Verallgemeinerung der elementaren Faden-Construction der Ellipse.

Die bekannte einfache Filiar-Construction der Ellipse, wobei man in zwei Punkten einer Ebene feine Stifte befestigt, um dieselben einen ringförmig zusammengebundenen Faden schlingt, den man mit Hülfe eines Schreibstiftes anspannt, und nun letzteren rings herumbewegt, während man den Faden stets gespannt erhält, entspricht der Definition der Ellipse als einer ebenen Curve, deren Punkte von zwei gewissen Punkten derselben Ebene gleiche Entfernungssummen haben.

In Nachstehendem wollen wir nun zu zeigen versuchen, daß diese Construction nur als ein specieller Fall eines allgemeineren Verfahrens gelten kann. Wenn man nämlich von einem Punkte außerhalb einer Ellipse zwei Tangenten an dieselbe zieht, so ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe des zwischen den Berührungspunkten liegenden größeren Ellipsenbogens und der Länge beider Tangenten, gerechnet von den Berührungspunkten bis zum Durchschnittspunkte, denselben Werth hat, eine der ursprünglichen confocale Ellipse. Es ist sofort einleuchtend, daß auch dieser Definition eine Faden-Construction entspricht. Wenn man nämlich um eine Ellipse einen ringförmig zusammengebundenen Faden schlingt und denselben vermittels eines Stiftes anspannt, so bildet der Faden zwei von einem Punkte außerhalb der Ellipse an dieselbe gezogene Tangenten und bedeckt außerdem noch den zwischen den beiden Berührungspunkten liegenden größeren Ellipsenbogen. Wenn man dann den Stift herumbewegt, indem man den Faden stets gespannt erhält, so beschreibt der Stift eine Curve, für deren sämmtliche Punkte die Summe des Ellipsenbogens und der beiden Tangenten constant, nämlich gleich der Fadenlänge ist. Wir behaupten nun, daß diese Curve eine der gegebenen confocale Ellipse ist. Daß übrigens diese zweite Construction die erste mit in sich begreift, ist klar, wenn man bedenkt, daß die Verbindungslinie der beiden Stifte, um welche bei jener der Faden geschlungen wird, ebenfalls als eine Ellipse angesehen werden kann, deren Nebenaxe unendlich klein ist und deren Brennpunkte daher mit den Endpunkten der Hauptaxe zusammenfallen.

Nun sei
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
die Gleichung der gegebenen Ellipse. Wenn dann P (s. Fig. 1) ein beliebiger Punkt der vom Stifte beschriebenen Curve, L und M die Berührungspunkte der von P an die gegebene Ellipse ABCD gezogenen Tangenten, so ist, wenn f die Fadenlänge bezeichnet,
$$\mathrm{LP} + \mathrm{MP} + \operatorname{arc} \mathrm{LDM} = f,$$
oder, wenn man von beiden Seiten dieser Gleichung den Umfang der gegebenen Ellipse subtrahirt,

$$\text{I.}\quad LP + MP - \text{arc } LBM = m,$$

wo m der Überschuß der Fadenlänge über den Umfang der gegebenen Ellipse.

Nun seien ξ und η die Coordinaten des Punktes P, x_1 und y_1 die Coordinaten des Punktes L, x_2 und y_2 die des Punktes M, so ist

$$LP = \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2},$$
$$MP = \sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2},$$

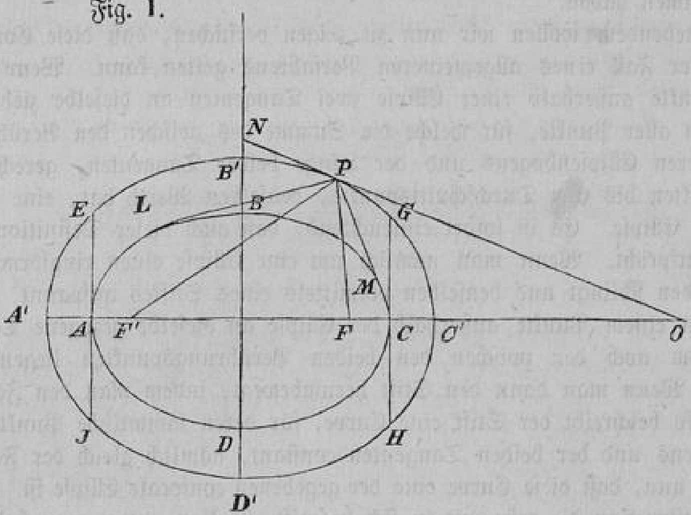
beide Wurzeln, da sie Längen bezeichnen, absolut genommen. Ferner ist

$$\text{arc } LBM = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx,$$

oder da
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

so wird
$$\text{arc } LBM = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} \,.\, dx.$$

Fig. 1.



Die Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung (I) ergiebt:

$$\text{II.}\quad \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2} + \sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}$$
$$- \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} \, dx = m.$$

Nun sind L und M Punkte der gegebenen Ellipse, deren Gleichung also durch die Coordinaten dieser Punkte genügt werden muß; man hat also:

$$1)\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

$$2)\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1.$$

Vermöge bekannter Sätze finden ferner noch folgende beiden Gleichungen statt:

$$3)\ \frac{\xi x_1}{a^2} + \frac{\eta y_1}{b^2} = 1,$$

$$4)\ \frac{\xi x_2}{a^2} + \frac{\eta y_2}{b^2} = 1.$$

Aus diesen letzten vier Gleichungen folgt sofort mit Beziehung der Vorzeichen:

$$5)\ x_{\frac{1}{2}} = a^2 \frac{b^2\ \xi \mp w^2\ \eta}{a^2\ \eta^2 + b^2\ \xi^2},$$

$$6)\ y_{\frac{1}{2}} = b^2 \frac{a^2\ \eta \pm w^2\ \xi}{a^2\ \eta^2 + b^2\ \xi^2},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$w^2 = +\sqrt{a^2\ \eta^2 + b^2\ \xi^2 - a^2\ b^2}.$$

