Ein diophantisches Problem.

Je reger und erfreulicher das Interesse geworden ist, welches das Publicum der Fortentwickelung und dem Gedeihen der Schulen zuwendet, desto mehr macht sich die Ansicht geltend, daß die Abhandlungen, welche gemäß Circular-Verfügung des Königlichen Ministeriums vom 2. September 1824 den Programmen der höheren Lehranstalten vorangedruckt werden sollen, diesem Interesse entsprechen müssen. Denn da jedes größere oder kleinere Werk unzweifelhaft nach Inhalt und Form dem jedesmaligen Leserkreise, wie ihn der Verfasser vorausgesetzt hat, anzupassen ist: so wird dies auch mit den Programm-Abhandlungen geschehen müssen.

Das ist von den vorgesetzten Behörden ganz besonders für die Realschulen durch Ministerial-Verfügung vom 17. Januar 1866 und durch Rescript des Schul-Collegiums der Provinz Brandenburg vom 7. Februar desselben Jahres ausdrücklich festgesetzt worden.

Allein es ist nicht recht abzusehen, weshalb die Gymnasien von dieser Rücksichtsnahme entbunden bleiben sollten, da doch das Verhältniß derselben zum Publicum nicht so wesentlich verschieden ist von dem der Realschulen. Je fremdartiger sich die Gymnasien dem Publicum gegenüberstellen, desto mehr wird auch das Publicum den Gymnasien entfremdet werden, und das dürfte diesen Anstalten eben nicht sehr fördersam sein.

Es haben sich auch schon gewichtige Stimmen erhoben, welche zu dergleichen Rücksichtsnahme die Gymnasien dringend auffordern, nachdem auf der Directoren-Conferenz zu Königsberg der beregte Gegenstand einer gründlichen Discussion unterworfen worden ist; dahin gehören die Abhandlungen des Directors Dr. Deinhardt zu Bromberg und des Directors Dr. Todt zu Schleusingen, welche man in der Zeitschrift für das Gymnasialwesen von Jacobs und Rühle im 20sten Jahrgange Monat September findet.

Sollen nun aber Abhandlungen, in welchen die Früchte wissenschaftlicher Forschungen niedergelegt und die mehr für Fachgenossen als für einen weiteren Leserkreis bestimmt sind, in die wissenschaftlichen Fachjournale verwiesen werden: so befinden sich grade die Mathematiker in einer ganz eigenthümlichen Lage, wenn an ihnen die Reihe ist, eine Programm-Abhandlung zu liefern. Der Stoff soll nicht abstrus und er soll nicht unschmackhaft sein; die Form soll nicht abstoßen durch den Gebrauch wenig verständlicher Symbole; denn diejenigen Leser, welche der Verfasser im Auge hat, haben meistens die Schule schon seit langer Zeit verlassen und sind nicht mehr vertraut mit den mathematischen Methoden und Symbolen.

Aus solchen Gründen, und weil außerdem der Umfang einer Programm-Abhandlung (wenigstens bei uns) auf den engen Raum von zwei Bogen beschränkt ist, hat der Verfasser dieses Aufsatzes gemeint, wohl daran zu thun, statt einer neuen und tiefer gehenden Untersuchung lieber eines von den Problemen vorzulegen, welche von den alten Griechen bis auf unsere Zeit sich erhalten haben.

Der griechische Mönch Maximus Planudes, welcher im 14ten Jahrhunderte lebte, hat nämlich zu den beiden ersten Büchern des alexandrinischen Mathematikers Diophantus über arithmetische Aufgaben Scholien geschrieben und außerdem eine Anthologie von dergleichen Aufgaben in größtentheils poetischer Form in sieben Büchern gesammelt, welche von Bachet zuerst herausgegeben worden ist. Später fand Lessing in einem alten Codex, welcher sich unter die Gudische Manuscripten-Sammlung in der Wolfenbüttler Bibliothek verloren hatte und Auszüge aus der Anthologie des Planudes nebst zugehörigen Scholien enthielt, ein Problem, welches Bachet nicht gekannt zu haben scheint, da er es nicht mit aufgenommen hat, und welches in seiner Überschrift dem Archimedes vindicirt wird, den diophantischen sehr ähnlich, aber durch die Schwierigkeit seiner Lösung vor allen andern ausgezeichnet ist. Lessing hat seinen Fund in seinen „Beiträgen zur Geschichte und Literatur" (edit. Lachmann Band IX. Pag. 295) unter der Überschrift „XIII. Zur griechischen Anthologie" bekannt gemacht und Erläuterungen dazu gegeben, welche aber nach seinem eigenen Geständnisse noch nicht hinreichen. Späterhin hat Leiste eine Rechnung angestellt, welche die Lösung des Problems weiterführt, aber plötzlich abbricht, nachdem die Möglichkeit der vollständigen Lösung nachgewiesen ist. Ich hoffte demnach in der Übersetzung des Diophantus von Otto Schulz wenigstens etwas über das bezeichnete merkwürdige Problem zu finden; allein meine Hoffnung ist getäuscht: es steht nichts Derartiges darin.

