Flächengleichungen organischer und verwandter Formen, intuitiv behandelt

von Oberlehrer Bodo Habenicht.

Kurze Inhaltsangabe:

Rotationsflächen (Seeigel, Birne, Apfel). Fläche mit vorgeschriebenem Aequator und 0. Meridian. Flächendarstellung. Elliptische Gestaltänderung. Die grosse Tellerschnecke. Kapseln, Cacteen, Evonymus. Buchecker. Allgemeine Flächenformen. Spirallinien. Gedrehte Wülste. Frucht der Wolfsmilch und des Froschlöffels. Wellenförmige Meridiane und Breitenlinien. Positives und negatives Winden. Brombeere. Meerstrandskieferzapfen. Himbeere. Rosskastanie (Stacheln und Zähne). Wülste 2. Ordnung. Flächen mit ähnlichen Querschnitten. — Der speculative Gedanke. Blattintegral. Aufgabe der Pflanzenmorphologie. Das Lupinenblatt. Auffinden der Blattgleichung. Der Spiegelcharakter. Das Rinderhorn.

Es muss in Erstaunen setzen, dass die trigonometrischen Funktionen, welche von den Indiern einige Zeit nach dem Tode des grossen Mathematikers Ptolemäus entdeckt wurden, in Verbindung mit dem im 17. Jahrhundert durch Descartes und Fermat aufgestellten Coordinaten-Begriff nicht mehr ausgebeutet sind, bevor man dazu überging, neue Functionen zu schaffen. Curven und Flächen von ungeahnter Formenfülle und Schönheit lassen sich mit ihrer Hülfe finden. Leider muss ich hier darauf verzichten, Figuren beizufügen, indessen sind ja in „analytische Form der Blätter" fast 150 Figuren bereits von mir veröffentlicht worden. Diese Arbeit wird sich vorwiegend mit Fruchtformen beschäftigen, doch auch gelegentlich andere organische Gebilde und verwandte Formen heranziehen. Zur Anwendung gelangen geographische Coordinaten, so dass unter φ stets die geographische Länge, unter ϑ die geographische Breite verstanden sein soll; dabei läuft φ von 0 bis 360, ϑ von -90 bis $+90$. Dem entsprechend werden auch die Begriffe n. Meridian für $\varphi = n$ und p. Breitenlinie für $\vartheta = p$ gebraucht werden, ebenso Nord- und Südpol für $\vartheta = \pm 90$, Aequator für $\vartheta = o$.

Die Art der Behandlung unterscheidet sich wesentlich von der in der Flächentheorie vorgeschriebenen, indem die intuitive Anschauung zu leisten hat, was sonst nur durch die denkbar schwierigsten Rechnungen zu erreichen ist. Man versuche nur einmal die Haupt-

Krümmungsradien unserer einfachsten Flächen zu berechnen, die ungeheuren Ausdrücke werden gar bald vor weiterer Rechnung abschrecken.

Im allgemeinen werden wir von einem vorliegenden Naturkörper den Aequator und den o-Meridian suchen und dann die Flächengleichung aufstellen, die beide enthält.

Besonders einfach gestaltet sich die Untersuchung bei Rotationsflächen, bei denen wir stets $\vartheta = 90$ ab Rotationsaxe nehmen. Der Aequator ist dann ein Kreis, alle Meridiane sind gleich, also unabhängig von φ. Daher lauten alle Rotationsflächen

$r = f(\vartheta)$; z. B. die Seeigelform

$r = a + b \sin\vartheta$. Die Birne hat überall annähernd den Axenschnitt Fig. 40 (analyt. Form der Blätter), daher ihre Gleichung

$r = 32 + 8 \sin\vartheta - 9{,}4 \sin 3\,\vartheta$. Der Pfirsich lautet etwa (Fig. 43)

$r = 50 \sqrt[10]{1 + \sin\vartheta}$; die Apfelgleichung

$r = 100 \sqrt[10]{1 + \sin\vartheta} - 30\ (1 + \sin^9\vartheta)$. Will ich die dort gezeichneten Figuren verwerten, so muss ich sie negativ um 90^0 drehen, damit die Symmetrieaxe zur Axe $\vartheta = 90$ wird; dabei ist zu setzen für $\cos p\varphi$

$\cos p\vartheta$, wenn $p = 4n$

$-\cos p\vartheta$, „ $p = 4n + 2$

$\sin p\vartheta$ „ $p = 4n + 1$

$-\sin p\vartheta$ „ $p = 4n - 1$ ist. Für Wurzelausdrücke giebt die Reihenentwicklung genügende Auskunft, so geht z. B.

$$\sqrt[10]{1 + \cos\varphi} \text{ über in } \sqrt[10]{1 + \sin\vartheta}.$$

In den meisten Fällen ist aber der Aequator kein Kreis. Ein einfaches Beispiel wird uns zeigen, wie wir dann verfahren müssen.

Wir wollen die Gleichung einer Fläche aufstellen, die den Aequator $r = 1 + \cos\varphi + \cos^2 3\varphi$ hat und deren 0. Meridian lautet: $r = 2 + \sin\vartheta + \cos^2 5\,\vartheta$, das geht, da sie beide den Anfangsradius $r = 3$ haben. Durch Constantenvergleichung und Beachten der Bedingung, dass r eindeutig sein muss für $\vartheta = 90$ erhalten wir

$$r = a + b\cos\varphi + (2 - a - b)\cos^2 3\,\varphi + (3 - a)\sin\vartheta + (1 - a)\cos^2 5\,\vartheta - b\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$+ (1 - b)\cos\varphi\cos^2 5\,\vartheta - (2 - a - b)\cos^2 3\,\varphi\sin\vartheta + (a + b - 1)\cos^2 3\,\varphi\cos^2 5\,\vartheta;$$

da aber r auch im Südpol ($\vartheta = -90$) eindeutig sein muss, kommen noch hinzu die Bedingungen $b = o$, $a = 2$, so dass unsere Fläche lautet:

$$r = 2 + \sin\vartheta + \cos^2 5\,\vartheta\,(\cos^2 3\varphi + \cos\varphi - 1).$$

Sie hat auf dem Kegel $\vartheta = 18$ die Breitenlinie $r = 2{,}31$

$\vartheta = 36$	„	$r = 1{,}59 + \cos\varphi + \cos^2 3\,\varphi$
$\vartheta = 54$	„	$r = 2{,}81$
$\vartheta = 72$	„	$r = 1{,}95 + \cos\varphi + \cos^2 3\,\varphi$
$\vartheta = -18$	„	$r = 1{,}69$
$\vartheta = -36$	„	$r = 0{,}41 + \cos\varphi + \cos^2 3\varphi$
$\vartheta = -54$	„	$r = 1{,}19$
$\vartheta = -72$	„	$r = 0{,}05 + \cos\varphi + \cos^2 3\varphi$

Für $\vartheta = 90$ ist $r = 3$

$\vartheta = -90$ ist $r = 1$

Auf jedem Meridian findet die Beziehung statt:

$$r_{\vartheta} - r_{\vartheta_1} + r_{\vartheta + 18} - r_{\vartheta_1 + 18} = 3{,}92 \sin \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2} \cos \frac{\vartheta + \vartheta_1 + 36}{2};$$

Auf jeder Breitenlinie: $r_{\varphi} - r_{\varphi_1} + r_{\varphi + 30} - r_{\varphi_1 + 30} = 2 \cos^2 5\vartheta \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi + \varphi_1 + 60}{2}$

Der 0. Meridian ist $r = 2 + \sin\vartheta + \cos^2 5\vartheta$
„ 30. „ „ $r = 2 + \sin\vartheta - 0{,}13 \cos^2 5\vartheta$
„ 60. „ „ $r = 2 + \sin\vartheta + 0{,}5 \cos^2 5\vartheta$
„ 90. „ „ $r = 2 + \sin\vartheta - \cos^2 5\vartheta$
„ 120. „ „ $r = 2 + \sin\vartheta - 0{,}5 \cos^2 5\vartheta$
„ 150. „ „ $r = 2 + \sin\vartheta - 1{,}87 \cos^2 5\vartheta$
„ 180. „ „ $r = 2 + \sin\vartheta - \cos^2 5\vartheta$

Der $(\pi + n)$. ist derselbe wie der $(\pi - n)$. Der 30. weicht sehr wenig von $r = 2 + \sin\vartheta$ ab, welche Fläche wir uns als Niveaufläche vorstellen können; der 150. weicht am meisten ab, wie der Factor von $\cos^2 5\vartheta$ zeigt, er hat die spitzesten Lappen und besteht aus 3 Zweigen, die vom Pole ausgehen. Zwischen den Horizontalkurven, die für $\vartheta = \pm 18, \pm 54$, Kreise sind, erheben sich gewissermassen Berge mit den Spitzen $\varphi = 0, 60, 120, 180$ und $\vartheta = 72, 36, 0, -36, -72$; im Ganzen 30. Diese Berge sind getrennt durch die Meridiane $\varphi = 30, 90, 150 \ldots$ Zwischen den Bergen befinden sich Thalmulden $\varphi = 30, 90, 150$, $\vartheta = 0, \pm 36, \pm 72$, im Ganzen 30. Für $\vartheta = \pm 90$ haben wir weder Berg noch Thal, sondern eine Art Abhang, der im 2. und 3. Quadranten besonders steil abfällt.

Um diese Fläche zu zeichnen, stehen uns verschiedene Mittel zur Verfügung. Wir können die schräge Parallelperspective zu Grunde legen, bei der die Diagonalen des Quadrates sich unter 30^0 schneiden, während die eine auf $^1/_3$ verkürzt erscheint. Der umschriebene Kreis erscheint dann als Ellipse $r = \frac{a}{\sqrt{1 + 32 \sin^2\varphi}}$; sie dient zunächst als Grundlage für die perspectivische Aequatorconstruction und giebt parallel verschoben einen Querschnitt des Kegels $\vartheta = \text{csts}$. Etwas deutlicher wird die Figur in der Ellipse $r = \frac{3}{\sqrt{1 + 5 \sin^2\varphi}}$; wobei die Verkürzung $^2/_3$ beträgt unter 30^0. Ich zeichne die z-Axe senkrecht zur x-Axe, hierzu unter 150^0 geneigt die y-Axe, dann die Ellipse deren Radien ε_ψ heissen sollen. Der Schnitt des Kegels $\vartheta = \vartheta_1$ mit der Fläche soll aufgefunden werden. Zu diesem Zwecke verschiebe ich die Ellipse auf der z-Axe um $\varepsilon_0 \operatorname{tg} \vartheta_1$. Die Fläche $r = f(\varphi, \vartheta)$ wird geschnitten in einer Curve deren Projection auf die xy-Ebene lautet

