Ueber die
Erhaltung der Krümmungslinien
bei
Orthogonal-Projektion.

Von

Gotthold Seyler,

Gymnasial-Assistent.

Programm

des

Kgl. humanistischen Gymnasiums

zu

Passau

für das Studienjahr 1901/1902.

Passau.

Buchdruckerei A.-G. Passavia.

1902.

Einleitung.

Die mathematische Wissenschaft ist, soweit sie Flächentheorie heißt, in diesem Jahrhundert von dem Gebrauche der Kartesiusschen Koordinaten abgekommen. Gauß führte die Methode der krummlinigen Koordinaten ein. Die Koordinaten x, y, z eines Flächenpunktes werden dabei als Funktionen zweier Parameter u und v dargestellt. Es ist also $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$. Jedem Werte von v entspricht eine bestimmte „Kurve v", jedem Werte von u eine bestimmte „Kurve u". Beide Kurvenscharen liegen auf der Fläche und bilden auf ihr das Netz der Koordinatenlinien. Der Gebrauch dieser Koordinaten ist für das Studium der Eigenschaften von Flächen sehr vorteilhaft, da sie ihrer Natur nach mit der Fläche an sich, ohne Rücksicht auf die Lage derselben im Raume, innig verknüpft sind. Eine Hauptrolle spielt bei allen flächentheoretischen Untersuchungen das Studium des Linienelementes. Der Ausdruck für das Quadrat desselben lautet: $ds^2 = e du^2 + 2 f \, du \, dv + g \, dv^2$. Die Größen e, f und g nennt man Fundamentalgrößen erster Ordnung. Ihre Bedeutung ist folgende:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

In dem analytischen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser: $\frac{1}{\varrho} = \frac{E \, du^2 + 2 F \, du \, dv + G \, dv^2}{e \, du^2 + 2 f \, du \, dv + g \, dv^2}$ treten die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung auf:

$$E = X x_{uu} + Y y_{uu} + Z z_{uu}$$
$$F = X x_{uv} + Y y_{uv} + Z z_{uv}$$
$$G = X x_{vv} + Y y_{vv} + Z z_{vv}$$

X, Y, Z sind die Richtungskosinus der Flächennormalen:

$$X = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left(y_u\, z_v - z_u\, y_v \right)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left(z_u\, x_v - x_u\, z_v \right)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left(x_u\, y_v - y_u\, x_v \right)$$

Der Winkel, welchen zwei Koordinatenlinien in irgend einem Punkte mit einander bilden, ist bestimmt durch: $cos\ \Theta = \frac{f}{\sqrt{eg}}$

Auf dem Studium dieser Fundamentalgrößen und -Formen beruhen auch die folgenden Untersuchungen. Der Schwerpunkt derselben liegt in der Beantwortung der Frage: Werden die Krümmungslinien einer ganz beliebigen Fläche bei orthogonaler Projektion auf eine andere Fläche alle ihre wesentlichen Eigenschaften beibehalten? Es ist eine wesentliche Eigenschaft der Krümmungslinien, daß sie auf der Fläche ein Orthogonalsystem bilden. Dies wird analytisch ausgedrückt durch das Verschwinden der Fundamentalgröße f. Und überdies muß für jede Fläche, welche auf das System ihrer Krümmungslinien bezogen ist, auch die Fundamentalgröße F verschwinden. Diese beiden Bedingungen sind notwendig und hinreichend. Sollen also die Krümmungslinien einer Fläche bei orthogonaler Projektion auf eine andere Fläche auch auf dieser ein System der gleichen Art bilden, so müssen die beiden Bedingungen von den Punkten des durch die Projektion erhaltenen Bildes ebenfalls erfüllt werden. Der Weg der folgenden Untersuchungen führt vom Besonderen zum Allgemeinen.

§ 1.

Die Projektionsbasis sei eine Ebene.

Auf der Ebene stellt jedes beliebige Liniensystem ein System von Krümmungslinien dar. Es kann sich also in diesem speziellen Falle nur darum handeln, ob überhaupt Flächen existieren, deren Krümmungslinien bei orthogonaler Projektion auf eine Ebene wieder ein Orthogonalsystem liefern. Ist dies der Fall, so muß es auch umgekehrt möglich sein, von einem Orthogonalsystem der Ebene ausgehend durch den rückläufigen Prozeß zu ihnen zu gelangen. Auf der Ebene werde ein zunächst beliebiges Orthogonalsystem gezeichnet. Wir versetzen uns in irgend einen Punkt und steigen von hier aus um ein vorläufig unbestimmtes Stück z empor. Dies wiederholen wir zuerst längs aller „Kurven u“ und hierauf längs aller „Kurven v“. Hierdurch gelangen wir, je nach der Bestimmung von z, zu neuen Flächen, welche aus einer doppelten Schar von Kurven aufgebaut sind. Wir verlangen nun, daß dieses Kurvensystem das System der Krümmungslinien sei, daß also jeder Punkt einer solchen Fläche folgende Bedingungen erfülle:

$$\text{I. } x_u\ x_v + y_u\ y_v + z_u\ z_v = 0$$

$$\text{II. } Xx_{uv} + Yy_{uv} + Zz_{uv} = 0$$

Für jeden Punkt der Ebene gilt die Gleichung:

$$\text{III. } x_u\ x_v + y_u\ y_v = 0$$

Aus dem Zusammenbestehen von I. und III. ergibt sich:

$$\text{IV. } z_u\ z_v = 0$$

Hieraus folgt: $z_v = 0$ oder: $z = U$; d. h. z ist eine beliebige Funktion von u allein, oder längs der „Kurven u“ ist z konstant. Dies bedeutet zunächst nichts anderes, als daß es auf jeder Fläche ein und nur ein Orthogonalsystem gibt, welches durch die Projektion nicht zerstört wird. Es ist das System der Niveaukurven und Linien steilsten Abfalles. Daraus erkennen wir sofort, daß nur Flächen, auf welchen dieses System zugleich das System der Krümmungslinien bildet, für die Frage nach der Erhaltung der Krümmungslinien in Betracht kommen können. Die Konstruktion derselben erfahren wir aus Gleichung II. Da $z_v = 0$, so vereinfacht sich dieselbe in:

$$\text{II}_1.\ x_{uv}\ y_v - y_{uv}\ x_v = 0$$

Die Integration dieser Differentialgleichung können wir auf mannigfaltige Weise vollziehen.

III. kann nämlich durch folgendes System ersetzt werden:

$$\text{III}_1.\ \begin{aligned} x_u &= \lambda y_v \\ y_u &= -\lambda x_v \end{aligned}$$ λ bedeutet irgend eine Funktion von u und v.