Obgleich nun der Scholiast im Eingange des Scholions ohne Weiteres Archimedes als den Verfasser des Problems ausgiebt, so scheint doch Lessing selbst schon die Richtigkeit dieser Behauptung zu bezweifeln; ich meinerseits bin der Ansicht, daß das Problem weit späteren Ursprungs ist und nicht (wie in der Überschrift angegeben ist) noch früheren; denn die Polygonalzahlen, von denen am Schlusse des Problems die Rede ist, und welche grade die Schwierigkeit der Lösung verursachen, sind wahrscheinlich erst von Theon von Smyrna, welcher in der Mitte des zweiten Jahrhunderts n. Chr. G., also über 300 Jahre nach Archimedes lebte, in systematischer Weise behandelt worden, und konnte nicht füglich ein Mathematiker, der noch vor oder zu Zeiten des Archimedes lebte, ein Problem, wie das vorliegende, aufstellen; wenigstens findet sich in den Werken des Archimedes Nichts über Polygonalzahlen.

Doch dem sei, wie ihm wolle; das Problem selbst ist jedenfalls sehr alt, und wie die Untersuchung zeigen wird, für den Verfasser selbst so schwierig gewesen, daß er an der vollständigen Lösung desselben verzweifeln mußte. Das deutet denn auch der Schluß des Gedichts hinreichend an. Daß aber der unbekannte Verfasser sein Problem dem berühmtesten der alten griechischen Mathematiker unterschob, mag seinen Grund in der Absicht haben, dem Problem einen gewissen Glanz zu verschaffen, so daß er demgemäß ein Verfahren beobachtete, welches in alten Zeiten eben nicht selten angewandt worden ist.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ,

ὅπερ ᾿ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν
τοῖς ἐν ᾿Αλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν,
ἐν τῇ πρὸς ᾿ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ τὸν ΚΥΡΗΝΑΙΟΝ
ἐπιστολῇ.

Πληθὺν ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον,
    Φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
Πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
    Θρινακίης, τετραχῆ στίφεα δασσαμένη
Χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
    Κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
Ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἐν δὲ ἑκάστῳ
    Στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι,
Συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες. ᾿Αργότριχας μὲν
    Κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ,
Καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον.
    Αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ μέρεϊ
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσι.
    Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας (¹) ἄθρει
᾿Αργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει, ἑβδομάτῳ τε,
    Καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
    Ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
Τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι.
    Αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο,
    Σὺν ταύροις πάσης εἰς νομὸν ἐρχομένης.
Ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
    Ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον. Τετραχῆ
Ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
    ᾿Αργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
Ξεῖνε, σὺ δ' ἠελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
    Χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
Χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι χροιὴν καθ' ἕκασται·
    Οὐκ ἄϊδρίς κε λέγοι', οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
Οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος· ἀλλ' ἴθι φράζευ
    Καὶ τάδε πάντα βοῶν ἠελίοιο πάθη.
᾿Αργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
    Κυανέοις ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι

---

¹) ποικιλόχροας, wie Lachmann geschrieben hat, ist des Versmaßes wegen unzulässig. Das ist um so sonderbarer, da Lessing selbst diese Bemerkung schon gemacht hat.

Εἰς βάθος εἰς εὖρός τε· τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
Πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖ τ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
Ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
Σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον· οὔτε προσόντων
Ἀλλοχρόων ταύρων, οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας,
Καὶ πληθέων ἀποδοὺς, ὦ ξένε, πάντα μέτρα,
Ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος· ἴσθι τε πάντως
Κεκριμένος ταύτῃ ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ μὲν οὖν πρόβλημα διὰ τοῦ ποιήματος ὁ Ἀρχιμήδης ἐδήλωσε σαφῶς· ἰστέον δὲ τὸ λεγόμενον, ὅτι τέσσαρας ἀγέλας εἶναι δεῖ βοῶν· λευκοτρίχων μὲν μίαν ταύρων καὶ θηλειῶν· ὧν τὸ πλῆθος ὁμοῦ συνάγει μυριάδας διπλᾶς (1) ιδ, καὶ ἁπλᾶς φπβ, καὶ μονάδας ,ζτξ· (2) κυανοχρόων δ' ἄλλην ὁμοῦ ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν ἐννέα, καὶ ἁπλῶν ,ηωλ, καὶ μονάδων ω· (3) μιξοτρίχων δ' ἄλλην ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν η, καὶ ἁπλῶν ,ϛϡϟα, καὶ μονάδων υ· (4) τῆς δὲ λοιπῆς ἀγέλης τῶν ξανθοχρόων συνάγει τὸ πλῆθος διπλᾶς μυριάδας ζ, καὶ ἁπλᾶς ,ϛψη, μονάδας δὲ ,η· (5) ὥστε συνάγεσθαι ὁμοῦ τὸ πλῆθος τῶν δ ἀγελῶν μυριάδας διπλᾶς μ, καὶ ἁπλᾶς ,γριβ καὶ μονάδας ,ϛφξ. (6) Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἔχει μυριάδας διπλᾶς η καὶ ἁπλᾶς ,βϡλα, καὶ μονάδας ,ηφξ· (7) θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς, ε, καὶ ἁπλᾶς ,ζχν, καὶ μονάδας ,ηω· (8) ἡ δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς ε, καὶ ἁπλᾶς ,θχπδ, καὶ μονάδας ,αρκ· (9) θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς γ, καὶ ἁπλᾶς ,θρμε καὶ μονάδας ,θχπ· (10) ἡ δ' ἀγέλη τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς ε, καὶ ἁπλᾶς ,ηωξδ, καὶ μονάδας ,δω· (11) θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς β, καὶ ἁπλᾶς ,ηρκϛ, καὶ μονάδας ,θχ· (12) ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς γ, καὶ ἁπλᾶς ,γρϟε, καὶ μονάδας ϡξ· (13) θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς δ, καὶ ἁπλᾶς ,γφιγ, καὶ μονάδας ,ζμ. (14)