$\varrho = \cos\vartheta_1 . f(\varphi, \vartheta_1)$. Um diese ebene Curve perspectivisch richtig zu erhalten, muss ich, ausgenommen ϱ_0 und ϱ_π, die Länge von ϱ_φ und seine Richtung verändern. Es entsprechen sich ϱ_0 und ε_0, ϱ_{90} und ε_{30}, ϱ_{180} und ε_{180}. Das ε_ψ, welches dem ϱ_φ entspricht, erhalte ich durch Ellipsendurchmesser, die ich parallel zu den Seiten des eingeschriebenen regulären Vierecks, Achtecks usw. ziehe. Habe ich das zu ϱ_φ gehörige ε_ψ gefunden, so trage ich $\varrho_\varphi \frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_0}$ auf ε_ψ ab, ziehe im Endpunkte eine Parallele zur z-Axe und bestimme den Schnitt mit dem Kegel, indem ich auch in seiner Grundfläche $\varepsilon \parallel \varepsilon_\psi$ ziehe und die zugehörige Kegelseite ziehe. Da diese Construction im allgemeinen zu umständlich sein wird, versuchen wir die Frontperspective anzuwenden. Dazu ist jedoch die Lösung einer Aufgabe nötig: Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller y-Ordinaten einer Curve $r = f(\cos\varphi)$? Wenn ϱ und ψ die Coordinaten des geometrischen Ortes sind, haben wir die Beziehungen:

$$r\cos\varphi = \varrho\cos\psi$$

$$\frac{r}{2}\sin\varphi = \varrho\sin\psi,$$ daher heisst der Ort

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{4-3\cos^2\psi}}\cdot f\left(\frac{\cos\psi}{\sqrt{4-3\cos^2\psi}}\right).$$ So erhalte ich z. B. aus

$r = 5 + 2\cos\varphi + 3\cos^{71}\varphi$ (Fig. 21) als geometrischen Ort:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{4-3\cos^2\psi}}\left[5 + \frac{2\cos\psi}{\sqrt{4-3\cos^2\psi}} + \frac{3\cos^{71}\psi}{\sqrt{(4-3\cos^2\psi)^{71}}}\right].$$ Soll die neue Ordinate allgemeiner nicht $\frac{1}{2}$ sondern $\frac{1}{n}$ der alten betragen, so ist zu setzen

$$r = \varrho\sqrt{n^2-(n^2-1)\cos^2\psi}$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\psi}{\sqrt{n^2-(n^2-1)\cos^2\psi}}.$$ Diese Art der Gestaltänderung dürfen wir die elliptische nennen, da bei ihr die Ellipse

$$r = \frac{a}{\sqrt{1+c\sin^2\varphi}}$$ wird zu $$r = \frac{a}{\sqrt{1+(n^2+c\,n^2-1)\sin^2\varphi}},$$ also eine Ellipse bleibt. Für $n = 3$ erhalte ich z. B. aus Fig. 11 die bekannte Blattform:

$$\varrho = \frac{6}{\sqrt{9-8\cos^2\psi}}\left(1 + \frac{\cos^5\psi}{\sqrt{(9-8\cos^2\psi)^5}}\right).$$ Diese Erkenntnis lässt sich auch umgekehrt verwerten zur Vereinfachung von Constructionen; es liege z. B. die Aufgabe vor, das Bild zu liefern von

$$r = \frac{d}{\sqrt{n^2-(n^2-1)\cos^2\varphi}}\left(a + b\frac{\cos\varphi}{\sqrt{n^2-(n^2-1)\cos\varphi}} + c\frac{\cos^3\varphi}{\sqrt{(n^2-(n^2-1)\cos^2\varphi)^3}}\right),$$

so zeichne ich $r = d(a + b\cos\varphi + \cos^3\varphi)$ und schneide nachher von jeder y-Ordinate $\frac{1}{n}$ ab. In ähnlicher Weise, wie ich hierdurch die Gestalt einer Figur nach Bedarf schlanker, kann ich sie auch gedrungener machen, indem ich dieselbe Methode auf die x-Coordinate anwende, dabei ist zu setzen:

$$r = \varrho\sqrt{1+(n^2-1)\cos^2\psi}\ ;\ \cos\varphi = \frac{n\cos\psi}{\sqrt{1+(n^2-1)\cos^2\psi}}.$$ Nach diesen Vorbesprechungen ist eine frontperspectivische Darstellung unserer Flächen, bei der also auch ϱ_{90} dem ε_{90} entspricht, höchst einfach.

Als dritte und beste Art, unsere Flächen darzustellen, empfiehlt es sich, eine Reihe von Meridianen zu zeichnen, auszuschneiden und unter den zugehörigen Winkeln aneinanderzukleben, indem man Keile einschiebt, die die Längendifferenz einhalten. Diese Darstellungsart ist sehr einfach, erfordert weniger Zeit und vermittelt eine weit bessere Anschauung als die perspectivische Zeichnung. —

Nach dieser Abschweifung über das Zeichnen, kehren wir zu unserer Fläche zurück. Es ist einleuchtend, woher bei unserer Fläche $(\cos^2 3\varphi, \cos^2 5\vartheta)$ die Zahl $30 = 2.3.5$ kommt, und auch, wie man nach Belieben eine andere gerade Zahl erhalten kann, z. B. 32 Berge, wenn man $\cos^2 4\varphi$ und $\cos^2 4\vartheta$ oder $\cos^2 2\varphi$ und $\cos^2 8\vartheta$ benutzt. Unserer Fläche liegt zu Grunde die Rotationsfläche $r = 2 + \sin\vartheta$; von ihr bleiben nur erhalten gewissermassen als Ufer, wenn wir uns die Mulden mit Wasser ausgefüllt denken, die Breitenkreise $\vartheta = \pm 18$, ± 54, die beiden Pole und die Meridiane, für die

$\cos^2 3\varphi + \cos\varphi - 1 = 0$ ist. Um diese zu erhalten,

subtrahiere ich: $\cos^2 3\varphi + \sin^2 3\varphi - 1 = 0$. Dann habe ich

$\sin^2 3\varphi = \cos\varphi$, welche Gleichung im 1. Quadranten drei reelle Wurzeln hat bei ungefähr

$$\varphi = 24\frac{1^0}{2},\ 40^0,\ 71\frac{1^0}{2}$$

Wollten wir die Gleichung des Gehäuses der grossen Tellerschnecke nach dieser Methode aufstellen, so hätten wir zunächst den Aequator und den 0. Meridian nötig. Der Aequator ist eine Spirale, die bei vorliegendem Exemplare die 0-Axe (von der Spitze zum Munde) in den Entfernungen $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 und 16 mm schneidet, demnach ist seine Gleichung $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi} - 1}$; Der 0. Meridian besteht aus sich berührenden Kreisen mit den Radien $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 mm, während ihre Mittelpunkte die Entfernung $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, 3, 6, 12 mm von der Spitze haben, also lauten sie

$$r^2 - \frac{1}{16} - \frac{3}{2}\, r \cos\vartheta + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0 \text{ usw. bis}$$

$r^2 - 16 - 24\, r \cos\varphi + 12^2 = 0$. Das Produkt dieser 5 Gleichungen ergiebt dann den 0. Meridian; indem ich ihn combiniere mit der Spirale als Aequator, erhalte ich dann die Flächengleichung, die aber im nächsten Jahre schon nicht mehr stimmen würde, da die Schnecke das Haus vergrössert. Deshalb und um die Gleichung in handlicherer Form zu erhalten, stellen wir folgende Ueberlegung an: Der Kreis in der ϑ-Ebene mit dem Radius α und dessen Mittelpunkt vom 0 — Punct die Entfernung a hat, ist

$r^2 + a^2 - 2\, ar \cos\vartheta - \alpha^2 = 0$. Wenn dieser Kreis um die Axe ($\vartheta = 90$) rotiert, so dass sein Mittelpunkt die Spirale beschreibt, die durch $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, 3, usw. geht und sein Durchmesser stets gleich dem Abstande der beiden benachbarten Windungen der ursprünglichen Spirale ist, dann beschreibt er unsere Fläche, daher ist zu setzen

$$a = 3 . 2^{\frac{\varphi}{2\pi} - 2}$$

$2\alpha = r_{\varphi + 2\pi} - r_{\varphi}$, wobei r der Aequatorspirale angehört, also

$$2\alpha = 2^{\frac{\varphi}{2\pi} - 1} \text{ und}$$

$\alpha = 2^{\frac{\varphi}{2\pi} - 2}$. Demnach ist die Schneckenhausgleichung

$$r^2 + 9 . 2^{\frac{\varphi}{\pi} - 4} - 3 .\ 2^{\frac{\varphi}{2\pi} - 1}\, r \cos\vartheta - 2^{\frac{\varphi}{\pi} - 4} = 0 \text{ oder}$$

$$r^2 - 3 . \ 2^{\frac{\varphi}{2\pi} - 1} \ r \cos\vartheta + 2^{\frac{\varphi}{\pi} - 1} = 0,$$ woraus folgt

$$r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi} - 2} (3 \cos \vartheta \pm \sqrt{1 - 9 \sin^2\vartheta}).$$ Als Aequator haben wir hieraus $(r - 2^{\frac{\varphi}{2\pi}})\ (r - 2^{\frac{\varphi}{2\pi} - 1}) = 0$, welche beiden Äste aber denselben Weg machen. Der 0. Meridian enthält die verlangten Kreise $r = \frac{1}{4} (3 \cos \vartheta \pm \sqrt{1 - 9 \sin^2 \vartheta})$, $r = \frac{1}{2} (3 \cos\vartheta \pm \sqrt{1 - 9 \sin \vartheta})$ usw. Ist $1 - 9 \sin^2\vartheta < 0$, also der absolute Betrag von $\vartheta > 19^0\ 20{,}'8$ so existiert die Fläche nicht, ist $\vartheta = \pm 19^0\ 20{,}'8$, so berührt dieser Kegel unser Schneckenhaus. Ist $- 19^0 20{,}'8 < \vartheta < + 19^0 20{,}'8$, so wird von diesem Kegel unsere Fläche in 2 Spiralen geschnitten, die für $\vartheta = 0$ zusammenfallen, die aber in allen übrigen Lagen symmetrisch liegen zur Spirale

$$r = 3 \cos \vartheta . \ 2^{\frac{\varphi}{2\pi} - 2}.$$ Für die Berührungslinie haben wir

$$\cos\vartheta = \frac{2}{3} \sqrt{2},$$ also

$$r = 2^{\frac{\varphi - \pi}{2\pi}},$$ welche Raumkurve die Projektion

$$\varrho = \frac{1}{3} . \ 2^{\frac{\varphi}{2\pi} + 1}$$ in der φ-Ebene hat.

