

Schneiden sich die beiden Geraden in der Endlichkeit, so wird der Grenzwert erreicht für ihren Schnittpunkt.

Wir erkennen also aus diesen drei einfachsten Fällen, daß den unteren Grenzwert der Abstandssumme nicht nur einzelne Punkte, sondern auch Punkte einer Linie oder einer Fläche besitzen können. Diesen unteren Grenzwert wollen wir den Minimalwert der Abstandssumme nennen, wobei wir uns allerdings bewußt sind, hin und wieder das Wort Minimum in einem weiteren Sinne zu benutzen, als dies sonst üblich ist. Wir stellen uns nun die

**Aufgabe:** „Gegeben sind  $n$  Gerade  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  in beliebiger Lage im Raume. Es sollen diejenigen Punkte, für welche die Summe ihrer absoluten Abstände  $r_1, r_2, \dots, r_n$  von jenen Geraden ihren Minimalwert besitzt, gefunden und soll zugleich gezeigt werden, daß endliche Maximalwerte nicht vorkommen.“

### I. Unterfälle.

Es sind dies die folgenden:

- A) Alle Geraden schneiden einander in ein und demselben in der Endlichkeit gelegenen Punkte.
- B) Alle Geraden laufen einander parallel.
- C) Alle Geraden besitzen ein und dieselbe Gerade als gemeinsames Lot.
- D) Alle Geraden liegen in ein und derselben Ebene.

Die Fälle können zum Teil ineinander übergreifen, z. B., wenn lauter parallele Gerade vorhanden sind, die zugleich alle in derselben Ebene liegen, so daß sie auch gemeinsame Lote besitzen.

A) Alle Geraden  $\Gamma_h$  schneiden einander in ein und demselben, in der Endlichkeit gelegenen Punkte  $A$ .

Nehmen wir auf einem beliebig von  $A$  aus gelegten Strahle  $AX$  den Punkt  $P$  beliebig an, so gilt für den absoluten Abstand  $r_h$  des Punktes  $P$  von der Geraden  $\Gamma_h$

$$r_h = AP \cdot \sin (AX, \Gamma_h),$$

wo  $AP$  und  $\sin (AX, \Gamma_h)$  beide positiv zu nehmen sind. Nun kann  $AX$  höchstens mit einer von den Geraden  $\Gamma_h$  zusammenfallen, so daß höchstens einer von den Sinus null werden kann, während alle andren sicher größer als null sind. Also ist die Abstandssumme des Punktes  $P$

$$\sum r_h = AP \cdot \sum_1^n \sin (AX, \Gamma_h) > 0.$$

Lassen wir nun  $P$  auf  $AX$  von  $A$  wegrücken, so wird  $AP$  größer, während die Sinus alle ungeändert bleiben; also vergrößert sich die Abstandssumme. Rückt umgekehrt  $P$  auf  $AX$  nach  $A$  zu, so wird die Abstandssumme immer kleiner, bis sie in  $A$  selbst mit  $AP$  den Wert null erreicht. Ein Punkt  $P$  außerhalb  $A$  kann also unmöglich ausgezeichnete Punkt<sup>1)</sup> sein, da in seiner Nähe Punkte sowohl mit größerer als mit kleinerer Abstandssumme, als sie  $P$  besitzt, gelegen sind. Daher ist der Schnittpunkt  $A$  der Geraden  $\Gamma_h$  einziger und absoluter Minimalpunkt.

B) Alle Geraden  $\Gamma_h$  laufen einander parallel (schneiden einander in ein und demselben unendlich weit gelegenen Punkte).