Hieraus folgt durch Differentiation nach v:

$$x_{uv} = \lambda y_{vv} + \lambda_v\ y_v$$

$$y_{uv} = -\lambda x_{vv} - \lambda_v\ x_v$$

Durch Addition der mit y_v multiplizierten ersten zu der mit $-x_v$ multiplizierten zweiten Gleichung folgt:

$x_{uv}\ y_v - y_{uv}\ x_v = \lambda_v\ (y_v^2 + x_v^2) + \lambda\ (y_v\ y_{vv} + x_v\ x_{vv})$ oder wegen II_1: $\lambda_v\ (y_v^2 + x_v^2) + \lambda\ (y_v\ y_{vv} + x_v\ x_{vv}) = 0$ oder:

$$\frac{\lambda_v}{\lambda} = -\frac{y_v\, y_{vv} + x_v\, x_{vv}}{y^2_v + x^2_v} = -\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\partial}{\partial_v}(x^2_v + y^2_v)}{x^2_v + y^2_v} \text{ d. h.}$$

$$\frac{\partial}{\partial_v}\, lg\,(\lambda\,.\,\sqrt{x^2_v + y^2_v}) = 0 \text{ oder integriert:}$$

$$lg\,(\lambda\sqrt{x^2_v + y^2_v}) = \varphi\,(u)$$

Daraus folgt: $\lambda = \dfrac{e^{\varphi(u)}}{\sqrt{x^2_v + y^2_v}}$

Diesen Wert von λ setzen wir in das Gleichungssystem III_1 ein und erhalten:

$$x_u = \frac{e^{\varphi(u)}}{\sqrt{x^2_v + y^2_v}}\, y_v$$

$$y_u = -\frac{e^{\varphi(u)}}{\sqrt{x^2_v + y^2_v}}\, x_v$$

Durch Addition der quadrierten Gleichungen ergibt sich: $x_u^2 + y_u^2 = e^{2\varphi(u)} = \psi^2_u$; $x_u^2 + y_u^2$ ist aber die Fundamentalgröße e der Ebene. Sie ist eine reine Funktion von u. Das Linienelement der Ebene hat daher die Form:

$$ds^2 = \psi^2_{(u)}\, du^2 + g\, dv^2$$

Setzen wir $\psi(u) = dU'$, $U' = \int \psi(u)\, du$, so geht der Ausdruck über in $ds^2 = (dU')^2 + g\, dv^2$

Das gleiche Endresultat erhalten wir auf folgendem Wege: Die Gleichung III kann auch ersetzt werden durch das System:

III_2. $\begin{array}{l} x_v = -\lambda\, y_u \\ y_v = \lambda\, x_u \end{array}$ Setzen wir diese Werte für x_v und y_v in die Gleichung II_1 ein, so erhalten wir:

$\lambda\,(x_{uv}\, x_u + y_{uv}\, y_u) = 0$ d. h., weil λ von Null verschieden:

$\dfrac{d}{dv}(x_u^2 + y_u^2) = 0$ oder wie vorhin: $x_u^2 + y_u^2 = \chi(u)$

Dieses Resultat führt uns auf eine charakteristische Form des Linienelementes der Ebene, welche zeigt, daß das Orthogonalsystem in der Projektion kein beliebiges sein kann, sondern ein geodätisches Orthogonalsystem sein muß. Denn die Gaußsche Gleichung der geodätischen Linien auf einer beliebigen Fläche lautet:

$$(eg - f^2)[du\, d^2v - dv\, d^2u] + (du)^3 [e(f_u - \tfrac{1}{2} e_v) - \tfrac{1}{2} f e_u] + (du)^2 dv$$

$$\cdot\, [e g_u + f(f_u - \tfrac{1}{2} e_v) - f e_v - \tfrac{1}{2} g e_u] +$$

$$+ du\, (dv)^2 [- g e_v - f(f_v - \tfrac{1}{2} g_u) + f g_u + \tfrac{1}{2} e g_v] +$$

$$+ dv)^3 [\tfrac{1}{2} f g_v - g(f_v - \tfrac{1}{2} g_u)] = 0$$

Für den besonderen Fall eines geodätischen Orthogonalsystemes, wobei die „Kurven v" geodätische Linien sein sollen, vereinfacht sich dieselbe in:

$\frac{1}{2}\, e\, e_v (du)^3 = 0$ oder $e_v = 0$, weil $f = 0$, $dv = 0$, $d^2v = 0$

Da e eine ganz willkürliche Funktion von u und v ist, so ist auch das System der geodätischen Linien ein völlig beliebiges. Die geodätischen Linien auf der Ebene sind Gerade. Daß die eine Schar der projizierten Kurven eine Schar von geraden Linien sein muß, hätten wir auch unmittelbar auf folgende Weise erkannt. Wir differentieren das System der Gleichungen III_2 nach u und erhalten:

$$x_{uv} = - \lambda y_{uu} - \lambda_u y_u$$
$$y_{uv} = \lambda x_{uu} + \lambda_u x_u$$

Die erste Gleichung multiplizieren wir mit y_v und addieren hiezu die mit $- x_v$ multiplizierte zweite. Dies ergibt:

$$x_{uv} y_v - y_{uv} x_v = - \lambda (y_{uu} y_v + x_{uu} x_v) - \lambda_u (y_u y_v +$$

$+ x_u x_v)$ oder unter Beachtung von Gleichung II_1 und III.:

$$\lambda (y_{uu} y_v + x_{uu} x_v) = 0$$

Für y_v und x_v setzen wir ihre Werte aus III_2 ein und erhalten:

$\lambda^2 \, (y_{uu} x_u - x_{uu} x_u) = 0$

Weil λ nicht verschwinden kann, so folgt:

$$y_{uu} x_u - x_{uu} y_u = 0 \text{ oder:}$$

$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{y_u}{x_u}\right) = 0.$ Die Integration ergibt:

$\frac{y_u}{x_u} = V$, wobei V eine willkürliche Funktion des Parameters v bedeutet.

Aus $y_u = x_u V$ folgt durch nochmalige Integration:

$$y - x\, V = V_1$$

Diese Gleichung stellt uns aber, wenn v konstant ist, eine gerade Linie dar. Wenn v alle Werte annimmt, erhalten wir eine Schar von geraden Linien.

Diese Untersuchungen ermöglichen es uns, Flächen zu konstruieren, deren Krümmungslinien bei orthogonaler Projektion auf eine Ebene wieder ein Orthogonalsystem bilden. Wir zeichnen uns in einer Ebene eine Schar von Geraden, oder, weil diese als Umhüllungsgebilde eine Kurve erzeugen, eine beliebige Kurve, ziehen ihre Tangenten und die zu denselben orthogonalen Trajektorien. Diese verhalten sich zur ursprünglichen Kurve wie *Evolvente* zur *Evolute.* Längs jeder Evolvente gehen wir um ein konstantes, von Kurve zu Kurve aber stetig veränderliches Stück z senkrecht empor, oder kürzer, wir erteilen jeder Evolvente eine zur Bildebene senkrechte Translation. Hieraus ergibt sich, daß die eine Schar der Krümmungslinien auf der Fläche aus lauter kongruenten, in parallelen Ebenen liegenden Kurven besteht. Die andere Schar der Krümmungslinien besteht ebenfalls aus lauter kongruenten ebenen Kurven, deren Ebenen einen senkrechten Cylinder mit der obigen Evolute als Basis umhüllen. Die Flächen können also entstanden gedacht werden durch Abrollen einer Ebene auf einem geraden Cylinder. Verfolgen wir den Gang dieser Entstehung etwas näher. Die Ebene rollt um eine anfänglich gewählte Seitenlinie des Cylinders, um die Lage der unmittelbar benachbarten Tangentialebene zu erreichen. Dabei beschreibt die erzeugende Kurve einen unendlich schmalen Flächenstreifen. Die Ebene steht auf demselben während der Drehung senkrecht. Die Kurve beschreibt also in jedem Augenblick einen Streifen einer Rotationsfläche. Der Schnittpunkt der erzeugenden Kurve mit der jeweiligen Seitenlinie bleibt bei jeder einzelnen Drehung in Ruhe. Zwei benachbarte Erzeugende schneiden sich also. Die Gesamtheit der Schnittpunkte bildet auf der Fläche eine sogen. Rückkehrkante. Diese Kurve ist vollständig erzeugt, wenn die Erzeugende auf dem Cylinder vollständig abgerollt ist. Es ist ferner klar, daß der Cylinder von sämtlichen Flächennormalen berührt wird. Er bildet die Fläche der Krümmungsmittelpunkte längs der „Kurven u". Denken wir uns nunmehr die Evolute der erzeugenden Kurve gezeichnet, so wird dieselbe infolge der Drehung gleichfalls auf dem Cylinder abrollen. Sie beschreibt die Fläche der Krümmungsmittelpunkte längs der „Kurven v" und hat, wie die Hauptfläche, eine Rückkehrkante, welche zugleich auf dem Cylinder liegt. Längs dieser Kurve fallen also die Mittelpunkte der beiden Krümmungen zusammen. Ihre sämtlichen Tangenten treffen daher die Fläche in Punkten, welche eine Kurve von Kreispunkten erfüllen. Von den hiemit beschriebenen Flächen, welche Monge Gesimsflächen *(surfaces moulures)* nennt, wollen wir im Folgenden eine allgemeine Parameterdarstellung geben.