Manche Früchte haben Wülste, die sich von der Basis bis zur Spitze hinziehen, besonders Kapselfrüchte, viele Cacteen zeigen diesen Charakter selbst. Wir nehmen als Beispiel, wie diese Körper aufzustellen sind, die Frucht des grossblättrigen Evonymus, sie ist annähernd eine gedrückte Kugel mit 5 breiten Flügeln und 5 niedrigen Wülsten dazwischen von der Basis bis zur Spitze. Daher ist der Aequator

$$r = 3 + \frac{3}{2} (\cos^5\varphi + \cos^2 5\varphi),$$ der 0. Meridian

$$r = 3 (1 + \cos\vartheta \cos^2\frac{\vartheta}{2}),$$ und die Fläche lautet

$$r = 3 \left[1 + \frac{1}{2} \cos \vartheta \cos^2\frac{\vartheta}{2} (\cos 5 \varphi + \cos^2 5\varphi) \right]$$ mit den Kreisen $r = 3$ als 18., 36., 54. Meridian, der 72. lautet wie der 0., der 12. ist $r = 3 (1 + 0{,}375 \cos \vartheta \cos^2\frac{\vartheta}{2})$ der 24. ist $r = 3 (1 - 0{,}125 \cos\vartheta \cos^2\frac{\vartheta}{2})$. Es ist nicht ratsam, Parallelschnitte zur φ-Ebene zu untersuchen, da die Querschnitte meist in unübersichtlicher Form auftreten. Setzen wir $h = r \sin\vartheta$ und $\varrho = r \cos\vartheta$, so erhalten wir

$$\frac{4}{3} \ \frac{\varrho^2 + h^2}{\varrho} \cdot \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} - 3}{\varrho + \sqrt{\varrho^2 + h^2}} = \cos 5\varphi + \cos^2 5\varphi$$ als Gleichung des Querschnittes im Abstande h von der φ-Ebene. Weit klarer sind die Schnittflächen mit dem Mantel ϑ = constans, die wir bereits als Breitenlinien bezeichnet haben. So haben wir für

$$\vartheta = 30 : r = 3\,(1 + 0{,}4\,(\cos 5\varphi + \cos^2 5\varphi))$$

$\vartheta = 60 : r = 3\,(1 + 0{,}2\,(\cos 5\varphi + \cos^2 5\varphi))$. Diese Linien nähern sich den Polen zu ebenen Curven und zwar Kreisen; schon für $\vartheta = 80$ haben wir $r = 3.\,(1 + 0{,}05\,(\cos 5\varphi + \cos^2 5\varphi))$ .Durch Differentiation erhalten wir die Maxima und Minima von r aus $\sin 5\,\varphi = 0$ und $1 + 2 \cos 5\,\varphi = 0$, nämlich für $\varphi = 0, 24, 36, 48, \ldots$ $r = 3.\,1{,}1$ und $r = 3.\,0{,}99$, also beide nahe gleich 3. —

Wir wollen jetzt eine Fläche aufstellen, deren 0. Meridian unser Nesselblatt (Fig. 56) $r = 5 + 2 \cos\varphi + 3 \cos^{71}\varphi - \sin^2 18\varphi.\ \cos^4\frac{\varphi}{2}$ ist, oder nach 90^0 Drehung $r = 5 + 2 \sin\vartheta + 3 \sin^{71}\vartheta - \sin^2 18\,\vartheta.\ \left(\frac{1 + \sin\vartheta}{2}\right)^2$ und deren Aequator die Rosette ist $r = \frac{10}{9}\,(4 + \frac{1}{2} \cos^2 3\varphi)$ mit 6 Lappen und ebensoviel Kerben. Wenn ich die Bedingung der Eindeutigkeit für $\vartheta = -90$ zunächst fortlasse, erhalte ich leicht als Gleichung der Fläche, die allen Bedingungen genügt:

$$r = \frac{1}{9}\Big[40 + 5 \cos^2 3\varphi\,(1 + \sin\vartheta - 2 \sin^{71}\vartheta + \frac{p}{4} \sin^2 18\,\vartheta.\ (1 + \sin\vartheta)^2) + 13 \sin\vartheta$$
$$+ 37 \sin^{71}\vartheta - \left(\frac{9 + 5\,p}{4}\right) \sin^2 18\,\vartheta.\ (1 + \sin\vartheta)^2\Big]$$

wobei p beliebig ist. Für $\vartheta = -90$ haben wir

$r = \frac{10}{9}\,(\cos^2 3\,\varphi - 1)$, d. h. da wir negative Radien ausser Betracht lassen: der Südpol ist der 0-Punkt. Allgemeiner heisst die Fläche ohne Rücksicht auf den Südpol:

$$r = \frac{40}{9} + (2 - l) \sin\vartheta + (3\,\frac{5}{9} + l) \sin^{71}\vartheta + \frac{p}{4} \sin^2 18\,\vartheta$$
$$(1 + \sin\vartheta)^2 + \cos^2 3\,\varphi\,\Big[\frac{5}{9} + l \sin\vartheta - (1 + \frac{5}{9}) \sin^{71}\vartheta -$$
$$\frac{1 + p}{4} \sin^2 18\,\vartheta.\ (1 + \sin\vartheta)^2\Big]$$

wobei l und p beliebig sind; sie wird für $l = \frac{5}{9}$ zur vorhergehenden speziellen. In dem besonderen Falle $p = 0$, $l = -3\frac{5}{9}$ erhalte ich die einfache Fläche:

$$r = \frac{40}{9} - 1\frac{5}{9} \sin\vartheta + \cos^2 3\,\varphi\,\Big[\frac{5}{9} - 3\frac{5}{9} \sin\vartheta + 3 \sin^{71}\vartheta$$
$$- \frac{1}{4} \sin^2 18\,\vartheta\,(1 + \sin\vartheta)^2\Big].$$

Auf jedem Kegel $\vartheta = \vartheta_1$ liegt von der Fläche eine Rosette der Form $r = s + t \cos^2 3\varphi$, welche auf der φ-Ebene die Projektion $\varrho = \cos\vartheta_1.\ (s + t \cos^2 3\,\varphi)$ hat. Alle Meridiane sind nesselblattartig, da sie lauten

$$r = m + n \sin\vartheta + p \sin^{71}\vartheta - q \sin^2 18\,\vartheta.\ (1 + \sin\vartheta)^2.$$

Nur der 30., 90. und 150. sind von der einfachen Gestalt

$r = \frac{1}{9}\,(40 - 14 \sin\vartheta)$ und die benachbarten lassen nur schwach die Zähne erkennen, der n. ist derselbe als der $(60 - n)$. und der $(60 + n)$., da diese Werte für φ eingesetzt in $\cos^2 3\varphi$ den Wert nicht ändern; der

10. lautet $r = \frac{175}{36} - \frac{38}{9} \sin\vartheta + \frac{9}{4} \sin^{71}\vartheta - \frac{3}{16} \sin^2 18\,\vartheta.\ (1 + \sin\vartheta)^2$ der

20. „ $r = \frac{55}{12} - \frac{22}{9} \sin\vartheta + \frac{3}{4} \sin^{71}\vartheta - \frac{1}{16} \sin^2 18\,\vartheta.\ (1 + \sin\vartheta)^2$ der

15. „ $r = \frac{85}{18} - \frac{30}{9} \sin\vartheta + \frac{3}{2} \sin^{71}\vartheta - \frac{1}{8} \sin^2 18\,\vartheta.\ (1 + \sin\vartheta)^2.$

Setze ich aber in der allgemeinen Gleichung $l = -\frac{5}{9}$, $p = -1$, so haben wir die Fläche

$$r = \frac{40}{9} + 2\frac{5}{9} \sin\vartheta + 3 \sin^{71}\vartheta - \frac{1}{4} \sin^2 18\,\vartheta.\ (1 + \sin\vartheta)^2 + \frac{5}{9} \cos^2 3\varphi\ (1 - \sin\vartheta),$$

bei der die Projection der Breitenlinie unter ϑ_1 die Rosette ist:

$$\varrho = m + \frac{5}{9} \cos^2 3\,\varphi.\ \cos\vartheta_1\ (1 - \sin\vartheta_1),$$ welche die stärksten Kerben hat für $\vartheta_1 = 0$, die kleinsten für $\vartheta_1 = 90$, für 45^0 haben wir die Kerbenhöhe 0,115; für 30^0 : 0,24; für 60^0 : 0,037. Während wir hier ein einfaches Gesetz für die Abnahme der Kerbenhöhe haben, zeigte der vorige Spezialfall ein einfaches, für die Abnahme des Grundkreisradius der projectierten Rosette $\vartheta = \vartheta_1$, da

$$\varrho = \frac{2}{9} \cos\vartheta_1\ (20 - 7 \sin\vartheta_1) + g \cos^2 3\,\varphi.$$

In unserer 2. Fläche hat die 30. Breitenlinie annähernd die Projection

$$\varrho = \frac{1}{18}\sqrt{3}\,.(51{,}5 + 2{,}5 \cos^2 3\,\varphi)$$

die 60. $$\varrho = \frac{1}{18}\sqrt{3}\ (59{,}92 + 0{,}67 \cos^2 3\,\varphi).$$

Dieselben lauten auf der südlichen Fläche:

$$\varrho = \frac{1}{18}\sqrt{3}\ (28{,}5 + 7{,}5 \cos^2 3\varphi)$$ und

$$\varrho = \frac{1}{18}\sqrt{3}\ (20{,}08 + 4{,}33 \cos^2 3\varphi)$$ womit

eine genügend klare Vorstellung der Fläche erreicht sein dürfte.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Bucheckerform in einer Gleichung aufzustellen. Der Aequator ist ein gleichseitiges Dreieck mit eingebogenen Seiten. Um dieses zu finden, gehen wir aus von der bekannten Curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, die ja ein gleichseitiges Viereck mit eingebogenen Seiten darstellt. Sie heisst in Polarcoordinaten

$$\left(\frac{1 - r^2}{3}\right)^3 = \frac{r^4}{4} \sin^2 2\,\varphi, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{r} = \sqrt{1 + \frac{3}{2} \sin^{\frac{2}{3}} 2\,\varphi.\ (\cos^{\frac{2}{3}}\varphi + \sin^{\frac{2}{3}}\varphi)}$$

und hat die 4 Maxima bei 0, 90, 180, 270, die Minima bei 45, 135 u. s. w. Nun sollen die 3 Maxima bei 0, 120, 240, die Minima bei 60, 180, 300 sein, das erreiche ich, wenn ich $\frac{3}{4}\varphi$ statt φ setze. Dann ist der Aequator unserer Frucht:

$$\frac{1}{r} = \sqrt{1 + \frac{3}{2} \sin^{\frac{2}{3}} \frac{3\varphi}{2}.\ \left(\cos^{\frac{2}{3}} \frac{3\varphi}{4} + \sin^{\frac{2}{3}} \frac{3\varphi}{4}\right)}$$

Sein Radius hat an den verlangten Stellen die Maxima 1 und die Minima $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}}{3+\sqrt[3]{2}}}$. Als 0. Meridian haben wir die Curve $r = 3 + 2 \sin\vartheta$ in schlankerer Gestalt also etwa $r = \frac{3+2\sin\vartheta}{\sqrt{1+8\cos^2\vartheta}}$. Der 0. Meridian und der Aequator beginnen mit $r = 1$, beide sind enthalten in der Fläche

$$r = \frac{1}{\sqrt{1+8\cos^2\vartheta}}\left[5\sin\vartheta + \frac{3\,(1-\sin\vartheta)}{\sqrt{1+\frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}}\frac{3\varphi}{2}\left(\cos^{\frac{2}{3}}\frac{3\varphi}{4}+\sin^{\frac{2}{3}}\frac{3\varphi}{4}\right)}}\right],$$

welche auch für $\vartheta = 90$ einwertig ist, aber für $\vartheta = -90$ mehrere positive Werte ergiebt in der Umgebung von $\varphi = 0$, 120 und 240. Da nun diese Fläche wegen ihrer Unstetigkeit im Südpol unbrauchbar ist, sind wir gezwungen, allgemein die Frage zu beantworten: Wann giebt es eine Fläche, welche einen vorgeschriebenen Aequator, 0. Meridian mit gleichem Anfang, einwertigen Nord- und Südpol hat?