<sup>1)</sup> d. h. Maximal- oder Minimalpunkt.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt  $P$  im Raume an und legen durch ihn die Gerade  $MN$  parallel zu den  $\Gamma_h$ , so besitzt jeder andere Punkt  $Q$  auf  $MN$  dieselbe Abstandssumme wie  $P$ , da für  $P$  und  $Q$  die einzelnen  $r_h$  dieselbe Länge besitzen. Es tritt also hier ein ausgezeichnete Wert für alle Punkte einer unendlichen Geraden ein. Wir legen nun durch  $P$  eine Ebene  $\varepsilon$  senkrecht zu den  $\Gamma_h$ ; sie möge  $\Gamma_h$  in  $A_h$  schneiden. Dann sind die  $PA_h$  die von  $P$  auf die  $\Gamma_h$  gefällten Lote. Soll also die Abstandssumme für  $P$  ein Minimum werden, so brauchen wir  $P$  in  $\varepsilon$  nur so zu bestimmen, daß die Summe seiner Abstände von den Punkten  $A_h$  ein Minimum wird. Haben wir einen solchen Punkt  $P_\mu$ <sup>1)</sup> bestimmt, so löst die durch ihn parallel zu den  $\Gamma_h$  gelegte Gerade  $\Gamma_\mu$  unsere Aufgabe.

Aus früheren Untersuchungen<sup>2)</sup> ist bekannt, daß es nur einen einzigen Punkt, bezw. Punkte einer einzigen Strecke giebt, deren Abstandssumme von den  $A_h$  ein Minimum wird, daß aber Maximalpunkte nicht vorkommen; und zwar ist eine Minimalstrecke nur dann möglich, wenn alle Punkte  $A_h$  in ein und derselben Geraden liegen und in gerader Anzahl vorhanden sind, wobei sie dann zwischen den mittelsten Punkten enthalten ist.

Also giebt es auch nur eine einzige Minimalgerade  $G_\mu$ , bezw. einen einzigen ebenen Minimalstreifen, und zwar letzteren nur dann, wenn alle parallelen Geraden in ein und derselben Ebene liegen und in gerader Anzahl vorhanden sind; dann liegt der Minimalstreifen zwischen den beiden mittleren Geraden.

C) Die Geraden  $\Gamma_h$  besitzen ein und dieselbe Gerade  $\Gamma$ , von der jede  $\Gamma_h$  in  $A_h$  geschnitten wird, als gemeinsames Lot.

Es giebt in diesem Falle wiederum nur Minimalpunkte und zwar auf  $\Gamma$ . Zum Zwecke des Beweises fällen wir von einem beliebig gelegenen Punkt  $P$  das Lot  $PC_h$  auf die Ebene  $(\Gamma, \Gamma_h)$  und von  $C_h$  das Lot  $C_hB_h$  auf  $\Gamma_h$  und das Lot  $CB$  auf  $\Gamma$ . Alsdann ist bekanntlich auch  $PB_h$  Lot auf  $\Gamma_h$  und  $PB$  Lot auf  $\Gamma$ ,  $B$  also für alle  $\Gamma_h$  derselbe Punkt auf  $\Gamma$ . Da nun  $A_hBC_hB_h$  ein ebenes Viereck mit drei Rechten ist, so ist  $BA_h = C_hB_h$ . Da aber  $B_hC_hP$  auch ein Rechter ist, so ist  $PB_h > C_hB_h$  und höchstens dann gleich  $C_hB_h$ , wenn  $P$  in die Ebene  $(\Gamma, \Gamma_h)$  fällt.  $P$  hat also von  $\Gamma_h$  größeren und nur im letzteren Falle denselben Abstand, als der Fußpunkt  $B$  des von  $P$  auf  $\Gamma$  gefällten Lotes.