Καὶ ἐστι τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἡμίσει καὶ τρίτῳ μέρει τοῦ πλήθους τῶν κυανοχρόων ταύρων, καὶ ἔτι ὅλῃ τῇ τῶν ξανθοχρωμάτων ἀγέλῃ· τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρωμάτων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων καὶ ὅλῳ τῷ πλήθει τῶν ξανθοχρωμάτων· τὸ δὲ πλῆθος τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἕκτῳ καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῶν λευκοτρίχων ταύρων, καὶ ἔτι τῷ πλήθει ὅλῳ τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων· καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν θηλειῶν ἴσον τῷ τρίτῳ καὶ τετάρτῳ μέρει ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων· τὸ δὲ τῶν κυανοχρόων ἴσον τῷ

1) μυριὰς διπλῆ heißt nicht 2.10000, sondern 10000^2.
2) 1405827360. 3) 988300800. 4) 869910400. 5) 767088000. 6) 4031126560. 7) 829318560.
8) 576508800. 9) 596841120. 10) 391459680. 11) 588644800.
12) 281265600. Statt ,θχ muß es heißen ,εχ, wie weiter unten die Rechnung zeigen wird; dies ist muthmaßlich nur ein Fehler des Abschreibers.
13) 331950960. 14) 435137040.

τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν ποικιλοτρίχων· τὸ δὲ τῶν ποικιλοτρίχων ἴσον τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ μέρει τῆς ὅλης τῶν ξανθῶν βοῶν· πάλιν δὲ τὸ τῶν ξανθῶν θηλειῶν πλῆθος ἦν ἴσον τῷ ἕκτῳ τε καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ τῶν κυανοχρόων ταύρων συντεθεῖσα ποιεῖ τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ δὲ ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων μετὰ τῆς ἀγέλης τῶν ποικιλοχρόων συντεθεῖσα ποιεῖ τρίγωνον. Ὡς ἔχει τὰ τῶν ὑποκειμένων κανόνων καθ' ἕκαστον χρῶμα.

Obwohl nun Lessing nach Mittheilung des Epigrammes und des zugehörigen Scholions der Meinung ist: „Eine völlige Übersetzung beizufügen, würde eine sehr undankbare Arbeit sein“: so halte ich das in Betracht derjenigen Leser, welche mit der griechischen Sprache nicht vertraut sind, und mit Rücksicht auf das Eingangs Gesagte nicht für ganz nutzlos, und füge deshalb von beiden eine Übersetzung hinzu.

Folgendes Problem,

welches Archimedes unter Epigrammen gefunden und den Fachmännern in Alexandrien zur Auflösung gestellt hat, findet sich in dem Briefe an Eratosthenes von Cyrene.

Ermiß, o Freund, mit Genauigkeit, wenn du Sachkenntniß hast, die Menge der Sonnenrinder, wie groß sie einst ernährt wurde auf den Feldern der Sikelischen Insel Thrinakia, vierfach getheilt in verschiedenhäutige Haufen: ein Haufe war milchweiß, der zweite glänzte mit bläulicher Farbe, der dritte war braun, der vierte scheckig. In jedem Haufen waren die Stiere an Größe und Fülle ([1]) überwiegend und auf folgende Art symmetrisch aufgestellt:

Die silberhaarigen (mußt du wissen, Freund,) waren der Hälfte und dem Drittel der blauen nebst sämmtlichen braunen Stieren gleich; die blauen dem vierten und fünften Theile der scheckigen nebst allen braunen dazu; die übrigen [die ([2])] scheckigen selbst wiederum dem sechsten und siebenten Theile der silberfarbigen nebst allen braunen.

Mit den weiblichen Rindern aber stand es so: die Weißhaarigen waren genau gleich dem dritten und vierten Theile vom ganzen vereinigten Haufen der Blauen, aber die Blauen wieder waren gleich dem vierten und fünften Theile der Scheckigen, soferne der ganze Haufe derselben mit den Stieren zusammen auf die Weide kam. Die Scheckigen endlich waren gleich an Menge dem fünften und sechsten Theile der Braunen. Die Braunen aber viertens waren gleich zu rechnen der Hälfte des dritten Theils und dem siebenten Theile der Weißen.

