Einer Aufgabe, die Herr Professor Mayer im mathematischen Seminare der Universität Leipzig stellte, verdankt Verfasser die erste Anregung zu nachfolgenden Untersuchungen. Die Aufgabe verlangte, den Punkt kleinster Summe der absoluten Abstände von drei im Raume sich rechtwinklig kreuzenden Geraden zu bestimmen. Ihre Erweiterung führte auf n Gerade im Raume und hier vor allem auf die Frage, ob die Abstandssumme auch für n Gerade stets nur einen einzigen Minimal- und nie einen endlichen Maximalwert besitzt. Bei Feststellung der Kriterien, durch die diese Frage entschieden wird, erforderte besonders der Fall von n Geraden ein und derselben Ebene eingehende Behandlung. Daher beschäftigt sich der erste Teil mit ihm und mit mehreren andern Unterfällen, während der zweite die oben gestellte Frage bejaht und ein dritter n sich kreuzende Gerade behandelt.

Seinem hochgeschätzten Lehrer, Herrn Professor Mayer in Leipzig, sowie den verehrten Herren Professor Dedekind in Braunschweig und Dr. Heymann in Chemnitz fühlt sich Verfasser für gütige Erteilung verschiedener Auskünfte zu besonderem Danke verpflichtet.

Der absolute Abstand eines beweglichen Punktes P von einer festen Geraden Γ kann beliebig wachsen und andrerseits bis zur Grenze Null herabsinken, die stets dann und nur dann erreicht wird, wenn P auf Γ selbst rückt. Sind also mehrere Gerade $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ gegeben, so kann durch Lageänderung des Punktes P die Summe seiner absoluten Abstände von diesen Geraden (kurz gesagt, seine Abstandssumme)[1]) zwar beliebig groſs, aber nicht beliebig klein, jedenfalls nicht kleiner als Null gemacht werden. Es muſs also einen unteren Grenzwert geben, den die Abstandssumme wohl erreichen, unter den sie aber nicht herabsinken kann.

Nehmen wir nun zwei einander kreuzende Gerade an, so wird der Grenzwert erreicht für alle Punkte ihres gemeinsamen Lotes, die zwischen beiden Geraden liegen. Alle diese Punkte besitzen gleichgroſse Abstandssummen, die aber kleiner sind, als die Abstandssummen aller übrigen Raumpunkte.

Nehmen wir andrerseits zwei einander parallele Gerade an, so wird der Grenzwert erreicht für alle Punkte des ebenen Streifens, der zwischen beiden Geraden liegt, während alle andren beliebig in derselben Ebene oder im Raume gelegenen Punkte gröſsere Abstandssummen, d. h. gröſsere Summen ihrer absoluten Abstände von jenen Geraden, besitzen.

[1]) Unter der Abstandssumme eines Punktes wird künftighin immer die Summe seiner absoluten Abstände von den gegebenen Geraden verstanden, wie denn auch überall da, wo dies nicht besonders erwähnt ist, alle Abstände absolut zu nehmen sind. Die Abstandssumme wird symbolisch mit Σr_h bezeichnet werden.

Schneiden sich die beiden Geraden in der Endlichkeit, so wird der Grenzwert erreicht für ihren Schnittpunkt.

Wir erkennen also aus diesen drei einfachsten Fällen, daſs den unteren Grenzwert der Abstandssumme nicht nur einzelne Punkte, sondern auch Punkte einer Linie oder einer Fläche besitzen können. Diesen unteren Grenzwert wollen wir den Minimalwert der Abstandssumme nennen, wobei wir uns allerdings bewuſst sind, hin und wieder das Wort Minimum in einem weiteren Sinne zu benutzen, als dies sonst üblich ist. Wir stellen uns nun die

Aufgabe: „Gegeben sind n Gerade $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ in beliebiger Lage im Raume. Es sollen diejenigen Punkte, für welche die Summe ihrer absoluten Abstände $r_1, r_2, \ldots r_n$ von jenen Geraden ihren Minimalwert besitzt, gefunden und soll zugleich gezeigt werden, daſs endliche Maximalwerte nicht vorkommen."

I. Unterfälle.

Es sind dies die folgenden:

A) Alle Geraden schneiden einander in ein und demselben in der Endlichkeit gelegenen Punkte.

B) Alle Geraden laufen einander parallel.

C) Alle Geraden besitzen ein und dieselbe Gerade als gemeinsames Lot.

D) Alle Geraden liegen in ein und derselben Ebene.

Die Fälle können zum Teil ineinander übergreifen, z. B., wenn lauter parallele Gerade vorhanden sind, die zugleich alle in derselben Ebene liegen, so daſs sie auch gemeinsame Lote besitzen.

A) Alle Geraden Γ_h schneiden einander in ein und demselben, in der Endlichkeit gelegenen Punkte A.

Nehmen wir auf einem beliebig von A aus gelegten Strahle AX den Punkt P beliebig an, so gilt für den absoluten Abstand r_h des Punktes P von der Geraden Γ_h

$$r_h = AP \cdot \sin\,(AX,\ \Gamma_h),$$

wo AP und $\sin\,(AX, \Gamma_h)$ beide positiv zu nehmen sind. Nun kann AX höchstens mit einer von den Geraden Γ_h zusammenfallen, so daſs höchstens einer von den Sinus null werden kann, während alle andren sicher gröſser als null sind. Also ist die Abstandssumme des Punktes P

$$\Sigma r_h = AP \cdot \sum_1^n{}_h \sin\,(AX,\ \Gamma_h) > 0.$$

Lassen wir nun P auf AX von A wegrücken, so wird AP gröſser, während die Sinus alle ungeändert bleiben; also vergröſsert sich die Abstandssumme. Rückt umgekehrt P auf AX nach A zu, so wird die Abstandssumme immer kleiner, bis sie in A selbst mit AP den Wert null erreicht. Ein Punkt P auſserhalb A kann also unmöglich ausgezeichneter Punkt[1]) sein, da in seiner Nähe Punkte sowohl mit gröſserer als mit kleinerer Abstandssumme, als sie P besitzt, gelegen sind. Daher ist der Schnittpunkt A der Geraden Γ_h einziger und absoluter Minimalpunkt.

B) Alle Geraden Γ_h laufen einander parallel (schneiden einander in ein und demselben unendlich weit gelegenen Punkte).

---

[1]) d. h. Maximal- oder Minimalpunkt.