Da die Punkte der zu wählenden Evolute durch den Schnitt zweier „Kurven v" entstehen, so sind ihre Koordinaten Funktionen von v allein. Die Parameterdarstellung der Kurve lautet also:

$$\begin{cases} x = \varphi(v) \\ y = \psi(v) \end{cases} \qquad \begin{aligned} dx &= \varphi'(v)\, dv \\ dy &= \varphi'(v)\, dv \end{aligned} \qquad ds^2 = (\varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2)\, dv^2 = dv^2,$$

$$\text{weil } \varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2 = 1$$

v ist der von einem bestimmten Anfangspunkt aus gezählte Bogen der Kurve. Von diesem Punkte aus gehen wir jetzt um ein Stück U in der Richtung der Tangente weiter. U ist dabei irgend eine Funktion des Parameters u. Die Anfangstangente rolle sodann auf der Kurve ab. In jeder Lage tragen wir vom Berührungspunkte aus die um den auf der Kurve zurückgelegten Weg verminderte Strecke U auf der Tangente ab. Indem wir alle möglichen Werte von U auf diese Weise zur Verwendung bringen, erhalten wir sämtliche Evolventen der Kurve. Daraus geht die gesuchte Parameterdarstellung der Flächen hervor:

$$\begin{cases} x = \varphi(v) + (U-v)\,\varphi'(v) \\ y = \psi(v) + (U-v)\,\psi'(v) \\ z = \int \sqrt{1-U'^2}\, du \end{cases} \qquad dz^2 = du^2 - dU^2$$

Die Fundamentalgrößen der Flächen berechnen sich, wie folgt:

$$x_u = U'\varphi'(v) \qquad x_v = (U-v)\,\varphi''(v)$$

$$y_u = U'\psi'(v) \qquad y_v = (U-v)\,\psi''(v)$$

$$z_u = \sqrt{1-U'^2} \qquad z_v = 0$$

$$x_{uv} = U'\varphi''(v) \qquad x_{vv} = (U-v)\,\varphi'''(v) - \varphi''(v)$$

$$y_{uv} = U'\psi''(v) \qquad y_{vv} = (U-v)\,\psi'''(v) - \psi''(v)$$

$$z_{uv} = 0 \qquad z_{vv} = 0$$

$$x_{uu} = U''\varphi'(v) \qquad e = 1$$

$$y_{uu} = U''\psi'(v) \qquad g = (U-v)^2 \cdot (\varphi''^2(v) + \psi''^2(v))$$

$$z_{uu} = -\frac{U'\,U''}{\sqrt{1-U'^2}},\; f = 0$$

$$X = -\frac{\sqrt{1-U'^2}\;\psi''(v)}{\sqrt{\varphi''^2(v) + \psi''^2(v)}},\; Y = \frac{\sqrt{1-U'^2}\;\varphi''(v)}{\sqrt{\varphi''^2(v) + \psi^{2''}(v)}}$$

$$Z = \frac{U'\,(\varphi'(v)\,\psi''(v) - \psi'(v)\,\varphi''(v))}{\sqrt{\varphi''^2(v) + \psi''^2(v)}}$$

$$E = \frac{U''\,(\psi'(v)\,\varphi''(v) - \varphi'(v)\,\psi''(v))}{\sqrt{(\varphi''^2(v) + \psi''^2(v))\,(1-U'^2)}} = -\frac{U''}{\sqrt{1-U'^2}}\,, \quad F = 0$$

$$G = \frac{\sqrt{1-U'^2}\;(U-v)\,(\varphi''(v)\,\psi'''(v) - \varphi'''(v)\,\psi''(v))}{\sqrt{\varphi''^2(v) + \psi''^2(v)}}$$

$$= \sqrt{1-U'^2}\;(U-v)\;(\varphi''^2(v) + \psi''^2(v))$$

Bei der Berechnung kamen zur Verwendung die Relation: $\varphi'^2(v) + \psi'^2(v) = 1$ und die daraus folgende:

$$\varphi'(v)\,\varphi''(v) + \psi'(v)\,\psi''(v) = 0.$$

Der Ausdruck für das Linienelement einer Gesimsfläche, welche auf ihre Krümmungslinien bezogen ist, gestaltet sich also folgendermaßen:

$$ds^2 = du^2 + (U-v)^2\,(\varphi''^2(v) + \psi''^2(v))\;dv^2.$$

Früher haben wir bewiesen, daß dies der charakteristische Ausdruck für das Linienelement einer Fläche ist im Falle eines geodätischen Orthogonalsystemes. Das System der Krümmungslinien einer Gesimsfläche ist also zugleich ein geodätisches Orthogonalsystem, und es behält diese Eigenschaft bei orthogonaler Projektion auf eine Ebene, welche parallel ist den „Kurven u".

Für den Ausdruck der Gaußschen Krümmung in einem Flächenpunkte haben wir die beiden allgemeinen Formeln:

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} = \frac{EG-F^2}{eg-f^2} \text{ und } K = -\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}\sqrt{g}$$

Angewandt auf unsere Flächen, lauten dieselben:

$$K = \frac{U''\,(\psi'(v)\,\varphi''(v) - \varphi'(v)\,\psi''(v))\,(\varphi''(v)\,\psi'''(v) - \varphi'''(v)\,\psi''(v))\,(U-v)}{(U-v)^2\;(\varphi''^2(v) + \psi''^2(v))}$$

$$\text{oder } K = -\frac{U''}{U-v}$$

Hiebei kam zur Verwendung die Relation:

$$\varphi'(v)\,\varphi'''(v) + \psi'(v)\,\psi'''(v) + \varphi''^2(v) + \psi''^2(v) = 0$$

Aus dem Aufbau des Krümmungsmaßes wird folgendes klar: Benützt man zur Konstruktion von Gesimsflächen eine bestimmte Funktion U und wählt sich hiezu alle möglichen Evoluten, so haben all diese Flächen in Punkten, welche gleichen Werten der Parameter u und v entsprechen, gleiches Krümmungsmaß, weil letzteres von der Gestalt der Evolute völlig unabhängig ist.

Eine sehr brauchbare Parameterdarstellung unserer Flächen erhalten wir, wenn wir sie als speziellen Fall einer allgemeinen Klasse von Flächen auffassen, welche durch die Bewegung einer unveränderlichen Kurve im Raume entstehen, durch folgende Entwicklungen:

Wir betrachten eine Kurve C und ein System von beweglichen Axen, welches mit der Kurve fest verbunden ist, und nehmen an, daß die Lage der Kurve und der beweglichen Axen von einem Parameter v abhänge, welcher bei der Bewegung die Rolle der Zeit spielen soll. ξ, η, ζ und p, q, r seien die Translationen und Rotationen des beweglichen Systemes. Diese sechs Größen sind Funktionen von v. x, y, z seien die Koordinaten irgend eines Punktes der Kurve in Bezug auf die beweglichen Axen. Sie sind gegebene Funktionen eines Parameters u. Wenn die beweglichen Axen ihre Lage verändern und gleichzeitig der Punkt auf der Kurve verschoben wird, so sind die Projektionen des unendlich kleinen von ihm beschriebenen Bogens gegeben durch:

$$\begin{aligned} &dx + (\xi + qz - ry)\, dv \\ &dy + (\eta + rx - pz)\, dv \\ &dz + (\zeta + py - qx)\, dv \end{aligned}$$

Das Quadrat des Linienelementes der durch die Bewegung erzeugten Fläche hat zum Ausdruck die Summe der Quadrate der drei Projektionen, also:

$$\begin{aligned} ds^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, du^2 + 2 \Bigg(x' \xi + y'\eta + z' \zeta \\ + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ p & q & r \end{vmatrix}\Bigg)\, du\, dv + [(\xi + qz - ry)^2 + (\eta + rx - pz)^2 \\ + (\zeta + py - qx)^2]\, dv^2, \end{aligned}$$

wobei $\dfrac{dx}{du} = x'$, $\dfrac{dy}{du} = y'$, $\dfrac{dz}{du} = z'$ gesetzt ist.

