Es ergeben sich folgende Fundamentalgrößen:

$$e = U'^2 (1 + \lambda)^2 + \lambda'^2 = 1,\ f = 0,\ g = (1 + \lambda)^2 \sin^2 (U - v) \,.$$
$$.\ (\varphi''^2(v) + \psi''^2(v) + \chi''^2(v)),\ F = 0$$

$e = 1$ besagt wieder, daß die Flächen, in Uebereinstimmung mit dem Resultate des vorigen Abschnittes, dadurch ausgezeichnet sind, daß das System ihrer Krümmungslinien zugleich ein geodätisches Orthogonalsystem bildet. Das System verliert also diese Eigenschaft nicht bei orthogonaler Projektion auf eine Kugel.

§ 3.

Die Projektionsbasis sei eine beliebige Fläche.

Es liege irgend eine Fläche als gegeben vor. Auf derselben wollen wir ein Orthogonalsystem festlegen, wobei wir uns die „Kurven u_1 und v_1" als Projektionen der Krümmungslinien anderer Flächen denken, welch letztere wir suchen. Wir wählen uns irgend einen Punkt auf der gegebenen Fläche, errichten in ihm die Normale und steigen in positiver Richtung um ein vorläufig unbestimmtes Stück λ in die Höhe. Für alle Punkte der beiden Kurvenscharen unter stetiger Veränderung des Wertes von λ wiederholt, führt dieser Prozeß zu einer neuen Fläche. Die Koordinaten der gegebenen Fläche seien dargestellt durch:

$$x_1 = \varphi(u_1, v_1) \quad y_1 = \psi(u_1, v_1) \quad z_1 = \chi(u_1, v_1)$$

Die Koordinaten der neuen Fläche lauten also, wenn X_1, Y_1, Z_1 die Richtungskosinus der Normalen sind:

$$x = x_1 + \lambda X_1$$
$$y = y_1 + \lambda Y_1$$
$$z = z_1 + \lambda Z_1$$

Die den „Kurven u_1 und v_1" der gegebenen Fläche entsprechenden „Kurven u und v" der erzeugten Fläche sollen aber die Krümmungslinien derselben sein. f_1, f, F müssen also verschwinden. Es muß sein:

$$x_{1u}\, x_{1v} + y_{1u}\, y_{1v} + z_{1u}\, z_{1v} = 0$$
$$x_u\, x_v + y_u\, y_v + z_u\, z_v = 0$$

Hiebei ist:

$$x_u = x_{1u} + \lambda X_{1u} + \lambda_u X_1 \qquad x_v = x_{1v} + \lambda X_{1v} + \lambda_v X_1$$
$$y_u = y_{1u} + \lambda Y_{1u} + \lambda_u Y_1 \qquad y_v = y_{1v} + \lambda Y_{1v} + \lambda_v Y_1$$
$$z_u = z_{1u} + \lambda Z_{1u} + \lambda_u Z_1 \qquad z_v = z_{1v} + \lambda Z_{1v} + \lambda_v Z_1$$

Durch Einsetzung dieser Werte erhalten wir die Gleichung:

$$x_{1u}\, x_{1v} + y_{1u}\, y_{1v} + z_{1u}\, z_{1v} + \lambda\, (x_{1v}\, X_{1u} + y_{1v}\, Y_{1u} + z_{1v}\, Z_{1u}) +$$
$$+ \lambda_u\, (x_{1v}\, X_1 + y_{1v}\, Y_1 + z_{1v}\, Z_1) + \lambda\, (x_{1u}\, X_{1v} + y_{1u}\, Y_{1v} +$$

$$+ z_{1u} Z_{1v}) + \lambda^2 (X_{1u} X_{1v} + Y_{1u} Y_{1v} + Z_{1u} Z_{1v}) + \lambda \lambda_u (X_1 X_{1v} + Y_1 Y_{1v} + Z_1 Z_{1v}) + \lambda_v (x_{1u} X_1 + y_{1u} Y_1 + z_{1u} Z_1) + \lambda \lambda_v (X_1 X_{1u} + Y_1 Y_{1u} + Z_1 Z_{1u}) + \lambda_u \lambda_v (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) = 0$$