Die Substitution der Werthe von x_1, x_2, y_1 und y_2 aus den Gleichungen (5) und (6) in die Gleichung (II) würde eine Gleichung zwischen ξ und η ergeben, welches offenbar die Gleichung der vom Stifte beschriebenen Curve wäre. Allein wegen des in der Gleichung (II) vorkommenden elliptischen Integrals ist diese Substitution ohne Erfolg, und es muß daher anders verfahren werden. Wir differenziren nun die Gleichung (II) nach ξ, wobei das Integral nach seinen Grenzen zu differenziren ist, welche selbst wieder Functionen von ξ sind, und erhalten, wenn wir gleichzeitig mit $d\xi$ multipliciren:

$$\text{III.}\quad \frac{(\xi - x_1)(d\xi - dx_1) + (\eta - y_1)(d\eta - dy_1)}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}}$$
$$+ \frac{(\xi - x_2)(d\xi - dx_2) + (\eta - y_2)(d\eta - dy_2)}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}$$
$$+ \sqrt{1 + \frac{b^2\ x_1{}^2}{a^2\ (a^2 - x_1{}^2)}}\ dx_1 - \sqrt{1 + \frac{b^2\ x_2{}^2}{a^2\ (a^2 - x_2{}^2)}}\ dx_2 = 0.$$

Dabei ist jedoch Folgendes zu beachten. Die beiden letzten Glieder der letzten Gleichung rühren her vom letzten Gliede der Gleichung (II), welches den kleineren der beiden Curvenbogen ausdrückt, die zwischen den Berührungspunkten der beiden vom Punkte P an die gegebene Ellipse gezogenen Tangenten liegen. Weil nun hier stets die absolute Länge dieses Curvenbogens in Rechnung zu ziehen ist, so muß in der Gleichung (II) die unter dem Integralzeichen stehende Wurzel als mit dem doppelten Zeichen $\pm$ behaftet betrachtet und das obere oder untere Zeichen gewählt werden, je nachdem der Curvenbogen für zu- oder abnehmende Werthe von x zunimmt. Dabei hat man verschiedene Lagen des Punktes P zu unterscheiden. Sei also $A^1B^1C^1D^1$ (s. Fig. 1) die vom Stifte beschriebene Curve, welche von einer durch den Punkt A zur Y-Axe gezogenen Parallelen in den Punkten E und J und von einer durch den Punkt C gehenden, derselben Axe parallelen Graden in G und H geschnitten werden möge. Während nun der Stift den Weg von E bis G zurücklegt, ist fortwährend $x_1 < x_2$, und der Bogen nimmt zu, indem x von x_1 bis x_2 wächst; daher gilt vor der Wurzel unter dem Integral nur das Pluszeichen. Während ferner der Stift den Weg von H bis J beschreibt, ist fortwährend $x_1 > x_2$, und der Bogen nimmt also zu, indem x von x_1 bis x_2 abnimmt; folglich ist vor der Wurzel das Minuszeichen zu wählen, wodurch die beiden letzten Glieder der letzten Gleichung die entgegengesetzten

Vorzeichen erhalten. Eine andere Betrachtung ist erforderlich für die beiden Curvenstücke GH und JE. Wenn nämlich der Stift sich zwischen G und H befindet, so ist y_1 positiv, y_2 dagegen negativ, und

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}\, dx$$

würde immer nur denjenigen Ellipsenbogen bezeichnen, welcher zwischen dem Punkte $x_1\ y_1$ und demjenigen Punkte der Curve liegt, in welchem die Ordinate des zweiten Berührungspunktes, über die Abscissenaxe hinaus verlängert, die Ellipse zum zweiten Male schneidet. Ganz ähnlich verhält sich die Sache für den Curvenbogen JE. Wir haben also jetzt nöthig, das Integral in die Summe von zwei Integralen zu zerlegen, indem wir gleich unter Hinzufügung des erforderlichen Wurzelzeichens setzen, wenn P zwischen G und H liegt:

$$\int_{x_1}^{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}\, dx + \int_{a}^{x_2} - \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}\, dx,$$

und wenn sich P zwischen J und E befindet:

$$\int_{x_1}^{-a} - \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}\, dx + \int_{-a}^{x_2} + \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Da a constant, so erhält man wieder durch Differentiation mit Beziehung der Vorzeichen:

$$\mp \sqrt{1 + \frac{b^2 x_1^2}{a^2 (a^2 - x_1^2)}}\, dx_1 \quad \mp \sqrt{1 + \frac{b^2 x_2^2}{a^2 (a^2 - x_2^2)}}\, dx_2;$$

dabei ist das in Gleichung (II) vor dem Integral stehende Minuszeichen noch nicht mit in Betracht gezogen. So haben wir also statt der Gleichung (III) folgende allgemeinere Differentialgleichung:

$$\frac{(\xi - x_1)\,(d\xi - dx_1) + (\eta - y_1)\,(d\eta - dy_1)}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}} + \frac{(\xi - x_2)\,(d\xi - dx_2) + (\eta - y_2)\,(d\eta - dy_2)}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}$$
$$\begin{smallmatrix}+\\ -\\ +\end{smallmatrix} \sqrt{1 + \frac{b^2 x_1^2}{a^2 (a^2 - x_1^2)}}\, dx_1 \quad \begin{smallmatrix}-\\ +\\ +\end{smallmatrix} \sqrt{1 + \frac{b^2 x_2^2}{a^2 (a^2 - x_2^2)}}\, dx_2 = 0,$$

wobei die Vorzeichen der beiden letzten Glieder auf die vier unterschiedenen Lagen des Punktes P zu beziehen sind, je nachdem derselbe nämlich sich auf dem Curvenbogen EG, GH, HJ oder JE befindet.