Freund, wenn du sagst, wieviel Rinder der Sonne es wirklich waren, einmal: wieviel der wohlgenährten Stiere, dann aber auch, wieviel weibliche je nach ihrer Farbe, nicht ein Unwissender, noch ein Zahlenunkundiger dürftest du genannt werden, freilich

---

[1]) πλήθεσι βριθόμενοι kann nicht heißen »an Menge«, weil die Rechnung zeigen wird, daß in dem braunen Haufen die Stiere in geringerer Zahl vorhanden waren als die Kühe.

[2]) Τοὺς δ' ὑπολειπομένους kann eben so gut heißen »die übrigen Scheckigen«, also $\frac{11}{12}$ der Scheckigen, als »die Scheckigen im Übrigen.« Der Scholiast ist der letzteren Meinung.

aber noch nicht ein zu den Weisen zu rechnender. Aber wohlan! bedenke auch noch diese anderen Verhältnisse der Sonnenrinder.

Wenn die silberhaarigen Stiere ihre Menge mit den blauen gemischt haben, stehen sie völlig gleichmäßig nach Länge und Breite [1], und die weiten Gefilde Thrinakias werden von dem Viereck ganz angefüllt. Werden aber die braunen mit den scheckigen in einen Haufen vereinigt, so stehen sie von einem anfangend und aufsteigend, indem sie die dreisäumige Gestalt ausfüllen [2], während die andersfarbigen Stiere weder hinzukommen noch fehlen.

Hast du dieses ausgeforscht und mit deinem Verstande erfaßt, Freund, und alle Zahlen angegeben: so gehest du als ruhmreicher Sieger davon, und sollst für einen mit solcher Weisheit Reichbegabten erklärt werden.

Scholion

Das vorstehende Problem hat Archimedes auf verständliche Weise in dem Gedichte ausgedrückt. [3] Das Gesagte nämlich ist so zu verstehen, daß vier Gruppen von Rindern vorhanden sein müssen: eine von weißhaarigen Stieren und Kühen, deren Gesammtmenge auf **1405 827360** sich beläuft: die zweite von blauhäutigen Stieren und Kühen, deren Menge **988 300800** beträgt: wiederum eine von gemischtfarbigen Stieren und Kühen, deren Menge **869 910400** beträgt: endlich beläuft sich die Anzahl der braunen auf **767 088000**, so daß die Gesammtmenge von allen vier Gruppen auf **4031 126560** steigt. Die Gruppe der weißhaarigen Stiere enthält **829 318560**, der Kühe dagegen **576 508800**. Der Haufe der blauen Stiere zählt **596 841120**, der Kühe dagegen **391 459680**. Der Haufe der scheckigen Stiere hält **588 644800**, der Kühe dagegen **281 269600** (corrigirt **281 265600**). [4] Der Haufe der braunen Stiere endlich enthält **331 950960**, der Kühe dagegen **435 137040**. [5]

Und in der That ist nun die Anzahl der weißhaarigen Stiere gleich der Hälfte und dem dritten Theile der blauen Stiere nebst dem ganzen Haufen der braunen, die Menge der blauen gleich einem Viertel und einem Fünftel der scheckigen Stiere nebst der ganzen Menge der braunen; die Menge der scheckigen Stiere ist gleich einem Sechstel und einem Siebentel der weißen nebst der ganzen Menge der braunen Stiere.

Und wiederum ist die Menge der weißen Kühe gleich dem Drittel und dem Viertel von dem Gesammthaufen der blauen; die Menge der blauen ist gleich dem Viertel und dem Fünftel des gesammten Haufens der scheckigen; die Menge der scheckigen ist gleich dem Fünftel und dem Sechstel des gesammten Haufens der braunen Rinder; endlich ist die Menge der braunen Kühe gleich dem Sechstel und dem Siebentel von dem ganzen Haufen der weißen Rinder.

Wenn man ferner die weißen und die blauen Stiere zusammennimmt, so kommt eine Quadratzahl heraus: dagegen ist die Summe der braunen und der scheckigen eine Trigonalzahl.

So verhält sich die Sache mit den zu Grunde gelegten Zahlen nach einer jeglichen Farbe.

---

[1]) Sie bilden ein Quadrat, und ihre Zahl ist eine Quadratzahl.

[2]) Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck, und ihre Zahl ist eine Trigonalzahl.

[3]) Der Scholiast ist also der Meinung, daß das Problem von Archimedes selbst herrühre.

[4]) Wie schon oben im griechischen Text bemerkt ist, muß diese Zahl nicht **281 269600**, sondern **261 265600** heißen.

[5]) Hierdurch wird die obige Bemerkung zum 8ten Verse gerechtfertigt.

Auflösung.

§ 1.

