil dort die Summen aus denselben Summanden, hier die Produkte aus denselben Faktoren bestehen.

In den stetigen Proportionen ist für die arithmetische die Summe der äusseren Glieder gleich dem doppelten Mittel, für die geometrische das Produkt der äusseren Glieder gleich dem Quadrate des Mittels.

§. 78. Ist in einer Proportion ein Glied unbekannt, so lässt es sich aus den anderen finden.

1. *a*) in $x-a=b-c$ ist $x+c=a+b$, also $x=a+b-c$,
   b) in $a-b=x-c$ ist $b+x=a+c$, also $x=a+c-b$,
   c) in $a-b=b-x$ ist $a+x=2b$, also $x=\frac{2b}{a}$,
   d) in $a-x=x-b$ ist $2x=a+b$, also $x=\frac{a+b}{2}$;

2. *a*) in $x:a=b:c$ ist $cx=ab$, also $x=\frac{ab}{c}$,
   b) in $a:b=x:c$ ist $bx=ac$, also $x=\frac{ac}{b}$,
   c) in $a:b=b:x$ ist $ax=b^2$, also $x=\frac{b^2}{a}$,
   d) in $a:x=x:b$ ist $x^2=ab$, also $x=\sqrt{ab}$. In Worten?

§. 79. 1. Aus einer arithmetischen Proportion ergaben sich zwei gleiche Summen, jede aus zwei Summanden bestehend. Man kann also wohl aus zwei gleichen Summen, von denen jede aus zwei Summanden besteht, eine arithmetische Proportion bilden, indem man die Summanden der einen Summe zu äusseren, die der anderen zu inneren Gliedern macht.

a) Ist $a+b=c+d$ und wird dies z. B. mit
$\underline{a+c=a+c}$ durch Subtraktion verbunden zu
$b-c=d-a$, so wird aus diesen gleichen Differenzen die Proportion:
$c-b=a-d$.

b) Ist $a+b=c+c$, so ergibt sich $a-c=c-b$.

2. Aus einer geometrischen Proportion ergaben sich zwei gleiche Produkte, jedes aus zwei Faktoren bestehend. Es wird sich also wohl aus zwei gleichen Produkten, jedes aus zwei Faktoren bestehend, eine geometrische Proportion bilden lassen, indem man die Faktoren des einen Produktes zu äusseren, die des anderen zu inneren Gliedern macht.

a) Ist $a.b=c.d$ und wird dies z. B. mit
$\underline{ad=ad}$ durch Division verbunden zu
$\frac{b}{d}=\frac{c}{a}$, so folgt aus diesen gleichen Quotienten die Proportion:
$d:b=a:c$.

b) Ist $ab=c.c$, so steht $a:c=c:b$.

1. Da die Wahl beziehungsweise der Summanden und der Faktoren aus den gegebenen Ausdrücken ($a+b=c+d$ und $ab=cd$) eine vierfache sein kann (a,c; a,d; b,c; b,d) und da man die gebildeten Ausdrücke doppelt mit den gegebenen verknüpfen kann; so ist eine achtfache Stellung der Glieder denkbar.

2. Aus einer gegebenen Proportion lassen sich durch Vertauschung der Glieder 7 neue Proportionen aufstellen.

3) Die Vorderglieder verhalten sich zu einander, wie die Hinterglieder.

4. Ist ein Paar homologer Glieder gleich, so ist es auch das andere.

§. 80. Alle Veränderungen, welche

1. bei der arithm. Prop. die Gleichheit der Summen, bei der geometrischen die Gleichheit der Produkte der äusseren und inneren Glieder und welche

2. die Gleichheit der Verhältnisse einer Proportion nicht stören, stören auch die Proportion als solche nicht.

I. Ist $a + b = c + d$, so ist auch

1. $(a \pm n) + (b \pm n) = (c \pm n) + (d \pm n)$,
2. $na + nb = nc + nd$,
3. $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{c}{n} + \frac{d}{n}$,
4. $(a \pm n) + b = (c \pm n) + d$;

daraus folgt: $a - d = c - b$,

1. $(a \pm n) - (d \pm n) = (c \pm n) - (b \pm n)$,
2. $na - nd = nc - nb$,
3. $\frac{a}{n} - \frac{d}{n} = \frac{c}{n} - \frac{b}{n}$,
4. $(a \pm n) - d = (c \pm n) - b$; d. h.?

II. Ist $ab = cd$, so ist auch

1. $na \,.\, nb = nc \,.\, nd$,
2. $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{c}{n} \cdot \frac{d}{n}$,
3. $a^n \,.\, b^n = c^n \,.\, d^n$,
4. $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} \,.\, \sqrt[n]{d}$,
5. $na \,.\, b = nc \,.\, d$,
6. $\frac{a}{n} \cdot b = \frac{c}{n} \cdot d$;

daraus folgt: $a : d = c : b$,

1. $na : nd = nc : nb$,
2. $\frac{a}{n} : \frac{d}{n} = \frac{c}{n} : \frac{b}{n}$,
3. $a^n : d^n = c^n : b^n$,
4. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{b}$,
5. $na : d = nc : b$,
6. $\frac{a}{n} : d = \frac{c}{n} : b$; d. h?

Die Veränderungen zweier Glieder können auch die Hinterglieder betreffen oder man kann auch und zwar 1) bei der arithm. Prop. ein äusseres um eine gewisse Zahl vermehren, das andere äussere um diese Zahl vermindern; 2) bei der geometrischen multipliziren und dividiren. Dieses kann auch mit den inneren geschehen.

§. 81. Es lassen sich ferner zwei oder mehre arithmetische, so wie zwei oder mehre geometrische Proportionen in eine zusammen ziehen *(Zusammensetzen)*.

I. 1. $a - b = c - d$ gibt $a + d = b + c$
2. $m - n = o - p$ gibt $m + p = n + o$ } aus beiden wird

$$(a + d) \pm (m + p) = (b + c) \pm (n + o) \text{ oder}$$
$$(a \pm m) + d \pm p) = (b \pm n) + (c \pm o) \text{ und daraus}$$

$(a \pm m) - (b \pm n) = (c \pm o) -) d \pm p)$, d. h.: es werden die Glieder der gegeb. Proportionen nach der Reihe entweder addirt oder subtrahirt und die Resultate u. s. w.

II. 1. $a : b = c : d$ gibt $ad = bc$
2. $m : n = o : p$ gibt $mp = no$ } woraus

$$ad \,.\, mp = bc \,.\, no \text{ und } \frac{ad}{mp} = \frac{bc}{no} \text{ oder (§. 28., a. und b.)}$$
$$am \,.\, dp = bn \,.\, co \text{ und } \frac{a}{m} \,.\, \frac{d}{p} = \frac{b}{n} \,.\, \frac{c}{o} \text{ und daraus}$$
$$am : bn = co : dp \text{ und } \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{o} : \frac{d}{p} \text{ folgt, d. h.?}$$

1. Die zusammen zusetzenden Proportionen können dieselben sein. Dies gibt eine Bestätigung von §, 80., I., 2. und §. 80., II., 3.

2. Die in einer zusammen gesetzten Proportion stehenden Verhältnisse sind auch zusammengesetzte. Wie werden also arithmetische, wie geometrische Verhältnisse zusammen gesetzt? Wie entsteht der Verhältnisswerth eines zusammen gesetzten Verhältnisses? Wie entsteht das aus stetigen Verhältnissen zusammen gesetzte?

