Einleitung.

Die mathematische Wissenschaft ist, soweit sie Flächentheorie heißt, in diesem Jahrhundert von dem Gebrauche der Kartesiusschen Koordinaten abgekommen. Gauß führte die Methode der krummlinigen Koordinaten ein. Die Koordinaten x, y, z eines Flächenpunktes werden dabei als Funktionen zweier Parameter u und v dargestellt. Es ist also $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$. Jedem Werte von v entspricht eine bestimmte „Kurve v", jedem Werte von u eine bestimmte „Kurve u". Beide Kurvenscharen liegen auf der Fläche und bilden auf ihr das Netz der Koordinatenlinien. Der Gebrauch dieser Koordinaten ist für das Studium der Eigenschaften von Flächen sehr vorteilhaft, da sie ihrer Natur nach mit der Fläche an sich, ohne Rücksicht auf die Lage derselben im Raume, innig verknüpft sind. Eine Hauptrolle spielt bei allen flächentheoretischen Untersuchungen das Studium des Linienelementes. Der Ausdruck für das Quadrat desselben lautet: $ds^2 = e du^2 + 2 f \, du \, dv + g \, dv^2$. Die Größen e, f und g nennt man Fundamentalgrößen erster Ordnung. Ihre Bedeutung ist folgende:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

In dem analytischen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser: $\frac{1}{\varrho} = \frac{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}{e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2}$ treten die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung auf:

$$E = X\,x_{uu} + Y\,y_{uu} + Z\,z_{uu}$$
$$F = X\,x_{uv} + Y\,y_{uv} + Z\,z_{uv}$$
$$G = X\,x_{vv} + Y\,y_{vv} + Z\,z_{vv}$$

X, Y, Z sind die Richtungskosinus der Flächennormalen:

$$X = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} (y_u z - z_u y_v)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} (z_u x_v - x_u z_v)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} (x_u y_v - y_u x_v)$$

Der Winkel, welchen zwei Koordinatenlinien in irgend einem Punkte mit einander bilden, ist bestimmt durch: $\cos \Theta = \frac{f}{\sqrt{eg}}$

Auf dem Studium dieser Fundamentalgrößen und -Formen beruhen auch die folgenden Untersuchungen. Der Schwerpunkt derselben liegt in der Beantwortung der Frage: Werden die Krümmungslinien einer ganz beliebigen Fläche bei orthogonaler Projektion auf eine andere Fläche alle ihre wesentlichen Eigenschaften beibehalten? Es ist eine wesentliche Eigenschaft der Krümmungslinien, daß sie auf der Fläche ein Orthogonalsystem bilden. Dies wird analytisch ausgedrückt durch das Verschwinden der Fundamentalgröße f. Und überdies muß für jede Fläche, welche auf das System ihrer Krümmungslinien bezogen ist, auch die Fundamentalgröße F verschwinden. Diese beiden Bedingungen sind notwendig und hinreichend. Sollen also die Krümmungslinien einer Fläche bei orthogonaler Projektion auf eine andere Fläche auch auf dieser ein System der gleichen Art bilden, so müssen die beiden Bedingungen von den Punkten des durch die Projektion erhaltenen Bildes ebenfalls erfüllt werden. Der Weg der folgenden Untersuchungen führt vom Besonderen zum Allgemeinen.

§ 1.

Die Projektionsbasis sei eine Ebene.

Auf der Ebene stellt jedes beliebige Liniensystem ein System von Krümmungslinien dar. Es kann sich also in diesem speziellen Falle nur darum handeln, ob überhaupt Flächen existieren, deren Krümmungslinien bei orthogonaler Projektion auf eine Ebene wieder ein Orthogonalsystem liefern. Ist dies der Fall, so muß es auch umgekehrt möglich sein, von einem Orthogonalsystem der Ebene ausgehend durch den rückläufigen Prozeß zu ihnen zu gelangen. Auf der Ebene werde