Nehmen wir nun an, daß nicht alle  $\Gamma_h$  einander parallel sind (welcher Fall schon in B) erledigt ist), so kann  $P$  nicht gleichzeitig in alle Ebenen  $(\Gamma, \Gamma_h)$  fallen. Also ist die Abstandssumme für  $P$  größer als für  $B$ , so daß nur auf  $\Gamma$  absolute Minimalpunkte liegen können. Nehmen wir dann  $Q$  auf  $BP$  an und fällen  $QE_h \perp$  Ebene  $(\Gamma, \Gamma_h)$  und  $E_hD_h \perp \Gamma_h$ , so daß auch  $QD_h \perp \Gamma_h$  ist, so gilt  $QD_h \geq PB_h$ , je nachdem  $Q$  zwischen  $B$  und  $P$  oder über  $P$  hinaus liegt ( $D_hE_h = B_hC_h$ ,  $QE_h \geq PC_h$ ,  $QE_hD_h = PC_hB_h = R$ , also  $QD_h \geq PB_h$ ). Geht also ein beweglicher Punkt auf  $BP$  von  $B$  nach der Unendlichkeit, so nimmt seine Abstandssumme beständig zu. Also kann außerhalb  $\Gamma$  kein ausgezeichnete Punkt liegen. Nehmen wir nun einen Punkt  $P$  auf  $\Gamma$  an, so ist die Summe seiner absoluten Abstände von den  $\Gamma_h$  dargestellt durch die Summe seiner absoluten Abstände von den  $A_h$ , da ja alle  $\Gamma_h$  auf  $\Gamma$  senkrecht stehen. Es gilt also,  $P$  in  $\Gamma$  so zu bestimmen, daß die Summe seiner absoluten Abstände von  $n$  Punkten  $A_h$  dieser Geraden ein Minimum wird. Wie bekannt, fällt der Minimalpunkt bei ungerader Anzahl der gegebenen Punkte, also auch der gegebenen Geraden, auf

<sup>1)</sup> Der Index  $\mu$  bei Punkten, Geraden, Abständen u. s. w. soll künftighin immer andeuten, daß ein Minimalpunkt in Frage kommt.

<sup>2)</sup> Simon, Über den Punkt kleinster Entfernungssumme und die Flächen  $\Sigma r_n = \text{const.}$ ; Dissertation, Halle 1887. Dieser Dissertation verdankt Verfasser dieses viele Anregungen.

den mittelsten Punkt  $A_{\frac{n+1}{2}}$ . Bei gerader Anzahl der Punkte  $A_h$ , also auch der Geraden  $\Gamma_h$ , tritt dagegen das Minimum für alle Punkte der mittelsten Strecke auf  $\Gamma_h$ ,  $A_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}+1}$ , ein. Maximalpunkte giebt es auch hier nicht.

D) Alle Geraden  $\Gamma_h$  liegen in ein und derselben Ebene  $\varepsilon$ .

Man kann nachweisen, daß nur Minimalpunkte vorhanden sind und zwar nur in  $\varepsilon$ . Wir fällen dazu von einem beliebigen Punkte  $P$  außerhalb  $\varepsilon$  das Lot auf  $\varepsilon$  und von seinem Fußpunkte  $B$  aus die Lote  $BB_h$  auf die Geraden  $\Gamma_h$ ; alsdann sind auch die  $PB_h$  Lote der  $\Gamma_h$ . Also stellt  $PB_h$  den Abstand des Punktes  $P$ ,  $BB_h$  den des Punktes  $B$  von  $\Gamma_h$  dar. Da  $PBB_h = 90^\circ$  ist, so ist  $PB_h > BB_h$ . Also ist die Abstandssumme für  $P$  größer als für  $B$ .

Liegt weiter  $Q$  beliebig auf  $BP$ , so ist sein Abstand von  $\Gamma_h$   $QB_h$ . Dann ist  $QB_h \leq PB_h$ , je nachdem  $Q$  zwischen  $B$  und  $P$  oder über  $P$  hinausliegt. Bewegt sich also ein Punkt von  $B$  aus auf dem Lote der Ebene  $\varepsilon$ , so wächst seine Abstandssumme beständig, ohne je wieder abzunehmen. Außerhalb  $\varepsilon$  kann also kein ausgezeichnete Punkt und in  $\varepsilon$  selbst können nur Minimalpunkte liegen. Danach kann es, solange wir Punkte des ganzen Raumes betrachten, in  $\varepsilon$  nur eine einzige Stelle geben, deren Punkte den Minimalwert der Abstandssumme besitzen.

Für die weiteren Betrachtungen fassen wir also nur Punkte der Ebene  $\varepsilon$  ins Auge. Hierbei dürfen wir aber nicht ohne weiteres annehmen, daß, solange wir uns auf Punkte der Ebene  $\varepsilon$  beschränken, nur ein einziges Minimum existiert. Wir werden vielmehr auch für die Punkte der Ebene  $\varepsilon$  den Beweis noch besonders zu führen haben.