3. Die aus $a : b = m : y$, $c : d = y : z$, $e : f = z : x$ } zusammen gesetzte Prop. ist $(a : b)(c : d)(e : f) = m : x$ oder $ace : bdf = m : x$.

Es kann also ein Verhältniss, welches die Gestalt eines einfachen hat $(m : x)$, aus zwei oder mehren Verhältnissen zusammen gesetzt sein.

4. Auch in einer zusammen gesetzten Proportion lässt sich ein fehlendes Glied aus den anderen finden.

§. 82. Aus einer geometrischen Proportion lassen sich durch Summation oder Subtraktion gewisser Glieder (der Glieder desselben Verhältnisses oder homologer) neue Proportionen bilden. Es sei:

1. $a:b=c:d$, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ und da} \\ \frac{a}{a}=\frac{c}{c}, \text{ so ist}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\frac{a}{a}\pm\frac{b}{a}=\frac{c}{c}\pm\frac{d}{c} \text{ oder} \\ \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}, \text{ woraus sich}\end{array}$$

$a:(a\pm b)=c:(c\pm d)$ oder $(a\pm b):(c\pm d)=a:c$ ergibt; d. h.: *in jeder geometrischen Proportion* $(a:b=c:d)$ *verhält sich die Summe oder Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe oder Differenz der Glieder des zweiten Verhältnisses wie ein Paar homologe* ($a:c$ oder $b:d$. §. 79., F. 3.).

2. Wenn $a:b=c:d$ ist, so ist auch

$a:c=b:d$ und daraus nach dem ersten Falle

$(a\pm c):(b\pm d)=a:b$, d. h.: *in jeder geometr. Prop.* $(a:b=c:d)$ *verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.*

1. Wenn $a:b=c:d=e:f$, so ist
$(a+c):(b+d)=(a:b=)\ e:f$ und
$(a+c+e):(b+d+f)=a:b$ u. s. w. für mehr Verhältnisse; d. h.

Bei mehren gleichen geometr. Verh. verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein beliebiges Vorderglied zu seinem Hintergliede.

2. Wenn $a:b=b:c=c:d=d:u$ ist, so wird
$(a+b+c+d):(b+c+d+u)=a:b$ sein; d. h.:

Wenn eine Reihe von Zahlen a, b, c,......u gleiche stetige geometrische Verhältnisse bilden, so verhält sich die Summe aller Zahlen weniger der letzten zur Summe aller weniger der ersten wie zwei auf einander folgende.

3. Ist $a+b+c+d+\ldots\ldots u=s$ und $a:b=e$, also $b=ae$; so steht auch $(s-u):(s-a)=1:e$, d. h.?

C. Von den Progressionen.

§. 83. Bilden Zahlen (Glieder) in ihrer Reihenfolge stetige gleiche arithmetische oder geometrische Verhältnisse; so nennt man eine solche Reihenfolge beziehungsweise eine *arithmetische* oder *geometrische Progression*, welche nach den Verhältnissen *steigend* oder *fallend* ist. Die Zahl, welche anzeigt das wievielte Glied ein betrachtetes von einem Anfangsgliede ist, heisst der *Zeiger* dieses Gliedes.

1. In der steigenden arithmetischen Progr. ist der Verhältnisswerth, d. i. die Zahl, welche den Fortschritt angibt, positiv, in der fallenden negativ, in der steigenden geometrischen grösser, in der fallenden kleiner als 1.

2. In der arithmetischen Progr. ist jedes folgende Glied eine Summe, in der geometrischen ein Produkt aus dem unmittelbar vorhergehenden Gliede und dem Verhältnisswerthe; jedes einem gewissen Gliede vorhergehende wird gefunden in der arithmetischen, wenn man den Verhältnisswerth von ihm abzieht; in der geometrischen, wenn man es durch ihn dividirt.

3. Eine Folge von Zahlen bildet nur dann eine arithmetische Progr., wenn die Differenzen, und dann eine geometr. Progr., wenn die Quotienten je zweier benachbarter Glieder in derselben Ordnung eine beständige (konstante) Zahl geben.

4. Jede Progression lässt sich vom Ende und Anfange an, also vorwärts und rückwärts nach Belieben weit fortgesetzt denken: unendliche Progression.

5. Jedes Glied kann als letztes in Beziehung auf die vorhergehenden, und als erstes in Beziehung auf die folgenden angesehen werden.

6. Die Zeiger bilden für sich eine arithmetische Progression mit dem Verhältnisswerthe 1 und werden beim Rückwärtsfortsetzen negativ.

§. 84. Weil jedes Glied einer Progression auf dieselbe bestimmte Weise entsteht, so muss es ein allgemeines Bildungsgesetz oder einen Ausdruck geben, in welchem die Entstehung jedes Gliedes der Progr. enthalten ist.

Ist a das erste Glied, c der Verhältnisswerth, so sind die Anfangsglieder

1. der arithm. Progression $a,\ a \pm c,\ a \pm 2c,\ a \pm 3c,\ a \pm 4c \ldots\ldots$
2. der geometr. Progress. $a,\ ac,\ ac^2,\ ac^3,\ ac^4 \ldots\ldots$ und die Zeiger dazu $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots\ldots$ Daraus ist zu vermuthen,

dass das n^{te} Glied u

für die arithm. Progr. $a \pm (n-1)c$,
" " geometr. " $a \,.\, c^{n-1}$ sein werde.

Es kann nun in der That auf diese Ausdrücke weiter gebaut werden, wenn sie jedes bestimmte Glied der obigen Progressionen richtig angeben, wie es wirklich der Fall ist, z. B. das zweite, wenn 2 für n gesetzt wird.

Wären nun die obigen Ausdrücke für das n^{te} Glied richtig, so würde aus ihnen sicher das $(n-1)^{te}$ entstehen, wenn man nur $n-1$ für n in sie setzt. Dadurch wird

$a \pm (n-2)c$ aus $a \pm (n-1)c$ und

$a \,.\, c^{n-2}$ aus $a \,.\, c^{n-1}$. Wird im ersten Falle subtrahirt, im zweiten dividirt, so entstehen in der That die konstanten Verhältnisswerthe c (§. 83., 3.); also sind die Ausdrücke wirklich je zwei auf einander folgende Glieder der Progression, so dass jedes das Recht hat, das Gesetz der Progression anzugeben.

1. Statt der Ausdrücke
   a) $a,\ a+c,\ a+2c,\ a+3c \ldots\ldots a+(n-3)c,\ a+(n-2)c,\ a+(n-1)c$ und
   b) $a,\ ac,\ ac^2,\ ac^3 \ldots\ldots ac^{n-3},\ ac^{n-2},\ ac^{n-1}$ könnte
   c) $a,\ a+c,\ a+2c,\ a+3c \ldots\ldots u-2d,\ u-d,\ u$ und
   d) $a,\ ac,\ ac^2,\ ac^3 \ldots\ldots uc^{-2},\ uc^{-1},\ u$ gesetzt werden.
2. Ist in der steigenden arithmetischen und in der geometrischen Progression $a=c$, so entsteht
   a) $a,\ 2a,\ 3a \ldots\ldots na$ und
   b) $a,\ a^2,\ a^3 \ldots\ldots a^n$; d. h.?

