Die windschiefe Fläche.

§ 1.

Erklärung. Bewegt man eine gerade Linie (Erzeugungslinie) im Raume so, daß sie fortwährend zwei feste, nicht in einer Ebene liegende, gerade Linien (die Leitlinien) schneidet, und daß die Schneidepunkte in einer jeden von ihnen mit gleichmäßiger Bewegung fortschreiten: so heiße die von der bewegten geraden Linie erzeugte Fläche eine windschiefe Fläche.

Zusatz 1. Lägen die beiden Leitlinien in einer Ebene: so beschriebe die Erzeugungslinie nichts anderes, als diese Ebene selbst.

Zusatz 2. Niemals können zwei verschiedene Lagen der Erzeugungslinie, oder (wenn man die verschiedenen Lagen der Erzeugungslinie als verschiedene Erzeugungslinien ansieht) mehrere Erzeugungslinien derselben windschiefen Fläche in einer Ebene liegen, weil sonst die Leitlinien selbst darin liegen müßten.

§ 2.

In der windschiefen Fläche lassen sich auf mehrfache Weise gerade Linien ziehen: erstlich in jeder Lage, welche die Erzeugungslinie bei ihrer Bewegung annimmt. Um eine beliebige solche Linie zu erhalten, braucht man nur eine einzige Lage der Erzeugungslinie und die beiden Geschwindigkeiten zu kennen, mit welchen sich die Erzeugungslinie auf den Leitlinien bewegt.

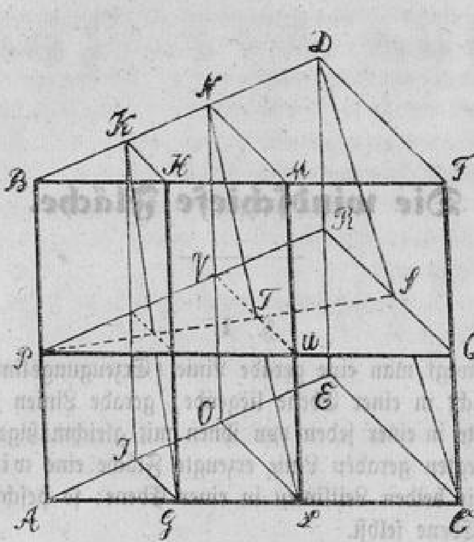
Sind z. B. (s. d. Fig. § 3) AC und BD die beiden Leitlinien, ist AB die Erzeugungslinie in ihrer ursprünglichen Lage, und sind c' und c'' die beiden Geschwindigkeiten, mit welchen sich die Erzeugungslinie respective auf den Linien AC und BD bewegt: so braucht man nur zwei Stücke AC und BD auf den Leitlinien abzuschneiden, welche sich zu einander wie diese Geschwindigkeiten verhalten, und die Endpunkte C und D zu verbinden: dann hat man offenbar eine gerade Linie, welche deshalb in der windschiefen Fläche liegt, weil sie mit der Erzeugungslinie in einer ihrer Lagen zusammenfällt.

§ 3.

Zieht man durch den Anfangspunkt A eine Parallele AE mit der Leitlinie BD und durch den Anfangspunkt B eine andere BF mit der Leitlinie AC, so sind die Ebenen der Winkel EAC und DBF (die Grundflächen) einander parallel. Macht man nun

$$AG = BH = c',$$
$$AJ = BK = c'',$$

so entsteht ein dreikantiges Prisma AGJKBH. Die Diagonale KG des Parallelogramms GHKJ aber ist die Lage der Erzeugungslinie nach Verlauf der Zeiteinheit.



Durchschneidet man nun den erweiterten prismatischen Raum durch irgend eine Ebene LMNO oder CFDE, welche der Ebene GHKJ parallel ist, so entsteht als Durchschnittsfigur stets ein Parallelogramm, dessen Diagonale (LN oder CD) eine Erzeugungslinie ist, denn offenbar hat man

$$\frac{AL}{BN}=\frac{AC}{BD}=\frac{AG}{BK}=\frac{c'}{c''}.$$

Man kann daher dieselbe windschiefe Fläche ABDC auch auf die Art erzeugen, daß man eine Ebene (Erzeugungsebene z. B. GHKJ), welche zwei beliebig im Raume gegebene gerade Linien (die Leitlinien AC und BD) schneidet, ihrer ursprünglichen Lage parallel fortschiebt, und je zwei zusammengehörige Schneidepunkte (K und G, N und L, C und D ꝛc.) mit einander verbindet. Die Verbindungslinien gehören dann sämmtlich der windschiefen Fläche an.

Anmerkung. Diese Erzeugungsart der windschiefen Fläche ist der im § 1 aufgestellten darin vorzuziehen, daß sie von der Zeit ganz unabhängig ist, und daß es also ganz gleichgültig ist, ob die Bewegung der Erzeugungsebene gleichmäßig geschieht oder nicht. Auch läßt sich auf diese Art für jeden beliebigen Punkt in einer der beiden Leitlinien, z. B. für L, die zugehörige Erzeugungslinie NL herstellen.

§ 4.