In dem speziellen Falle, wo sich die Bewegung der Kurve auf eine bloße Translation zurückführen läßt, sind p, q, r gleich Null, also:

$$\begin{aligned} ds^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, du^2 + 2\, (x'\xi + y'\eta + z'\zeta)\, du\, dv \\ + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dv^2 \end{aligned}$$

Setzen wir ferner voraus, daß die Kurve eine ebene und die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte normal zur Kurvenebene seien, welche zugleich die xy-Ebene des beweglichen Axensystems bildet, so verschwinden die Größen z, ξ, η, r. Ist u der Bogen der Kurve, so besteht die Relation: $x'^2 + y'^2 = 1$.

Und der Ausdruck des Linienelementes lautet:

$$ds^2 = du^2 + (\zeta + py - qx)^2\, dv^2$$

Gehen wir jetzt zu unseren Gesimsflächen über und nehmen an, daß die x-Axe des beweglichen Systemes parallel den Erzeugenden des Abwickelungszylinders sei, so verschwindet auch q, und das Linienelement hat die Form:

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{\zeta}{p} + \mathrm{y}\right)^2 p^2\, dv^2$$

Hiefür können wir als allgemeine Form setzen: $ds^2 = du^2 + (U-V)\, dv^2$, wobei U und V resp. Funktionen von u und v sind. Durch Umformung erhalten wir:

$$ds^2 = dU^2 + (U-v)^2\, dv^2 + (1-U'^2)\, du^2$$

Die zwei ersten Glieder, für sich genommen, machen das Quadrat des Linienelementes einer abwickelbaren Fläche aus. Setzen wir nämlich:

$$\mathrm{x} = U \cos v + \int V \sin v\, dv$$

$$\mathrm{y} = U \sin v - \int V \cos v\, dv\,,$$ so folgt:

$$d\mathrm{x}^2 + d\mathrm{y}^2 = dU^2 + (U-V)^2\, dv^2.$$

Hiezu fügen wir: $\mathrm{z} = \int \sqrt{1-U'^2}\, du$

Obige Form des Linienelementes ändert sich nicht, wenn man v durch av ersetzt, und es ist also möglich, eine willkürliche Konstante in die Parameterdarstellung einzuführen, so daß sie nunmehr lautet:

$$\mathrm{x} = a\, U \cos \frac{v}{a} + \int V \sin \frac{v}{a}\, dv$$

$$\mathrm{y} = a\, U \sin \frac{v}{a} - \int V \cos \frac{v}{a}\, dv$$

$$\mathrm{z} = \int \sqrt{1-a^2\, U'^2}\, du$$

Diese Formeln bestimmen eine Familie von Gesimsflächen, welche alle aufeinander abwickelbar sind. Eine Gesimsfläche kann also auf unendlich viele Arten so verbogen werden, daß sie dabei eine Gesimsfläche bleibt.

§ 2.

Die Projektionsbasis sei eine Kugel.

Bei dieser Untersuchung soll uns derselbe Grundgedanke leiten, wie bei der vorigen. Die Kugel verlegen wir mit ihrem Mittelpunkt in den Koordinatenanfang und setzen voraus, daß ihr Radius gleich der Einheit sei, ganz als ob wir eine sphärische Abbildung machen wollten. Auf derselben legen wir irgend ein Orthogonalsystem fest. Wir wählen uns einen Punkt, verbinden ihn mit dem Mittelpunkt und tragen auf dem verlängerten Radius in positiver Richtung ein vorläufig unbestimmtes Stück λ auf. Dies wiederholen wir für alle Punkte des Orthogonalsystemes, indem wir jede der beiden Kurvenscharen einzeln durchlaufen. So entsteht oberhalb der Kugel eine aus zwei Kurvenscharen zusammengesetzte Fläche. Wir verlangen zunächst, daß die Gesamtheit dieser Kurven ein Orthogonalsystem bilde. Es muß also auf der Kugel und Fläche die Fundamentalgröße f verschwinden. Die Punkte der Kugel haben die Koordinaten X, Y, Z, welche zugleich die Richtungskosinus des Projektionsstrahles sind. Die Koordinaten der Flächenpunkte sind:

$$\begin{aligned} x &= X + \lambda X = X(1+\lambda) \\ y &= Y + \lambda Y = Y(1+\lambda) \\ z &= Z + \lambda Z = Z(1+\lambda) \end{aligned}$$ Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x_u &= X_u(1+\lambda) + \lambda_u X & \qquad x_v &= X_v(1+\lambda) + \lambda_v X \\ y_u &= Y_u(1+\lambda) + \lambda_u Y & \qquad y_v &= Y_v(1+\lambda) + \lambda_v Y \\ z_u &= Z_u(1+\lambda) + \lambda_u Z & \qquad z_v &= Z_v(1+\lambda) + \lambda_v Z \end{aligned}$$

Die Bedingung $f = 0$ für die Fläche schreibt sich also folgendermaßen:

$$(X_u X_v + Y_u Y_v + Z_u Z_v)(1+\lambda) + (X_u X + Y_u Y + \\ + Z_u Z)(1+\lambda)\lambda_v + (XX_v + YY_v + ZZ_v)(1+\lambda)\lambda_u + \\ + \lambda_u \lambda_v (X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$$

Hiezu kommen folgende Relationen:

$$f_1 = X_u X_v + Y_u Y_v + Z_u Z_v = 0; \; X^2 + Y^2 + Z^2 = 1; \\ XX_u + YY_u + ZZ_u = 0 \text{ und } XX_v + YY_v + ZZ_v = 0.$$

Es ergibt sich also für λ die Differentialgleichung: $\lambda_u \lambda_v = 0$, welche befriedigt wird durch die Annahme: $\lambda_v = 0$, d. h. λ ist eine reine Funktion von u, längs der „Kurven u" konstant. Das Orthogonalsystem der Fläche muß aber auch ein System von Krümmungslinien sein. Wir müssen also weiterhin die Relation $F = 0$ zu Rate ziehen. Da F in Determinantenform geschrieben werden kann, so haben wir:

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

Diese Determinante vereinigen wir zu einer Produktdeterminante mit

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix}$$

Diese besitzt den Wert $e_1 g_1 - f_1^2$ und kann also nicht verschwinden.