§. 85. Will man die Summe s von n Gliedern einer Progression auffinden, so steht

a) für die arithmetische:

$s = a + (a \pm c) + (a \pm 2c) \ldots\ldots (u \mp 2c) + (u \mp c) + u$ oder
$s = u + (u \mp c) + (u \mp 2c) \ldots\ldots (a \pm 2c) + (a \pm c) + a$, beides addirt:
$2s = (a+u) + (a+u) + (a+u) \ldots (a+u) + (a+u) + (a+u)$ oder bei n Gliedern
$2s = n(a+u)$, also
$s = \frac{n}{2}(a+u)$.

b) Für die geometrische Progression:

$s = a + ac + ac^2 \ldots\ldots uc^{-2} + uc^{-1} + u$, dieses mit c multiplicirt
$sc = ac + ac^2 + ac^3 \ldots\ldots uc^{-1} + u + uc$; subtrahirt:
$sc - s = uc - a$, woraus
$(c-1)s = uc - a$ und
$s = \frac{uc-a}{c-1}$ entsteht.

Ist die geometrische Progr. fallend ($c < 1$), so wird $s = \frac{a - uc}{1 - c}$ für die Berechnung genommen. (Die Vorzeichen des Zählers und des Nenners eines Bruches können verändert werden.)

§. 86. Sowohl für die arithmetische als auch für die geometrische Progression haben wir bisher zwei Formeln aufgestellt:

1. *a*) $u = a \pm (n-1)c$,
   b) $s = \frac{n}{2}(a + u)$ und
2. *a*) $u = a \,.\, c^{n-1}$,
   b) $s = \frac{uc - a}{c - 1}$. Aus beiden Formeln lassen sich in jedem der beiden Fälle die gemeinschaftlich vorkommenden Zahlen u, a, n eliminiren und daher in jedem der beiden Fälle noch drei selbstständige Bedingungsgleichungen aufstellen und zwar:

1. für die arithmetische Progression
   c) $s = \frac{n}{2}\{a + a \pm (n-1)c\} = na \pm \frac{(n-1)n}{2}c$ durch Elimination des u,
   d) $s = \frac{n}{2}\{u \mp (n-1)c + u\} = nu \mp \frac{(n-1)n}{2}c$ durch Elimination des a,
   e) $u = a \pm \left(\frac{2s}{a+u} - 1\right)c$ durch Elimination des n;
2. für die geometrische Progression:
   c) $s = \frac{ac^{n-1} \,.\, c - a}{c - 1} = \frac{c^n - 1)a}{c - 1}$ durch Elimination des u,
   d) $s = \frac{uc - \frac{u}{c^{n-1}}}{c - 1} = \frac{(c^n - 1)u}{(c-1)c^{n-1}}$ durch Elimination des a,
   e) $u = a\left(\frac{s - a}{s - u}\right)^{n-1}$ durch Elimination des c.

§. 87. Jede von den fünf Gleichungen (§. 86.) enthält in jedem der beiden Fälle 4 Grössen, so zwar, dass alle fünf Zusammenstellungen aus den 5 Elementen a, c, u, n, s zu je vieren vertreten sind. Jede von den fünf Gleichungen lässt also vier Aufgaben zu, in denen jede Grösse aus den gegebenen anderen der Gleichung gefunden werden kann; also im Ganzen *zwanzig Aufgaben*. — Davon sind für die arithm. Progr. nur 4 Aufgaben gemischte quadratische (in *c* für n, in *d* für n, in *e* für a und u), die anderen sind einfache; für die geometrische Progression sind die Gleichungen theils einfache, theils reine oder gemischte höhere, theils logarithmische. Nach Abtheilung 3 können also nicht alle Aufgaben aufgelöst werden.

D. Von den summirenden arithmetischen Reihen.

§. 88. Aus einer arithmetischen Progression kann man die Summe von je n Anfangsgliedern bilden und diese Summen in der entstandenen Reihenfolge ordnen (das erste Gl. der arithm. Progr. wird wieder erstes, die Summe der beiden ersten zweites, die Summe der drei ersten drittes u. s. w.). Dadurch erhält man eine neue gesetzmässig gebildete Reihenfolge von Zahlen. Behandelt man dieselbe wieder ebenso und fährt damit fort, so heissen die auf diese Weise gebildeten Zahlenreihen *höhere arithmetische Progressionen*, welche zu den summirenden Reihen überhaupt gehören. — Wenn man in einer Reihe von jedem n^{ten} Gliede das $(n-1)^{te}$ abzieht und die Differenzen zu dem je $(n-1)^{ten}$ einer neuen Reihenfolge macht, so heissen die neuen Reihen *Differenzreihen*.

1) Schon die erste Differenzreihe einer arithmetischen Progression wird gebildet von einer beständigen oder konstanten Zahl, dem Verhältnisswerthe; also kann man die arithmetische Progression eine Reihe der *ersten* Ordnung nennen. Ist von einer arithm. Progr. die summirende Reihe gebildet und sucht man von dieser die Differenzreihe, so ist sie zwar die vorige arithm. Progr., aber ohne deren erstes Glied und erst die zweite Differenzreihe wird konstant; daher gehört jene summirende Reihe der *zweiten* Ordnung an u. s. w., wenn die n^{te} Differenzreihe konstant wird, so gehört die gegebene Reihe der n^{ten} Ordnung an.

2) Bildet man von einer arithmetischen Progression die summirenden Reihen höherer Ordnungen und sucht dann rückwärts von letzteren die Differenzreihen, so fehlen, wenn man dadurch auf eine arithmetische Progression gekommen ist, von der ursprünglichen Progression um so mehr Anfangsglieder, je höher die Reise ist und zwar

für eine Reihe der zweiten Ordnung das erste,
. . . . . dritten . die beiden ersten,
. . . . . r^{ten} . $(r-1)$ ersten Glieder. Die Anfangsglieder lassen sich ergänzen (§. 83., 2.).

3. Zieht man von dem n^{ten} Gliede irgend einer Reihe das $(n-1)^{te}$ ab, so ist der Rest das n^{te} Glied der vorhergehenden Ordnung.

4. Addirt man zum $(n-1)^{ten}$ Gliede einer summirenden Reihe das n^{te} der vorhergehenden Grundreihe, so entsteht das n^{te} der summirenden.

§. 89. Setzt man in der arithmetischen Progression $a=c=1$, so erhält man die besondere Zahlenprogression

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6.........n, daraus die summirenden Reihen
2. 1, 3, 6, 10, 15, 21.........
3. 1, 4, 10, 20, 35, 56.........
4. 1, 5, 15, 35, 70, 126......... u. s. w. Es ist nun die Frage: welches sind für diese Reihen die allgemeinen Ausdrücke?

Für die zweite Reihe 1, 3, 6, 10....... entsteht der allgemeine Ausdruck aus $na+\frac{(n-1)n}{2}c$, wenn man, um auf die obige Zahlenprogression zu kommen, $a=c=1$ annimmt; also $n\,.\,1+\frac{(n-1)n}{1\,.\,2}\,.\,1=\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$.

Der algemeine Ausdruck der ersten Reihe $n=\frac{n}{1}$ hat im Zähler und Nenner einen um eine 1 grösseren Faktor bekommen, um den für die zweite Reihe zu geben. Wahrscheinlich also wird dies auch für den Ausdruck der dritten so sein, da die dritte Reihe aus der zweiten so, wie die zweite aus der ersten entstand. Nimmt man $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ versuchsweise als das richtige n^{te} Glied an, so wäre das $(n-1)^{te}$ aus ihm $\frac{(n-1)n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$. Nun aber ist in der That $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{(n-1)n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{[(n+2)-(n-1)]\,.\,n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$ das n^{te} Glied der zweiten Reihe, also ist jener Ausdruk das n^{te} Gl. der dritten Ordnung.