Durchschneidet man nun das im § 3 erhaltene Prisma durch irgend eine den beiden Grundflächen parallele Ebene, z. B. PQR, so durchschneidet dieselbe auch sämmtliche Erzeugungslinien, mithin die windschiefe Fläche, und zwar ist die Schneidelinie PS mit der letzteren eine gerade Linie. Um dieses zu erweisen, braucht man nur einen einzigen Schneidepunkt S in der Erzeugungslinie CD mit P (dem Schneidepunkte in AB) zu verbinden, und zu erweisen, daß diese Verbindungslinie ganz in der windschiefen Fläche liegt. Man lege durch den beliebigen Punkt

T in der Linie PS die Ebene OM parallel mit EF, so erhält man das Durchschnitts-Parallelogramm OLMN und die 3 parallelen Durchschnittslinien OL, UV und MN. Die Diagonale NL dieses Parallelogramms ist eine Erzeugungslinie, folglich liegen alle ihre Punkte, also auch ihr Durchschnittspunkt mit UV, den ich T' nennen will, in der windschiefen Fläche.

Man hat nun aus Ähnlichkeit der Dreiecke UT'L und VT'N

$$UT' : VT' = UL : VN = CQ : DR \text{ und ferner hat man}$$

$$UT : VT = SQ : RS = CQ : DR$$

Demnach $UT : VT = UT' : VT'$

Darum fällt der Punkt T mit T' zusammen, liegt in der Erzeugungslinie NL und somit in der windschiefen Fläche. Dasselbe gilt von jedem andern Punkte der Linie PS, wodurch die obige Behauptung gerechtfertigt wird.

Zusatz 1. Legt man die Schneideebene PQS durch den Halbirungspunkt von AB, so folgt, daß alle Erzeugungslinien durch die Durchschnittslinie PS halbirt werden. Mithin liegen die Halbirungspunkte sämmtlicher Erzeugungslinien in einer einzigen geraden Linie, welche den Grundflächen parallel ist.

Zusatz 2. Auch jede beliebige durch AB gelegte Ebene schneidet die windschiefe Fläche in einer geraden Linie. Denn da eine solche Ebene die Diagonale CD schneiden muß, z. B. im Punkte S, so braucht man nur durch eben diesen Punkt eine zweite Ebene parallel mit ACE zu legen, welche die erste in der geraden Linie PS durchschneidet. Die letztere Linie ist zugleich die gewünschte Schneidelinie mit der windschiefen Fläche. Übrigens sieht man, daß auf diese Weise keine neue in der windschiefen Fläche liegende gerade Linien erhalten werden.

§ 5.

Aus den bisherigen Untersuchungen ergeben sich folgende Resultate:

1) Das Stück der windschiefen Fläche, welches von den Leitlinien BD und AC und von den Erzeugungslinien AB und CD begrenzt wird, liegt ganz innerhalb des dreikantigen Prismas ACEDBF, und halbirt dasselbe deshalb, weil es sämmtliche parallele Durchschnittsfiguren CEDF, LMNO rc. halbirt.

2) Zu jeder windschiefen Fläche gehören 2 Systeme von geraden Linien, die in dieser Fläche liegen, und wovon je zwei des einen Systems als Leitlinien, die des andern aber als zugehörige Erzeugungslinien dienen können, und umgekehrt. Denn es ist z. B. einerlei, ob man BD und AC, oder BD und PS als Leitlinien annimmt, sofern nur die zugehörigen Geschwindigkeiten sich zu einander verhalten, wie die Längen dieser Leitlinien selbst; stets wird man, wenn man immer von derselben Erzeugungslinie ausgeht, dieselbe windschiefe Fläche erhalten. Eben so gut konnte man aber auch die Linien AB und CD (oder zwei andere der ehemaligen Erzeugungslinien) als Leitlinien und AC, PS, BD als zugehörige Erzeugungslinien annehmen, wobei die Geschwindigkeiten sich wie die Leitlinien selbst verhalten müssen, um dieselbe windschiefe Fläche zu erzeugen.

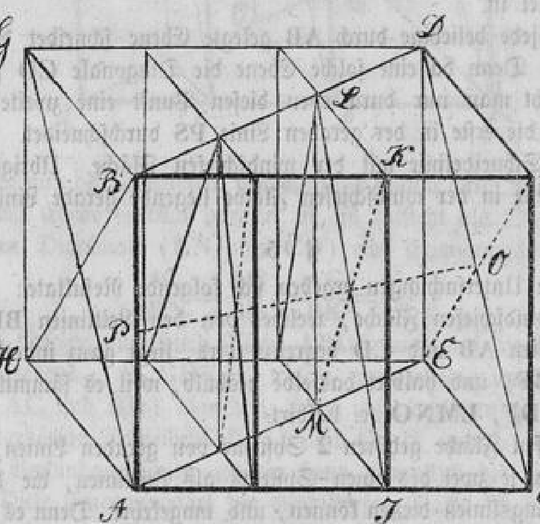
Dabei können in beiden Fällen die Erzeugungslinien sowohl rückwärts als vorwärts bewegt, und somit die windschiefe Fläche nach allen Richtungen hin fortgesetzt werden.