Der Aequator sei $r = g\,(\varphi, b_1 \ldots b_n)$,
Der 0. Meridian „ $r = f\,(\vartheta, a_1 \ldots a_\varkappa)$,
Die Fläche „ $r = F\,(\varphi, \vartheta, c_1 \ldots c_{n\varkappa})$ wobei die a, b und c Constante sind, dass dann $n\varkappa$ Constante c dasein können, folgt daraus, dass jedes $\cos^p\varphi$ in Verbindung stehen kann mit jedem $\cos^t\vartheta$. Ich erhalte dann zur Bestimmung der $n\varkappa$ Unbekannten c_r aus der identischen

$$F\,(\varphi, o, c_1 \ldots c_{n\varkappa}) = g\,(\varphi, b_1 \ldots b_n)$$

n Gleichungen, ferner $\varkappa$ aus

$$F\,(o, \vartheta, c_1 \ldots c_{n\varkappa}) = f\,(\vartheta, a_1 \ldots a_\varkappa).$$

Hierbei tritt eine Gleichung doppelt auf da wir dafür gesorgt hatten, dass $f\,(o, a_1 \ldots a_\varkappa) = g\,(o, b_1 \ldots b_n)$ ist, wir haben demnach bis jetzt $(n + \varkappa - 1)$ Gleichungen, dazu kommen wegen der Einartigkeit in den Polen $(n - 1)$ aus

$F\,(90, \varphi, c_1 \ldots c_{n\varkappa}) =$ constans, da alle Potenzen von $\cos\varphi$ verschwinden müssen und $(n - 1)$ andere aus

$F\,(-90, \varphi, c_1 \ldots c_{n\varkappa}) = C$, also zusammen $3n + \varkappa - 3$ Gleichungen. Ist mithin

$n\varkappa = 3n + \varkappa - 3$, also $\varkappa = 3$, so sind die Constanten c_r eindeutig bestimmt; ist $\varkappa > 3$, so sind sie unbestimmt und wir haben viele Flächen, die denselben Bedingungen genügen; ist $\varkappa < 3$, so ist die Fläche im allgemeinen nach dieser Methode unmöglich. Infolgedessen muss die Entwicklung des 0. Meridians in Potenzen von $\cos\vartheta$ wenigstens 3 Glieder haben.

Nehme ich z. B. den 0. Meridian der Buchecker in der Form

$r = 1 + \sin\vartheta + \sin^2\vartheta$, so ist $\varkappa = 3$ und die Gleichung lautet

$$r = \sin\vartheta.\ (1 + 2\sin\vartheta) + \frac{\cos^2\vartheta}{\sqrt{1+\frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}}\frac{3\varphi}{2}\cdot\left(\cos^{\frac{2}{3}}\frac{3\varphi}{4}+\sin^{\frac{2}{3}}\frac{3\varphi}{4}\right)}}$$

Würde ich als 0. Meridian wählen.

$r = 1 + \sin\vartheta + \sin^2\vartheta + \sin^3\vartheta$, so erhielte ich die Flächenschar

$$r = 2\sin^2\vartheta + \sin\vartheta\,(2 - (1 + n)\cos^2\vartheta) + \frac{\cos^2\vartheta.\ (1 + n\sin\vartheta)}{\sqrt{A}}$$

worin A den obigen Radikanden bedeutet. Bei der Annahme $r = 1 + \sin\vartheta + \sin^2\vartheta + \sin^3\vartheta + \sin^4\vartheta$, würde ich die zweifach unendliche Flächenschar erhalten:

$$r = \sin\vartheta.\ (1 + n + (2 + p)\sin\vartheta + (1 - n)\sin^2\vartheta + (1 - p)\sin^3\vartheta) + \frac{\cos^2\vartheta\,(1 - n\sin\vartheta - p\sin^2\vartheta)}{\sqrt{A}}$$

Die allgemeine Fläche $r = c + \sin\vartheta\, f(\vartheta) + \cos\vartheta^2\, g(\vartheta)\, F(\varphi)$ worin f, g und F beliebige Functionen sind, ist eindeutig an den Polen: Aequator und 0. Meridian haben denselben Anfangsradius $c + g(0)\,F(0)$. Wie müssen die drei Funktionen gewählt werden, dass die Fläche den vorgeschriebenen Aequator $r = A(\varphi)$ und den vorgeschriebenen 0. Meridian $r = M(\vartheta)$ enthält?

Aus $A(\varphi) = c + g(0).\ F(\varphi)$ und

$M(\vartheta) = c + \sin\vartheta\, f(\vartheta) + \cos^2\vartheta.\ g(\vartheta).\ F(o)$ folgt:

$$r = c + \sin\vartheta.\ f(\vartheta) + \frac{A(\varphi) - c}{M(o) - c}\,[M(\vartheta) - c - \sin\vartheta.\ f(\vartheta)].$$ Da

$\cos^2\vartheta$ fortgefallen ist, haben wir auch die Eindeutigkeit an den Polen verloren, um sie wieder herzustellen, müssen erfüllt sein

$M(90) - c - f(90) = o$ und

$M(-90) - c + f(-90) = o$, d. h.

$f(\vartheta) = [M(\vartheta) - c]\sin^{2n+1}\vartheta$. Deshalb ist die Fläche

$$r = c + \sin^{2n}\vartheta\,[M(\vartheta) - c] + \frac{A(\varphi) - c}{M(o) - c}\,[M(\vartheta) - c]\,(1 - \sin^{2n}\vartheta).$$

Für $n = 1$ wird sie zu $r = c + [M(\vartheta) - c].\left(\sin^2\vartheta + \frac{A(\varphi) - c}{M(o) - c}\cos^2\vartheta\right)$, welche Gleichung für $c = o$ übergeht in

$$r = M(\vartheta).\left(\sin^2\vartheta + \frac{A(\varphi)}{M(o)}\cos^2\vartheta\right).$$ Mit Hilfe dieser Gleichung

kann ich jeder Zeit auch wenn $z < 3$ ist, eine Fläche mit den geforderten Eigenschaften aufstellen. So lautet die Buchecker mit dem schlankeren Meridiane:

$$r = \frac{3 + 2\sin\vartheta}{\sqrt{1 + 8\cos^2\vartheta}}\left(\sin^2\vartheta + \frac{\cos^2\vartheta}{\sqrt{A}}\right),$$ wobei A in der dortigen

Bedeutung zu verstehen ist. Dass wir unendlich viele Flächen von dem verlangten Charakter bekommen können, erhellt daraus, dass obige Entwicklung noch gilt, wenn statt c eine beliebige Funktion von ϑ genommen wird, ausgenommen $M(\vartheta)$. Nur wenn $A(\varphi)$ eine Constante ist, d. h. der Aequator ein Kreis, giebt diese Methode eine einzige Fläche, nämlich $r = M(\vartheta)$ da dann $A(\varphi) = A(o) = M(o)$ ist, wie bei dem höhlungslosen Ringe mit Kreisquerschnitt

$r = 2\cos\vartheta$, wo $\frac{A(\varphi) - c}{M(o) - c}$ zu 1 wird; ebenso wenn

$M(\vartheta)$ eine Constante ist, d. h. der 0. Meridian ein Halbkreis, verschwindet c, da dann $M(\vartheta) = M(o)$ ist, und die Gleichung wird zu

$r = A(o)\sin^{2n}\vartheta + A(\varphi)\,.\,(1 - \sin^{2n}\vartheta)$; aber infolge der n behalten wir eine Flächenschar, z. B. bei dem 0. Meridian $r = 1$ und dem Aequator $r = \frac{1}{2}$ $(1 + \cos^2 3\varphi)$ die Schar

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 3\varphi + \sin^2 3\varphi \sin^{2n}\vartheta),$$ worin auch der 60. und 120. Meridian Halbkreise sind. Um den Einfluss von n kennen zu lernen, prüfen wir den 30. Meridian an der Stelle $\vartheta = 30$. Der zugehörige Radius liegt zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, je grösser n, um so näher an $\frac{1}{2}$, er ist $\frac{3}{4}$ für $n = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$ für $n = 1$, $\frac{17}{32}$ für $n = 2$. Also werden die Kerben zwischen den 6 Wülsten unserer Fläche schlanker und kürzer mit wachsendem r, aber auch die Wülste werden dachförmiger, bekommen mehr Rippenform, so hat der 10. Meridian in der Breite 10 für $n = \frac{1}{2}$ den Radius 0,9375, für $n = 2$ den 0,8826, während sie alle liegen zwischen 0,875 und 1.

Um den Einfluss von c zu untersuchen, nehmen wir eine Fläche mit dem Aequator $r = 1 + \cos^2 3\varphi$ und dem 0. Meridian $r = 1 + \cos^2 5\vartheta$. Sie ist für $n = 1$

$$r = c + (1 + \cos^2 5\vartheta - c)\left(1 - \frac{\cos^2 \vartheta . \sin^2 3\varphi}{2 - c}\right),$$ was man nach einigen Umformungen leicht aus der allgemeinen Fläche erhält.

Für $c = o$ ist sie $r = (1 + \cos^2 5\vartheta)\left(1 - \frac{\cos^2 \vartheta . \sin^2 3\varphi}{2}\right)$,

für $c = \cos^2 5\vartheta$: $r = 1 + \cos^2 5\vartheta - \frac{\cos^2 \vartheta . \sin^2 3\varphi}{2 - \cos^2 5\vartheta}$. Untersuchen wir in beiden den φ. Meridian, so hat die erste im allgemeinen längere Radien in bestimmter Breite da, wo

$$\frac{2}{(2 - \cos^2 5\vartheta)(1 + \cos^2 5\vartheta)} > \sin^2 3\varphi$$ ist. Beide haben gleich ausser dem 0. Meridian den 60. und 120., wie aus $\sin^2 3\varphi = o$ folgt, ausserdem die 0., 18., 36., 54., 72. Breitenlinie, wie sich ergiebt aus

$$\frac{1 + \cos^2 5\vartheta}{2} = \frac{1}{2 - \cos^2 5\vartheta}.$$ Da $\frac{2}{(2 - \cos^2 5\vartheta)(1 + \cos^2 5\vartheta)}$ ein Minimum besitzt für $\cos^2 5\vartheta = \frac{1}{2}$, sind alle ersten Radien länger bei etwa den 23 ersten Meridianen. Gleiche Radien treten auf im $23\frac{1}{2}$., $36\frac{1}{2}$., $83\frac{1}{2}$., $96\frac{1}{2}$. Meridiane in den Breiten 9, 27, 43, wie man an $\sin^2 3\varphi = \frac{8}{9}$ sieht. Dann sind bis etwa zum 33. Meridiane einige Radien der ersten Fläche kürzer als die der zweiten. Wir sehen hieran, dass wir zwar allgemein über den Einfluss eines andern c nichts aussagen können, dass wir aber in seiner Aenderung ein Mittel haben, mannigfach die Fläche zu variieren. Es handelt sich dabei stets um ein Schwanken um gewisse feste Meridiane, Breitenlinien und besondere Punkte. Wir können sie durch eine neue Bedingung festlegen, dass z. B. der 30. Meridian ein Kreis ist, das geht, da der Anfangsradius 1 ist und ebenso der für $\vartheta = 90$. Wir finden dann leicht, dass c bestimmt ist als

$$\frac{2 - (1 + \sin^2 \vartheta)(1 + \cos^2 5\vartheta)}{\cos^2 \vartheta - \cos^2 5\vartheta}.$$ Oder wenn die Bedingung allgemeiner bleibt, dass nämlich der m. Meridian die Gestalt $r = h(\vartheta)$ hat, wobei dieser