Wir ordnen nun die letzte Gleichung, wie folgt:

$$\text{IV.}\quad \frac{(\xi - x_1)\, d\xi + (\eta - y_1)\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}} + \frac{(\xi - x_2)\, d\xi + (\eta - y_2)\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}$$
$$- \frac{(\xi - x_1)\, dx_1 + (\eta - y_1)\, dy_1}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}} - \frac{(\xi - x_2)\, dx_2 + (\eta - y_2)\, dy_2}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}$$
$$\begin{smallmatrix}+\\ -\\ +\\ -\end{smallmatrix} \sqrt{1 + \frac{b^2 x_1^2}{a^2 (a^2 - x_1^2)}}\, dx_1 \quad \begin{smallmatrix}-\\ +\\ +\\ -\end{smallmatrix} \sqrt{1 + \frac{b^2 x_2^2}{a^2 (a^2 - x_2^2)}}\, dx_2 = 0.$$

Nun wollen wir zeigen, daß die vier letzten Glieder der vorstehenden Gleichung, welche die Differentiale von x_1, x_2, y_1 und y_2 enthalten, herausfallen. Zu dem Ende differenziren wir die Gleichung (1) nach x_1 und erhalten:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = -\frac{bx_1}{a\sqrt{a^2 - x_1{}^2}};$$

folglich wird

$$\frac{b^2 x_1{}^2}{a^2 (a^2 - x_1{}^2)} = \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2.$$

Ebenso ergiebt die Differentiation der Gleichung (2):

$$\frac{b^2 x_2{}^2}{a^2 (a^2 - x_2{}^2)} = \left(\frac{dy_2}{dx_2}\right)^2.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (IV) erhält man:

$$\frac{(\xi - x_1)\, d\xi + (\eta - y_1)\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}} + \frac{(\xi - x_2)\, d\xi + (\eta - y_2)\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}$$
$$- \frac{(\xi - x_1)\, dx_1 + (\eta - y_1)\, dy_1}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}} - \frac{(\xi - x_2)\, dx_2 + (\eta - y_2)\, dy_2}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}$$
$$\underset{-}{\overset{+}{\pm}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}\, dx_1 \overset{\mp}{\pm} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_2}{dx_2}\right)^2}\, dx_2 = 0.$$

Durch Subtraction der Gleichung (1) von (3) erhält man ferner:

$$\frac{x_1 (\xi - x_1)}{a^2} + \frac{y_1 (\eta - y_1)}{b^2} = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{\eta - y_1}{\xi - x_1} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = \frac{dy_1}{dx_1};$$

mithin

$$7)\quad dy_1 = \frac{\eta - y_1}{\xi - x_1} dx_1 \text{ und}$$

$$8)\quad dy_2 = \frac{\eta - y_2}{\xi - x_2} dx_2.$$

Diese Werthe, für dy_1 und dy_2 in die letzte Differentialgleichung substituirt, ergeben:

$$\frac{(\xi - x_1)\, d\xi + (\eta - y_1)\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}} + \frac{(\xi - x_2)\, d\xi + (\eta - y_2)\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}}$$
$$- \frac{(\xi - x_1) + \frac{(\eta - y_1)^2}{\xi - x_1}}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}}\, dx_1 - \frac{(\xi - x_2) + \frac{(\eta - y_2)^2}{\xi - x_2}}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}\, dx_2$$
$$\underset{-}{\overset{+}{\pm}} \sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_1}{\xi - x_1}\right)^2}\, dx_1 \overset{\mp}{\pm} \sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_2}{\xi - x_2}\right)^2}\, dx_2 = 0,$$

oder nach geringer Umformung:

$$\frac{(\xi - x_1)\, d\xi + (\eta - y_1)\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}} + \frac{(\xi - x_2)\, d\xi + (\eta - y_2)\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}$$
$$- \frac{\xi - x_1}{\sqrt{(\xi - x_1)^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_1}{\xi - x_1}\right)^2}\, dx_1 - \frac{\xi - x_2}{\sqrt{(\xi - x_2)^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_2}{\xi - x_2}\right)^2}\, dx_2$$
$$\underset{-}{\overset{+}{\pm}} \sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_1}{\xi - x_1}\right)^2}\, dx_1 \overset{\mp}{\pm} \sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_2}{\xi - x_2}\right)^2}\, dx_2 = 0.$$

Wie schon oben bemerkt, dürfen für $\sqrt{(\xi - x_1)^2}$ und $\sqrt{(\xi - x_2)^2}$ nur die absoluten Werthe gewählt werden. Dabei haben wir dieselben vier verschiedenen Lagen des Punktes P zu unterscheiden, wie oben.

Zwischen E und G ist

$$x_1 < \xi < x_2,$$

demnach

$$\sqrt{(\xi - x_1)^2} = \xi - x_1, \quad \sqrt{(\xi - x_2)^2} = x_2 - \xi.$$

So lange sich P zwischen G und H befindet, ist $\xi > x_1$ und auch $\xi > x_2$, folglich hat man zu setzen:

$$\sqrt{(\xi - x_1)^2} = \xi - x_1, \quad \sqrt{(\xi - x_2)^2} = \xi - x_2.$$

Während der Stift den Weg HJ beschreibt, ist

$$x_2 < \xi < x_1,$$

folglich

$$\sqrt{(\xi - x_1)^2} = x_1 - \xi, \quad \sqrt{(\xi - x_2)^2} = \xi - x_2.$$

Zwischen J und E endlich, wo fortwährend $\xi < x_1$ und auch gleichzeitig $\xi < x_2$, hat man zu setzen:

$$\sqrt{(\xi - x_1)^2} = x_1 - \xi, \quad \sqrt{(\xi - x_2)^2} = x_2 - \xi.$$

Demnach erhalten wir schließlich mit Beziehung der Vorzeichen folgende Differentialgleichung:

$$\frac{(\xi - x_1)\,d\xi + (\eta - y_1)\,d\eta}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}} + \frac{(\xi - x_2)\,d\xi + (\eta - y_2)\,d\eta}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}$$
$$\substack{\mp \\ +}\sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_1}{\xi - x_1}\right)^2}\,dx_1 \;\substack{\pm \\ \mp}\sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_2}{\xi - x_2}\right)^2}\,dx_2$$
$$\substack{+ \\ \pm}\sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_1}{\xi - x_1}\right)^2}\,dx_1 \;\substack{\mp \\ \pm}\sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y_2}{\xi - x_2}\right)^2}\,dx_2 = 0,$$

welche sich sofort zu folgender vereinfacht:

$$\text{V.}\quad \frac{(\xi - x_1)\,d\xi + (\eta - y_1)\,d\eta}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}} = -\frac{(\xi - x_2)\,d\xi + (\eta - y_2)\,d\eta}{\sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}}.$$