Wir beziehen nun in  $\varepsilon$  die Geraden  $\Gamma_h$  auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, indem wir die Hessesche Normalform benutzen:

$$(1) \quad x \cos \alpha_h + y \sin \alpha_h - p_h = 0, \quad p_h \geq 0.$$

Dann ist der absolute Abstand irgend eines Punktes  $P = x, y$  der Ebene  $\varepsilon$  von  $\Gamma_h$  bestimmt durch

$$(2) \quad r_h = |p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h| \equiv |p_h|,$$

wo das Einschließen in  $| |$  andeutet, daß der absolute Wert der betreffenden Größe zu nehmen ist, während  $p_h$  selbst positiv, null oder negativ ist, je nachdem  $P$  mit dem Koordinatenanfange auf derselben Seite von  $\Gamma_h$  liegt oder auf  $\Gamma_h$  fällt oder vom Koordinatenanfange aus jenseits  $\Gamma_h$  gelegen ist. Die Abstandssumme des Punktes  $P = x, y$  ist also

$$(3) \quad \Sigma r_h \equiv \sum_1^n |p_h|.$$

Sie soll zu einem Minimum gemacht werden, wobei also, wie oben gesagt, nur Punkte der Ebene  $\varepsilon$  untereinander hinsichtlich ihrer Abstandssumme verglichen werden.

Bei stetiger Änderung von  $x$  und  $y$  ändert sich  $p_h$  auch stetig. Da also  $p_h$  in der Endlichkeit von positiven zu negativen Werten nur durch null übergehen kann, so ändert sich auch  $|p_h|$  mit  $x$  und  $y$  stetig. Dabei kann es nur dann null werden, wenn  $P$  auf  $\Gamma_h$  rückt, bleibt aber sonst größer als null. Also muß es auch in  $\varepsilon$  wenigstens eine Minimalstelle für die Summe aller  $r_h$  geben. Diese Stelle aus (3) durch Differentiation zu finden, ist unmöglich, da (3) eine Funktion ersten Grades in  $x$  und  $y$  ist. Es führt jedoch ein anderer Weg zum Ziele.

Lassen wir den Punkt  $P$  auf  $\varepsilon$  beliebig wandern, so ändert jedesmal, wenn er die Gerade  $\Gamma_h$  überschreitet,  $p_h$  durch null hindurch sein Zeichen. War also vorher  $p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h$  positiv, so wird nach dem Überschreiten von  $\Gamma_h$   $x \cos \alpha_h + y \sin \alpha_h - p_h$  positiv und umgekehrt.



Da keine Gerade zur  $x$  Axe parallel läuft, so ist hierin kein einziger  $(\cos \alpha_h) = 0$ , also alle  $C_h$  und damit auch  $C > 0$ . — Wir können nun statt (7) unter Benutzung von (6) schreiben:

$$(8) \quad \begin{cases} \Sigma_1 r_h \equiv S - x_1 C; \\ \Sigma_2 r_h \equiv S - x_2 C + 2(x_2 - x_1) C_1; \\ \Sigma_k r_h \equiv S - x_k C + 2(x_k - x_1) C_1 + \dots + 2(x_k - x_{k-1}) C_{k-1}; \\ \Sigma_{k+1} r_h \equiv S - x_{k+1} C + 2(x_{k+1} - x_1) C_1 + \dots + 2(x_{k+1} - x_{k-1}) C_{k-1} + 2(x_{k+1} - x_k) C_k; \\ \Sigma_m r_h \equiv S - x_m C + 2(x_m - x_1) C_1 + \dots + 2(x_m - x_{m-1}) C_{m-1}. \end{cases}$$

Subtrahieren wir nun  $\Sigma_{k+1} r_h$  von  $\Sigma_k r_h$  so, daß wir die untereinander stehenden Glieder subtrahieren, so folgt

$$(9) \quad \Sigma_k r_h - \Sigma_{k+1} r_h \equiv (x_{k+1} - x_k) (C - 2 \sum_1^k C_k) \equiv (x_{k+1} - x_k) A_k.$$