Meridian nicht bereits in der allgemeinen Fläche festgelegt sein darf und sowohl h (o) als h ($\pm$ 90) ihr entsprechen, ist für c zu setzen:

$$2 - \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 3\,m\,(3 + \cos^2 5\,\vartheta)}{h\,(\vartheta) - 1 - \cos^2 5\,\vartheta + \cos^2 \vartheta \sin^2 3\,m}$$

Noch eine andere Form einer allgemeinen Fläche $r = F\,(\varphi, \vartheta)$ mit vorgeschriebenem Aequator $r = A\,(\varphi)$ und dem 0. Meridian $r = M\,(\vartheta)$ entspringt folgender Gleichung:

$$a.\,\frac{F\,(\varphi, \vartheta) - A\,(\varphi)}{\sin^n \vartheta\;f\,(\vartheta)} = b.\,\frac{F\,(\varphi, \vartheta) - M\,(\vartheta)}{\sin^m \varphi.\,g\,(\varphi)}$$

In ihr seien f und g beliebige Functionen der sinus oder cosinus ihrer Argumente, a eine ganze rationale von $\cos\vartheta$ und b eine solche von $\cos\varphi$ aber mit einem absoluten Gliede. Dann wird F zu A für $\vartheta = o$, F zu M für $\varphi = o$. Ich erhalte daraus

$$\frac{F - A}{F - M} = \frac{b}{a}\;\frac{\sin^n \vartheta.\,f}{\sin^m \varphi.\,g}$$ mithin die Fläche

$$r = F = \frac{b\;M \sin^n \vartheta.\,f. - A\;a \sin^m \varphi.\,g}{b \sin^n \vartheta.\,f - a \sin^m \varphi.\,g},$$ n und m sind beliebige ganze Zahlen. Diese Fläche ist an den Polen eindeutig, da a dort verschwindet. Statt

$$\frac{F - A}{F - M}$$ kann ich auch nehmen $$\frac{(F - A)^p}{(F - M)^q}$$ mit demselben Effecte; es ist dann z. B. für $p = q = 2$:

$$r = F = \frac{b\;M \sin^n \vartheta.\,f - A\;a \sin^m \varphi.\,g \pm (M - A) \sqrt{a.\,b.\,\sin^n \vartheta.\sin^m \varphi.\,f.\,g}}{b \sin^n \vartheta\,f - a \sin^m \varphi\,g.}$$

An der Wolfsmilchfrucht können wir diese drei verschiedenen Methoden versuchen. Sie hat etwa den Aequator $r = 2 + \cos^2 \frac{3}{2}\,\varphi$, also eine dreiblättrige Rosette und zum 0. Meridian Herzform, etwa $r = 3\,(1 + \sin^3 \vartheta)$. Nach der ersten Methode erhalten wir ihre Fläche

$$r = 2 + \cos^2 \frac{3}{2}\,\varphi\,(1 - \sin^3 \vartheta) + 4 \sin^3 \vartheta.$$ Obgleich nämlich $\varkappa < 3$, erhalten wir doch eine Lösung, da am Südpol die negativen Radien die Eindeutigkeit nicht in Frage stellen. Die zweite Methode, welche das Auftreten anderer Funktionen, als in A und M enthalten sind, gestattet, liefert als Gleichung der Frucht:

$$r = c + (3 + 3 \sin^3 \vartheta - c)\left[\sin^{2n} \vartheta + \frac{2 + \cos^2 \frac{3}{2}\,\varphi - c}{3 - c}(1 - \sin^{2n} \vartheta)\right]$$

sie geht über in die erste Form, wenn

$$c = 3\,\frac{\sin^{2n} \vartheta\,(1 + \sin^3 \vartheta) - 2 \sin^3 \vartheta}{\sin^{2n} \vartheta - \sin^3 \vartheta}$$ genommen wird.

Die dritte Methode ergiebt die Fassung:

$$r = \frac{3\,b\,(1 + \sin^3 \vartheta) \sin^p \vartheta.\,f\,(\vartheta) - (2 + \cos^2 \frac{3}{2}\varphi)\,a \sin^m \varphi.\,g\,(\varphi)}{b \sin^p \vartheta.\,f\,(\vartheta) - a \sin^m \varphi.\,g\,(\varphi)}$$ Sie geht über in die erste, wenn zwischen a, b, f und g die Beziehung besteht:

$$\frac{f}{a} : \frac{g}{b} = \frac{1}{\sin^{n-3}\vartheta . (1 - \sin^3 \vartheta)} : \frac{\cos^2 \frac{3}{2} \varphi - 1}{\sin^m \varphi . \quad (4 - \cos^2 \frac{3}{2} \varphi)}$$

Es gelingt jetzt leicht die Fläche:

$r = 3 (1 + \sin \vartheta + \sin^{71} \vartheta) (\sin^2 \vartheta + (2 + \cos^2 \frac{5\varphi}{2}) \cos^2 \vartheta)$, welche nach der zweiten Methode gebaut ist, zu übersehen: sie hat als 0. Meridian das modificierte 71. Herz (Fig. 17) und als Aequator eine fünfteilige Rosette, sie stellt demnach eine häufiger vorkommende Fruchtform dar. Alle Meridiane sind verwandte Curven, ebenso auch alle Breitenlinien.

Die Frucht des Froschlöffels besteht in der Regel aus 30 kreisförmigen Samenscheiben. Ihr Aequator ist etwa $r = 9 + \cos^2 15 \varphi$ und jeder Meridian ein ganzer Kreis, z. B. der 0.: $r = 10 \cos \vartheta$. Demnach lautet die Fläche

$r = 9 \cos \vartheta + \cos \vartheta . \cos^2 15 \varphi$ oder

$r = \cos \vartheta (\sin^2 \vartheta + 9 + \cos^2 \vartheta . \cos^2 15 \varphi)$ nach der 2. Methode, oder

$r = \dfrac{10 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta - \cos \vartheta \sin \varphi (9 + \cos^2 15 \varphi)}{\cos \varphi \sin \vartheta - \cos \vartheta \sin \varphi}$ nach der 3. Methode. Dass die letzte Fläche unbrauchbar ist, zeigt uns der Divisor, welcher mit $\sin (\vartheta - \varphi)$ identisch ist, so dass also r an den Spiralen $\vartheta - \varphi = 0$ und $\vartheta - \varphi = 180$ unendlich wird.

Der Lösungsgang bleibt derselbe, wenn wir wellenförmige Meridiane und Breitenlinien haben, mögen nun die Wülste auf der Höhe oder in der Tiefe scharfkantig oder abgerundet im Querschnitt sein. Ich verlange z. B. eine Fläche, deren Längsschnitte nesselblattartig sind, deren Meridiane also spitze Wellenberge und stumpfe Wellenthäler haben, deren Breitenlinien dagegen umgekehrt stumpfe Wellenberge und spitze Wellenthäler haben und die etwa an Fig. 44 erinnern.

Es heisst dann der 0. Meridian:

$r = 5 + 2 \sin \vartheta + 3 \sin^{71} \vartheta - \dfrac{\sin^2 18 \vartheta}{4} (1 + \sin \vartheta)^2$, während der Aequator lautet (Fig. 44) $r = p \left(5 \sqrt[10]{1 + \cos \varphi} + \frac{1}{2} \cos^2 9 \varphi \right)$, wobei

$p = \dfrac{10}{1 + 10 \sqrt[10]{2}}$ zu nehmen ist, damit sich die beiden Curven schneiden.

Aendern wir dagegen die Vorzeichen von $\cos^2 9 \varphi$ und $\sin^2 18 \vartheta$, so haben die Wellenzüge umgekehrtes Aussehen.

Wir haben jetzt ein neues Moment einzuführen, da die Fruchtformen häufig Spirallinien zeigen. Alle Breitenlinien auf den einzelnen Kegeln (ϑ = constans) sind Curven von ähnlichem Charakter, aber die Maxima und Minima liegen nicht mehr wie bisher auf denselben Meridianen, sondern sind um ein gewisses Stück in der $+ \varphi$ oder $- \varphi$ Richtung verschoben. Ich habe dann nur nötig, in der Aequatorgleichung statt $p\varphi$ zu setzen $p\varphi + q\vartheta$; nach $\frac{180}{q}$ Steigung haben dann die Breitenlinien ihre Maxima und Minima wieder auf denselben Meridianen, wenn im Aequator nur die Quadrate von cosinus vorkommen, treten auch cosinus allein auf, so nach $\frac{360}{q}$ Steigung; dasselbe gilt von den sinus. Eine recht einfache Spiralfläche ist $r = \frac{5}{9}(8 + \cos^2(3\varphi + \vartheta).\cos\vartheta)$, wobei der Factor $\cos\vartheta$ gebraucht ist wegen der notwendigen Eindeutigkeit an den Polen.