Folgt man zunächst der Auslegung des Scholiasten, und bezeichnet W die weißen, B die blauen, S die scheckigen und R die rothbraunen Stiere, so erhält man die Gleichungen:

$$1)\quad W = \tfrac{5}{6}\,B + R.$$
$$2)\quad B = \tfrac{9}{20}\,S + R.$$
$$3)\quad S = \tfrac{13}{42}\,W + R.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen erst R, so erhält man:

$$4)\quad W = \tfrac{11}{6}\,B - \tfrac{9}{20}\,S.$$
$$5)\quad \tfrac{55}{42}\,W = \tfrac{5}{6}\,B + S.$$

und hieraus

$$6)\quad W = \tfrac{371}{267}\,B.$$

I. .... Demnach $\left\{\begin{array}{l} W = 371.\,a. \\ B = 267.\,a. \\ S = \frac{790}{3}.\,a. \\ R = \frac{297}{2}.\,a. \end{array}\right\}$ also wenn $a = 6\,x$, und wenn a und x ganze Zahlen bezeichnen, $\left\{\begin{array}{l} W = 2226.\,x. \\ B = 1602.\,x. \\ S = 1580.\,x. \\ R = 891.\,x. \end{array}\right\}$

Ferner sollen dann, wenn man die gleichfarbigen Kühe mit denselben Buchstaben des kleinen Alphabets w, b, s und r bezeichnet, sein:

$$1)\quad w = \tfrac{7}{12}\,B + \tfrac{7}{12}\,b,$$
$$2)\quad b = \tfrac{9}{20}\,S + \tfrac{9}{20}\,s,$$
$$3)\quad s = \tfrac{11}{30}\,R + \tfrac{11}{30}\,r,$$
$$4)\quad r = \tfrac{13}{42}\,W + \tfrac{13}{42}\,w.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen successive b, s und r, so kommt:

$$5)\quad w = \tfrac{7}{12}\,B + \tfrac{21}{80}\,S + \tfrac{21}{80}\,s,$$
$$6)\quad w = \tfrac{7}{12}\,B + \tfrac{21}{80}\,S + \tfrac{77}{800}\,R + \tfrac{77}{800}\,r,$$
$$7)\quad w = \tfrac{7}{12}\,B + \tfrac{21}{80}\,S + \tfrac{77}{800}\,R + \tfrac{143}{4800}\,W + \tfrac{143}{4800}\,w.$$

Also
$$4657\,w = 2800\,B + 1260\,S + 462\,R + 143\,W,$$
und wenn man die Werthe von B, S, R und W aus Nr. I. substituirt:

$$8)\quad w = \tfrac{7206360}{4657}.\,x,$$

und da 4657 und 7206360 keinen gemeinsamen Theiler haben, so muß man setzen:

$$9)\quad x = 4657.\,n,$$ wobei n jede ganze Zahl bedeuten kann.

Dadurch ergeben sich aus Nr. I. nunmehr die Werthe

II. .... $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} W = 10\,366482.\,n \\ B = 7\,460514.\,n \\ S = 7\,358060.\,n \\ R = 4\,149387.\,n \end{array}\right\} \text{Zusammen } 29\,334443.\,n \text{ Stiere.} \\ \text{und folglich auch} \\ \left.\begin{array}{l} w = 7\,206360.\,n \\ b = 4\,893246.\,n \\ s = 3\,515820.\,n \\ r = 5\,439213.\,n \end{array}\right\} \text{Zusammen } 21\,054639.\,n \text{ Kühe.} \end{array}\right.$

Die Coefficienten von n, wie sie hier stehen, sind zugleich die kleinsten Zahlen, welche den ersten Bedingungen des Problems Genüge leisten, und welche der Scholiast hätte angeben sollen. Statt dessen giebt er alle Zahlen **80**mal zu groß an, wie sogleich in die Augen springt, wenn man in Nr. II. **80** statt n setzt; denn alsdann ergeben sich:

$$\text{III.}\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} W = 829\,318560 \\ B = 596\,841120 \\ S = 588\,644800 \\ R = 331\,950960 \end{array}\right\} \text{Zusammen } 2346\,755440 \text{ Stiere.} \\ \left.\begin{array}{l} w = 576\,508800 \\ b = 391\,459680 \\ s = 281\,265600 \\ r = 435\,137040 \end{array}\right\} \text{Zusammen } 1684\,371120 \text{ Kühe.} \end{array} \right.$$

Also genau diejenigen Zahlen, welche der Scholiast angiebt, bis auf die vorletzte, wie oben schon zweimal bemerkt worden ist. Auch Leiste findet sonderbarer Weise diese Coefficienten erst **20**mal zu groß und dividirt sie alsdann erst durch **20**.

Bis hieher hat der Scholiast das gestellte Problem ganz richtig gelöst; denn seine Zahlen (obwohl **80**mal größer als nöthig war) entsprechen vollkommen den ersten Bedingungen. Wenn er aber hinzufügt, daß die weißen und die blauen Stiere zusammen(*) (also **1426 159680**) eine Quadratzahl, und die braunen und die scheckigen zusammen (also **920 595760**) eine Trigonalzahl ausmachten, so ist weder das eine noch das andre der Wahrheit gemäß, und kann er die Probe für seine Zahlen gar nicht gemacht haben. Der Scholiast ist also noch nicht zu den Weisen zu rechnen, wenn auch nicht zu den Unwissenden und Zahlenunkundigen.

§ 2.

Es kommt also nun noch darauf an, die beiden letzten Bedingungen des Problems zu erfüllen, was für jede einzelne leicht ist, für beide zugleich aber nicht unbedeutende Schwierigkeiten hat.