Anmerkung. In dieser Rücksicht hat die windschiefe Fläche Analogie mit der schiefen Kegelfläche, für welche es ebenfalls zwei Systeme von Leitlinien, nämlich das der

Parallelkreise und das der Wechselschnitte, für beide aber nur ein einziges System von Erzeugungslinien giebt. (S. mein Lehrb. d. Geom. II. § 39. Nr. I. Zus. 1 — 5.)

3) Der Schwerpunkt der windschiefen Fläche ergiebt sich, wenn man die Halbirungspunkte der Leitlinien (s. die Fig. zu § 3) **AC** und **BD**, so wie die der Leitlinien **AB** und **CD** verbindet; der Schneidepunkt **T** dieser Verbindungslinien ist der verlangte Schwerpunkt. Denn da die Halbirungspunkte (Schwerpunkte) sämmtlicher Erzeugungslinien, welche zu den Leitlinien **AC** und **BD** gehören, in der einzigen geraden Linie **PS** liegen (§ 4. Zus. 1.), so liegt auch der Schwerpunkt des ganzen windschiefen Flächenstücks **ABDC** in der Linie **PS.** Aus gleichen Gründen muß der Schwerpunkt auch in der Linie **NL** liegen, wenn **N** und **L** die Halbirungspunkte von **AC** und **BD** sind; mithin ist der Schneidepunkt **T** beider Verbindungslinien der Schwerpunkt selbst.

4) Verbindet man bei derselben Construction, wie in § 3 die Durchschnittspunkte der Erzeugungsebene mit den Linien **AE** und **BF**, die man als Leitlinien annimmt, so entsteht gleichzeitig eine zweite windschiefe Fläche **ABFE**, so daß die beiden windschiefen Flächen



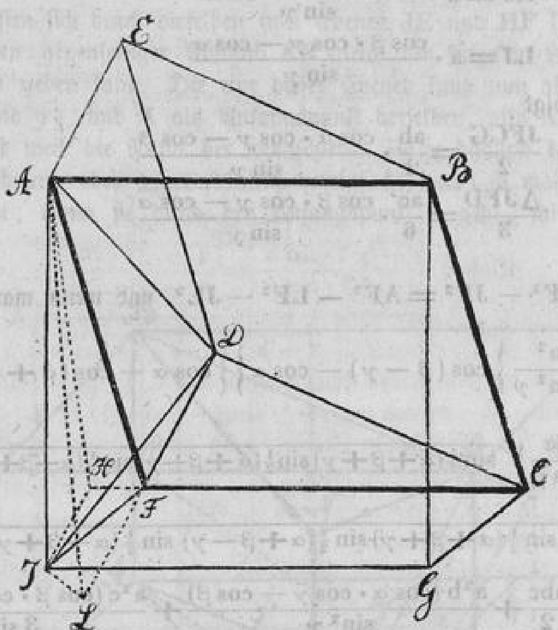
ABDC und **ABFE** sich gegenseitig halbiren, weil ihre zusammengehörigen Erzeugungslinien, wie **CD** und **EF**, **JL** und **MK** 2c. dieses thun. Und da eine jede dieser Flächen das dreikantige Prisma **ACEDBF** halbirt (nach Nr. 1), so theilen sie das ganze in 4 Stücke, wovon je zwei Scheitelfiguren, welche die Kante **OP** gemein haben, einander gleich sind.

5) Ergänzt man das dreikantige Prisma zu dem Parallelepipedon **ACEHGDFB**, so entstehen in dem neu hinzugekommenen Prisma durch eine und dieselbe Bewegung auf ähnliche Art abermals zwei windschiefe Flächen, also im Ganzen vier. Weil nun die beiden dreikantigen Prismen, woraus das Parallelepipedon zusammengesetzt ist, symmetrisch sind, so muß man schließen, daß die auf homologe Art entstandenen windschiefen Flächen **ABDC** und **EDGA**, so wie **AEFB** und **HBDE** ebenfalls symmetrisch sind.

Ferner halbiren je zwei von ihnen, welche eine Leitlinie gemein haben, wie **ABDC** und **HBDE**, das ganze Parallelepipedon. Dies ist also ein Fall, in welchem das Volumen eines Körpers, der von zwei windschiefen Flächen, zwei gleich großen Dreiecken und einem Parallelogramm eingeschlossen wird, sich leicht bestimmen läßt. Ein solcher Körper ist **ACDEHB.**

§ 6.

Aufgabe. Eine windschiefe Fläche **ABCD** nebst dem zugehörigen dreikantigen Prisma **ABEDCF** sind gegeben: man soll das Volumen des Körpers **ABCDJG** bestimmen, welcher durch die windschiefe Fläche **ABCD**, die Grundfläche **CDJG** und durch die **3** Ebenen **ABGJ**, **BGC** und **ADJ** begrenzt wird, welche auf der Grundfläche senkrecht stehen.