Sie hat den Aequator $r = \frac{5}{9}(8 + \cos^2 3\varphi)$ und den 0. Meridian $r = \frac{5}{9}(8 + \cos^3\vartheta)$. Der n. Meridian ist derselbe wie der $(60 + n.)$. Als Niveaufläche können wir die Kugel $r = \frac{5}{9}.8$ ansehen, sie tritt zu Tage, wo $\cos\vartheta = o$ und $\cos(3\varphi + \vartheta) = o$ ist, also im Süd- und Nordpol und in 6 Spiralen, die den Aequator schneiden in $\varphi = 30, 90, 150, 210, 270, 330$. Die Projektionen der Breitenlinien sind $\varrho = \frac{5}{9}\cos\vartheta_1(8 + \cos^2(3\varphi + \vartheta_1)\cos\vartheta_1)$; sie sind Rosetten, deren Bogen nach den Polen zu flacher werden, während nämlich beim Aequator sich der Radius des Grundkreises zur Höhe des Bogens verhält wie 8 zu 1, ist dieses Verhältnis bei den übrigen Breitenlinien in ihren Projectionen wie 8 zu $\cos\vartheta$. Die Rosette hat

auf dem Kegel	ihre Minima für,	ihre Maxima
$\vartheta = 0$	$\varphi = 30, 90, \ldots$	$\varphi = 0, 60, \ldots$
$\vartheta = 15$	$\varphi = 25, 85, \ldots$	$\varphi = 55, 115, \ldots$
$\vartheta = 30$	$\varphi = 20, 80, \ldots$	$\varphi = 50, 110, \ldots$
$\vartheta = 45$	$\varphi = 15, 75, \ldots$	$\varphi = 45, 105, \ldots$
$\vartheta = 60$	$\varphi = 10, 70, \ldots$	$\varphi = 40, 100, \ldots$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\vartheta = -15$	$\varphi = 35, 95, \ldots$	$\varphi = 5, 65 \ldots$;

die Spiralen laufen also im gleichen Sinne auch auf der südlichen Halbkugel. Die Axe ist $\frac{80}{9}$. Vom Südpol zum Nordpol laufen 6 Wülste getrennt durch 6 Kerben, sie verschwinden in der Polnähe, dabei machen sie $\frac{1}{6}$ Umdrehung um die Axe, so läuft eine Kerbe von $\varphi = 60$ bis $\varphi = 0$, eine Wulst von $\varphi = 90$ bis 30. Sollen sie $\frac{1}{4}$ Umdrehung machen, so $r = \frac{5}{9}(8 + \cos^2(3\varphi + 3\frac{\vartheta}{2})\cos\vartheta)$; bei $\frac{1}{2}$ Umdrehung $r = \frac{5}{9}(8 + \cos^2 3(\varphi + \vartheta).\cos\vartheta)$; bei 1 ganzen Umdrehung: $r = \frac{5}{9}(8 + \cos^2(3\varphi + 6\vartheta).\cos\vartheta)$. Wie viel Wülste und Umläufe bezeichnet $\cos^2(\frac{n}{2}\varphi + x\vartheta)$? Der Aequator hat n Kerben, also die Fläche n Wülste. Für $\vartheta = o$ haben wir eine Kerbe in $\varphi = \frac{180}{n}$, da $\frac{n}{2}\varphi = 90$; für $\vartheta = 90$, da dann $\frac{n}{2}\varphi + 90x = 90$ ist, in $\varphi = \frac{180}{n} - \frac{180x}{n}$. Während also ϑ von 0 bis 90 läuft, nimmt φ um $\frac{180x}{n}$ Grad ab, also bei dem Wege vom Süd- zum Nordpol um $\frac{360x}{n}$, d. h. der Wulst dreht sich $\frac{x}{n}$ mal um die Axe. Haben wir demnach p Umläufe von n Wülsten, so ist die Function a. $\cos^2 (\frac{n}{2} \varphi + n p \vartheta). \cos\vartheta$ zu addieren zu der vorliegenden Grundfläche. Haben wir 2 Wülste und $\frac{1}{2}$ Umlauf, so lautet die Fläche, wie man leicht findet, in rechtwinkligen Coordinaten:

$$x^2 + y^2 = \left[\frac{x^4 + y^2 (x^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2 x y z}\right]^2$$ mit dem Aequator $x^4 = (x^2 + y^2)^3$ und dem 0. Meridian $x^6 = (x^2 + z^2)^4$ und dem 90. $y^2 z^4 = (y^2 + z^2)^4$.

Die bisher betrachteten Wülste winden entgegengesetzt dem Uhrzeiger, also negativ. Wollen wir positives Winden hervorrufen, haben wir nur nötig $- n p \vartheta$ statt $+ n p \vartheta$ zu setzen. Da wir aber meistens an Früchten beide Windungsarten vereinigt finden, sind auch beide Functionen zu addieren, z. B. bei der Brombeere, die scheinbar 4 Wülste und $2\frac{1}{2}$ Umläufe zeigt: $a (\cos^2 (2 \varphi + 10 \vartheta) + \cos^2 (2 \varphi - 10 \vartheta)) \cos \vartheta$ zu der Grundfläche. Vor mir liegt ein Zapfen der Meerstrandskiefer mit 7 Wülsten und $2\frac{5}{8}$ Umläufen, also ist zu seiner Grundfläche zu addieren:

$$a (\cos^2 (\frac{7}{2} \varphi + 18\frac{3}{8} \vartheta) + \cos^2 (\frac{7}{2}\varphi - 18\frac{3}{8}\vartheta)) \cos \vartheta.$$

Um dessen Grundfläche aufzustellen, haben wir uns die Meridiane und Breitenlinien vorzustellen; da die letzteren Kreise sind, ist die Grundfläche eine Rotationsfläche, die Meridiane sind alle kongruent, sie sind aber so langgestreckt, wie wir bisher keine Curve aufgestellt haben, weshalb wir ein neues Mittel anwenden müssen. Nun thut der Factor $\frac{1}{(1 + a \sin^p \varphi)^n}$ vorzügliche Dienste, wenn ich mit ihm jeden Radius multipliziere. Wir gebrauchen ihn, um Formen darzustellen von elliptischer Gestalt (Weidenblätter), linealischer (Gräser) oder bei Körpern mit langgestrecktem Längsschnitt (Fichtenzapfen). Oft wird es genügen, $n = \frac{1}{2}$, $p = 2$ zu nehmen, setzen wir noch $a = 5$, so ist unser Factor $d = \frac{2}{3}$ für 30^0; $= 0{,}4588$ für 60^0; $= 0{,}423$ für 75^0; $= 0{,}408$ für 90^0; $= 0{,}87$ für 15^0; $= 0{,}54$ für $0{,}45^0$. Hierdurch wird aus unserm 3. Herzen (Fig. 10) die bekannte Blattform

$$r = \frac{3 (1 + \cos^3 \varphi)}{\sqrt{1 + 5 \sin^2 \varphi}}$$ oder wenn ich sie um 90^0 drehe, um sie für Längsschnitte zu verwerten:

$$r = \frac{3 (1 + \sin^3 \vartheta)}{\sqrt{1 + 5 \cos^2 \vartheta}}.$$ Unser Zapfen hat nun die Länge 10 cm, der Durchmesser beträgt etwas weniger als 6 cm. Der Längsschnitt ist eine verjüngte Ellipse. Da diese lautet

$$r = \frac{b^2}{a - c \cos\varphi},$$ wobei a und b die halben Axen sind, ist zu setzen $2a = 10$, $2b = 6$ also

$$r = \frac{9}{5 - 4 \cos\varphi}.$$ Diese habe ich zu verjüngen und um 90^0 zu drehen

dann erhalte ich in guter Annäherung als Zapfenlängsschnitt

$$r = \frac{9}{5 - 4 \sin\vartheta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 5 \cos^2 \vartheta}}$$ und das ist zugleich die Gleichung der Grundfläche, da sie für jeden Meridian gilt. Im Aequator haben wir nun die Schuppenhöhe 0,6 cm, mit ihr bestimme ich den Factor a in der Wulstfunction, ich finde $a = 0.3$, indem ich ϑ und φ gleich 0 setze. Daher lautet die Zapfengleichung:

$$r = \frac{9}{5 - 4 \sin\vartheta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 5 \cos^2 \vartheta}} + 0.3 \cos\vartheta. \left[\cos^2 \left(\frac{7}{2} \varphi + 18 \frac{3}{8} \vartheta\right) + \cos^2 \left(\frac{7}{2}\varphi - 18 \frac{3}{8} \vartheta\right)\right].$$ Sie hat den Aequator $r = 0.3 \left(\sqrt{6} + 2 \cos^2 \frac{7\varphi}{2}\right)$

und den 0. Meridian: $r = \frac{9}{(5 - 4 \sin\vartheta) \sqrt{1 + 5 \cos^2 \vartheta}} + 0{,}6 \cos\vartheta. \cos^2 18\frac{3}{8}\, \vartheta$. Bemerkenswert ist, dass auch in natura die Schuppen 4-kantig sind, wie sie unsere Gleichung giebt, da sich je zwei entgegengesetzt windende Wülste ähnlich übereinanderlagern, wie zwei gleiche Cylinder, deren Axen sich schneiden, sich durchdringen. Wollen wir auch hier ein Durchdringen herbeiführen, so haben wir als zweites Glied der Zapfengleichung zu setzen

$$+ 0{,}6 \cos \vartheta. \cos^2 \left(\frac{7}{2}\varphi + 18\frac{3}{8} \vartheta\right). \cos^2 \left(\frac{7}{2}\varphi - 18\frac{3}{8} \vartheta\right).$$ Jetzt erscheinen auf der Grundfläche die zwei Scharen von Thälern

$$\frac{7}{2}\varphi + 18\frac{3}{8}\, \vartheta = (2\, n + 1). 90$$ und

$$\frac{7}{2}\varphi - 18\frac{3}{8}\, \vartheta = (2\, n + 1). 90.$$ Diejenigen Meridiane sind gleich, die $51\frac{3}{7}^0$ auseinander liegen. Diejenigen Breitenlinien haben für dasselbe φ ihre Maxima und Minima, sind also gewissermassen concentrisch, welche um $9\frac{39^0}{49}$ auseinander liegen.

Es scheint, als ob die Himbeere als Grundform das 3. Herz hätte (Fig. 10), also $r = 3\,(1 + \cos^3 \varphi)$, demnach in aufrechter Stellung

$$r = 3\,(1 + \sin^3 \vartheta),$$ und 10 Kerben mit 4 Umläufen besässe. Ihre Gleichung wäre dann:

$$r = 3\,(1 + \sin^3 \vartheta) + a \cos\vartheta. \cos^2 (5\, \varphi + 40\, \vartheta). \cos^2 (5\, \varphi - 40\, \vartheta),$$

wobei $a = 0{,}75$ ist, da sich im Aequator die Kerbhöhe zum Grundkreisradius verhält wie 1 zu 4.

Nicht selten zeigen sich auch Früchte mit Stacheln und Zähnen. Zu ihrer Darstellung haben wir nur nötig, negative sich kreuzende Wülste anzubringen, zwischen denen die Zähne (wie bei der Rosskastanie) stehen bleiben, da ja zwei gleichlaufende negative Wülste eine Schneide bilden. Wir haben mithin nur nötig, die zuletzt besprochenen Funktionen von der Grundfläche zu subtrahieren.