Es soll nämlich

$$W + B = 17\,826996.\,n$$

eine Quadratzahl werden. Zerlegt man zu diesem Zwecke die Zahl **17 826996** in ihre Primfactoren, so erhält man

$$W + B = 2^2.3.11.29.4657.\,n,$$

woraus ersichtlich ist, daß erstlich **17 826996** kein Quadrat ist, und daß man

$$n = 3.11.29.4657.\,z^2 = 4\,456749.\,z^2$$

setzen muß, damit $W + B$ eine Quadratzahl werde.

Setzt man nun überall in Nr. II. $4\,456749.\,z^2$ für n, so ergeben sich die Werthe

*) Die weißen Stiere und Kühe zusammen geben die Zahl **17 572842**, welche fast genau das Quadrat von **4192** ist. Sollte sich der Verfasser des Problems hierbei geirrt haben?

$$\text{IV.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{aligned} W &= 46\,200808\,287018.\ z^2 \\ B &= 33\,249638\,308986.\ z^2 \\ S &= 32\,793026\,546940.\ z^2 \\ R &= 18\,492776\,362863.\ z^2 \end{aligned} \right\} \text{Stiere.} \\ \left. \begin{aligned} w &= 32\,116937\,723640.\ z^2 \\ b &= 21\,807969\,217254.\ z^2 \\ s &= 15\,669127\,269180.\ z^2 \\ r &= 24\,241207\,098537.\ z^2 \end{aligned} \right\} \text{Kühe.} \end{array} \right.$$

Nunmehr ist wirklich die Bedingung erfüllt, daß $W + B = 79\,450446\,596004.\ z^2$ eine Quadratzahl ist, denn die Wurzel daraus ist genau $8\,913498.\ z$.

Wäre nun glücklicherweise zugleich $S + R = 51\,285802\,909803.\ z^2$ oder wenigstens der Coefficient $51\,285802\,909803$ eine Trigonalzahl, so wäre die Aufgabe gelöst und zwar durch bestimmte Zahlen; allein das ist leider nicht der Fall, denn da jede Trigonalzahl durch den Ausdruck $\frac{m(m+1)}{2}$ dargestellt wird, so müßte $m^2 + m = 2.51\,285802\,909803$, also $4m^2 + 4m + 1 = 8.51\,285802\,909803 + 1$ d. h. $(2m + 1)^2 = 410\,286423\,278425$ eine Quadratzahl sein, was eben nicht der Fall ist.

Die in Nr. IV. aufgestellten Zahlen erfüllen also wohl die eine Bedingung, aber nicht zugleich auch die andere.

§ 3.

Eben so leicht wäre es gewesen, die letzte Bedingung für sich allein zu erfüllen, nämlich daß $S + R = 11\,507447.\ n$ (aus Nr. II.) eine Trigonalzahl werde, und zwar ließe sich das auf doppelte Weise einrichten. Setzte man nämlich

$$\frac{m(m+1)}{2} = 11\,507447.\ n, \text{ also}$$

$$m(m+1) = 23\,014894.\ n,$$

so brauchte man nur

$$m + 1 = 23\,014894, \text{ also } n = 23\,014893,$$

$$\text{oder} \quad m = 23\,014894, \quad \text{"} \quad n = 23\,014895$$

zu nehmen, damit $S + R$ eine Trigonalzahl werde.

Substituirt man demnach in die Gleichungen Nr. II. für n die Zahlen 23 014893 oder 23 014895, so erhält man:

1) $W = 238\,583474\,016426.$	oder	1) $W = 238\,583494\,749390.$
2) $B = 171\,702931\,435002.$	"	2) $B = 171\,702946\,356030.$
3) $S = 169\,344963\,587580.$	"	3) $S = 169\,344978\,303700.$
4) $R = 95\,497697\,820591.$	"	4) $R = 95\,497706\,119365.$

Ferner:

5) $w = 165\,853604\,319480.$	"	5) $w = 165\,853618\,732200.$
6) $b = 112\,617533\,112678.$	"	6) $b = 112\,617542\,899170.$
7) $s = 80\,916221\,107260.$	"	7) $s = 80\,916228\,138900.$
8) $r = 125\,182905\,199209.$	"	8) $r = 125\,182916\,077635.$

Alle diese Zahlen erfüllen die gestellten Bedingungen bis auf eine. Nämlich die Summe der scheckigen und der braunen Stiere

264 842661 408171

ist eine Trigonalzahl und zwar die 23 014893ste, und eben so ist

264 842684 423065

die 23 014894ste Trigonalzahl.

Wäre nun auch die Summe der weißen und der blauen Stiere, nämlich

410 286405 451428,

oder auch 410 286441 105420 eine Quadratzahl, so wäre Alles in Richtigkeit; allein das ist, wie man sogleich sieht, nicht der Fall.

§ 4.

Es bleibt daher nichts weiter übrig, als für z einen solchen ganzzahligen Werth zu finden, daß der Ausdruck

$$51\,285802\,909803 . z^2$$ (siehe die Gleichungen in Gruppe IV.)

eine Trigonalzahl, oder was dasselbe ist, daß

$$8.51\,285802\,909803 . z^2 + 1$$

d. h. $$410\,286423\,278424 . z^2 + 1$$

eine Quadratzahl werde.