Auflösung. Bezeichnet man das gesuchte Volumen durch V, so ist offenbar

$$V = \frac{ABEDCF}{2} + ABCFJG + JFDA,$$

also

$$V = CDF \cdot \frac{AJ}{2} + JFCG \cdot \frac{AJ}{2} + JFD \cdot \frac{AJ}{3},$$

da offenbar **ABCFJG** ein halbes Parallelepipedon ist, und das dreikantige Prisma **ABEDCF** durch die windschiefe Fläche **ABCD** halbirt wird (§ 5 Nr. 1). Demnach ist

$$1) \ldots \quad V = AJ \left\{ \frac{CDF}{2} + \frac{JFCG}{2} + \frac{JFD}{3} \right\}.$$

Nun sei gegeben

$$BC = a, \quad AB = b, \quad FD = c,$$
$$\angle AFC = \alpha, \ \angle AFD = \beta, \ \angle DFC = \gamma: \text{ so ist}$$

das Dreieck $CDF = \frac{bc \cdot \sin\gamma}{2}$, also

2) ..... $\frac{CDF}{2} = \frac{bc \cdot \sin\gamma}{4}$.

Zur Bestimmung der Figuren CFJG und JFD verlängere man die Linien CF und DF, fälle darauf die Perpendikel AH und AL, und verbinde J mit H und mit L; so finden sich

$$HF = -a \cdot \cos\alpha,\ \angle HFL = \gamma \text{ und}$$
$$LF = -a \cdot \cos\beta,\ \angle JHF = \angle JLF = 90^\circ.$$

Aus dem Kreisviereck JHFL erhält man alsdann:

$$HJ = a \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \cos\beta}{\sin\gamma}$$

$$LJ = a \cdot \frac{\cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Daraus folgt

3) ..... $\frac{JFCG}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \cos\beta}{\sin\gamma}$.

4) ..... $\frac{\Delta JFD}{3} = \frac{ac}{6} \cdot \frac{\cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\gamma}$.

Endlich findet sich

$AJ^2 = AF^2 - JF^2 = AF^2 - LF^2 - JL^2$, und wenn man die obigen Werthe substituirt

$$AJ^2 = \frac{a^2}{\sin^2\gamma} \left\{ \cos(\beta - \gamma) - \cos\alpha \right\} \left\{ \cos\alpha - \cos(\beta + \gamma) \right\}$$

also

5) ..... $AJ = \frac{2a}{\sin\gamma} \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)}$

Setzt man nun

$$R = \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)}$$

so wird

$$V = \left\{ \frac{abc}{2} + \frac{a^2 b(\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \cos\beta)}{\sin^2\gamma} + \frac{a^2 c(\cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha)}{3\sin^2\gamma} \right\} \cdot R.$$

Zusatz 1. Sind aber an dem Körper ABCDJG alle Kanten und drei Winkel der Grundfläche gemessen, nämlich:

$BC = a,\ JG = b,\ CG = c,\ CD = d,\ JD = e,\ AD = f,$

$AJ = BG = h$, und $\angle JGC = \delta,\ \angle GCD = \varepsilon,\ \angle DJG = \zeta$, so findet sich:

$$\frac{\Delta CDF}{2} = -\frac{bd}{4} \cdot \sin(\varepsilon + \delta)$$

$$\frac{JFCG}{2} = \frac{bc}{2} \cdot \sin\delta$$

$$\frac{\Delta JDF}{3} = -\frac{ce}{6} \cdot \sin(\delta + \zeta), \text{ also}$$

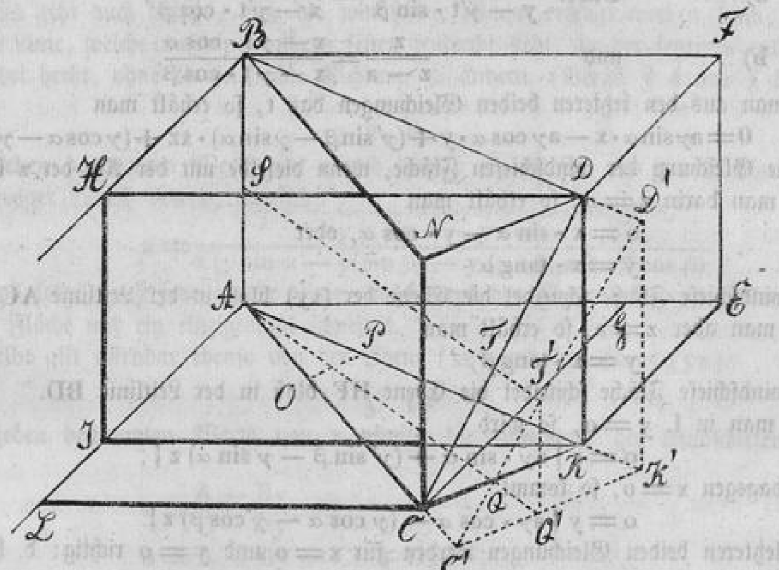
$$V = \frac{h}{2} \left\{ bc \cdot \sin\delta - \frac{bd}{2} \cdot \sin(\varepsilon + \delta) - \frac{ce}{3} \sin(\delta + \zeta) \right\}$$

Zusatz 2. Ist die Grundfläche **CDJG** ein Parallelogramm, so wird $d = b$, $e = c$, $\varepsilon = 180^\circ - \delta$, $\zeta = 180^\circ - \delta$, demnach

$V = \frac{hbc}{2} \sin \delta$, und der Körper selbst wird ein halbes Parallelepipedon, wie es sein muß.

§ 7.