Ganz in gleicher Weise ist das n^{te} Glied der vierten Ordnung: $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$ und das der r^{ten} O. $=\frac{n(n+1)......(n+r-1)}{1\,.\,2\,.\,3......r}$. Diese besonderen Zahlenreihen heissen *figurirte Zahlen.*

§. 90. Für die arithmetische Progression

1. a, $a\pm c$, $a\pm 2c$, $a\pm 3c$, $a\pm 4c$.....$a\pm(n-1)c$ ist die summir. R. d. 2^{ten} Ordn.
2. a, $2a\pm c$, $3a\pm 3c$, $4a\pm 6c$, $5a\pm 10c$..$na\pm\frac{(n-1)n}{1\,.\,2}c$, die der 3^{ten} Ordn.
3. a, $3a\pm c$, $6a\pm 4c$, $10a\pm 10c$, $15a\pm 20c$..............., der 4^{ten} Ordn.
4. a, $4a\pm c$, $10a\pm 5c$, $20a\pm 15c$, $35a\pm 35c$.....

Es entsteht nun die Frage: welches sind die allgemeinen Ausdrücke für die Reihen der der 3^{ten}, 4^{ten}.....r^{ten} Ordnung? Es kommt hier unstreitig auf das allgemeine Bildungsgesetz der

Koeffizienten von a und c an, welche die in §. 89 entwickelten figurirten Zahlen sind, und zwar ist

in der 2^{ten} Reihe bei a die n^{te} der 1^{ten} Ordn., bei c die $(n-1)^{te}$ der 2^{ten} Ordn.,
. . 3 . . . . . 2 3
. . 4 . . . . . 3 . . . . . . 4 .
. . r . . . . . (r—1) . . . . . . r .

daher wird wohl

das n^{te} Glied der Reihe der 3^{ten} Ordnung $= \frac{n(n+1)}{1.2} a \pm \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} c$ sein, was auch richtig ist; denn bildet man aus ihm das $(n-1)^{te}$, nämlich

$\frac{(n-1)n}{1.2} a \pm \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3} c$ und zieht es von jenem ab, so bleibt wirklich

$\left\{\frac{n(n+1)}{1.2} a \pm \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} c\right\} - \left\{\frac{(n-1)n}{1.2} a \pm \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3} c\right\} = na \pm \frac{(n-1)n}{1.2} c$ das n^{te} Glied der zweiten Ordnung.

Das n^{te} Glied der Reihe der 4^{ten} Ordnung wird $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} a \pm \frac{(n-1)n(n-1)(n+2)}{1.2.3.4} c$ sein, denn zieht man das aus ihm gebildete $(n-1)^{te}$ Glied nämlich $\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} a \pm \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1.2.3.4} c$ von ihm ab, so bleibt das n^{te} der dritten Ordnung und so wird das n^{te} Glied einer Reihe der r^{ten} Ordnung sein $\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-2)}{1.2\ldots\ldots(r-1)} a \pm \frac{(n-1).n\ldots(n+r-2)}{1.2\ldots r} c$.

FÜNFTE ABTHEILUNG.

Einige Anwendungen der Proportionen, Progressionen und summirenden Reihen.

A. Regeldetri.

§. 91. Im praktischen Leben werden häufig zwei oder mehre verschiedenartige Dinge, die in einer gewissen Abhängigkeit von einander stehen, nach ihren Grössen in zwei solche Reihefolgen gebracht, dass in der einen alle Zahlen bekannt sind *(Angabe)*, in der anderen, worin dieselben verschiedenartigen Dinge in einer anderen Grösse vorkommen, die eine Zahl unbekannt ist *(Frage)*. Z. B.

a) 1. 4 Pfd. kosten 5 Gulden (Angabe); wie viele Pfunde bekommt man für 9 Gulden? (Frage). Oder:

2. 7 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 9 Tagen (Ang.); wie viele Arbeiter werden in 10 Tagen damit fertig (Fr.)? Oder:

b) Wenn 10 Arbeiter in 4 Tagen 100 Schachtruthen Boden auf 2000 Fuss Entfernung abfahren (Ang.); wie viele Arbeiter muss man anstellen, wenn in 2 Tagen 80 Schachtruthen auf 1500 Fuss Entfernung gebracht werden sollen (Fr.)?

a) Einfache Regeldetri. Kommen zwei verschiedenartige Dinge vor, so wird das Verhältniss desjenigen, worin die unbekannte Zahl ist, nur von dem, worin beide bekannt sind, abhängen. Behufs der Anordnung der Glieder für die Proportion muss man beurtheilen, ob bei der Veränderung des einen der verschiedenartigen Dinge das andere dieselbe Art der Veränderung erleidet (beide wachsen, beide abnehmen: *grades* Wirken), oder ob bei der Veränderung des einen das andere die grade entgegengesetzte Veränderung erfährt (wachsen und abnehmen: verkehrtes oder *umgekehrtes* Wirken). Darnach müssen

1. beim graden Wirken die Glieder der Angabe das eine Paar homologer bilden, die der Frage das andere Paar;

2. beim umgekehrten Wirken die Glieder der Angabe innere, die der Frage äussere oder umgekehrt, wobei in beiden Fällen die Glieder desselben Verhältnisses gleichartig sein müssen.

α) Bekommt man für a Geld α Waare und für b Geld β Waare derselben Art, so steht: $a : b = \alpha : \beta$;

β) Wenn a Arbeiter α Zeit und b Arbeiter β Zeit zu derselben Arbeit gebrauchen, so steht $a : b = \beta : \alpha$. Zurückführung der Rechnung auf Einheiten.

b) Zusammengesetzte Regeldetri. Kommen drei oder mehr verschiedenartige auf einander wirkende Dinge in zwei verschiedenen zusammengehörigen Reihefolgen vor; so ist das Verhältniss desjenigen, worin die unbekannte Zahl steht, ein aus den anderen, theils graden, theils umgekehrten Verhältnissen (je nach dem graden oder verkehrten Wirken) zusammengesetztes. — Für das obige Beispiel ist

10 Arb.....4 Tg.....100 S.R.....1000 F. die Angabe,
x .....2 - ..... 80 - .....1500 - die Frage.

Man könnte nun die fragliche Arbeiterzahl allmählig einrichten nach

1. der Arbeitszeit: $2 : 4 = 10 : y$ und $y = 20$,
2. der Bodenmenge: $100 : 80 = y : z$ und $z = 16$,
3. der Weglänge: $1000 : 1500 = z : x$ und $x = 24$. Diese Proportionen geben als zusammengesetzte

$$\left.\begin{array}{r} 2 : 4 \\ 100 : 80 \\ 1000 : 1560 \end{array}\right\} = 10 : x, \text{ was kürzer ist.}$$

Auch hier sind die Regeln des Ansatzes die obigen. — Die praktischen Mittel für die Auflösung in beiden Fällen sind:

1. Die Glieder desselben Verhältnisses werden gleichnamig gemacht.
2. Die Benennungen werden in allen Verhältnissen, deren Glieder beide bekannt sind, ausgelassen (das Glied des Verhältnisses, worin x steht, muss seinen Namen behalten).
3. Gemischte Zahlen werden in Brüche verwandelt.
4. Die Nenner innerer Glieder werden als Faktoren zu äussern, und umgekehrt gesetzt, wobei x mit Faktoren zu verschonen ist.
5. Innere Glieder werden gegen äussere (die Faktoren derselben) nach Möglichkeit abgekürzt.
6. Die Proportion wird nach §. 78., 2. aufgelöst, wobei x den Namen des zu ihm gehörigen bekannten Gliedes erhält.