Dabei kann es oft vorteilhaft sein, um Wülste zu erreichen, die mehr dachförmig als gewölbt in ihren Zügen sind, eine höhere Potenz als die 2 in der Wulstfunction zu verwerten. Haben wir die Grundfläche $r = f\,(\varphi, \vartheta)$, so lautet demnach ein Körper, der dieser Gruppe angehört:

$$r = f\,(\varphi, \vartheta) \pm a \cos^{2\,t} \left(\frac{n}{2}\varphi + n\, p\, \vartheta\right). \cos^{2\,t} \left(\frac{n}{2}\, \varphi - n\, p\, \vartheta\right). \cos \vartheta.$$

Selbstverständlich kann eine solche Fläche wieder als Grundfläche für andere mit anderen

Wülsten verwertet werden. So ist z. B. die Fläche

$$r = 50 + [10 \cos^2 (2 \varphi + 4 \vartheta) + \cos^2 (4 \varphi + 16 \vartheta)] \cos \vartheta$$

völlig durchsichtig: Auf der Kugel $r = 50$ winden zunächt 4 Wülste, die die Axe einmal umkreisen. Auf diesen Wülsten winden solche 2. Ordnung in derselben Richtung, aber nur $\frac{1}{10}$ so hoch und steiler und zwar 8 Stück, die die Axe zweimal umkreisen. Diese doppelte Drehung lässt sich bequem durch einen Bindfaden veranschaulichen, nur hat dieser einen Cylinder als Grundfläche. Ebenso durchsichtig ist die Fläche

$$r = 3 (1 + \sin^3 \vartheta) + \cos\vartheta \, [\cos^2 (3 \varphi + 9 \vartheta). \cos^2 (3 \varphi - 9 \vartheta) + \frac{1}{8} \cos^4 (12 \varphi + 72 \vartheta). \cos^4 (12 \varphi - 72 \vartheta)],$$

welche die Rotationsfigur des 3. Herzens zur Grundfläche hat, auf der sich Kuppeln erheben, die in 6 Doppelspiralen angeordnet sind von $1\frac{1}{2}$ Umläufen, während die Kuppeln selbst besetzt sind mit pyramidenartigen Warzen, die ebenfalls doppelspiralig angeordnet sind in 24 Reihen mit 3 Umläufen. Ganz anderer Art ist die Fläche

$$r = \left(\frac{3}{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \varphi}} + 10 \cos^4 6 \varphi . \cos^4 4 \vartheta \right) \cos \vartheta.$$

Ihr Aequator ist eine Ellipse mit den halben Axen 1 und 3, auf der sich 12 gleich lange linealische Fortsätze erheben, der 0. Meridian ist ein Kreis über dem Radiusvector der Ellipse als Durchmesser und hat 5 Fortsätze, die nach den Polen zu kleiner werden. Die Pole selbst sind der Nullpunct. Die Fläche selbst ist ein elliptischer Ring, der mit 60 langen Stacheln besetzt ist, von denen die je 12 in der Nähe der Pole verkrüppelt sind. Von der Grundfläche sind ausser den zusammenfallenden Polen sichtbar nur die Meridiane

$$\varphi = (2 n + 1) \frac{90}{6} \text{ und die Breitenlinien } \vartheta = \pm \frac{90}{4}, \pm \frac{3.90}{4}$$

Mit dieser Fläche stimmt im Aequator, im 0. Meridian und in der Grundfläche überein

$$r = \frac{3 \cos \vartheta}{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \varphi}} + 10 \cos\vartheta . \cos^2 (6 \varphi + 4 \vartheta). \cos^2 (6 \varphi - 4 \vartheta);$$

aber bei ihr sind die Stacheln doppelspiralig geordnet, und sichtbar bleiben von der Grundfläche die Spiralen

$$6 \varphi + 4 \vartheta = (2n + 1) 90; \; 6 \varphi - 4 \vartheta = (2n + 1) 90.$$

Auch die Fläche

$$r = 30 + 10 \cos^4 10 \varphi + \cos^2 (10 \varphi + 20 \vartheta). \cos^2 (10 \varphi - 20 \vartheta)$$

lässt sich leicht vorstellen: Die Grundfläche ist ein Cylinder mit zwanzig ziemlich scharfen Längskanten, sie erinnert sehr an gewisse Cactusarten, auf ihr winden 20 niedrige Doppelspiralen einmal herum.

Es ist ferner

$$r = \frac{2}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}} \left[1 + \left(\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}} \right)^3 \right]$$

ein plattgedrücktes Herz. Der 0. Meridian ($\varphi = o$) ist unser 3. Herz

$$r = 2 (1 + \sin^3 \vartheta),$$

der Aequator ($\vartheta = o$) lautet

$$r = \frac{2}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi}},$$

ist also eine Ellipse, aber auch jeder Parallelschnitt zum Aequator ist eine Ellipse mit demselben Axenverhältnis $\left(\frac{1}{2}\right)$, wie sich leicht nachweisen lässt. Diese Fläche ist erhalten mit Hilfe der zu Anfang erwähnten elliptischen Gestaltänderung. Fälle ich nämlich von einem Punkte des um 90^0 gedrehten 3. Herzens ein Lot auf die Axe ($\vartheta = 90$) und nenne die neuen Coordinaten vorläufig ϱ, ψ, so bestehen die beiden Gleichungen

$$\varrho \sin \psi = r \sin \vartheta \text{ und}$$

$$\frac{r \cos \vartheta}{\varrho \cos \psi} = \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi}$$ (d. i. wie der Ellipsenradius $\varphi = o$ zu dem Radius $\varphi = \varphi$). Aus beiden folgt

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi}}.$$ Führen wir jetzt die Werte für r und ϑ in das 3. Herz ein, so erhalten wir obige Fläche, wenn wir schliesslich noch ϱ und ψ mit r und ϑ vertauschen.

Diese Methode lässt sich leicht verallgemeinern. Es sei der Aequator

$r = f(\varphi)$ vorgeschrieben und der 0. Meridian

$R = g(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$; ferner werde verlangt, dass jeder Parallelschnitt zum Aequator diesem ähnlich sei. Wir haben dann, wenn wir einen beliebigen Radius des Aequators mit r_φ, den Anfangsradius mit r_0 bezeichnen:

$$\varrho \sin \psi = R \sin \vartheta \text{ und}$$

$$\frac{\varrho \cos \varphi}{R \cos \vartheta} = \frac{r_\varphi}{r_0},$$ daraus ergiebt sich

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{r_\varphi}{r_0} . \operatorname{tg} \psi$$ und die Fläche in der Form

$$\varrho = \frac{f(\varphi)}{\cos\psi \sqrt{r_0^{\,2} + \operatorname{tg}^2 \psi . f^2(\varphi)}} . g\left(\frac{r_0}{\sqrt{r_0^{\,2} + \operatorname{tg}^2 \psi . f^2(\varphi)}}, \frac{\operatorname{tg} \psi . f(\varphi)}{\sqrt{r_0^{\,2} + \operatorname{tg}^2 \psi . f^2(\varphi)}}\right),$$

worin für ϱ und ψ wieder r und ϑ zu setzen ist. Diese Flächenarten sind deshalb besonders bemerkenswert, weil sie so viel gerade Linien enthalten als der Aequator Nullpunkte. Die geraden sind dann stets die Axe ($\vartheta = 90$). Auf die Darstellung der gebrochenen Linien in unseren Coordinaten kommen wir an anderer Stelle zu sprechen, wenn das Blatt des Pfeilkrautes behandelt wird.

Ich füge noch einige Nachträge bei über die Blattformen, welche Abhandlung im letzten Grunde speculativen Zwecken diente, insofern sie als Ziel die Erkenntnis der die Blattformen bedingenden Kräfte aufstellte. Dem Vergleich mit der Erkenntnis des Anziehungsgesetzes zweier Himmelskörper aus ihrer Bahn hätte noch beigefügt werden können die Erkenntnis der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit aus ihrer Gestalt oder die kleinsten Flächen, die feuchte Schichten in festen Grenzen bilden. Bei den Blättern hätten wir vielleicht die Arbeit so zu denken: Auf gleiche Centriwinkel kommen Sectoren von verschiedenen Blattgewebemassen, diese sind nur abhängig von dem Winkel φ, diese Funktion würde uns die Gesamtheit der thätigen Kräfte angeben, da offenbar das Blattgewebe eben von diesen Kräften verursacht ist, so dass der Blattrand in dem Sector vorrücken muss, in dem die Funktion einen grösseren Wert besitzt. Wir hätten deshalb nur die Pflicht, die Funktion für die einzelnen Sectoren aufzustellen, sagen wir z. B. für 1^0 Radienabstand. Das Integrieren ist für unsere Functionen sehr einfach, da sie rein trigonometrisch sind. Der Inhalt eines

Sectors ist dann $\int_{\varphi}^{\varphi + \frac{\pi}{180}} \frac{r^2}{2}\, d\varphi$. Für unser 3. Blatt haben wir z. B. bei $r = 3\,(1 + \cos\varphi)$ die Function $\frac{9}{2}\Big[\frac{\pi}{180} + \sin\,(\varphi + \frac{\pi}{180}) - \sin\,\varphi + \frac{1}{4}$
$\Big(\sin\,(2\varphi + \frac{\pi}{90}) - \sin 2\varphi\Big)\Big]$.

Jetzt wollen wir die Sectoren Quadranten werden lassen. Wir wissen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{(2n-1)\,(2n-3)\,\ldots\,3\,.\,1}{2n\,(2n-2)\,(2n-4)\,\ldots\,4\,.\,2}\cdot\frac{\pi}{2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi = \text{usw., also}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi = 2\pi.\, \frac{(2n-1)\,(2n-3)\,\ldots\,3\,.\,1}{2n\,(2n-2)\,(2n-4)\,\ldots\,4\,.\,2};\ \text{ferner}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2n+1}\,.\ 2.\ \frac{2n\,(2n-2)\,\ldots\,4\,.\,2}{(2n-1)\,(2n-3)\,\ldots\,3\,.\,1} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ \text{mithin}$$

$\int_0^{\pi} \cos^{2n+1}\varphi\, d\varphi = 0$. Hiernach sind mit Leichtigkeit unsere Blattflächen zu integrieren nämlich der Ausdruck zu bilden $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi$. Besonders einfach gestaltet sich der Inhalt für die Herzen, so haben wir für das 3. Herz mit der Gleichung $r = 3\,(1 + \cos^3\varphi)$ den Inhalt $9\pi\,(1 + \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6})$; für das Blatt $r = a + b\,\cos\varphi + \cos^3\varphi$ den Inhalt π $(a^2 + b^2 + \frac{3bc}{4} + \frac{5}{16}\,c^2)$. Allerdings müssen wir, sobald der Pol Curvenpunkt wird, vorsichtig sein, da bei negativen Radien, die in den Figuren ausser Acht gelassen sind, falsche Integralwerte resultieren würden. Wir haben dann nur nötig, das Integral so in Teilintegrale zu zerlegen, dass der Integrant keines einzigen innerhalb der Integrationsgrenzen negativ wird. Ehe wir jedoch aus den Integralen Schlüsse ziehen, müssen wir, da vorher noch viele Schwierigkeiten zu überwinden sind, die mathematische Form, wie ich bereits früher in aller Schärfe betonte, genau festlegen. Damit ist unsere nächste Arbeit für Jahre hinaus aufs bestimmteste vorgeschrieben. Wer schon jetzt in der Kinderzeit dieses Zweiges der Botanic speculative Schlüsse ziehen will, handelt ebenso widersinnig als der, welcher die Möglichkeit überhaupt rundweg abstreitet. Aber ganz abgesehen von dieser späteren Verwendung ist folgendes klar: Mit demselben Rechte, mit dem G. Kirchhoff es als die Aufgabe der Mechanic bezeichnete: „die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben", müssen wir es als die Aufgabe der Pflanzenmorphologie ansehen, die Gestalten der Pflanzenteile vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben. Können wir aber genau beschreiben, ohne mathematische Hilfsmittel? Giebt es eine vollständigere Beschreibung als die Gleichung der Gestalt? Haben wir einfachere periodische Funktionen — und jedes gezähnte Blatt deutet schon auf Perioden hin — als die trigonometrischen? Wir müssen die Form in einer Gleichung aufstellen. Wie wir dabei zu verfahren haben, habe ich im Einzelnen für die Blätter bereits früher ausgeführt. Wir sehen z. B. am Lupinenblatt mit den 7 Fingern, die nach dem Blattstiele zu kleiner werden, dass es die Gleichung hat