Soweit lassen sich die Eigenschaften der windschiefen Fläche auf elementare Art deutlich machen; dagegen dürfte man zur Untersuchung ihrer übrigen Eigenthümlichkeiten, so wie ihrer Quadratur die Hülfe der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung wohl nicht entbehren können. Es seien demnach wieder **AC** und **BD** die beiden Leitlinien der windschiefen Fläche **ABDC**, so lassen sich durch dieselben zwei Ebenen **JE** und **HF** legen, welche einander parallel sind und deren gegenseitiger Abstand **AB** gleich der kürzesten Linie ist, welche man zwischen **AC** und **BD** ziehen kann. Die eine dieser Ebenen kann nun als Ebene der senkrechten Coordinaten (x und y), und **A** als Anfangspunkt derselben, also **AB** als Axe der z genommen werden. Und weil die Natur der windschiefen Fläche dadurch keine wesentliche Änderung erleidet, die Rechnung aber außerordentlich vereinfacht wird: so mag die Erzeugungslinie der windschiefen Fläche, wenn sie durch den Anfangspunkt **A** geht, mit der Axe **AB** selbst zusammenfallen.



Die Erzeugungslinie mag sich nun von ihrer ursprünglichen Lage **AB** den Leitlinien **AC** und **BD** entlang so bewegen, daß sie nach Verlauf von t Secunden in die Lage **CD** gekommen ist: bezeichnet man alsdann

AB mit a, $\angle$ **CAE** mit α, $\angle$ **DBF** mit β, die Geschwindigkeit der Bewegung auf der Leitlinie

AC mit γ, auf BD mit γ':

so ergeben sich
$$\left.\begin{aligned} DH &= KJ = \gamma' t \cdot \cos\beta, \\ DF &= KE = \gamma' t \cdot \sin\beta, \\ DK &= AB = a, \end{aligned}\right\} \text{als Coordinaten des Punktes D;}$$
$$\left.\begin{aligned} CL &= AG = \gamma t \cdot \cos\alpha, \\ CG &= AL = \gamma t \cdot \sin\alpha, \\ &\text{und } 0 \end{aligned}\right\} \text{als Coordinaten des Punktes C.}$$

Sind nun die Gleichungen der Linie CD
$$y = Ax + B, \text{ und}$$
$$z = A'x + B',$$
so erhält man, weil CD durch C gehen soll:
$$y - \gamma t \cdot \sin\alpha = A(x - \gamma t \cdot \cos\alpha),$$
$$z = A'(x - \gamma t \cdot \cos\alpha);$$
und weil dieselbe Linie durch den Punkt D gehen soll
$$y - \gamma' t \cdot \sin\beta = A(x - \gamma' t \cdot \cos\beta),$$
$$z - a = A'(x - \gamma' t \cdot \cos\beta).$$

a) ..... Daher $\dfrac{y - \gamma t \cdot \sin\alpha}{y - \gamma' t \cdot \sin\beta} = \dfrac{x - \gamma t \cdot \cos\alpha}{x - \gamma' t \cdot \cos\beta}$,

b) ..... und $\dfrac{z}{z - a} = \dfrac{x - \gamma t \cdot \cos\alpha}{x - \gamma' t \cdot \cos\beta}$.

Eliminirt man aus den letzteren beiden Gleichungen das t, so erhält man

I. ..... $0 = a\gamma \sin\alpha \cdot x - a\gamma \cos\alpha \cdot y + (\gamma' \sin\beta - \gamma \sin\alpha) \cdot xz + (\gamma \cos\alpha - \gamma' \cos\beta) \cdot yz.$

Dies ist die Gleichung der windschiefen Fläche, wenn dieselbe mit der Axe der z beginnt.

Setzt man darin $z = o$, so erhält man
$$o = x \cdot \sin\alpha - y \cdot \cos\alpha, \text{ oder}$$
$$y = x \cdot \tang\alpha$$
d. h. die windschiefe Fläche schneidet die Ebene der (xy) bloß in der Leitlinie AC.

Setzt man aber $z = a$, so erhält man
$$y = x \cdot \tang\beta,$$
d. h. die windschiefe Fläche schneidet die Ebene HF bloß in der Leitlinie BD.

Setzt man in I. $y = o$, so wird
$$o = x \left\{ a\gamma \cdot \sin\alpha + (\gamma' \sin\beta - \gamma \sin\alpha) z \right\};$$
setzt man dagegen $x = o$, so kommt
$$o = y \left\{ a\gamma \cdot \cos\alpha - (\gamma \cos\alpha - \gamma' \cos\beta) z \right\}.$$

Die letzteren beiden Gleichungen werden für $x = o$ und $y = o$ richtig: d. h. die windschiefe Fläche schneidet die Ebene der (yz) und der (xz) in der Axe der z.