Durch Einsetzen der Werte:

$$x_{uv} = X_{uv}(1+\lambda) + \lambda_u X_v$$

$$y_{uv} = Y_{uv}(1+\lambda) + \lambda_u Y_v$$

$$z_{uv} = Z_{uv}(1+\lambda) + \lambda_u Z_v$$

ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} X_{uv}(1+\lambda) + \lambda_u X_v; & Y_{uv}(1+\lambda) + \lambda_u Y_v; & Z_{uv}(1+\lambda) + \lambda_u Z_v \\ X_u\,(1+\lambda) + \lambda_u X; & Y_u\,(1+\lambda) + \lambda_u Y; & Z_u\,(1+\lambda) + \lambda_u Z \\ X_v\,(1+\lambda) + \lambda_v X; & Y_v\,(1+\lambda) + \lambda_v Y; & Z_v\,(1+\lambda) + \lambda_v Z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = 0$$

Die angedeutete Multiplikation führen wir aus und erhalten:

$$\begin{vmatrix} \Sigma X X_{uv}\,(1+\lambda) + \Sigma X_v X \lambda_u; & \Sigma X X_u (1+\lambda) + \Sigma \lambda_u X^2; & \Sigma X X_v\,(1+\lambda) + \Sigma \lambda_v X^2 \\ \Sigma X_u X_{uv} (1+\lambda) + \Sigma X_u X_v \lambda_u; & \Sigma X_u^2\,(1+\lambda) + \Sigma \lambda_u X X_u; & \Sigma X_u X_v\,(1+\lambda) + \Sigma \lambda_v X X_v \\ \Sigma X_v X_{uv} (1+\lambda) + \Sigma X_v^2\,\lambda_u; & \Sigma X_v X_u (1+\lambda) + \Sigma \lambda_u X X_u; & \Sigma X_v^2\,(1+\lambda) + \Sigma \lambda_v X X_v \end{vmatrix} = 0$$

Da auf der Kugel jedes Koordinatensystem ein System von Krümmungslinien bildet, so besteht die Gleichung $F_1 = 0$, also

$$X X_{uv} + Y Y_{uv} + Z Z_{uv} = 0$$

Dadurch vereinfacht sich die Determinante zur folgenden:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_u & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial e_1}{\partial v}\,(1+\lambda) & e_1(1+\lambda) & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_1}{\partial u}\,(1+\lambda) + g_1 \lambda_u & 0 & g_1(1+\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Hier ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial e_1}{\partial v}\,(1+\lambda)\,\lambda_u = 0$$

λ_u und λ sind aber von Null verschiedene Funktionen, wie oben gezeigt, und die Annahme $\lambda = -1$ würde zu einem Trivialfalle führen. Es erübrigt also nur noch anzunehmen die Gleichung:

$$\frac{\partial e_1}{\partial v} = 0;$$ d. h. e_1 ist eine reine Funktion von u.

Aus alledem schöpfen wir folgendes Endresultat:

Auf allen Flächen, deren Krümmungslinien bei orthogonaler Projektion auf eine Kugel wieder ein Orthogonalsystem bilden, muß die eine Schar der Krümmungslinien auf Kugeln gelagert sein, welche mit der Bildkugel konzentrisch sind. Das System der projizierten Krümmungslinien ist ein geodätisches Orthogonalsystem. Die geodätischen Linien der Kugel sind aber ihre Hauptkreise. In dem allgemeinen Falle der Kugel ist die Ebene als Spezialfall enthalten, wenn man sie nämlich als eine Kugel mit unendlich großem Radius ansieht. Demgemäß stellt sich auch das Problem auf der Kugel als das allgemeinere dar.

Um unser Bild zu vervollständigen und die Flächen thatsächlich zu konstruieren, ziehen wir auf der Kugel eine Schar von Hauptkreisen und ihre orthogonalen Trajektorien. Als Umhüllungsgebilde tritt wieder eine Kurve auf. Wir könnten also auch sagen: Um zu den gesuchten Flächen zu gelangen, zeichnen wir uns auf der Kugel irgend eine Kurve, legen an sie alle ihre sphärischen Tangenten und konstruieren uns deren orthogonale Trajektorien. Längs jeder solchen Kurve steigen wir um ein konstantes Stück λ senkrecht zur Kugeloberfläche empor. Der Wert von λ soll sich nach irgend einem Gesetze stetig ändern. Beide Scharen von Krümmungslinien auf der erhaltenen Fläche bestehen jede für sich aus kongruenten Kurven. Den Hauptkreisen in der Projektion entsprechen lauter ebene Kurven auf der Fläche. Ihre Ebenen haben den Koordinatenanfang gemeinsam und als Umhüllungsgebilde einen gewissen Kegel. Die Entstehung der Flächen kann also auch folgendermaßen beschrieben werden:

Wir wählen einen Kegel mit beliebiger Leitkurve, dessen Spitze im Koordinatenanfang liegt. Eine Ebene, in welcher zuvor eine beliebige Kurve gezeichnet wurde, rolle, ohne zu gleiten, auf dem Kegel als Tangentialebene ab. In jedem Augenblicke wird dadurch ein Streifen einer Rotationsfläche hervorgebracht. Der Punkt, welchen die erzeugende Kurve mit einer Seitenlinie des Kegels gemeinsam hat, bleibt bei jeder einzelnen Drehung in Ruhe. Die Gesamtheit dieser Punkte macht auf der Fläche eine Rückkehrkante aus, welche zugleich auf dem Abwickelungskegel liegt. Längs dieser Kurve ist die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaß unendlich groß; denn der Kegel ist die Fläche der Krümmungsmittelpunkte erster Art. Die von der Evolute der erzeugenden Kurve beschriebene Fläche hat ebenfalls eine auf dem Kegel liegende Rückkehrkante. Die Tangentenschar dieser Kurve schneidet die Fläche in einer Unendlichkeit von Kreispunkten.

Diesem geometrischen Bilde möge ein analytisches folgen, nämlich die Parameterdarstellung der Gesimsflächen mit Kegelabwickelung.

Die auf der Bildkugel zu wählende beliebige Kurve sei dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(v)$$
$$y = \psi(v)$$
$$z = \chi(v)$$

Hiebei sind folgende Relationen giltig:

$$\varphi^2(v) + \psi^2(v) + \chi^2(v) = 1$$
$$\varphi'^2(v) + \psi'^2(v) + \chi'^2(v) = 1$$
$$\varphi'(v)\,\varphi''(v) + \psi'(v)\,\psi''(v) + \chi'(v)\,\chi''(v) = 0$$
$$\varphi(v)\,\varphi'(v) + \psi(v)\,\psi'(v) + \chi(v)\,\chi'(v) = 0$$
$$\varphi(v)\,\varphi''(v) + \psi(v)\,\psi''(v) + \chi(v)\,\chi''(v) = -1$$

In einem beliebigen Punkte der Kurve legen wir an dieselbe eine sphärische Tangente, d. h. einen sie berührenden Hauptkreis. Vom Berührungspunkt aus gehen wir um ein Bogenstück, welches wir gleich einer Funktion U des Parameters u setzen wollen, auf dem Hauptkreis weiter. Die Koordinaten des so erhaltenen Kugelpunktes können folgendermaßen gefunden werden: In dem gewählten Berührungspunkt legen wir die gewöhnliche geometrische Tangente an die Kurve. Diese ist gleichzeitig Tangente der sphärischen Tangente. Sie bildet mit den Koordinatenaxen Winkel, deren Kosinus sind: $\varphi'(v)$, $\psi'(v)$ und $\chi'(v)$. Es soll nunmehr ein neues bewegliches rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt werden. Die neue X'-Axe ist die Parallele zur vorhin erwähnten Tangente durch den Koordinatenanfang, die neue Y'-Axe die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Kugelmittelpunkt. Für die Koordinatentransformation ergibt sich also folgendes Schema der Richtungskosinus:

	X	Y	Z
X'	$\varphi'(v)$	$\psi'(v)$	$\chi'(v)$
Y'	$\varphi(v)$	$\psi(v)$	$\chi(v)$
Z'	γ	μ	ν

Im neuen System, für welches die Z'-Axe nicht in Betracht kommt, verfahren wir zuerst nach der Methode der Polarkoordinaten und suchen uns den Punkt, dessen Radiusvektor gleich der Einheit und dessen Amplitude, von der positiven Y'-Axe gegen die positive X'-Axe hingerechnet, gleich U ist. Dies ergibt:

$x' = \sin U$
$y' = \cos U$

Durch Rückwärtstransformation erhalten wir:

$$\begin{aligned} X &= \sin U\ \varphi'(v) + \cos U\ \varphi(v) \\ Y &= \sin U\ \psi'(v) + \cos U\ \psi(v) \\ Z &= \sin U\ \chi'(v) + \cos U\ \chi(v) \end{aligned}$$

Dabei wurden angewandt die allgemeinen Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos (x'x) + y' \cos (y'x) + z' \cos (z'x) \\ y &= x' \cos (x'y) + y' \cos (y'y) + z' \cos (z'y) \\ z &= x' \cos (x'z) + y' \cos (y'z) + z' \cos (z'z) \end{aligned}$$

In jedem folgenden Berührungspunkt, für welchen das eben besprochene Verfahren wiederholt wird, vermindern wir die Funktion U um den auf der Kurve vom Berührungspunkt zurückgelegten Weg. Lassen wir U alle möglichen Werte annehmen, so erhalten wir das erforderliche Orthogonalsystem auf der Kugel. Und die Parameterdarstellung der letzteren lautet:

$$\begin{aligned} X &= \sin(U-v)\ \varphi'(v) + \cos(U-v)\ \varphi(v) \\ Y &= \sin(U-v)\ \psi'(v) + \cos(U-v)\ \psi(v) \\ Z &= \sin(U-v)\ \chi'(v) + \cos(U-v)\ \chi(v) \end{aligned}$$

So gelangen wir schließlich zur Parameterdarstellung unserer Flächen:

$$x = \Big[\ \sin(U-v)\ \varphi'(v) + \cos(U-v)\ \varphi(v)\ \Big]\ (1 + \lambda)$$

$$y = \Big[\ \sin(U-v)\ \psi'(v) + \cos(U-v)\ \psi(v)\ \Big]\ (1 + \lambda)$$

$$z = \Big[\ \sin(U-v)\ \chi'(v) + \cos(U-v)\ \chi(v)\ \Big]\ (1 + \lambda)$$

λ und U sind dabei durch die Relation verbunden:

$$du^2 = \Big[\ d\,(\lambda + 1)\ \Big]^2 + (\lambda + 1)^2\ (dU)^2 \text{ oder:}$$

$$\left[\frac{d\,(\lambda + 1)}{du}\right]^2 + (\lambda + 1)^2\ U'^2 = 1$$

λ muß also diese Differentialgleichung befriedigen. Das charakteristische Merkmal jeder einzelnen Flächenfamilie ist in der Funktion U zu erblicken.

Es ergeben sich folgende Fundamentalgrößen:

$$e = U'^2 (1 + \lambda)^2 + \lambda'^2 = 1,\ f = 0,\ g = (1 + \lambda)^2 \sin^2 (U - v) \,.$$
$$. (\varphi''^2(v) + \psi''^2(v) + \chi''^2(v)),\ F = 0$$

$e = 1$ besagt wieder, daß die Flächen, in Uebereinstimmung mit dem Resultate des vorigen Abschnittes, dadurch ausgezeichnet sind, daß das System ihrer Krümmungslinien zugleich ein geodätisches Orthogonalsystem bildet. Das System verliert also diese Eigenschaft nicht bei orthogonaler Projektion auf eine Kugel.

§ 3.

Die Projektionsbasis sei eine beliebige Fläche.

Es liege irgend eine Fläche als gegeben vor. Auf derselben wollen wir ein Orthogonalsystem festlegen, wobei wir uns die „Kurven u_1 und v_1" als Projektionen der Krümmungslinien anderer Flächen denken, welch letztere wir suchen. Wir wählen uns irgend einen Punkt auf der gegebenen Fläche, errichten in ihm die Normale und steigen in positiver Richtung um ein vorläufig unbestimmtes Stück λ in die Höhe. Für alle Punkte der beiden Kurvenscharen unter stetiger Veränderung des Wertes von λ wiederholt, führt dieser Prozeß zu einer neuen Fläche. Die Koordinaten der gegebenen Fläche seien dargestellt durch:

$$x_1 = \varphi(u_1, v_1) \quad y_1 = \psi(u_1, v_1) \quad z_1 = \chi(u_1, v_1)$$

Die Koordinaten der neuen Fläche lauten also, wenn X_1, Y_1, Z_1 die Richtungskosinus der Normalen sind:

$$x = x_1 + \lambda X_1$$
$$y = y_1 + \lambda Y_1$$
$$z = z_1 + \lambda Z_1$$

Die den „Kurven u_1 und v_1" der gegebenen Fläche entsprechenden „Kurven u und v" der erzeugten Fläche sollen aber die Krümmungslinien derselben sein. f_1, f, F müssen also verschwinden. Es muß sein:

$$x_{1u}\, x_{1v} + y_{1u}\, y_{1v} + z_{1u}\, z_{1v} = 0$$
$$x_u\, x_v + y_u\, y_v + z_u\, z_v = 0$$

Hiebei ist:

$$x_u = x_{1u} + \lambda X_{1u} + \lambda_u X_1 \qquad x_v = x_{1v} + \lambda X_{1v} + \lambda_v X_1$$
$$y_u = y_{1u} + \lambda Y_{1u} + \lambda_u Y_1 \qquad y_v = y_{1v} + \lambda Y_{1v} + \lambda_v Y_1$$
$$z_u = z_{1u} + \lambda Z_{1u} + \lambda_u Z_1 \qquad z_v = z_{1v} + \lambda Z_{1v} + \lambda_v Z_1$$

Durch Einsetzung dieser Werte erhalten wir die Gleichung:

$$x_{1u}\, x_{1v} + y_{1u}\, y_{1v} + z_{1u}\, z_{1v} + \lambda (x_{1v} X_{1u} + y_{1v} Y_{1u} + z_{1v} Z_{1u}) +$$
$$+ \lambda_u (x_{1v} X_1 + y_{1v} Y_1 + z_{1v} Z_1) + \lambda (x_{1u} X_{1v} + y_{1u} Y_{1v} +$$

$$+ z_{1u} Z_{1v}) + \lambda^2 (X_{1u} X_{1v} + Y_{1u} Y_{1v} + Z_{1u} Z_{1v}) + \lambda \lambda_u (X_1 X_{1v} + Y_1 Y_{1v} + Z_1 Z_{1v}) + \lambda_v (x_{1u} X_1 + y_{1u} Y_1 + z_{1u} Z_1) + \lambda \lambda_v (X_1 X_{1u} + Y_1 Y_{1u} + Z_1 Z_{1u}) + \lambda_u \lambda_v (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) = 0$$

Es gelten aber folgende Relationen:

$$X_1 x_{1v} + Y_1 y_{1v} + Z_1 z_{1v} = 0$$
$$X_1 x_{1u} + Y_1 y_{1u} + Z_1 z_{1u} = 0$$
$$X_1 X_{1v} + Y_1 Y_{1v} + Z_1 Z_{1v} = 0$$
$$X_1 X_{1u} + Y_1 Y_{1u} + Z_1 Z_{1u} = 0$$

Und die Gleichung läßt sich dadurch vereinfachen, wie folgt:

$$\lambda_u \lambda_v + \lambda^2 (X_{1u} X_{1v} + Y_{1u} Y_{1v} + Z_{1u} Z_{1v}) + \lambda (x_{1u} X_{1v} + y_{1u} Y_{1v} + z_{1u} Z_{1v} + x_{1v} X_{1u} + y_{1v} Y_{1u} + z_{1v} Z_{1u}) = 0$$