Es gelten aber folgende Relationen:

$$X_1 x_{1v} + Y_1 y_{1v} + Z_1 z_{1v} = 0$$
$$X_1 x_{1u} + Y_1 y_{1u} + Z_1 z_{1u} = 0$$
$$X_1 X_{1v} + Y_1 Y_{1v} + Z_1 Z_{1v} = 0$$
$$X_1 X_{1u} + Y_1 Y_{1u} + Z_1 Z_{1u} = 0$$

Und die Gleichung läßt sich dadurch vereinfachen, wie folgt:

$$\lambda_u \lambda_v + \lambda^2 (X_{1u} X_{1v} + Y_{1u} Y_{1v} + Z_{1u} Z_{1v}) + \lambda (x_{1u} X_{1v} + y_{1u} Y_{1v} + z_{1u} Z_{1v} + x_{1v} X_{1u} + y_{1v} Y_{1u} + z_{1v} Z_{1u}) = 0$$

Diese Gleichung können wir noch übersichtlicher schreiben. Es ist nämlich:

$$X_{1u} = -\frac{E_1}{e_1} x_{1u} - \frac{F_1}{g_1} x_{1v} \qquad Z_{1u} = -\frac{E_1}{e_1} z_{1u} - \frac{F_1}{g_1} z_{1v}$$

$$X_{1v} = -\frac{F_1}{e_1} x_{1u} - \frac{G_1}{g_1} x_{1v} \qquad Z_{1v} = -\frac{F_1}{e_1} z_{1u} - \frac{G_1}{g_1} z_{1v}$$

$$Y_{1u} = -\frac{E_1}{e_1} y_{1u} - \frac{F_1}{g_1} y_{1v}$$

$$Y_{1v} = -\frac{F_1}{e_1} y_{1u} - \frac{G_1}{g_1} y_{1v}$$

Daher ist:

$$\begin{aligned} X_{1u} X_{1v} + Y_{1u} Y_{1v} + Z_{1u} Z_{1v} = {} & \frac{E_1 \cdot F_1}{e_1^2} x_{1u}^2 + \frac{F_1^2}{e_1 g_1} x_{1u} x_{1v} + \\ & + \frac{E_1 G_1}{e_1 g_1} x_{1u} x_{1v} + \frac{F_1 G_1}{g_1^2} x_{1v}^2 + \\ & + \frac{E_1 F_1}{e_1^2} y_{1u}^2 + \frac{F_1^2}{e_1 g_1} y_{1u} y_{1v} + \\ & + \frac{E_1 G_1}{e_1 g_1} y_{1u} y_{1v} + \frac{F_1 G_1}{g_1^2} y_{1v}^2 + \\ & + \frac{E_1 F_1}{e_1^2} z_{1u}^2 + \frac{F_1^2}{e_1 g_1} z_{1u} z_{1v} + \\ & + \frac{E_1 G_1}{e_1 g_1} z_{1u} z_{1v} + \frac{F_1 G_1}{g_1^2} z_{1v}^2 = \\ & = \frac{E_1 F_1}{e_1} + \frac{F_1 G_1}{g_1} \end{aligned}$$

$$x_{1u} X_{1v} + y_{1u} Y_{1v} + z_{1u} Z_{1v} = - F_1$$
$$x_{1v} X_{1u} + y_{1v} Y_{1u} + z_{1v} Z_{1u} = - F_1$$

Die Gleichung lautet also nach Einsetzung dieser Werte:

$$\lambda_u \; \lambda_v + \lambda^2 \; \left(\frac{E_1 \, F_1}{e_1} + \frac{F_1 \, G_1}{g_1}\right) - 2 \; F_1 \; \lambda = 0 \text{ oder:}$$

$$\lambda_u \; \lambda_v + F_1 \; (\lambda^2 \; k_1 - 2 \; \lambda) = 0; \text{ denn: } \frac{E_1 \, g_1 + G_1 \, e_1}{e_1 \, g_1} = k_1$$

(mittlere Krümmung).