Jene Gleichungen werden aber auch richtig, wenn man setzt
$$z = \frac{a\gamma \cdot \sin\alpha}{\gamma \sin\alpha - \gamma' \sin\beta}, \text{ und}$$
$$z = \frac{a\gamma \cdot \cos\alpha}{\gamma \cos\alpha - \gamma' \cos\beta}.$$

d. h. die windschiefe Fläche schneidet die Ebene der (xz) auch noch in einer geraden Linie, welche der Axe der x parallel ist, und zwar in einem Abstande $= a \cdot \frac{\gamma \sin \alpha}{\gamma \sin \alpha - \gamma' \sin \beta}$, die Ebene der (yz) dagegen in einer geraden Linie, welche der Axe der y parallel ist, in einem Abstande $= a \cdot \frac{\gamma \cos \alpha}{\gamma \cos \alpha - \gamma' \cos \beta}$.

§ 8.

Jetzt entsteht die Frage, ob außer den bereits gefundenen noch mehrere gerade Linien in der windschiefen Fläche angetroffen werden.

Ordnet man die Gleichung I. wie folgt:

$$o = [a\gamma \sin \alpha - (\gamma \sin \alpha - \gamma' \sin \beta) z] \cdot x - [a\gamma \cos \alpha - (\gamma \cos \alpha - \gamma' \cos \beta) z] \cdot y,$$

so ergiebt sich hieraus, daß für jeden bestimmten Werth von z eine gerade Linie als Durchschnitt der windschiefen Fläche mit einer Ebene existirt, welche mit der Ebene der (xy) parallel ist, und welche gerade Linie durch die Axe der z geht. (cf. § 4.)

Der Winkel φ, welchen diese gerade Linie mit der Axe der x oder einer derselben Parallelen bildet, oder endlich, der Neigungswinkel dieser Linie gegen die Ebene der (xz) ergiebt sich aus der Gleichung

$$\tang \varphi = \frac{a\gamma \sin \alpha - (\gamma \sin \alpha - \gamma' \sin \beta) z}{a\gamma \cos \alpha - (\gamma \cos \alpha - \gamma' \cos \beta) z}.$$

Hieraus geht auch hervor, daß die windschiefe Fläche erzeugt werden kann, indem man eine gerade Linie, welche auf einer andern festen senkrecht steht, an der letzteren entlang schiebt, und sie dabei dreht, ohne die senkrechte Richtung zu ändern. (Vergl. § 4 und § 5.)

§ 9.

Für jeden bestimmten Werth von x und von y ergiebt sich aus der Gleichung I. (§ 7) nur ein einziger Werth von z, nämlich:

$$z = \frac{a\gamma (x \sin \alpha - y \cos \alpha)}{x (\gamma \sin \alpha - \gamma' \sin \beta) - y (\gamma \cos \alpha - \gamma' \cos \beta)}.$$

Hieraus folgt, daß jede gerade Linie, welche auf der Ebene der (xy) senkrecht steht, die windschiefe Fläche nur ein einzigesmal schneidet.

Dasselbe gilt offenbar ebenso von der Ebene (xz) und der Ebene (yz).

§ 10.

Für jeden bestimmten Werth von x nimmt die Gleichung der windschiefen Fläche die Form an

$$z = \frac{A - By}{C - Dy}, \text{ oder}$$

$$o = A - By - Cz + Dyz.$$

Hieraus erkennt man, daß jede mit der Ebene der (yz) parallele Ebene die windschiefe Fläche in einer Hyperbel durchschneidet. (cf. Ohm Analyt. Geometrie § 68 Pag. 223 Zus.)

Nicht anders ist es mit denjenigen Ebenen, welche mit der Ebene der (xz) parallel sind, während diejenigen Ebenen, welche mit der Ebene der (xy) parallel sind, die windschiefe Fläche in geraden Linien durchschneiden. (Vergl. § 8.)

§ 11.

Man durchschneide nunmehr die windschiefe Fläche durch eine beliebige Ebene, welche durch die Gleichung $\quad o = A + Bx + Cy + Dz$

dargestellt ist.

Sucht man diejenigen Coordinaten, welche den beiden Gleichungen, nämlich

$$\begin{cases} o = A + Bx + Cy + Dz \text{ und} \\ o = a\gamma \sin\alpha \cdot x - a\gamma \cos\alpha \cdot y - (\gamma \sin\alpha - \gamma' \sin\beta) \cdot xz + (\gamma \cos\alpha - \gamma' \cos\beta) \cdot yz \end{cases}$$

zugleich Genüge leisten: so eliminire man zuerst y, und erhält

$$o = D(\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta)\,z^2 - [B(\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta) + C(\gamma\sin\alpha - \gamma'\sin\beta')]\,xz$$
$$+ [A(\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta) - Da\gamma\cos\alpha]\,z - [Ba\gamma\cos\alpha + Ca\gamma\sin\alpha]\,x - Aa\gamma\cos\alpha.$$

Diese Gleichung stellt die Projection der gesuchten Durchschnittslinie auf die Ebene der (xz) dar, und ist im Allgemeinen ein Kegelschnitt. Ganz ähnlich ist die Projection auf die Ebene der (yz) ein solcher, nämlich:

$$o = D(\gamma\sin\alpha - \gamma'\sin\beta)\,z^2 + [B(\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta) + C(\gamma\sin\alpha - \gamma'\sin\beta')]\,yz$$
$$+ [A(\gamma\sin\alpha - \gamma'\sin\beta) - Da\gamma\sin\alpha]\,z - [Ba\gamma\cos\alpha + Ca\gamma\sin\alpha]\,y - Aa\gamma\sin\alpha.$$