Bezeichnet man der Kürze wegen den Coefficienten von z^2 durch a, so daß man hat:

$$1) \quad a = 410\,286423\,278424,$$

und den Werth von $az^2 + 1$ durch y^2, so hat man aus der Gleichung

$$2) \quad y^2 = az^2 + 1$$

solche ganzzahlige Werthe für y und z zu finden, daß sie diese Gleichung identisch machen.

Die vorstehende Gleichung (2) ist unter dem Namen der Pell'schen Gleichung bekannt und kann (weil a nicht eine Quadratzahl ist) unbedingt gelöst werden. Verwandelt man nämlich $\sqrt{a}$ in einen Kettenbruch, so hat man

$$\sqrt{a} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + 1}}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{rc.},$$

wobei α, β, γ, δ rc. lauter ganze absolute Zahlen sind, und außerdem α die größeste in $\sqrt{a}$ enthaltene ganze Zahl ist. Diese Verwandlung erfordert nach Pell's und nach Euler's Methode (s. Euler's Anleit. z. Algebra Abschn. II. Cap. 7) äußerst mühsame und langwierige Rechnungen, wie schon daraus einleuchtend ist, daß man aus der Gleichung

$$y^2 = 541\,z^2 + 1$$

für y eine 37stellige und für z eine 36stellige Zahl als die kleinsten Zahlen findet (conf. Degen „Canon Pellianus").

Nun ist aber für den vorliegenden Fall a (cf. Gleich. 1) selbst eine 15stellige Zahl, woraus man schon im Voraus einen Schluß auf die enorm großen Werthe der ganzen Zahlen y und z machen kann.

Allerdings läßt sich das Verfahren, wonach man $\sqrt{a}$ in einen Kettenbruch verwandeln kann, bedeutend bequemer machen, wie Kausler (Lehre von den continuirlichen Brüchen) sehr schön auseinandergesetzt hat; allein die ganze Arbeit bleibt dennoch eine äußerst ermüdende und zeitraubende.

§ 5.

Es sei $\sqrt{a}=\alpha+\frac{1}{p}$, so wird $p=\frac{\sqrt{a}+\alpha}{a-\alpha^2}$, oder, wenn man $c=a-\alpha^2$ setzt, wobei c eine ganze Zahl ist,

$$1)\quad p=\frac{\sqrt{a}+\alpha}{c}.$$

Heißt nun die ganze in $\frac{\sqrt{a}+\alpha}{c}$ enthaltene Zahl β, so hat man

$$p=\beta+\frac{1}{q}.$$

Gerade ebenso folgt, daß

$$2)\quad q=\frac{\sqrt{a}+b'}{c'}=\gamma+\frac{1}{r}.$$

$$3)\quad r=\frac{\sqrt{a}+b''}{c''}=\delta+\frac{1}{s}\text{ 2c.},$$

wo b', b'', c', c'' 2c. lauter absolute ganze Zahlen sind.

Nun aber folgt aus (2) und (3), daß

$$4)\quad o=(b'+b''-\gamma c')\sqrt{a}+(a+b'b''-c'c''-\gamma b''c')$$

und da sowohl das rationale als auch das irrationale Glied, jedes für sich gleich Null sein muß, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$5)\quad b'+b''-\gamma c'=o,$$

$$6)\quad a+b'b''-c'c''-\gamma b''c'=o.$$

Aus der Gleich. (5) ergiebt sich sogleich

I. .... $b''=\gamma c'-b'$.

Aus der Gleich. (6) aber folgt

$$c'c''=a+b'b''-\gamma b''c',\text{ also}$$

$$7)\quad c'c''=a-(\gamma c'-b')^2=a-b''^2.$$

Nun folgt aber ganz auf dieselbe Weise, daß

$$8)\quad cc'=a-b'^2.$$

Eliminirt man nunmehr a aus den Gleichungen (7) und (8), so ergiebt sich

II. .... $c''=\gamma(b'-b'')+c$.

Mit Hülfe der Gleichungen I. und II. verbunden mit Gleichung (3) läßt sich nun leicht der folgende Quotient δ, daraus auf dieselbe Weise alle folgende Quotienten ohne mühselige Rechnung finden, so daß die Verwandlung von $\sqrt{a}$ in einen Kettenbruch alsdann vollzogen ist.

§ 6

Ist diese langweilige Operation vollzogen, so findet sich (wie Kausler bewiesen hat), daß der gefundene Kettenbruch ein periodischer ist und die Form hat:

$$\sqrt{a} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta \ddots \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\alpha + \sqrt{a}}}}}}}},$$

womit die Periode geschlossen ist.