Um nun die Differentialgleichung zwischen ξ und η rein zu erhalten, haben wir noch x_1, x_2, y_1 und y_2 mit Hülfe der Gleichungen (5) und (6) zu eliminiren. Wir erheben zunächst beide Seiten der letzten Gleichung in's Quadrat und erhalten:

$$\frac{[(\xi - x_1)\,d\xi + (\eta - y_1)\,d\eta]^2}{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2} = \frac{[(\xi - x_2)\,d\xi + (\eta - y_2)\,d\eta]^2}{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}.$$

Schafft man durch Multiplication die Nenner fort, so ergiebt sich ferner:

$$[(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2]\,[(\xi - x_1)^2\,d\xi^2 + (\eta - y_1)^2\,d\eta^2 + 2(\xi - x_1)(\eta - y_1)\,d\xi.d\eta]$$
$$= [(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2]\,[(\xi - x_2)^2\,d\xi^2 + (\eta - y_2)^2\,d\eta^2 + 2(\xi - x_2)(\eta - y_2)\,d\xi.d\eta].$$

Indem man nun die Glieder mit $d\xi^2$, $d\eta^2$ und $d\xi.d\eta$ zusammenfaßt, erhält man:

$$\{[(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2](\xi - x_1)^2 - [(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2](\xi - x_2)^2\}\,d\xi^2$$
$$+ \{[(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2](\eta - y_1)^2 - [(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2](\eta - y_2)^2\}\,d\eta^2$$
$$+ 2\{[(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2](\xi - x_1)(\eta - y_1) - [(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2](\xi - x_2)(\eta - y_2)\}\,d\xi.d\eta = 0,$$

welche Gleichung sich leicht in folgende umformen läßt:

$$
\begin{aligned}
&[(\xi - x_1)^2 (\eta - y_2)^2 - (\xi - x_2)^2 (\eta - y_1)^2]\, d\xi^2 \\
&+ [(\xi - x_2)^2 (\eta - y_1)^2 - (\xi - x_1)^2 (\eta - y_2)^2]\, d\eta^2 \\
&+ 2[(\xi - x_1)(\eta - y_1)(\xi - x_2)^2 + (\xi - x_1)(\eta - y_1)(\eta - y_2)^2 - (\xi - x_2)(\eta - y_2)(\xi - x_1)^2 \\
&\quad - (\xi - x_2)(\eta - y_2)(\eta - y_1)^2]\, d\xi . d\eta = 0,
\end{aligned}
$$

wofür man schreiben kann:

$$
\begin{aligned}
&[(\xi - x_1)^2 (\eta - y_2)^2 - (\xi - x_2)^2 (\eta - y_1)^2] (d\xi^2 - d\eta^2) \\
&+ 2[(\xi - x_1)(\xi - x_2) - (\eta - y_1)(\eta - y_2)][(\xi - x_2)(\eta - y_1) - (\xi - x_1)(\eta - y_2)]\, d\xi . d\eta = 0.
\end{aligned}
$$

Nun ist, wie aus den Gleichungen (7) und (8) folgt:

$$
\eta - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1} (\xi - x_1) = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (\xi - x_1),
$$

$$
\eta - y_2 = \frac{dy_2}{dx_2} (\xi - x_2) = - \frac{b^2 x_2}{a^2 y_2} (\xi - x_2).
$$

Durch Einsetzung dieser Werthe erhalten wir, wenn wir zugleich noch durch $(\xi - x_1)^2 . (\xi - x_2)^2$ dividiren, folgende Gleichung:

$$
\left(\frac{b^4 x_2^2}{a^4 y_2^2} - \frac{b^4 x_1^2}{a^4 y_1^2}\right)(d\xi^2 - d\eta^2) + 2\left(1 - \frac{b^4 x_1 x_2}{a^4 y_1 y_2}\right)\left(\frac{b^2 x_2}{a^2 y_2} - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\right) d\xi . d\eta = 0
$$

oder

$$
\left(\frac{b^2 x_2}{a^2 y_2} + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\right)(d\xi^2 - d\eta^2) + 2\left(1 - \frac{b^4 x_1 x_2}{a^4 y_1 y_2}\right) d\xi . d\eta = 0.
$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $a^4 . y_1 . y_2$, so ergiebt sich:

$$
a^2 b^2 (x_1 y_2 + x_2 y_1)(d\xi^2 - d\eta^2) + 2 (a^4 y_1 y_2 - b^4 x_1 x_2)\, d\xi\, d\eta = 0.
$$

Nunmehr ergiebt die Substitution der Werthe von x_1, x_2, y_1 und y_2 aus den Gleichungen (5) und (6), wenn man gleichzeitig noch mit $(a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2)^2$ multiplicirt und durch $a^4 b^4$ dividirt,

$$
\begin{aligned}
&[(b^2 \xi - w^2 \eta)(a^2 \eta + w^2 \xi) + (b^2 \xi + w^2 \eta)(a^2 \eta - w^2 \xi)] (d\xi^2 - d\eta^2) \\
&\quad - 2 (b^4 \xi^2 - w^4 \eta^2 - a^4 \eta^2 + w^4 \xi^2)\, d\xi\, d\eta = 0,
\end{aligned}
$$

welche Gleichung sich ohne Schwierigkeit zu folgender vereinfacht:

$$
\xi . \eta (a^2 b^2 - w^4)(d\xi^2 - d\eta^2) - (b^4 \xi^2 - w^4 \eta^2 - a^4 \eta^2 + w^4 \xi^2)\, d\xi\, d\eta = 0.
$$