Soll die Durchschnittslinie eine gerade sein, so dürfen die Gleichungen für diese Projectionen durchaus den ersten Grad nicht übersteigen, und also muß entweder z einen constanten Werth haben, d. h. die schneidende Ebene muß der Ebene der (xy) parallel sein; oder es muß sein:

1) $o = D(\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta) \cdot z + [B(\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta) + C(\gamma\sin\alpha - \gamma'\sin\beta)] \cdot x,$

2) $o = D(\gamma\sin\alpha - \gamma'\sin\beta) \cdot z + [B(\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta) + C(\gamma\sin\alpha - \gamma'\sin\beta)] \cdot y,$

3) $o = [A(\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta) - Da\gamma\cos\alpha] \cdot z - a\gamma(B\cos\alpha + C\sin\alpha) \cdot x - Aa\gamma\cos\alpha,$

4) $o = [A(\gamma\sin\alpha - \gamma'\sin\beta) - Da\gamma\sin\alpha] \cdot z - a\gamma(B\cos\alpha + C\sin\alpha) \cdot y - Aa\gamma\sin\alpha.$

Eliminirt man aus diesen 4 Gleichungen die Coordinaten x, y, z, so bleibt als Bedingungsgleichung für die Constanten der schneidenden Ebene, damit der Durchschnitt eine gerade Linie werde, übrig:

$$o = AB(\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta) + AC(\gamma\sin\alpha - \gamma'\sin\beta) + BDa\gamma\cos\alpha + CDa\gamma\sin\alpha.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn

1) $A = o$ und $D = o$.

d. h. wenn die Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und auf der Ebene der (xy) senkrecht steht, also durch die Axe der z gelegt ist; (cf. § 4. Zus. 2.)

2) wenn $B = o$ und $C = o$.

d. h. wenn z den constanten Werth $-\frac{A}{D}$ hat, oder wenn die schneidende Ebene der Axe der (xy) parallel ist; (cf. § 4.)

3) wenn $\frac{B}{C} = -\tang\alpha = -\tang\beta$, was nur erfüllt werden kann, wenn die beiden Leitlinien AC und BD parallel sind, also die windschiefe Fläche eine Ebene geworden ist;

4) wenn $\frac{\gamma}{\gamma'} \cdot \frac{B\cos\alpha + C\sin\alpha}{B\cos\beta + C\sin\beta} = \frac{A}{A + aD}$,

dann werden aber die Coordinaten der Durchschnittslinie zugleich die Gleichungen a und b § 7 der Erzeugungslinie identisch machen, also ist alsdann die Ebene durch eine der Erzeugungslinien gelegt worden.

Auf andere Art läßt sich die obige Bedingungsgleichung nicht richtig machen, folglich giebt es in der windschiefen Fläche keine andere geraden Linien, als die bereits genannten.

§ 12.

Um einen von windschiefen Flächen begrenzten Körper zu kubiren, lege man zuvörderst durch die Leitlinie BD und ihre Projection AK auf die Ebene der (xy) eine Ebene, desgleichen durch die Erzeugungslinie CD und den Perpendikel DK, so soll der von den drei Ebenen ABDK, CDK und ACK, und von der windschiefen Fläche ABDC begrenzte Körper bestimmt werden.

Zu diesem Zwecke hat man in dem rechtwinkeligen Dreiecke CDK

$$DK = a$$
$$CD^2 = CK^2 + a^2.$$

Nun ist aber

$$CK^2 = [\gamma t \sin\alpha - \gamma' t \sin\beta]^2 + [\gamma t \cos\alpha - \gamma' t \cos\beta]^2$$

also

$$CD^2 = a^2 + t^2 [\gamma \sin\alpha - \gamma' \sin\beta]^2 + t^2 [\gamma\cos\alpha - \gamma'\cos\beta]^2.$$
$$= a^2 + t^2 [\gamma^2 + \gamma'^2 - 2\gamma\gamma' \cos(\alpha - \beta)].$$

Der Winkel CAK aber ist gleich $(\alpha - \beta)$; schneidet man nun γ auf AC und γ' auf AK ab, nämlich AO und AP, und zieht OP, welches g heißen mag, so ist

$$OP^2 = g^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 - 2\gamma\gamma' \cos(\alpha - \beta),$$

so daß man hat

$$CD^2 = g^2 t^2 + a^2$$
$$CK = gt \text{ und}$$
$$\Delta CDK = \frac{agt}{2}.$$

Wächst nun t um dt, so wächst AC um $CC' = \gamma \cdot dt$, BD um $DD' = \gamma' \cdot dt$ und AK desgleichen um $KK' = \gamma' \cdot dt$, der Körper ABDKC aber um das Stück CDKK'D'C', welches sich als ein dreikantiges Prisma von der Grundfläche CDK ansehen läßt.

Um zu dieser Grundfläche die zugehörige Höhe zu gewinnen, fälle man noch in dem Dreieck ACK die Höhe AQ, und verlängere sie bis Q', so steht AQ zugleich senkrecht auf der Ebene CDK, und das Differenzial von AQ, nämlich QQ', ist die gewünschte Höhe des Prisma's CDKK'D'C'.