F_1, λ und k sind ganz beliebige, uns unbekannte Funktion der Parameter. Da die Differentialgleichung unter solchen Umständen nicht weiter behandelt werden kann, so wollen wir uns die Frage vorlegen, ob λ überhaupt eine Funktion von u und v sein kann. Eine rein deskriptive Betrachtung über das Problem wird uns darüber belehren.

Nach den Lehren der darstellenden Geometrie bleibt die wahre Größe eines Winkels bei Orthogonalprojektion auf eine Ebene nur dann erhalten, wenn ein Schenkel parallel zur letzteren gelegen ist. Soll es also solche Flächen geben, deren Krümmungslinien bei orthogonaler Projektion auf eine Ebene wieder ein Orthogonalsystem liefern, so ist unmittelbar klar, daß die Tangentenschar jeder Krümmungslinie erster Art in einer zur Bildebene parallelen Ebene liegen muß, oder daß all diese Linien ebene Kurven sein müssen. Längs derjenigen Kurven, welche denselben in der Projektion entsprechen, muß also die Größe λ einen konstanten Wert besitzen, kann also nur eine Funktion eines einzigen Parameters sein. Dies gilt aber nicht nur für die Ebene, sondern für jede beliebige Projektionsbasis. In entsprechenden Punkten müssen die Tangenten immer parallel sein. Kurven aber, deren Tangenten paarweise parallel sind, sind im Raume selbst parallel, d. h. haben von einander einen konstanten Abstand. Kehren wir nun wieder zu unserer Gleichung zurück. λ ergibt sich hieraus stets als eine Funktion von u und v, solange das zweite Glied: $F_1 \; (\lambda^2 k_1 - 2 \; \lambda)$ von Null verschieden ist. Dieses muß also zum Verschwinden gebracht werden. Es sind zwei Fälle möglich, nämlich:

$$1) \; F_1 = 0 \quad 2) \; \lambda \, k = 2 \text{ oder } \lambda = \frac{2}{k}$$

Aus der Gleichung: $\lambda_u \; \lambda_v = 0$ folgt aber: $\lambda = \psi(u)$, wobei ψ eine willkürliche Funktion bedeutet.

Der Fall 2) würde demnach ergeben, daß die mittlere Krümmung der als Projektionsbasis dienenden Fläche eine Funktion von u allein wäre. Dies gilt aber nur für Rotationsflächen längs der Parallelkreise. Dieser Fall wird aber vom Falle 1) mit eingeschlossen.

Bei Ebene und Kugel war die Bedingung $F_1 = 0$ identisch erfüllt. Es gibt auf ihnen unendlich viele Systeme von Krümmungslinien. Aber im allgemeinen gibt es auf einer Fläche nur ein einziges System von Krümmungslinien. Das System der projizierten Krümmungslinien ist also vorläufig vollkommen bestimmt. Haben wir uns irgend eine Fläche als Projektionsbasis gewählt, so müssen wir auf derselben das System der Krümmungslinien zeichnen und längs jeder Linie der ersten Art um ein konstantes Stück λ senkrecht zur Fläche emporsteigen. So erhalten wir eine neue Fläche und auf ihr, entsprechend dem System der Krümmungslinien auf der Projektionsbasis, ein Orthogonalsystem; denn wir haben noch nicht verlangt, daß dieses zugleich ein System von Krümmungslinien sein soll. Diese Forderung aber führt uns zum letzten entscheidenden Schlag. Aus der Gleichung $F = 0$ haben wir die endgiltige Aufklärung darüber zu erwarten, welche Flächen überhaupt als Projektionsgrundflächen möglich sind. Wenn wir unter Niveaukurven einer Fläche ganz allgemein solche Kurven verstehen, welche parallel zu einer anderen Fläche verlaufen, so können wir aus unseren bisherigen Betrachtungen folgenden Satz entnehmen: „Das System der Niveaukurven und Linien steilsten Abfalls auf einer beliebigen Fläche verwandelt sich bei Orthogonalprojektion auf die bezügliche Fläche immer in ein System von Krümmungslinien". Und die Schlußfrage kann daher folgendermaßen ausgesprochen werden: Wann ist jenes System zugleich ein System von Krümmungslinien? Es besteht also die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0;$$ oder nach Einsetzung der angedeuteten Differentialquotienten:

$$\begin{vmatrix} x_{1uv} + \lambda X_{1uv} + \lambda_u X_{1v}; & y_{1uv} + \lambda Y_{1uv} + \lambda_u Y_{1v}; & z_{1uv} + \lambda Z_{1uv} + \lambda_u Z_{1v} \\ x_{1u} + \lambda X_{1u} + \lambda_u X_1; & y_{1u} + \lambda Y_{1u} + \lambda_u Y_1; & z_{1u} + \lambda Z_{1u} + \lambda_u Z_1 \\ x_{1v} + \lambda X_{1v}; & y_{1v} + \lambda Y_{1v}; & z_{1v} + \lambda Z_{1v} \end{vmatrix}$$

Hiemit multiplizieren wir die nicht verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ x_{1u} & y_{1u} & z_{1u} \\ x_{1v} & y_{1v} & z_{1v} \end{vmatrix}$$ und erhalten:

$$\left|\begin{array}{l} \Sigma x_{1uv}\, X_1 + \lambda\, \Sigma X_1\, X_{1uv} + \lambda u\, \Sigma X_1\, X_{1v}; \\ \Sigma x_{1u}\, x_{1uv} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1uv} + \lambda u\, \Sigma x_{1u}\, X_{1v}; \\ \Sigma x_{1uv}\, x_{1v} + \lambda\, \Sigma X_{1uv}\, x_{1v} + \lambda u\, \Sigma x_{1v}\, X_{1v}; \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma x_{1u}\, X_1 + \lambda\, \Sigma X_{1u}\, X_1 + \lambda u\, \Sigma X_1^2; & \Sigma x_{1v}\, X_1 + \lambda\, \Sigma X_{1v}\, X_1 \\ \Sigma x^2_{1u} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1u} + \lambda u\, \Sigma x_{1u}\, X_1; & \Sigma x_{1v}\, x_{1v} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1v} \\ \Sigma x_{1u}\, x_{1v} + \lambda\, \Sigma x_{1v}\, X_{1u} + \lambda u\, \Sigma x_{1v}\, X_1; & \Sigma x_{1v}^2 + \lambda\, \Sigma x_{1v}\, X_{1v} \end{array}\right| = 0$$

Hiezu kommen die Relationen:

$X_1\, x_{1uv} + Y_1\, y_{1uv} + Z_1\, z_{1uv} = 0$

$X_1\, X_{1uv} + Y_1\, Y_{1uv} + Z_1\, Z_{1uv} = 0$ (Das sphärische Abbild der Krümmungslinien ist wieder ein Orthogonalsystem).

$x_{1u}\, X_{1v} + y_{1u}\, Y_{1v} + z_{1u}\, Z_{1v} = 0$

$x_{1v}\, X_{1v} + y_{1v}\, Y_{1v} + z_{1v}\, Z_{1v} = G_1$

$x_{1v}\, X_{1u} + y_{1v}\, Y_{1u} + z_{1v}\, Z_{1u} = 0$ und auch die früher benutzten.

Die Determinante vereinfacht sich demgemäß, wie folgt:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda u & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial e_1}{\partial v} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1uv} & e_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_1}{\partial u} + \lambda\, \Sigma x_{1v}\, X_{1uv} - \lambda\, G_1 & 0 & g_1 - \lambda\, G_1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Oder aufgelöst:}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial e_1}{\partial v} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1uv} = 0$$

Es handelt sich jetzt noch darum, den Ausdruck $\Sigma x_{1u}\, X_{1uv}$ durch Fundamentalgrößen auszudrücken. Es ist aber:

$$X_{1u} = -\frac{E_1}{e_1}\, x_{1u}$$

$$X_{1uv} = -\frac{E_1}{e_1}\, x_{1uv} - x_{1u}\, \frac{E_{1v}\, e_1 - E_1\, e_{1v}}{e_1^2}$$

$$\Sigma x_{1u}\, X_{1uv} = -\frac{1}{2}\frac{E_1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial v} - \frac{E_{1v}\, e_1 - E_1\, e_{1v}}{e_1}$$