Die Probe wird dadurch gemacht, dass man den für x gefundenen Werth in die ursprünglich aufgestellte (einfache oder zusammengesetzte) Proportion setzt und untersucht ob das Produkt der äusseren Glieder gleich dem der inneren ist.

B. Von den Kugelhaufen.

§. 3. *a)* Nimmt man in einer arithmetischen Progression $a=1$ und auch $c=1$ an, bildet von ihr

1, 2, 3, 4, 5 .... n die Reihe

d. 2. Ord. 1, 3, 6, 10, 15 .... $\frac{n(n+1)}{1.\,2.}$ und die

d. 3. Ord. 1, 4, 10, 20, 35 .... $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3.}$ wie oben und denkt sich die Einheiten dieser Reihen als Kugeln von gleicher Grösse; so geben die je n ersten Glieder der ersten Reihe parallele Zeilen, deren Summen in gleichseitigen Triangeln liegen, weshalb auch die Glieder dieser Reihe *Triangularzahlen* hiessen. Je n erste Triangel (1 bildet für sich freilich noch keinen Triangel) lassen sich, vom grössten als Unterlage beginnend zu dreiseitigen gleichseitigen Pyramiden zusammen schichten und desshalb heissen die Zahlen der obigen dritten Ordnung *dreieckige Pyramidalzahlen.*

Die Kugeln in den Zeilen der Grundfläche liegen so, dass die der vorhergehenden Zeile in den Zwischenräumen der folgenden liegen. — Die Seitentriangel der Pyramide sind kongruent der Grundfläche und die Anzahl der Kugeln in einer Seitenkante ist so gross, als in einer Seite der Grundfläche und als die Menge der Zeilen in dieser.

b) Nimmt man in der arithmetischen Progression $a = 1$, $c = 2$ an und bildet von ihr

1, 3, 5, 7, 9 .... $(2n-1)$ die Reihen

d. 2. Ord. 1, 4, 9, 16, 25 .... n^2 und

d. 3. Ord. 1, 5, 14, 30, 55 .... $\frac{(2n+1)n(n+1)}{1.\ 2.\ 3.}$; so bilden die Zahlen der zweiten Ordnung Quadrate, sind also *Tetragonalzahlen* und diese Quadrate lassen sich so über einander schichten, dass viereckige grade Pyramiden entstehen, für welche die Berechnung durch den soeben gebildeten Ausdruck der Reihe der dritten Ordnung geschieht.

Auch hier sind die Seitentriangel gleichseitige, so dass zur Berechnung der Kugelmenge bei einem vorhandenen Haufen in dem obigen allgemeinen Ausdrucke, welcher aus der Formel für die Reihe des dritten Ranges (§. 88.) entstanden ist, für n die Anzahl der Kugeln in einer Seitenkante zu setzen ist.

c) Häufig sind auf Waffenplätzen und in Zeughäusern die Kugeln in langen frei stehenden Haufen, deren Grundfläche ein Oblongum ist, geschichtet. Ist der Haufen vollständig und sind in der Zeile, welche den Rücken bildet, m Kugeln; so sind in jeder von den beiden Zeilen der ihn stützenden Schicht $m+1$, also in dieser Schicht $2(m+1) = 2m+2$ Kugeln. Diese Schicht stützt sich auf eine dritte mit 3 Zeilen, in jeder $m+2$ Kugeln, im Ganzen mit $3(m+2) = 3m+6$ Kugeln, die vierte Schicht hat $4(m+3) = 4m+12$ u. s. w. die n^{te} Schicht $n(m+n-1)$ Kugeln. Sucht man von der Reihe der Schichten, nämlich

m | $2m+2$ | $3m+6$ | $4m+12$ die Differenzreihen:

$m+2$ | $m+4$ | $m+6$ und

2 | 2;

so ergibt sich, dass die Schichten einer Reihe der zweiten Ordnung angehören und dass der Haufen ein Glied einer Reihe der dritten Ordnung ist. — Wollte man aber die arithmetische Progr. $m+2$, $m+4$, $m+6$ für die Bildung der summirenden Reihen zum Grunde legen, so käme man nicht auf die Schichten und den Haufen. Man muss demnach noch das dem $m+2$ vorhergehende Glied m als erstes bilden (§. 83., 2). — Setzt man nun in den Ausdruk für die Reihe der dritten Ordnung, nämlich in

$\frac{n(n+1)}{1.2}a + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}c$ das m für a und 2 für c; so erhält man

$\frac{n(n+1)}{1.2}m + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}2 = \frac{(3m+2n-2)n(n+1)}{1.2.3}$ als Formel für diesen Haufen, worin n die Anzahl der Kugeln in einer Seitenkante oder schmalen Seite der Grundfläche ist.

d) Ist ein länglicher Haufen zwischen zwei Pyramiden eingeschichtet und hat er im Rücken m Kugeln, so liegen in jeder Zeile der zweiten Schicht $(m-1)$, in jeder der dritten $(m-2)$, der vierten $(m-3)$ u. s. w. der n^{ten} Schicht $m-(n-1)=m-n+1$ Kugeln. Sucht man auch hier von der Reihe der Schichten, nämlich von

$$\begin{array}{l} m \mid 2(m-1) \mid 3(m-2) \mid 4(m-3) \text{ die Differenzreihen} \\ \quad m-2 \mid m-4 \mid m-6 \text{ und} \\ \qquad -2 \mid -2; \end{array}$$

so wird man, um für diesen Haufen die allgemeine Formel zu finden, in den Ausdruck für die Reihen der dritten Ordnung m für a und -2 für c zu setzen haben, wodurch

$$\frac{(3m-2n+2)n(n+1)}{1.2.3} \text{ entsteht.}$$

e) Legt sich ein Haufen nur an eine Pyramide und hat er im Rücken m Kugeln, so liegen auch in jeder Zeile jeder folgenden Schicht m; also die Schichten enthalten

$m \mid 2m \mid 3m \mid 4m \ldots\ldots\ nm$ Kugeln und gehören einer Reihe der ersten Ordnung an, der Haufen einer Reihe der zweiten Ordnung, so dass, um für ihn die allgemeine Formel zu erhalten, in $na+\frac{(n-1)n}{1.2}c$ für a und c nur m zu setzen ist, wodurch

$$\frac{m.n(n+1)}{1.2} \text{ entsteht.}$$

1. In den Formeln für die Berechnung der Kugelzahl in den fünf obigen Fällen, nämlich

a) $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{1+n+1}{3}$,

b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{1+n+n}{3}$,

c) $\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{m+(m+n-1)+(m+n-1)}{3}$,

d) $\frac{n(n+1)(3m-2n+2)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{m+(m-n+1)+(m-n+1)}{3}$,

e) $\frac{n(n+1)m}{1.2}=\frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{m+m+m}{3}$ kommt die n^{te} Triangularzahl $\frac{n(n+1)}{1.2}$ als Faktor vor bei dem dritten Theile derjenigen Kugeln, welche zusammen im Rücken (auch wenn eine darin liegt) und den beiden mit ihm parallel gehenden Zeilen der Grundfläche liegen.