Diese Gleichung können wir noch übersichtlicher schreiben. Es ist nämlich:

$$X_{1u} = -\frac{E_1}{e_1} x_{1u} - \frac{F_1}{g_1} x_{1v} \qquad Z_{1u} = -\frac{E_1}{e_1} z_{1u} - \frac{F_1}{g_1} z_{1v}$$

$$X_{1v} = -\frac{F_1}{e_1} x_{1u} - \frac{G_1}{g_1} x_{1v} \qquad Z_{1v} = -\frac{F_1}{e_1} z_{1u} - \frac{G_1}{g_1} z_{1v}$$

$$Y_{1u} = -\frac{E_1}{e_1} y_{1u} - \frac{F_1}{g_1} y_{1v}$$

$$Y_{1v} = -\frac{F_1}{e_1} y_{1u} - \frac{G_1}{g_1} y_{1v}$$

Daher ist:

$$X_{1u} X_{1v} + Y_{1u} Y_{1v} + Z_{1u} Z_{1v} = \frac{E_1 \cdot F_1}{e_1^2} x_{1u}^2 + \frac{F_1^2}{e_1 g_1} x_{1u} x_{1v} + \frac{E_1 G_1}{e_1 g_1} x_{1u} x_{1v} + \frac{F_1 G_1}{g_1^2} x_{1v}^2 + \frac{E_1 F_1}{e_1^2} y_{1u}^2 + \frac{F_1^2}{e_1 g_1} y_{1u} y_{1v} + \frac{E_1 G_1}{e_1 g_1} y_{1u} y_{1v} + \frac{F_1 G_1}{g_1^2} y_{1v}^2 + \frac{E_1 F_1}{e_1^2} z_{1u}^2 + \frac{F_1^2}{e_1 g_1} z_{1u} z_{1v} + \frac{E_1 G_1}{e_1 g_1} z_{1u} z_{1v} + \frac{F_1 G_1}{g_1^2} z_{1v}^2 = \frac{E_1 F_1}{e_1} + \frac{F_1 G_1}{g_1}$$

$$x_{1u} X_{1v} + y_{1u} Y_{1v} + z_{1u} Z_{1v} = -F_1$$
$$x_{1v} X_{1u} + y_{1v} Y_{1u} + z_{1v} Z_{1u} = -F_1$$

Die Gleichung lautet also nach Einsetzung dieser Werte:

$$\lambda_u \; \lambda_v + \lambda^2 \; \left(\frac{E_1 \, F_1}{e_1} + \frac{F_1 \, G_1}{g_1}\right) - 2 \; F_1 \; \lambda = 0 \text{ oder:}$$

$$\lambda_u \; \lambda_v + F_1 \; (\lambda^2 \; k_1 - 2 \; \lambda) = 0; \text{ denn: } \frac{E_1 \, g_1 + G_1 \, e_1}{e_1 \, g_1} = k_1$$

(mittlere Krümmung).

F_1, λ und k sind ganz beliebige, uns unbekannte Funktion der Parameter. Da die Differentialgleichung unter solchen Umständen nicht weiter behandelt werden kann, so wollen wir uns die Frage vorlegen, ob λ überhaupt eine Funktion von u und v sein kann. Eine rein deskriptive Betrachtung über das Problem wird uns darüber belehren.

Nach den Lehren der darstellenden Geometrie bleibt die wahre Größe eines Winkels bei Orthogonalprojektion auf eine Ebene nur dann erhalten, wenn ein Schenkel parallel zur letzteren gelegen ist. Soll es also solche Flächen geben, deren Krümmungslinien bei orthogonaler Projektion auf eine Ebene wieder ein Orthogonalsystem liefern, so ist unmittelbar klar, daß die Tangentenschar jeder Krümmungslinie erster Art in einer zur Bildebene parallelen Ebene liegen muß, oder daß all diese Linien ebene Kurven sein müssen. Längs derjenigen Kurven, welche denselben in der Projektion entsprechen, muß also die Größe λ einen konstanten Wert besitzen, kann also nur eine Funktion eines einzigen Parameters sein. Dies gilt aber nicht nur für die Ebene, sondern für jede beliebige Projektionsbasis. In entsprechenden Punkten müssen die Tangenten immer parallel sein. Kurven aber, deren Tangenten paarweise parallel sind, sind im Raume selbst parallel, d. h. haben von einander einen konstanten Abstand. Kehren wir nun wieder zu unserer Gleichung zurück. λ ergibt sich hieraus stets als eine Funktion von u und v, solange das zweite Glied: $F_1 \; (\lambda^2 k_1 - 2 \; \lambda)$ von Null verschieden ist. Dieses muß also zum Verschwinden gebracht werden. Es sind zwei Fälle möglich, nämlich:

$$1) \; F_1 = 0 \quad 2) \; \lambda \, k = 2 \text{ oder } \lambda = \frac{2}{k}$$

Aus der Gleichung: $\lambda_u \; \lambda_v = 0$ folgt aber: $\lambda = \psi(u)$, wobei ψ eine willkürliche Funktion bedeutet.

Der Fall 2) würde demnach ergeben, daß die mittlere Krümmung der als Projektionsbasis dienenden Fläche eine Funktion von u allein wäre. Dies gilt aber nur für Rotationsflächen längs der Parallelkreise. Dieser Fall wird aber vom Falle 1) mit eingeschlossen.

Bei Ebene und Kugel war die Bedingung $F_1 = 0$ identisch erfüllt. Es gibt auf ihnen unendlich viele Systeme von Krümmungslinien. Aber im allgemeinen gibt es auf einer Fläche nur ein einziges System von Krümmungslinien. Das System der projizierten Krümmungslinien ist also vorläufig vollkommen bestimmt. Haben wir uns irgend eine Fläche als Projektionsbasis gewählt, so müssen wir auf derselben das System der Krümmungslinien zeichnen und längs jeder Linie der ersten Art um ein konstantes Stück λ senkrecht zur Fläche emporsteigen. So erhalten wir eine neue Fläche und auf ihr, entsprechend dem System der Krümmungslinien auf der Projektionsbasis, ein Orthogonalsystem; denn wir haben noch nicht verlangt, daß dieses zugleich ein System von Krümmungslinien sein soll. Diese Forderung aber führt uns zum letzten entscheidenden Schlag. Aus der Gleichung $F = 0$ haben wir die endgiltige Aufklärung darüber zu erwarten, welche Flächen überhaupt als Projektionsgrundflächen möglich sind. Wenn wir unter Niveaukurven einer Fläche ganz allgemein solche Kurven verstehen, welche parallel zu einer anderen Fläche verlaufen, so können wir aus unseren bisherigen Betrachtungen folgenden Satz entnehmen: „Das System der Niveaukurven und Linien steilsten Abfalls auf einer beliebigen Fläche verwandelt sich bei Orthogonalprojektion auf die bezügliche Fläche immer in ein System von Krümmungslinien". Und die Schlußfrage kann daher folgendermaßen ausgesprochen werden: Wann ist jenes System zugleich ein System von Krümmungslinien? Es besteht also die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0;$$ oder nach Einsetzung der angedeuteten Differentialquotienten:

$$\begin{vmatrix} x_{1uv} + \lambda X_{1uv} + \lambda_u X_{1v}; & y_{1uv} + \lambda Y_{1uv} + \lambda_u Y_{1v}; & z_{1uv} + \lambda Z_{1uv} + \lambda_u Z_{1v} \\ x_{1u} + \lambda X_{1u} + \lambda_u X_1; & y_{1u} + \lambda Y_{1u} + \lambda_u Y_1; & z_{1u} + \lambda Z_{1u} + \lambda_u Z_1 \\ x_{1v} + \lambda X_{1v}; & y_{1v} + \lambda Y_{1v}; & z_{1v} + \lambda Z_{1v} \end{vmatrix}$$