$r = q. \cos^{2p} 7\frac{\varphi}{2}. \cos^{2n} \frac{\varphi}{2}$, wobei die Constanten p und n ganzzahlig sind und ebenso wie die Constante q aus dem vorliegenden Blatte zu finden sind, da q die Länge des mittelsten Fingers ist, n sich daraus bestimmt, dass für die abzumessende Länge des nächsten Fingers die Gleichung besteht

$r = q. \cos^{2n} \frac{180}{7}$ und schliesslich p etwa aus dem Werte für $\varphi = \frac{90}{7}$ gefunden werden kann. Gleichung 18 und 19 haben unrichtige Figuren erhalten, aber keine meiner früher aufgestellten 148 Gleichungen ist zufällig gefunden. Ich bin jedoch noch schuldig, anzugeben, wie man bei weniger durchsichtigen Gestalten die Gleichung finden kann. Wir stellen dazu folgende Überlegung an:

Enthält die Blattgleichung $r = u(\cos\varphi)$ ausser einem constanten Gliede a nur ungerade Potenzen von $\cos\varphi$, so besteht die Beziehung für jedes beliebige $\varphi = \varphi_1$

$u(\cos\varphi_1) - a = a - u(\cos(\pi - \varphi_1))$, wobei $a = u(\cos \frac{\pi}{2})$ ist. Lasse ich demnach den ersten Quadranten der Curve u um $\varphi = 90$ als Axe rotieren um 180°, so halbiert der Kreis $r = a$ überall die Verbindungslinie von zwei zugehörigen Punkten der Curve. Die Verbindungslinie geht stets durch den Pol, daher wollen wir die zugehörigen Punkte Spiegelbilder voneinander nennen, wobei wir den Kreis $r = a$ mit der Fähigkeit eines ebenen Spiegels begabt denken. Mithin ist der zweite Quadrant unserer Curve das Spiegelbild des ersten in bezug auf den Kreis $r = a$ als Spiegel. Diese Thatsache können wir umgekehrt als Kriterium dafür verwerten, wenn ein Blatt sich nur durch ungerade Potenzen von $\cos\varphi$ darstellen lässt.

Enthält das Blatt nur gerade Potenzen $r = g(\cos\varphi)$, so ist

$g(\cos\varphi_1) = g(\cos(\pi - \varphi_1))$, das heisst, der zweite Quadrant ist kongruent dem ersten. Ist das Blatt allgemein $r = F(\cos\varphi)$, so trenne ich die geraden Potenzen $g(\cos\varphi)$ von den ungeraden $u(\cos\varphi)$, dann besteht die Beziehung

$$F(\cos\varphi_1) - g(\cos\varphi_1) = g(\cos(\pi - \varphi_1)) - F(\cos(\pi - \varphi_1))$$

Lasse ich jetzt wieder den ersten Quadranten rotieren um 180° um die Axe $\varphi = 90$, so halbiert die Curve $r = g(\cos\varphi)$ die Verbindungslinie zugehöriger Punkte, sie geht durch den Pol, steht allerdings im allgemeinen nicht mehr senkrecht auf g, trotzdem wollen wir auch jetzt noch den ersten Quadranten der Curve F das Spiegelbild des zweiten oder umgekehrt nennen in bezug auf die Curve $r = g$. Wir ziehen daraus das Kriterium: Ist der zweite Quadrant eines Blattes das Spiegelbild des ersten für irgend einen Spiegel, so enthält dieser nur gerade Potenzen von $\cos\varphi$ und dessen Funktion g giebt zugleich die einzigen geraden Potenzen von $\cos\varphi$ an, welche die Blattfunktion enthält. Um also für ein vorliegendes Blatt die Gleichung zu erhalten, klappe ich die rechte Seite auf die linke, ziehe einen Leitstrahl, halbiere das Stück zwischen den Blatträndern und zeichne so alle Mitten, ich erhalte dann einen Quadranten einer doppeltsymmetrischen Curve $r = g(\cos\varphi)$, die sicher nur gerade Potenzen von $\cos\varphi$ enthält; es ist dann unser Blatt $r = g(\cos\varphi) + u(\cos\varphi)$, worin u nur ungerade Potenzen enthält, und sich meist aus den relativen grössten und kleinsten Werten bestimmen lässt. So ist für Fig. 85 der Spiegel $r = 5$. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass kein negativer Radius ausser Betracht gelassen ist. Der Satz gilt deshalb auch für Fig. 7 völlig, dagegen für Fig. 14 nur bis etwa $\varphi = 169^0 25^1$ für den Kreis $r = 3$, wie aus

$3\,(1 + \cos^{71}\varphi) + 2\frac{1}{2}\cos 3\,\varphi = o$ folgt. So hat jede unserer Curven, auch wenn der Pol Curvenpunkt ist, gewisse Stellen, an denen sie einen Spiegel besitzt. Eine Figur, für die der Spiegel kein Kreis ist, zeigt Nr. 22 mit dem Spiegel

$r = \frac{1}{2}\,(9 + \cos 2\,\varphi) = 4 + \cos^2\varphi$. Die Curve

$r = 2 + \cos 2\,\varphi . \cos 3\,\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\,\varphi . \cos 5\,\varphi$ hat den Spiegel $r = 2$; in der That fallen in der Entwicklung nach Potenzen von $\cos\varphi$ alle geraden Potenzen fort.

Zuletzt wollen wir noch die Gleichung einer künstlerisch bekannten Fläche aufstellen, von der W. Hogarth in seiner Analyse der Schönheit sagt, dass sie das Auge entzückt, da sie Schönheit und Grazie verbindet. Wir meinen das als Trinkhorn bekannte organische Gebilde. Seine Axe ist eine Schraubenlinie, die gleichmässig auf dem Cylindermantel mit dem Radius $r = 15$ cm steigt. Jeder Querschnitt senkrecht zur Axe ist ein Kreis, dessen Ebene anfangs vertikal zur Cylinderbasis, nach 180^0 Drehung aber parallel zu ihr steht, so dass sich die Querschnittsebene halb so schnell dreht, als φ wächst. Der Mittelpunkt des Kreises habe die Länge φ_1, die wir als Parameter der Querschnittsebenenschar beibehalten, dann heisst die Ebene

$$\cos\frac{\varphi_1}{2}\,(-\,x\sin\varphi_1 + y\cos\varphi_1) - z\sin\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_1}{\pi}.\;30 = 0,$$

denn nach Messung ist die Schraubenlinie bei 180^0 Drehung um 30 cm gestiegen. Sie wird in unseren Coordinaten zu

$r\,\pi\,[\sin\vartheta\,\sin\frac{\varphi_1}{2} - \cos\vartheta\,\cos\frac{\varphi_1}{2}\,\sin\,(\varphi - \varphi_1)] = 30.\;\varphi_1$. In ihr liegt der Kreis mit dem Radius ϱ, dessen Projection auf die Ebene $(\vartheta = o)$ eine Ellipse ist mit den halben Axen ϱ und $\varrho\sin\frac{\varphi_1}{2}$, ihr Mittelpunkt hat vom Pol die Entfernung 15, diese hat die Länge φ_1. Die Ellipse heisst zunächst $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2\sin^2\frac{\varphi_1}{2}} = 1$; um sie in unser System einzufügen, verschiebe ich den Coordinatenanfang auf der x Axe um 15 cm, wodurch in der Gleichung $(x - 15)$ statt x auftritt und drehe dann beide Axen um φ^0_1, wodurch sie zu

$$\frac{(y\sin\varphi_1 + x\cos\varphi_1 - 15)^2}{\varrho^2} + \frac{(y\cos\varphi_1 - x\sin\varphi_1)^2}{\varrho^2\sin^2\frac{\varphi_1}{2}} = 1 \text{ wird.}$$

Deshalb heisst die Ellipse

$$[r\cos\,(\varphi - \varphi_1) - 15]^2 + \frac{r^2\sin^2\,(\varphi - \varphi_1)}{\sin^2\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{25}{\pi^2}\,\varphi_1^2, \text{ denn}$$

ϱ hat nach vorliegendem Horn für $\varphi_1 = \pi$ die Grösse 5 cm Den darüber stehenden Cylinder bekomme ich dadurch, dass ich $r\cos\vartheta$ für r setze.

Hiermit haben wir die verlangte Fläche dargestellt als Schar von Schnittkurven der Querschnittsebenen und der schiefen Cylinder, nämlich als

$$\begin{cases} \left[r \cos\vartheta \cos(\varphi - \varphi_1) - 15\right]^2 + \dfrac{r^2 \cos^2\vartheta \sin^2(\varphi - \varphi_1)}{\sin^2 \dfrac{\varphi_1}{2}} = \dfrac{25}{\pi^2}\, \varphi_1{}^2; \\ r\, \pi \left[\sin\vartheta \sin\dfrac{\varphi_1}{2} - \cos\vartheta \cos\dfrac{\varphi_1}{2} \sin(\varphi - \varphi_1)\right] = 30\varphi_1, \text{ worin } \varphi_1 \text{ der} \end{cases}$$

Einfachheit wegen als Parameter beibehalten ist.

Schliesslich habe ich noch die Pflicht, einige Stimmen objectiver Beurteiler meines Grundgedankens anzuführen, wie sie nach Veröffentlichung der eingangs erwähnten Schrift laut wurden. In dem Jahresber. ü. d. höh. Schulw. (Rethwisch) wird darüber ausgeführt: Der Verfasser hat recht, dass eigentlich erst die analytisch mathematische Behandlung vorliegen muss, ehe man Hypothesen über die wirkenden Kräfte in einer präcisen Form aufstellen kann. In einer ganzen Reihe von Fällen werden überraschend einfache Resultate gefunden. Andere zeigen sich freilich recht widerspenstig, der Verfasser ist aber konsequent geblieben. Die Zeitschr. f. math. u. nat. Unter. (Hoffmann) sagt unter anderem: Es ist ihm dies (die Blattformen math. zu bestimmen) für eine grosse Anzahl von Formen gelungen, und er ist zu einer Reihe von Resultaten gelangt, die dem Mathematiker wie dem Botaniker sicher von Interesse sind. In der naturw. Rundschau (Sklarek) spricht der Referent seine Anerkennung aus, dass dem Verfasser ein Einblick gelungen ist, wie eine beabsichtigte Änderung des Blattrandes (gebuchtet, gesägt, gekerbt und anderes) durch gewisse Zusatzglieder erzielt werden kann. Die Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw. (Schwalbe, Pietzker) sprechen von der überraschenden Fülle der verschiedensten Formen, von der bemerkenswerten Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der analytischen Betrachtung und der Beobachtung und sagen dann: Dieser erste Versuch auf einem wohl noch ganz unerforschten Gebiete erscheint durch die dabei erzielten Resultate der Beachtung in hohem Grade wert; auch der Schulunterricht, besonders der Realanstalten, wird von ihr mehrfach nützlichen Gebrauch machen können.