2. In den Fällen c und d können je zwei von den drei Stücken: *a*) der Menge der Kugeln im Rücken (m), *b*) der Anzahl (n) der Schichten oder der Kugelmenge in einer Seitenkante und *c*) der Kugelmenge in einer langen Seite der Grundfläche (im Falle *c* ist es $m+n-1$, im Falle *d* aber $m-n+1$) zur Bestimmung des Haufens dienen, so dass je drei Aufgaben möglich sind. — Die obigen Formeln enthalten unmittelbar m und n, wenn aber die lange Seite der Grundfläche und dazu m oder n gegeben ist, so muss daraus n oder m bestimmt werden, jenachdem beziehungsweise m oder n gegeben ist.

3. Ist ein Haufen parallel mit der Grundfläche abgekürzt, so müssen die Bestimmungsstücke für beide Haufen, von welchen der gegebene der Unterschied ist, gegeben sein. Unter vier verschiedenen Stücken müssen hier drei gegeben sein.

C. Zinseszins- und Rentenrechnung.

§. 93. Ist ein Kapital zu p Prozent angelegt oder bringen je 100 Rthl. Kapital in 1 Jahre p Rthl. Zinsen, so folgt aus

$100:1=p:z$, dass $z=\frac{p}{100}$ die Zinsen von 1 Rthl. nach 1 Jahre sind und dass aus

1 Rthl. nach dem Schlusse des ersten Jahres $(1+\frac{p}{100})$ Rthl. $=c$ Rthl. geworden ist. So wird in jedem Jahre aus jedem Thaler am Ende des Jahres stets c werden. Wenn nun ein Kapital auf

Zinseszinsen aussteht, so wird das, was am Ende eines jeden Jahres vorhanden ist, als Kapital für das nächst folgende Jahr betrachtet und da jeder Thaler zu gleichen Bedingungen aussteht; so werden aus

c Rthl. nach dem Schlusse des zweiten Jahres $c \cdot c = c^2$, aus diesen
c^2 . . . . . dritten . $c \cdot c^2 = c^3$, aus diesen
c^3 . . . . . vierten . $c \cdot c^3 = c^4$, und somit aus
1 . . n Jahren geworden sein .... $c^n = (1 + \frac{p}{100})^n$ und aus
C . . . . $C \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$.

Demnach ist der *künftige Werth* K des Kapitals oder die Summe des angelegten Kapitals C und seiner Zinseszinsen zu p Prozent nach n Jahren enthalten in

$K = C(1 + \frac{p}{100})^n$, wodurch sich vier einzelne Aufgaben (welche? — wie?) lösen lassen.

Die künftigen Werthe der einzelnen Jahre sind Glieder einer geometrischen Progression, bei welcher der Verhältnisswerth gleich dem ersten Gliede $(1 + \frac{p}{100})$ ist. (§. 84., 2.)

§. 94. 1. Es kann der Fall eintreten, dass am Ende eines jeden von n Jahren ein gewisses Kapital a erübrigt und auf Zinseszinsen angelegt wird. Es entsteht die Frage: wie viel ist am Schlusse des n^{ten} Jahres überhaupt vorhanden?

Die erste Rate a wird (n—1) Jahre ausstehen und als künftigen Werth $a \cdot c^{n-1}$,
. zweite . . . (n—1) . . . . . . $a \cdot c^{n-2}$,
. dritte . . . (n—3) . . . . . . $a \cdot c^{n-3}$,
. drittletzte . . 2 . . . . . . $a \cdot c^2$,
. vorletzte . . 1 Jahr . . . . . $a \cdot c$ geben
. letzte wird gar nicht mehr angelegt und bleibt........................a.

Daraus ist klar, dass die künftigen Werthe eine geometrische Progression von n Gliedern bilden, bei welcher der Verhältnisswerth c ist, wenn man a als das erste Glied annimmt. Man darf also nur in die frühere Summenformel der geometr. Progression (§. 85., *b.*)

$s = \frac{uc - a}{c - 1}$ für u und c die hier stattfindenden Werthe ac^{n-1} und $(1 + \frac{p}{100})$ setzen, wodurch

$$S = \frac{a(1 + \frac{p}{100})^{n-1} \cdot (1 + \frac{p}{100}) - a}{(1 + \frac{p}{100}) - 1} = \frac{(1 + \frac{p}{100})^n - 1}{(1 + \frac{p}{100}) - 1} \cdot a = \frac{(1 + \frac{p}{100})^n - 1}{\frac{p}{100}} \cdot a \text{ entsteht.}$$

2. Wenn ausser obigen zu Ende eines jeden Jahres angelegten Raten zu Anfange des ersten Jahres ein Stammkapital C auch auf Zinseszinsen angelegt würde; so wäre die ganze Summe nach n Jahren:

$$S^{I} = Cc^n + \frac{c^n - 1}{c - 1} \cdot a.$$

3. Kämen die n Raten schon zu Anfange eines jeden der n Jahre dazu, so wäre der ganze künftige Werth

$$S^{II} = Cc^n + \frac{c(c^n - 1)}{c - 1} \cdot a.$$

4. Wenn von dem Stammkapitale mit seinen Zinseszinzen am Schlusse eines jeden Jahres a mit seinen Zinseszinsen wegkommt, so bleibt nach dem n^{ten} Jahre

$$R^{I} = Cc^n - \frac{c^n - 1}{c - 1} \cdot a.$$

5. Käme a zum Anfange eines jeden der n Jahre weg, so bliebe

$$R^{1\,1} = Cc^n - \frac{c(c^n-1)}{c-1} \cdot a.$$

6. Wenn im vierten Falle a grösser ist als die jährlichen Zinsen des C sind, so wird ein Zeitpunkt eintreten, in welchem das Stammkapital mit seinen Zinseszinsen durch die Rückzahlungen mit den von ihnen verloren gehenden Zinseszinsen aufgezehrt ist, so dass $R^1 = o$ und $Cc^n = \frac{(c^n-1)}{c-1} \cdot a$ entseht, worin vier Aufgaben (welche?) enthalten sind.

Das Stammkapital nennt man die Einlage oder Mise, die zurückgezahlten Raten heissen die Rente, der Verwalter des Kapitals heisst Unternehmer, der Empfänger der Raten Rentier.

Für den Fall 3 ist das Stammkapital C eigentlich um a zu vermehren, für den Fall 5 zu vermindern und dann sind es die Fälle 2 und 4.

SECHSTE ABTHEILUNG.

Aus der Kombinationslehre.

§. 95. Nicht selten hat man die Frage zu beantworten, wie oft Zahlen oder überhaupt Dinge, welche man Elemente zu nennen pflegt, zusammen gestellt werden können, ohne dass man hierbei an mathematische Beziehungen denkt. Gegebene Elemente können theils mit, theils ohne Wiederholung einzelner oder aller Elemente

1. zu je zweien, dreien u. s. w. zu je r verbunden werden: *Kombinationen* im engeren Sinne;
2. kann die Reihenfolge der Elemente so lange als es möglich ist abgeändert werden: *Permutationen;*
3. können die Elemente kombinirt und in den Kombinationen permutirt werden: *Variationen.*

Kombinationen:

§. 96. *a) mit Wiederholung,*

1. zu je zweien (Amben) z. B. aus den Elementen a, b, c, d, e:

$$\left.\begin{array}{lllll} aa & bb & cc & dd & ee \\ ab & bc & cd & de & \\ ac & bd & ce & & \\ ad & be & & & \\ ae & & & & \end{array}\right\} \text{also die Anzahl} = 5+4+3+2+1.$$

Bei n Elementen wird

das erste	zu sich selbst und allen	(n—1) folgenden gesetzt, was	n	Komb. gibt,
· zweite	·	(n—2)	(n—1)	·
· dritte	·	(n—3)	(n—2)	· u. s. f.
· drittletzte	·	den 2 letzten	3	·
· vorletzte	·	dem letzten	2	·
· letzte	gesetzt		1	·

Die Anzahl der Amben ist demnach die n^{te} figurirte Zahl der zweiten Ordnung: $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$.