Nun ist

$$
w^4 = a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2 - a^2 b^2;
$$

setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
&\xi\eta (a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2)(d\xi^2 - d\eta^2) \\
&- (b^4 \xi^2 - a^2 \eta^4 - b^2 \xi^2 \eta^2 + a^2 b^2 \eta^2 - a^4 \eta^2 + a^2 \xi^2 \eta^2 + b^2 \xi^4 - a^2 b^2 \xi^2)\, d\xi\, d\eta = 0.
\end{aligned}
$$

Dividirt man nun noch durch $(a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2)$, so erhält man schließlich:

$$
\text{VI.} \quad \xi\eta (d\xi^2 - d\eta^2) - (\xi^2 - \eta^2 - a^2 + b^2)\, d\xi . d\eta = 0.
$$

Bevor wir zur Integration dieser Differentialgleichung schreiten, dürfte es nicht uninteressant sein, ihre geometrische Bedeutung etwas näher zu untersuchen. Zu dem Ende verbinden wir P mit den Brennpunkten F und F′ der gegebenen Ellipse und denken uns in P eine Tangente an die vom Stifte beschriebene Curve gelegt, welche die Abscissenaxe in O, die Ordinatenaxe in N schneiden möge.

Wenn nun zur Abkürzung die halbe lineare Excentricität der gegebenen Ellipse

$$
\sqrt{a^2 - b^2} = e
$$

gesetzt wird, so lautet die Gleichung der Graden FP, welche die beiden Punkte F und P verbindet,

$$y = \frac{\eta}{\xi - e} x - \frac{e\eta}{\xi - e},$$

wo x und y die laufenden Coordinaten. Desgleichen wird die Gleichung der Graden F'P folgende:

$$y = \frac{\eta}{\xi + e} x + \frac{e\eta}{\xi + e},$$

und die Gleichung der Linie NO:

$$y = \frac{d\eta}{d\xi} x + \alpha,$$

wo α die Länge des Stückes der Ordinatenaxe, welches zwischen dem Punkte N und dem Anfangspunkte liegt. Wenn wir nun zur Abkürzung $\angle$ PFO mit φ, $\angle$ PF'O mit φ', ferner $\angle$ OPF mit ϑ, $\angle$ NPF' mit ϑ' und den Winkel, den NO mit dem positiven Theile der X-Axe bildet, mit τ bezeichnen, so ist

$$\vartheta = \tau - \varphi, \quad \vartheta' = \varphi' + (180^\circ - \tau),$$

also:

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{\operatorname{tang} \tau - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \tau . \operatorname{tang} \varphi}, \quad \operatorname{tang} \vartheta' = \frac{\operatorname{tang} \varphi' - \operatorname{tang} \tau}{1 + \operatorname{tang} \tau . \operatorname{tang} \varphi'}.$$

Nun ist aber, wie aus den oben aufgestellten Gleichungen der drei Graden FP, F'P und NO hervorgeht,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\eta}{\xi - e}, \quad \operatorname{tang} \varphi' = \frac{\eta}{\xi + e}, \quad \operatorname{tang} \tau = \frac{d\eta}{d\xi};$$

mithin wird

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{(\xi - e)\, d\eta - \eta d\xi}{(\xi - e)\, d\xi + \eta d\eta}, \quad \operatorname{tang} \vartheta' = \frac{\eta d\xi - (\xi + e)\, d\eta}{(\xi + e)\, d\xi + \eta\, d\eta}.$$

Folglich ist $\vartheta = \vartheta'$, wenn

$$\frac{(\xi - e)\, d\eta - \eta d\xi}{(\xi - e)\, d\xi + \eta d\eta} = \frac{\eta d\xi - (\xi + e)\, d\eta}{(\xi + e)\, d\xi + \eta d\eta},$$

oder wenn

$$\xi\eta\,(d\xi^2 - d\eta^2) - (\xi^2 - \eta^2 - e^2)\, d\xi . d\eta = 0.$$

Wir sehen also durch die obige Differentialgleichung diejenige Eigenschaft der gesuchten Curve ausgedrückt, daß, wenn man einen ihrer Punkte mit den Brennpunkten der gegebenen Ellipse verbindet, diese Verbindungslinien gleiche Winkel bilden mit der Tangente der Curve in jenem Punkte.

Um nun die Differentialgleichung zu integriren, führen wir für ξ und η zwei neue Variable u und v ein, welche mit den alten durch die Gleichungen verbunden sind:

$$9) \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{u^2} + \dfrac{\eta^2}{u^2 - e^2} = 1, \\ \dfrac{\xi^2}{v^2} + \dfrac{\eta^2}{v^2 - e^2} = 1, \end{cases}$$

wo wieder $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ die halbe lineare Excentricität der gegebenen Ellipse bedeutet. Dann ist also zu setzen:

$$\xi = \frac{u.v}{e}, \quad \eta = \frac{\sqrt{(u^2 - e^2)(e^2 - v^2)}}{e},$$

und wir haben, damit η reell, die Bedingung zu machen

$$u > e > v \text{ oder } u < e < v.$$

Dadurch wird

$$d\xi = \frac{1}{e}(udv + vdu), \quad d\eta = \frac{(e^2 - v^2)udu - (u^2 - e^2)vdv.}{e\sqrt{(u^2 - e^2)(e^2 - v^2)}}$$