Nach unseren früheren Festsetzungen ist aber  $x_{k+1} > x_k$ , also  $x_{k+1} - x_k > 0$ . Daher ist das Vorzeichen von  $\Sigma_k r_h - \Sigma_{k+1} r_h$  stets gleich dem Vorzeichen der Differenz

$$(10) \quad A_k \equiv C - 2 \sum_1^k C_k.$$

Ausführlich geschrieben giebt das

$$(11) \quad \begin{cases} A_1 \equiv C - 2C_1; \\ A_2 \equiv C - 2C_1 - 2C_2; \\ \text{endlich} \\ A_{m-1} \equiv C - 2C_1 - 2C_2 - \dots - 2C_{m-1}. \end{cases}$$

Da nun alle  $C_h$  positiv sind, so ist hiernach

$$(11') \quad A_1 > A_2 > \dots > A_{m-1}.$$

Ist also  $A_1 < 0$ , so sind auch alle anderen  $A_h < 0$ ; das lehrt nach (9)

$$\Sigma_1 r_h < \Sigma_2 r_h < \dots < \Sigma_m r_h;$$

d. h., gehen wir durch alle Punkte  $A_h$  von  $A_1$  bis  $A_m$ , so nimmt die Abstandssumme beständig zu.

Ist  $A_{m-1} > 0$ , so sind auch alle anderen  $A_h > 0$ , also nach (9)

$$\Sigma_1 r_h > \Sigma_2 r_h > \dots > \Sigma_m r_h.$$

Dann nimmt die Abstandssumme von  $A_1$  bis  $A_m$  in den Punkten  $A_h$  beständig ab.

Ist  $A_{k-1} > 0$ , aber  $A_k < 0$ , so sind auch  $A_1, A_2, \dots, A_{k-2} > 0$ , aber  $A_{k+1}, \dots, A_{m-1} < 0$ .

Dann ist also

$$\Sigma_1 r_h > \Sigma_2 r_h > \dots > \Sigma_{k-1} r_h > \Sigma_k r_h < \Sigma_{k+1} r_h < \dots < \Sigma_m r_h;$$

d. h., die Abstandssumme nimmt in den Punkten  $A_h$  von  $A_1$  bis  $A_k$  ab und dann wieder zu bis  $A_m$ .

Ist endlich  $A_k = 0$ , so sind  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1} > 0$ , aber  $A_{k+1}, \dots, A_{m-1} < 0$ . Das giebt

$$\Sigma_1 r_h > \Sigma_2 r_h > \dots > \Sigma_{k-1} r_h > \Sigma_k r_h = \Sigma_{k+1} r_h < \Sigma_{k+2} r_h < \dots < \Sigma_m r_h.$$

Die Abstandssumme nimmt also in den Punkten  $A_h$  von  $A_1$  bis  $A_k$  ab, bleibt sich in  $A_k$  und  $A_{k+1}$  gleich und nimmt dann wieder zu bis  $A_m$ .

Da diese vier Fälle alle Möglichkeiten von (11) erschöpfen, so erkennen wir, daß die Abstandssumme, wenn man die Punkte  $A_h$  auf der  $x$  Axe vom ersten zum letzten oder umgekehrt durchläuft, niemals aus dem Zunehmen wieder ins Abnehmen übergehen kann. Es giebt also unter den Punkten  $A_h$  entweder einen mit kleinster Abstandssumme oder aber zwei mit gleicher Abstandssumme, die aber kleiner ist als die Abstandssumme der übrigen. Auch giebt es weder Maxima, noch relative Minima, noch zwei Punkte  $A_i$  auf einer und derselben Seite des einen, bez. der zwei

Minimalpunkte, die dieselbe Abstandssumme besitzen. (Diese Bemerkung erlangt später ihre Bedeutung.)