Nun ist erforderlich, die Näherungswerthe dieses Kettenbruchs zu berechnen bis zu dem vorletzten, welcher durch $\frac{y}{z}$ bezeichnet werden mag, der drittletzte aber mit $\frac{y'}{z'}$, so ergiebt sich nach bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche

$$\sqrt{a} = \frac{y(\alpha + \sqrt{a}) + y'}{z(\alpha + \sqrt{a}) + z'},$$

daher $$(\alpha z + z' - y)\sqrt{a} + (az - \alpha y - y') = 0.$$

Da ferner das rationale wie das irrationale Glied ein jedes für sich gleich Null sein muß, so erhält man $\alpha z + z' - y = 0$,

und $az - \alpha y - y' = 0$.

Eliminirt man alsdann aus diesen beiden Gleichungen das α, so ergiebt sich die Gleichung

$$y^2 = az^2 + (yz' - y'z).$$

Endlich ist $yz' - y'z = \pm 1$ nach einem bekannten Satze von den Kettenbrüchen, so daß man hat

III. .... $y^2 = az^2 \pm 1$,

wobei das + Zeichen gilt, sobald die Periode des Kettenbruchs von β bis β eine ungrade Gliederzahl hat, dagegen das − Zeichen, wenn diese Gliederzahl eine grade ist.

Ist das Erstere der Fall, so ist die Aufgabe ohne Weiteres gelöst: der Nenner des vorletzten Näherungsbruches ist für z, der Zähler für y zu setzen. Ist aber das Letztere der Fall, und heißt daher die Gleichung

$$y^2 = az^2 - 1,$$

so folgt nacheinander:

$$y^2 + 1 = az^2,$$

$$4y^4 + 4y^2 = 4ay^2z^2,$$

$$4y^4 + 4y^2 + 1 = 4ay^2z^2 + 1,$$

IV. .... $(2y^2 + 1)^2 = a(2yz)^2 + 1$, das heißt: in diesem Falle braucht man nur einfach $(2y^2 + 1)$ statt y und $(2yz)$ statt z in die Pell'sche Gleichung zu setzen, wodurch dieselbe identisch wird.

Die Gleichung $y^2 = az^2 + 1$
ist also unter allen Umständen auf dem angegebenen Wege lösbar, und somit steht nichts im Wege, das Gesagte auf die Gleichung

(§ 4. Nr. I.) $\quad y^2 = 410\,286423\,278424.\ z^2 + 1$

anzuwenden.

§ 7.

Verwandelt man nun wirklich $\sqrt{410\,286423\,278424}$ in einen Kettenbruch auf die im § 5 angegebene Art, so erhält man zuvörderst

$$20\,255528 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \text{ꝛc.}}}}}}}}}}}$$

Bis zum zweihundertundvierzigsten Quotienten habe ich die Rechnung wirklich fortgesetzt, aber noch keine Periode gefunden. Berechnet man die Näherungsbrüche nur bis zum einundzwanzigsten, so ergiebt sich

$$20\,255528\frac{2790\,208154}{12963\,181895}$$

oder

$$\frac{262576\,096633\,473714}{12963\,181895}.$$

In diesen zwanzig ersten Näherungsbrüchen sind die Quotienten durchschnittlich **3**, jedoch kommen späterhin Quotienten von bedeutender Größe vor. Selbst aber wenn diese geringe Durchschnittszahl bis zum **201**sten Näherungsbruch beibehalten werden könnte, so ergeben sich ein Zähler von mindestens **103** Stellen, und ein Nenner von wenigstens **96** Stellen. Dies wären Werthe für y und z, welche der Gleichung

$$y^2 = 410\,286423\,278424\ z^2 + 1$$

genügten, wenn die Periode des Kettenbruches nur **200** Glieder hätte. Da aber, wie gesagt, dies nicht der Fall ist, so müßte man endlich für y und z so große Zahlen erhalten, daß es der angewandten Zeit und Mühe gar nicht weiter verlohnte, sie wirklich genau zu berechnen. Noch ärger würde die Sache, wenn unglücklicher Weise die Periode des Kettenbruchs eine grade Gliederzahl hätte; denn alsdann müßte man (nach § 6) $(2yz)$ statt z und $(2y^2 + 1)$ statt y setzen. Um endlich die richtigen Zahlen für die Rinder zu erhalten, müßte man den Nenner (z) ins Quadrat erheben und noch außerdem mit den Coefficienten in § 2 Gruppe IV. multipliciren. Die Zahlen, welche man so als die kleinsten erhielte, welche der Aufgabe genügten, würden mindestens 205 Stellen haben, wie sich leicht schätzen läßt, muthmaßlich aber weit mehr.

§ 8.

Aus dem Gesagten geht zur Genüge hervor, daß von einer Rinderzahl auf Sicilien gar nicht mehr die Rede sein kann; denn die ganze Erde wäre nicht groß genug, um nur den billionten Theil jener Rinder zu beherbergen. Ferner ist klar, daß der Verfasser der Aufgabe selbst die Auflösung nicht gefunden haben kann; weil die dazu erforderlichen Mittel denn doch die Kräfte der alten Arithmetik um ein Bedeutendes übersteigen.

Endlich ist klar, daß die Aufgabe an sich arithmetisch sehr wohl lösbar ist, soferne man nur von der Einkleidung absieht; allein wegen der ungeheuren Größe der gesuchten Zahlen geht das Interesse an der ganzen Aufgabe verloren.

Meyer.