Durch Einsetzen erhalten wir also:

$$\frac{1}{2}\, e_{1v} - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{E_1\, e_{1v}}{e_1} - \lambda\, E_{1v} + \lambda\, E_1\, \frac{e_{1v}}{e_1} = 0 \text{ oder:}$$

$$\frac{1}{2}\, e_{1v} + \frac{\lambda}{2}\, \frac{E_1\, e_{1v}}{e_1} - \lambda\, E_{1v} = 0$$

Es besteht aber die allgemeine Integrabilitätsbedingung:

$$-E_{1v} + E_1 \frac{e_{1v}}{2e_1} + G_1 \frac{e_{1v}}{2g_1} = 0$$ (Allgemeine Gleichungen der Flächentheorie).

Daher haben wir:

$$\tfrac{1}{2} e_{1v} - \lambda G_1 \frac{e_{1v}}{2g_1} = 0 \text{ oder: } \frac{e_{1v}}{2} \cdot \frac{g_1 - \lambda G_1}{g_1} = 0$$

Diese Gleichung kann befriedigt werden durch $e_{1v} = 0$ und $g_1 - \lambda G_1 = 0$. Letztere Gleichung würde dem für λ gefundenen Resultate widersprechen, da g_1 und G_1 Funktionen von u und v sind. Es kann also nur die Gleichung: $e_{1v} = 0$ bestehen.

Wir haben damit e_1 als eine reine Funktion von u gefunden.

Daraus folgt das Endresultat:

„Als Projektionsbasis können nur solche Flächen benützt werden, auf welchen das System der Krümmungslinien zugleich ein geodätisches Orthogonalsystem bildet".

Die bisher behandelten Gesimsflächen besitzen diese Eigenschaft. Dasselbe gilt aber auch noch für die ganz allgemeinen Gesimsflächen. Dies folgt aus dem Ausdruck über das Quadrat ihres Linienelementes, welches wir schon im ersten Abschnitte entwickelt haben. Diese Flächen entstehen durch Abrollen einer Ebene auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche. Aus der Natur der Erzeugung dieser Flächen geht es hervor, daß sie eine Rückkehrkante und eine Kurve von Kreispunkten besitzen. Sie sind in jedem Augenblick der Entstehung Rotationsflächen. Und die aufeinanderfolgenden Lagen der erzeugenden Kurve bilden, wie die Meridiane der Rotationsflächen, eine Schar von geodätischen Linien. Wählen wir uns also eine beliebige derartige Fläche und errichten längs der geodätischen Krümmungslinien Normale, so liegen diese alle in der Ebene der Krümmungslinien. Die erzeugende Kurve der abgeleiteten Fläche liegt also mit der erzeugenden Kurve der Bildfläche in einer Ebene. Wir erhalten daher sämtliche Flächen, welche auf eine gegebene Gesimsfläche so projiziert werden können, daß das System ihrer Krümmungslinien wieder ein Orthogonalsystem bildet, wenn wir in der Ebene der erzeugenden Kurve der gegebenen Fläche alle möglichen Kurven zeichnen, und hierauf die besagte Ebene auf der Abwickelungsdeveloppabeln der gegebenen Fläche abrollen lassen. — Soll es also möglich sein, zwei gegebene Flächen, die eine auf die andere, so zu projizieren, daß das System der Krümmungslinien dabei ein Orthogonalsystem bleibt, so müssen auf beiden die Krümmungslienien ein geodätisches Orthogonalsystem bilden. Bei der Projektion behält dann das System der Krümmungslinien alle seine wesentlichen Eigenschaften bei. Es bleibt ein geodätisches Orthogonalsystem von Krümmungslinien. Aber nur solche Flächenpaare können hiebei in Betracht kommen, welche dieselbe Abwickelungsdeveloppabele besitzen.

auf die a … tem der Krümmungs-
linien dal … müssen auf beiden die
Krümmu … alsystem bilden. Bei
der Proj … Krümmungslinien alle
seine wese … ein geodätisches Ortho-
gonalsyste … solche Flächenpaare
können b … dieselbe Abwickelungs-
developpa …