Führt man diese Werthe für ξ und η und ihre Differentiale in die Gleichung (VI) ein, so erhält man:

$$\frac{u.v}{e^4}\sqrt{(u^2 - e^2)(e^2 - v^2)}\left\{(udv + vdu)^2 - \frac{[(e^2 - v^2)udu - (u^2 - e^2)vdv]^2}{(u^2 - e^2)(e^2 - v^2)}\right\}$$
$$- \left[\frac{u^2.v^2}{e^2} - \frac{(u^2 - e^2)(e^2 - v^2)}{e^2} - e^2\right] . \frac{udv + vdu}{e} . \frac{(e^2 - v^2)udu - (u^2 - e^2)vdv}{e\sqrt{(u^2 - e^2)(e^2 - v^2)}} = 0,$$

oder, hinreichend vereinfacht:

$$(u^2 + v^2)^2 \, du . dv = 0.$$

Da nun wegen der in Bezug auf u und v oben gemachten Bedingung die Lösung

$$u = v = 0$$

nicht zulässig ist, so hat man noch die beiden Lösungen

$$du = 0 \text{ oder } dv = 0,$$

woraus sich ergiebt

$$u = c_1, \; v = c_2,$$

wo die Integrationsconstanten c_1 und c_2 einer der beiden Bedingungen genügen müssen:

$$c_1 > e > c_2 \text{ oder } c_1 < e < c_2.$$

Die Substitution der für u und v gefundenen Werthe in die Gleichungen (9) ergiebt

$$10) \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{c_1^2} + \dfrac{\eta^2}{c_1^2 - e^2} = 1, \\[2ex] \dfrac{\xi^2}{c_2^2} + \dfrac{\eta^2}{c_2^2 - e^2} = 1. \end{cases}$$

Wenn wir die Bedingung

$$c_1 > e > c_2$$

gelten lassen, so stellt die erste der beiden Gleichungen (10) eine mit der gegebenen Ellipse confocale Ellipse, die zweite eine confocale Hyperbel dar. Das Umgekehrte findet statt, wenn man festsetzt, daß c_1 und c_2 der zweiten Bedingung genügen sollen. Da nun die vom Stifte beschriebene Curve keine bis in's Unendliche sich erstreckenden Äste besitzen kann, vielmehr eine geschlossene Curve sein muß, so kann es eben nur eine confocale Ellipse sein.

Somit wäre also unsere Behauptung erwiesen. Wir wollen nun noch den Unterschied der Fadenlängen ermitteln, welche zur Construction derselben Ellipse auf beide Arten erforderlich sind.

Sei also

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y}{c^2 - e^2} = 1$$

die Gleichung der zu construirenden Ellipse und f die Fadenlänge, die zur ersten Construction erforderlich ist, bei welcher der Faden um zwei in den Brennpunkten befestigte Stifte geschlungen wird, so ist

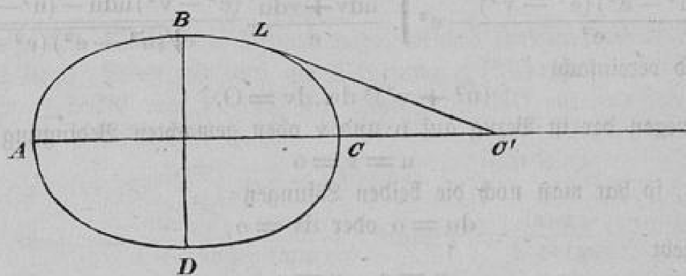
$$f = 2(c + e).$$

Ferner bezeichne f_1 die Fadenlänge, deren man bedarf zur Construction derselben Ellipse auf die zweite Art, wobei man den Faden um eine confocale Ellipse schlingt, deren Gleichung folgende sei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{wobei } \sqrt{a^2 - b^2} = e.$$

Fig. 2.



Wenn nun C' (s. Fig. 2) der Punkt der zu construirenden Ellipse, in welchem sie den positiven Theil der Abscissenaxe schneidet, C'L die von diesem Punkte an die gegebene Ellipse gelegte Tangente, x_1 und y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes L, so ist nach den oben entwickelten Formeln

$$x_1 = \frac{a^2}{c}, \quad y_1 = \frac{b\sqrt{c^2 - a^2}}{c};$$

mithin wird

$$C'L = \sqrt{\left(c - \frac{a^2}{c}\right)^2 + \frac{b^2(c^2 - a^2)}{c^2}} = \frac{\sqrt{(c^2 - a^2).(c^2 - e^2)}}{c}.$$

Nun ist:

$$\frac{1}{2} f_1 = \text{arc } AB + \text{arc } BL + C'L$$

$$= a.\mathbf{E}\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + a.\mathbf{E}\left(k, \text{arc sin } \frac{a}{c}\right) + \frac{\sqrt{(c^2 - a^2).(c^2 - e^2)}}{c},$$

wo das Functionszeichen $\mathbf{E}$ das elliptische Integral zweiter Gattung bezeichnet, dessen Modul k die numerische Excentricität der gegebenen Ellipse, also

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Als bestimmtes Beispiel mögen folgende Werthe dienen:

$$a = 2, \ b = 1, \ c = 4,$$

also die große Axe der zu construirenden Ellipse von doppelter Länge, wie die der gegebenen; dann wird

$$e = \sqrt{3} = 1,732\,0508 \text{ und}$$

$$f = 2\,(4 + \sqrt{3}) = 11,464\,1016.$$

Ferner hat man

$$k=\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866\,0254,\quad \text{arc sin}\ \frac{a}{c}=\text{arc sin}\ \frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},$$

demnach

$$\frac{1}{2}f_1=2\,\mathbf{E}\left(0{,}8660254\,;\frac{\pi}{2}\right)+2\,\mathbf{E}\left(0{,}8660254\,;\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{156}}{4}.$$