Es ist aber

$$CK \cdot AQ = AC \cdot AK \cdot \sin(\alpha - \beta),$$
$$AQ = \frac{\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta) \cdot t}{g},$$

mithin

$$QQ' = dAQ = \frac{\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta)}{g} \cdot dt.$$

Bezeichnet man nun das Volumen des Körpers ABDCK durch V, so ist

$$CDKK'D'C' = dV = \Delta CDK \cdot dAQ$$
$$dV = \frac{a\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta)}{2} \cdot t \cdot dt$$
$$V = \frac{a\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta)}{2} \int t \cdot dt + \text{Const.}$$

$$V = \frac{a\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta)}{4} \cdot t^2 + \text{Const.}$$

Für $t = o$ wird auch $V = o$, also Const $= o$, und also

$$V = \frac{1}{4} \cdot a\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta) \cdot t^2.$$

Errichtet man über dem Dreiecke ACK das gerade Prisma ACKDBN, so ist dessen Inhalt $a \cdot \Delta ACK$ oder $\frac{1}{2} a\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta) \cdot t^2$, also doppelt so groß, als das gefundene Volumen V, ein Resultat, welches schon oben § 5 auf elementarem Wege gefunden wurde.

Sind statt der Geschwindigkeiten γ und γ' die Leitlinien $AC = b$ und $BD = c$ gegeben, so wird

$$V = \frac{1}{4} abc \sin(\alpha - \beta).$$

Dieses Resultat fällt mit dem in § 6 zusammen, wenn man dort die Kanten AF, BC und ED senkrecht zur Grundfläche CDF annimmt.

§ 13.

Nun bliebe nur noch die Größe der windschiefen Fläche (O) zu bestimmen übrig. Zu diesem Zwecke kann die Figur CC'D'D (§ 7) dienen, welche das Differenzial der windschiefen Fläche ABDC ist, und als ein ebenes Viereck angesehen werden darf. Ohne erheblichen Fehler dürfte dasselbe sogar als ein Parallelogramm (wenigstens wenn die Geschwindigkeiten γ und γ' nicht allzusehr verschieden sind) von der Grundlinie $CD = \sqrt{g^2t^2 + a^2}$ und von der Höhe

$$\frac{CC' + DD'}{2} = \frac{\gamma + \gamma'}{2} \cdot dt$$

angesehen werden, so daß man hätte

$$CC'D'D = dO = \frac{\gamma + \gamma'}{2} \cdot \sqrt{g^2t^2 + a^2} \cdot dt,$$

somit

$$O = \frac{\gamma + \gamma'}{2} \cdot \int \sqrt{g^2t^2 + a^2} \cdot dt + \text{Const.}$$

Führt man die Integration aus, so erhält man

$$O = \frac{(\gamma + \gamma')}{4} \left\{ t \cdot \sqrt{a^2 + g^2t^2} + \frac{a^2}{g} \cdot \log\left(\sqrt{a^2 + g^2t^2} - gt\right) \right\} + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten hat man für $t = o$ auch $O = o$, demnach

$$o = \frac{(\gamma + \gamma')}{4} \cdot \frac{a^2}{g} \cdot \log a + \text{Const}$$

also

$$O = \frac{(\gamma + \gamma')}{4} \left\{ t\sqrt{a^2 + g^2t^2} + \frac{a^2}{g} \cdot \log \left\{ \frac{\sqrt{a^2 + g^2t^2} - gt}{2} \right\} \right.$$

§ 14.

Will man die im vorigen § gemachte Annahme nicht gelten lassen, daß nämlich die Höhe des Parallelogramms CC'D'D gleich $\frac{\gamma + \gamma'}{2} \cdot dt$ gesetzt werde, so kann man sich die erforderliche Höhe auf folgende Art verschaffen.

Man lege durch die Linien AQ und AB eine Ebene, AQTS, so steht diese sowohl auf der Grundfläche ACK, als auch auf der Ebene CDK senkrecht, und schneidet überdies die windschiefe Fläche in der geraden Linie ST (§ 4 Zusatz 2), welche der Linie AQ parallel ist, und somit auf der Ebene CDK, also auch auf der Erzeugungslinie CD senkrecht steht. Dieselbe Linie ST steht aber nicht bloß auf dieser einen, sondern auf sämmtlichen Erzeugungslinien senkrecht, somit auch auf C'D'.

Das Differenzial dieser Linie TT' ist gleich QQ' und kann nun als Höhe in dem Parallelogramm CDD'C' angesehen werden.

Somit hat man

$$dO = CD \cdot QQ'$$

$$= \frac{\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta)}{g} \cdot \sqrt{a^2 + g^2t^2} \cdot dt$$

$$O = \frac{\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta)}{g} \int \sqrt{a^2 + g^2t^2} \cdot dt + \text{Const.}$$

$$O = \frac{\gamma\gamma' \sin(\alpha - \beta)}{2g} \left\{ t \cdot \sqrt{a^2 + g^2t^2} + \frac{a^2}{g} \cdot \log \left[\frac{\sqrt{a^2 + g^2t^2} - gt}{a} \right] \right\}$$