Hiemit multiplizieren wir die nicht verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ x_{1u} & y_{1u} & z_{1u} \\ x_{1v} & y_{1v} & z_{1v} \end{vmatrix}$$ und erhalten:

$$\left| \begin{array}{l} \Sigma x_{1uv}\, X_1 + \lambda\, \Sigma X_1\, X_{1uv} + \lambda u\, \Sigma X_1\, X_{1v}; \\ \Sigma x_{1u}\, x_{1uv} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1uv} + \lambda u\, \Sigma x_{1u}\, X_{1v}; \\ \Sigma x_{1uv}\, x_{1v} + \lambda\, \Sigma X_{1uv}\, x_{1v} + \lambda u\, \Sigma x_{1v}\, X_{1v}; \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ll} \Sigma x_{1u}\, X_1 + \lambda\, \Sigma X_{1u}\, X_1 + \lambda u\, \Sigma X_1^2; & \Sigma x_{1v}\, X_1 + \lambda\, \Sigma X_{1v}\, X_1 \\ \Sigma x^2_{1u} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1u} + \lambda u\, \Sigma x_{1u}\, X_1; & \Sigma x_{1v}\, x_{1v} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1v} \\ \Sigma x_{1u}\, x_{1v} + \lambda\, \Sigma x_{1v}\, X_{1u} + \lambda u\, \Sigma x_{1v}\, X_1; & \Sigma x_{1v}^2 + \lambda\, \Sigma x_{1v}\, X_{1v} \end{array} \right| = 0$$

Hiezu kommen die Relationen:

$X_1\, x_{1uv} + Y_1\, y_{1uv} + Z_1\, z_{1uv} = 0$

$X_1\, X_{1uv} + Y_1\, Y_{1uv} + Z_1\, Z_{1uv} = 0$ (Das sphärische Abbild der Krümmungslinien ist wieder ein Orthogonalsystem).

$x_{1u}\, X_{1v} + y_{1u}\, Y_{1v} + z_{1u}\, Z_{1v} = 0$

$x_{1v}\, X_{1v} + y_{1v}\, Y_{1v} + z_{1v}\, Z_{1v} = G_1$

$x_{1v}\, X_{1u} + y_{1v}\, Y_{1u} + z_{1v}\, Z_{1u} = 0$ und auch die früher benutzten.

Die Determinante vereinfacht sich demgemäß, wie folgt:

$$\left| \begin{array}{lll} 0 & ;\ \lambda u & ;\ 0 \\ \frac{1}{2}\, \frac{\partial e_1}{\partial v} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1uv} & ;\ e_1 & ;\ 0 \\ \frac{1}{2}\, \frac{\partial g_1}{\partial u} + \lambda\, \Sigma x_{1v}\, X_{1uv} - \lambda\, G_1 & ;\ 0 & ;\ g_1 - \lambda\, G_1 \end{array} \right| = 0.$$ Oder aufgelöst:

$$\frac{1}{2}\, \frac{\partial e_1}{\partial v} + \lambda\, \Sigma x_{1u}\, X_{1uv} = 0$$

Es handelt sich jetzt noch darum, den Ausdruck $\Sigma x_{1u}\, X_{1uv}$ durch Fundamentalgrößen auszudrücken. Es ist aber:

$$X_{1u} = -\frac{E_1}{e_1}\, x_{1u}$$

$$X_{1uv} = -\frac{E_1}{e_1}\, x_{1uv} - x_{1u}\, \frac{E_{1v}\, e_1 - E_1\, e_{1v}}{e_1^2}$$

$$\Sigma x_{1u}\, X_{1uv} = -\frac{1}{2}\, \frac{E_1}{e_1}\, \frac{\partial e_1}{\partial v} - \frac{E_{1v}\, e_1 - E_1\, e_{1v}}{e_1}$$

Durch Einsetzen erhalten wir also:

$$\frac{1}{2}\, e_{1v} - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{E_1\, e_{1v}}{e_1} - \lambda\, E_{1v} + \lambda\, E_1\, \frac{e_{1v}}{e_1} = 0$$ oder:

$$\frac{1}{2}\, e_{1v} + \frac{\lambda}{2}\, \frac{E_1\, e_{1v}}{e_1} - \lambda\, E_{1v} = 0$$

Es besteht aber die allgemeine Integrabilitätsbedingung:

$$-E_{1v} + E_1 \frac{e_{1v}}{2\,e_1} + G_1 \frac{e_{1v}}{2 g_1} = 0$$ (Allgemeine Gleichungen der Flächentheorie).

Daher haben wir:

$$\tfrac{1}{2}\, e_{1v} - \lambda\, G_1 \frac{e_{1v}}{2 g_1} = 0 \text{ oder: } \frac{e_1 v}{2} \cdot \frac{g_1 - \lambda\, G_1}{g_1} = 0$$

Diese Gleichung kann befriedigt werden durch $e_{1v} = 0$ und $g_1 - \lambda\, G_1 = 0$. Letztere Gleichung würde dem für λ gefundenen Resultate widersprechen, da g_1 und G_1 Funktionen von u und v sind. Es kann also nur die Gleichung: $e_{1v} = 0$ bestehen.

Wir haben damit e_1 als eine reine Funktion von u gefunden.

Daraus folgt das Endresultat:

„Als Projektionsbasis können nur solche Flächen benützt werden, auf welchen das System der Krümmungslinien zugleich ein geodätisches Orthogonalsystem bildet".

Die bisher behandelten Gesimsflächen besitzen diese Eigenschaft. Dasselbe gilt aber auch noch für die ganz allgemeinen Gesimsflächen. Dies folgt aus dem Ausdruck über das Quadrat ihres Linienelementes, welches wir schon im ersten Abschnitte entwickelt haben. Diese Flächen entstehen durch Abrollen einer Ebene auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche. Aus der Natur der Erzeugung dieser Flächen geht es hervor, daß sie eine Rückkehrkante und eine Kurve von Kreispunkten besitzen. Sie sind in jedem Augenblick der Entstehung Rotationsflächen. Und die aufeinanderfolgenden Lagen der erzeugenden Kurve bilden, wie die Meridiane der Rotationsflächen, eine Schar von geodätischen Linien. Wählen wir uns also eine beliebige derartige Fläche und errichten längs der geodätischen Krümmungslinien Normale, so liegen diese alle in der Ebene der Krümmungslinien. Die erzeugende Kurve der abgeleiteten Fläche liegt also mit der erzeugenden Kurve der Bildfläche in einer Ebene. Wir erhalten daher sämtliche Flächen, welche auf eine gegebene Gesimsfläche so projiziert werden können, daß das System ihrer Krümmungslinien wieder ein Orthogonalsystem bildet, wenn wir in der Ebene der erzeugenden Kurve der gegebenen Fläche alle möglichen Kurven zeichnen, und hierauf die besagte Ebene auf der Abwickelungsdeveloppabeln der gegebenen Fläche abrollen lassen. — Soll es also möglich sein, zwei gegebene Flächen, die eine auf die andere, so zu projizieren, daß das System der Krümmungslinien dabei ein Orthogonalsystem bleibt, so müssen auf beiden die Krümmungslienien ein geodätisches Orthogonalsystem bilden. Bei der Projektion behält dann das System der Krümmungslinien alle seine wesentlichen Eigenschaften bei. Es bleibt ein geodätisches Orthogonalsystem von Krümmungslinien. Aber nur solche Flächenpaare können hiebei in Betracht kommen, welche dieselbe Abwickelungsdeveloppabele besitzen.

auf die a … tem der Krümmungs-
linien dal … müssen auf beiden die
Krümmu … alsystem bilden. Bei
der Proje … Krümmungslinien alle
seine wese … ein geodätisches Ortho-
gonalsyste … solche Flächenpaare
können b … dieselbe Abwickelungs-
developpa …