Zur Berechnung der beiden elliptischen Integrale bedienen wir uns folgender Methode. Wir bestimmen eine Reihe abnehmender Moduli und wachsender Amplituden vermittels der Formeln:

$$a_1=\tfrac{1}{2}(a+b),\quad b_1=\sqrt{ab},\quad k_1=\frac{a-b}{2a_1},$$

$$a_2=\tfrac{1}{2}(a_1+b_1),\quad b_2=\sqrt{a_1b_1},\quad k_2=\frac{a_1-b_1}{2a_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{tang}(\varphi_1-\varphi)=\frac{b}{a}\ \text{tang}\,\varphi,\quad \text{tang}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{b_1}{a_1}\ \text{tang}\,\varphi_1\ \dots\dots\ \text{etc.},$$

so hat man bekanntlich folgende Gleichungen:

$$\mathbf{E}(k,\varphi)=\frac{1}{1+k_1}\ \mathbf{E}(k_1,\varphi_1)-\frac{1-k_1}{1+k_1}\mathbf{F}(k,\varphi)+\frac{k_1}{1+k_1}\sin\varphi_1,$$

$$\mathbf{E}(k_1,\varphi_1)=\frac{1}{1+k_2}\ \mathbf{E}(k_2,\varphi_2)-\frac{1-k_2}{1+k_2}\ \mathbf{F}(k_1,\varphi_1)+\frac{k_2}{1+k_2}\sin\varphi_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{E}(k_{n-1},\varphi_{n-1})=\frac{1}{1+k_n}\ \mathbf{E}(k_n,\varphi_n)-\frac{1-k_n}{1+k_n}\mathbf{F}(k_{n-1},\varphi_{n-1})+\frac{k_n}{1+k_n}\sin\varphi_n.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Factoren

$$1,\ \frac{1}{1+k_1},\ \frac{1}{(1+k_1).(1+k_2)}\ \dots\dots\dots\dots\ \frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_{n-1})}$$

und addirt alsdann, so ergiebt sich:

$$\mathbf{E}(k,\varphi)=\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)}\mathbf{E}(k_n,\varphi_n)-\frac{1-k_1}{1+k_1}\ \mathbf{F}(k,\varphi)-\frac{1}{1+k_1}.\frac{1-k_2}{1+k_2}\ \mathbf{F}(k_1,\varphi_1)$$

$$-\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)}.\frac{1-k_3}{1+k_3}\mathbf{F}(k_2,\varphi_2)-\dots-\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)..(1+k_{n-1})}.\frac{1-k_n}{1+k_n}\mathbf{F}(k_{n-1},\varphi_{n-1})$$

$$+\frac{k_1}{1+k_1}\sin\varphi_1+\frac{k_2}{(1+k_1)(1+k_2)}\sin\varphi_2+\dots+\frac{k_n}{(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)}\sin\varphi_n.$$

Nun ist:

$$\mathbf{F}(k,\varphi)=\frac{1+k_1}{2}\mathbf{F}(k_1,\varphi_1);$$

mithin wird

$$\frac{1-k_1}{1+k_1}\ \mathbf{F}(k,\varphi)=\mathbf{F}(k_1,\varphi_1)-\mathbf{F}(k,\varphi),$$

$$\frac{1-k_2}{1+k_2}\mathbf{F}(k_1,\varphi_1)=\mathbf{F}(k_2,\varphi_2)-\mathbf{F}(k_1,\varphi_1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1-k_n}{1+k_n}\mathsf{F}(k_{n-1},\varphi_{n-1})=\mathsf{F}(k_n,\varphi_n)-\mathsf{F}(k_{n-1},\varphi_{n-1}).$$

Ferner finden noch folgende Relationen statt:

$$\frac{k_1}{1+k_1}=\frac{k\sqrt{k_1}}{2},$$

$$\frac{k_2}{(1+k_1)(1+k_2)}=\frac{k\sqrt{k_1 k_2}}{2^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{k_n}{(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)}=\frac{k\sqrt{k_1 k_2\ldots k_n}}{2^n}.$$

Auf diese Weise erhält man:

$$\mathsf{E}(k,\varphi)=\mathsf{F}(k,\varphi)-\left[1-\frac{1}{1+k_1}\right]\mathsf{F}(k_1,\varphi_1)-\left[\frac{1}{1+k_1}-\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)}\right]\mathsf{F}(k_2,\varphi_2)$$
$$-\ldots\ldots-\left[\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)..(1+k_{n-2})}-\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)..(1+k_{n-1})}\right]\mathsf{F}(k_{n-1},\varphi_{n-1})$$
$$-\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)..(1+k_{n-1})}\mathsf{F}(k_n,\varphi_n)+\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)}\mathsf{E}(k_n,\varphi_n)$$
$$+k\left\{\frac{1}{2}\sqrt{k_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{2^2}\sqrt{k_1 k_2}\sin\varphi_2+\ldots+\frac{1}{2^n}\sqrt{k_1 k_2..k_n}\sin\varphi_n\right\}.$$

Ferner ist:

$$\mathsf{F}(k_1,\varphi_1)=\frac{2}{1+k_1}\mathsf{F}(k,\varphi),$$

$$\mathsf{F}(k_2,\varphi_2)=\frac{2}{1+k_1}\cdot\frac{2}{1+k_2}\mathsf{F}(k,\varphi),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathsf{F}(k_{n-1},\varphi_{n-1})=\frac{2}{1+k_1}\cdot\frac{2}{1+k_2}\cdots\cdot\frac{2}{1+k_{n-1}}\mathsf{F}(k,\varphi).$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man nach geringer Umformung:

$$\mathsf{E}(k,\varphi)=\mathsf{F}(k,\varphi)\left\{1-\frac{1}{2}k^2\left(1+\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2^2}k_1 k_2+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}k_1 k_2\ldots k_{n-2}\right)\right\}$$
$$-\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)..(1+k_{n-1})}\mathsf{F}(k_n,\varphi_n)+\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)..(1+k_n)}\mathsf{E}(k_n,\varphi_n)$$
$$+k\left\{\frac{1}{2}\sqrt{k_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{2^2}\sqrt{k_1 k_2}\sin\varphi_2+\ldots+\frac{1}{2^n}\sqrt{k_1 k_2\ldots k_n}\sin\varphi_n\right\}.$$