2. Zu je dreien (Ternen) aus n Elementen:

Das erste El. zu allen $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Amben, gibt .... $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Ternen,
· zweite · · · $\frac{(n-1)n}{1 \cdot 2}$ · aus den $(n-1)$ letzten El. gibt $\frac{(n-1)n}{1 \cdot 2}$ ·
· dritte · · $\frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2}$ · · $(n-2)$ · · $\frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2}$ ·
· drittletzte · · 6 · · · 3 · · · 6 ·
· vorletzte · · 3 · · · 2 · · · 3 ·
· letzte · der einen Ambe aus dem letzten Elem. gibt .... 1 Terne; also ist die Anzahl aller Ternen die n^{te} figurirte Zahl der dritten Ordnung: $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

3. Zu je vieren (Quaternen) mit dem ersten Elem. $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,
· · zweiten · $\frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,
· · dritten · $\frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,
· · drittletzten 10,
· · vorletzten 4,
· · letzten 1, also ist

die Summe aller die n^{te} figurirte Zahl der vierten Ordnung: $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ und bei n Elementen zu je r ist die Anzahl die n^{te} figur. Zahl der r^{ten} Ordnung: $\frac{n(n+1) \ldots (n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$.

b) Ohne Wiederholung,

1. zu je zweien aus den Elem. a, b, c, d, e:

ab	bc	cd	de	Anzahl $4+3+2+1$.
ac	bd	ce		
ad	be			
ae				

Bei n Elementen wird
das erste zu allen $(n-1)$ übrigen gesetzt, gibt $(n-1)$ Amben,
· zweite · · $(n-2)$ · $(n-2)$ u. s. w.
· drittletzte zu den 2 letzten · · 2 ·
· vorletzte zu dem letzten · · 1 Ambe.

Die Anzahl der Amben ist also die $(n-1)^{te}$ fig. Z. der zweiten Ordnung: $\frac{(n-1)n}{1 \cdot 2}$.

2) Zu je dreien:

abc	acd	ade	bcd	bde	cde
abd	ace		bce		
abe					

$(3+2+1)+(2+1)+1 = 6+3+1$.

Das erste El. zu allen $\frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2}$ Amb. aus d. $(n-1)$ folg. El., gibt $\frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2}$ Ternen,
· zweite · · · $\frac{(n-3)(n-2)}{1 \cdot 2}$ · · · $(n-2)$ · · $\frac{(n-3)(n-2)}{1 \cdot 2}$
· fünftletzte · · 6 · · · 4 letzten · · 6
· viertletzte · · 3 · · · 3 · · · 3
· drittletzte · der 1 Ambe · · 2 · · · 1 Terne; also

die Summe der Ternen ist die $(n-2)^{te}$ figurirte Zahl d. 3^{ten} Ordn: $\frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

3. Zu je vieren mit dem ersten Elemente, gibt $\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1.2.3}$ Quaternen,
 · · zweiten · · $\frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}$.
 · · fünftletzten · · 4 .
 · · viertletzten · · 1 Quaterne; also ist die Anzahl aller die Summe der $(n-3)$ ersten figurirten Zahlen der dritten Ordnung oder die $(n-3)^{te}$ fig. Z. der vierten Ordnung: $\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.4}$ und bei n Elem. zu je r die $(n-r+1)^{te}$ fig. Z. der r^{ten} Ordn.: $\frac{(n-r+1)(n-r+2)\ldots\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots\ldots r}$.

Permutationen:

§. 97. *a) ohne Wiederholung.*

Ein Element steht natürlich nur einzeln da; bei zwei El. kann jedes die erste Stelle einnehmen, also sind zwei Permutationen; kommt ein drittes dazu, so sind für dasselbe in jeder der vorigen 2 Permutationen drei Plätze (vorn, in der Mitte, zu Ende), also 1. 2. 3 Permutationen; für ein viertes El. gibt es in jeder von den 1. 2. 3 vorigen Perm. vier Stellen, so dass 1. 2. 3. 4 Perm. entstehen u. s. w. sind für jedes hinzukommende neue El. so viele Stellen in jeder der aus den früheren El. möglichen Permutationen, als es der Zeiger des neuen El. angibt: also

die Gesammtzahl 1. 2. 3............n.

b) Mit Wiederholung.

Kommen unter n Elementen *zwei* gleiche vor, so werden diejenigen zwei und zwei Permutationen, in welchen die gleichen El. ihre Plätze vertauschen könnten, in eine zusammen fallen, so dass die Anzahl nur

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.2} = 3.4.6\ldots\ldots n;$$

Kommen *drei* gleiche vor, so werden diejenigen sechs und sechs Perm., worin die gleichen El. ihre Plätze vertauschen könnten, auch nur je eine bilden, so dass die Anzahl blos

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.2.3} = 4.5.6\ldots\ldots n;$$

bei *vier* gleichen $\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.2.3.4} = 5.6.4\ldots\ldots n$ u. s. w.

bei r gleichen $\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.2.3\ldots r} = (r+1)(r+2)\ldots\ldots n$ ist.

1) Wenn von n Elementen r gleiche und noch s gleiche sind, so gibt es

$$\frac{1.2.3.4\ldots\ldots n}{(1.2.3\ldots r)(1.2\ldots s)} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots n}{1.2\ldots\ldots s} = \frac{(s+1)(s+2)\ldots\ldots n}{1.2\,3\ldots\ldots r}$$ Permutationen.

2) Sind unter n Elementen r gleiche und die übrigen $(n-r)$ auch gleiche, so sind

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{(1.2\ldots r)(1.2.3\ldots[n-r])} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots n}{1.2.3\ldots\ldots(n-r)} = \frac{(n-r+1)(n-r+2)\ldots n}{1.2.3\ldots\ldots r}$$ Permutationen.

Variationen:

§. 98. *a) Ohne Wiederholung* aus n Elementen,

1) zu *zweien*. Jedes der n Elemente kann gesetzt werden zu jedem der $(n-1)$ übrigen, was $n(n-1)$ Variationen gibt.

2) Zu *dreien:* Verbindet man jede der $n(n-1)$ Amben oder Binionen mit jedem der nicht in der betreffenden Ambe stehenden $(n-2)$ übrigen Elemente, so gibt dies $(n-2)(n-1)n$ Variationen u. s. w.

zu je r Elementen $(n-r+1)(n-r+2)\ldots\ldots(n-1)n$ Var.

b) Mit Wiederholung aus n Elementen,

1. zu *zweien.* Jedes der n Elemente kann bei sich selbst und den $(n-1)$ übrigen stehen, was $n \cdot n = n^2$ Variat. gibt.