Bei unendlich wachsendem n convergirt k_n gegen Null; mithin ist

$$\lim\mathsf{F}(k_n,\varphi_n)=\lim\int_0^{\varphi_n}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}=\lim\int_0^{\varphi_n}d\varphi=\lim\varphi_n,$$

$$\lim\mathsf{E}(k_n,\varphi_n)=\lim\int_0^{\varphi_n}\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\lim\int_0^{\varphi_n}d\varphi=\lim\varphi_n,$$

und es ergiebt sich also für $n = \infty$ folgende Formel:

$$\mathsf{E}(k,\varphi) = \mathsf{F}(k,\varphi)\left\{1 - \frac{1}{2}k^2\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1 k_2 + \frac{1}{8}k_1 k_2 k_3 + \dots\right)\right\}$$
$$+ k\left\{\frac{1}{2}\sqrt{k_1}\sin\varphi_1 + \frac{1}{4}\sqrt{k_1 k_2}\sin\varphi_2 + \frac{1}{8}\sqrt{k_1 k_2 k_3}\sin\varphi_3 + \dots\right\}.$$

Endlich ist noch

$$\mathsf{F}(k,\varphi) = a \cdot \frac{\Phi}{\lambda},$$

wobei λ die gemeinschaftliche Grenze, gegen welche die Größen a_n und b_n convergiren, und Φ der Grenzwerth von $\frac{\varphi_n}{2^n}$, so daß man schließlich folgende Formel zur Berechnung erhält:

$$a \cdot \mathsf{E}(k,\varphi) = \frac{\Phi}{\lambda}\left\{a^2 - (a-b)\,a_1\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1 k_2 + \frac{1}{8}k_1 k_2 k_3 + \dots\right)\right\}$$
$$+ \sqrt{2(a-b)\,a_1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{k_1}\sin\varphi_1 + \frac{1}{4}\sqrt{k_1 k_2}\sin\varphi_2 + \frac{1}{8}\sqrt{k_1 k_2 k_3}\sin\varphi_3 + \dots\right\}.$$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\varphi_3 = 4\pi \dots$, mithin:

$$\Phi = \lim \frac{\varphi_n}{2^n} = \frac{\pi}{2},$$

so daß sich die Formel zur Berechnung des Ellipsenquadranten folgendermaßen gestaltet:

$$a \cdot \mathsf{E}\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\lambda}\left\{a^2 - (a-b)\,a_1\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1 k_2 + \frac{1}{8}k_1 k_2 k_3 + \dots\right)\right\}.$$

Für unser Beispiel ergiebt die Rechnung:

$$\begin{aligned} a &= 2{,}000\,0000, & b &= 1{,}000\,0000, \\ a_1 &= 1{,}500\,0000, & b_1 &= 1{,}414\,2136, \\ a_2 &= 1{,}457\,1068, & b_2 &= 1{,}456\,4753, \\ a_3 &= 1{,}456\,7911 = & b_3 &= 1{,}456\,7911 = \lambda. \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} k_1 &= 0{,}333\,3333, & \tfrac{1}{2}k_1 &= 0{,}166\,6667, \\ k_2 &= 0{,}029\,4372, & \tfrac{1}{4}k_1 k_2 &= 0{,}002\,4531, \\ k_3 &= 0{,}000\,2167, & \tfrac{1}{8}k_1 k_2 k_3 &= 0{,}000\,0003, \\ k_4 &= 0{,}000\,0000, & \tfrac{1}{16}k_1 k_2 k_3 k_4 &= 0{,}000\,0000. \end{aligned}$$

So findet man:

$$2\mathsf{E}\left(0{,}866\,0254;\ \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}422\,1124.$$

Ferner wird:

$$\begin{aligned} & & \varphi &= 30^\circ\ 0'\ 0{,}''00, \\ \varphi_1 - \varphi &= 16^\circ\ 6'\ 7{,}''61, & \varphi_1 &= 46^\circ\ 6'\ 7{,}''61, \\ \varphi_2 - \varphi_1 &= 44^\circ\,24'\,55{,}''10, & \varphi_2 &= 90^\circ\,31'\ 2{,}''71, \\ \varphi_3 - \varphi_2 &= 90^\circ\,31'\ 3{,}''52, & \varphi_3 &= 181^\circ\ 2'\ 6{,}''23, \\ \varphi_4 - \varphi_3 &= 181^\circ\ 2'\ 6{,}''23, & \varphi_4 &= 362^\circ\ 4'\,12{,}''46; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\varphi_1 &= 23^\circ\ 3'\ 3{,}''81, \\ \tfrac{1}{4}\varphi_2 &= 22^\circ\,37'\,45{,}''68, \\ \tfrac{1}{8}\varphi_3 &= 22^\circ\,37'\,45{,}''78, \\ \tfrac{1}{16}\varphi_4 &= 22^\circ\,37'\,45{,}''78; \end{aligned}$$

$$\Phi = \text{arc}\ 22^\circ\ 37'\ 45,''\ 78 = 0,394\ 9572.$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{k_1}\quad \sin\varphi_1 = +\,0,208\ 0126,$$

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{k_1 k_2}\quad \sin\varphi_2 = +\,0,024\ 7634,$$

$$\tfrac{1}{8}\sqrt{k_1 k_2 k_3}\quad \sin\varphi_3 = -\,0,000\ 0033,$$

$$\tfrac{1}{16}\sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4}\ .\ \sin\varphi_4 = +\,0,000\ 0000.$$

So wird

$$2\,\mathsf{E}\left(0,866\ 0254;\frac{\pi}{6}\right) = 0,609\ 0101 + 0,403\ 1742 = 1,012\ 1843.$$

Endlich ist noch

$$\frac{\sqrt{156}}{4} = 3,122\ 4993.$$

Durch Addition erhält man auf diese Weise

$$\tfrac{1}{2}\,f_1 = 6,556\ 7960,$$

also

$$f_1 = 13,113\ 5920.$$

So ergiebt sich schließlich als Unterschied der Fadenlängen:

$$f_1 - f = 1,649\ 4904.$$