2. Zu *dreien.* Die Ternen oder Ternionen erhält man, wenn man jedes der n Elemente zu jeder der n^2 Amben setzt, wodurch $n \cdot n^2 = n^3$ entsteht, u. s. w. tritt mit jeder höheren Verbindung zu der früheren Anzahl (n^{r-1}) stets noch n als Faktor, so dass

zu je r Elementen n^r Variationen entstehen.

Der binomische Satz.

§. 99. Eine Anwendung der Variationen ist es unstreitig, wenn man ein Binom $(a+b)$ in irgend eine Potenz mit ganzem Exponenten (n) erheben soll: der binomische Satz im engeren Sinne. Man muss zu diesem Zwecke $(a+b)$ als Faktor nmal nehmen und die $(n-1)$ Multiplikationen ausführen.

Ist $a+b$ in die *zweite* Potenz zu erheben oder $(a+b)(a+b)$ auszuführen, so muss jedes Glied des zweiten Faktors $(a+b)$ mit jedem des ersten $(a+b)$ multiplizirt werden, wodurch $2 \cdot 2 = 2^2$ Glieder entstehen, die alle Variationen mit Wiederholung aus a und b zu zweien enthalten: aa, ab, ba, bb.

Soll $a+b$ in die *dritte* Potenz erhoben werden, so muss jede der vorigen 2^2 Binionen mit jedem der beiden Basisglieder (zu einem Produkte) verbunden werden, wodurch 2^3 Glieder entstehen, welche alle Variationen der beiden Elemente zu je dreien mit Wiederholung darstellen: aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb.

Die *vierte* Potenz von $a+b$ enthält 2^4 Glieder u. s. w. die n^{te} Potenz 2^n Glieder, worin alle Variationen der Elemente a und b zu je n mit Wiederholung dargestellt sind.

Die n Stellen jeder Variation enthalten entweder

nur a oder nur......b,.........sind also a^n oder...b^n,
ferner a $(n-1)$mal und b 1mal, sind also $a^{n-1}b$ oder a 1mal und b $(n-1)$mal, sind also ab^{n-1},
" a $(n-2)$mal " b 2mal, " " $a^{n-2}b^2$ " a 2mal " b $(n-2)$mal, " " a^2b^{n-2},
" a $(n-3)$mal " b 3mal, " " $a^{n-3}b^3$ " a 3mal " b $(n-3)$mal, " " a^3b^{n-3},
überhaupt a $(n-r)$ mal " b r mal, " " $a^{n-r}b^r$ " a r mal " b $(n-r)$mal, " " a^rb^{n-r}.

Diese Variationsformen sind Produkte, welche addirt werden sollen. Da nun das Element

b nach der Reihe 0, 1, 2, 3, 4............nmal und
a " " " n, $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, $(n-4)$.....o mal vorkommt; so lassen sich die 2^n Glieder in $(n+1)$ Glieder zusammen ziehen. Da bei der Bildung der Theilprodukte ein Permutiren der Elemente a und b zu je n mit Wiederholung stattgefunden hat, so

wird jede Zusammenstellung aus einer gewisssen Anzahl (r) von Elementen, deren jedes b ist, mit den (n—r) übrigen, deren jedes a ist, so oft vorkommen, als es die Permutationszahl mit Wiederholung anzeigt. Also sind die Koeffizienten (Binomialkoeffizienten), welche dies angeben,

bei $a^{n-1}b$ und ab^{n-1} .... $\frac{1.2.3.....n}{1.2....(n-1)} = n$,

. $a^{n-2}b^2$. a^2b^{n-2} .... $\frac{1.2.3.....n}{1.2....(n-2).1.2} = \frac{(n-1)n}{1.2}$,

. $a^{n-3}b^3$. a^2b^{n-3} .... $\frac{1.2.3.....n}{1.2...(n-3)1.2.3} = \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}$ u. s. w.

. $a^{n-r}b^r$. a^rb^{n-r} .... $\frac{1.2.3......n}{1.2...(n-r).(1.2...r)} = \frac{(n-r+1)(n-r+2)......(n-1)n}{1.2.3......r}$.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist also

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{(n-1)n}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}a^{n-3}b^3 \ldots \frac{(n-r+1)\ldots(n-2)(n-1)n}{1.2.3\ldots r}a^{n-r}b^r \ldots\ldots \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}a^3b^{n-3} + \frac{(n-1)n}{1.2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Um die Glieder der n^{ten} Potenz von $a+b$ zu erhalten, bildet man aus a und b die möglichen Kombinationen mit Wiederholung und in jeder besonderen Kombinationsform die Anzahl der jedesmaligen Permutationen als Koeffizienten.

Alle Glieder sind positiv, wenn beide Basisglieder positiv sind; jedes zweite Glied von den auf einander folgenden Paaren ist negativ, wenn b negativ ist, jedes erste, wenn a negativ ist, n mag grade oder ungrade sein; sind a und b negativ, so sind alle Glieder positiv oder negativ, jenachdem n grade oder ungrade ist.

Die Gliederzahl ist ungrade oder grade, jenachdem der Exponent grade oder ungrade ist. Wie gestaltet ist im ersten Falle das mittelste Glied, wie sind es im zweiten Falle die beiden mittelsten?

Anwendung der obigen Betrachtungen auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit.

INHALT.

ERSTE ABTHEILUNG. Einleitung: Begriffe des Ganzen, der Eins, einer ganzen Zahl, einer Einheit, die Eins als Normalzahl (1, 2, 3). Ganze und gebrochene Zahlen (4). Grundsätze (5). Erste (6), zweite (7), dritte (8) Verknüpfung dreier Zahlen als Grundlage für die einzelnen Rechnungen. Vergleichungen (9). Übereinstimmende und entgegengesetzte Grössen (10). Lehrsatz (11). Sechs Zahlformen, 36 Aufgaben (12).

Abschnitt I. Die absoluten Zahlen in den sechs Rechnungen. (13—16) III. Die Polynome. (16—25). II. Die Produkte. (25—31). IV. Die Quotienten oder Brüche. (31—38). V. Die Potenzialgrössen. (38—48). VI. Die Wurzelgrössen. (48—52). Allgemeine Betrachtungen (52—56); das Graduiren ist ein Dividiren (56).

ZWEITE ABTHEILUNG. Anwendung der Theorie auf besondere Zahlen. Zahlensysteme, verschiedene Begriffe (57). Mehrziffrige Zahlen sind Polynome (58). Addition (59), Subtraktion (60), Multiplikation (61), Division (62), Potenziren (63), Radiziren (64), Theorie der Logarithmen (65, 66). Die briggischen Logarithmen (67).

DRITTE ABTHEILUNG. Einiges über Gleichungen: bestimmte einfache, reine und gemischte quadratische, logarithmische (68—70); unbestimmte (70). Algebraische Aufgaben (71—73).

VIERTE ABTHEILUNG. Von den Verhältnissen, Proportionen, Progressionen und summirenden arithmetischen Reihen: Verhältnisse (73—76). Proportionen (76—83). Progressionen (83—88). Summirende arithm. Reihen (88—91).

FÜNFTE ABTHEILUNG. Einige Anwendungen der Proportionen, Progressionen und summirenden Reihen: Regeldetrie (91). Kugelhaufen (92). Zinseszins- und Rentenrechnung (93—95).

SECHSTE ABTHEILUNG. Aus der Kombinationslehre (95). Kombinationen (96). Permutationen (97). Variationen (98). Der binomische Satz (99).