Wir wollen nun einen Punkt zwischen  $A_k$  und  $A_{k+1}$  in Betracht ziehen, der wieder  $A_l$  heißen möge. Seine Koordinaten sind

$$(12) \quad x_l = x_k + \mu(x_{k+1} - x_k), \quad \text{wo } 0 < \mu < 1; \quad y_l = 0.$$

Also ist

$$x_1 < \dots < x_k < x_l < x_{k+1} < \dots < x_m.$$

Daher ist für  $A_l$  nach (5)

$$\Sigma_l r_h \equiv - (x_1 - x_l) C_1 - \dots - (x_k - x_l) C_k + (x_{k+1} - x_l) C_{k+1} + \dots + (x_m - x_l) C_m;$$

also in Rücksicht auf (12)

$$\begin{aligned} \Sigma_l r_h \equiv & [- (x_1 - x_k) C_1 - \dots + (x_k - x_k) C_k + (x_{k+1} - x_k) C_{k+1} + \dots + (x_m - x_k) C_m] \\ & + \mu(x_{k+1} - x_k)(C_1 + \dots + C_k - C_{k+1} - \dots - C_m); \end{aligned}$$

nach (6) und (7) giebt das

$$\Sigma_l r_h \equiv \Sigma_k r_h - \mu(x_{k+1} - x_k)(C - 2 \sum_1^k C_k).$$

Nehmen wir endlich Rücksicht auf (9), so können wir schreiben

$$(13) \quad \Sigma_l r_h \equiv \Sigma_k r_h + \mu(\Sigma_{k+1} r_h - \Sigma_k r_h).$$

Lassen wir jetzt  $\mu$  stetig wachsen von 0 bis 1, d. h., verschieben wir  $A_l$  von  $A_k$  bis  $A_{k+1}$ , so wächst auch  $\Sigma_l r_h$  stetig von  $\Sigma_k r_h$  bis  $\Sigma_{k+1} r_h$  oder nimmt von  $\Sigma_k r_h$  bis  $\Sigma_{k+1} r_h$  stetig ab, je nachdem  $\Sigma_k r_h$  kleiner oder größer als  $\Sigma_{k+1} r_h$  ist; ist aber  $\Sigma_k r_h = \Sigma_{k+1} r_h$ , so bleibt  $\Sigma_l r_h$  von  $A_k$  bis  $A_{k+1}$  eben so groß. Die Abstandssumme kann also zwischen  $A_k$  und  $A_{k+1}$  keinesfalls vom Fallen zum Steigen oder umgekehrt übergehen, d. h. zwischen  $A_k$  und  $A_{k+1}$  kann es kein Minimum oder Maximum der Abstandssumme auf der  $x$  Axe geben.

Lassen wir nun  $A_l$  von  $-\infty$  bis  $A_1$  laufen, so ist  $x_l < x_1$ , also

$$\begin{aligned} \Sigma_l r_h &\equiv (x_1 - x_l) C_1 + (x_2 - x_l) C_2 + \dots + (x_m - x_l) C_m; \\ \Sigma_l r_h &\equiv S - x_l C. \end{aligned}$$

Nach (8) ist also

$$(13') \quad \Sigma_l r_h - \Sigma_1 r_h \equiv (x_1 - x_l) C,$$

also, da  $C > 0$  und  $x_1 - x_l > 0$  ist, auch  $\Sigma_l r_h - \Sigma_1 r_h > 0$ , also  $\Sigma_l r_h > \Sigma_1 r_h$  und zwar um so größer, je mehr sich  $x_l$  dem Werte  $-\infty$  nähert, d. h., je weiter sich  $A_l$  von  $x_1$  nach  $-\infty$  hin entfernt. Auf dem Strahle  $(A_1, -\infty)$  nimmt also die Abstandssumme in der Richtung nach  $-\infty$  beständig zu.

Für einen Punkt  $A_l$ , der von  $A_m$  nach  $+\infty$  zu liegt, ist

$$(13'') \quad \Sigma_l r_h - \Sigma_m r_h \equiv (x_l - x_m) C,$$

also, da für ihn  $x_l > x_m$  ist,  $\Sigma_l r_h > \Sigma_m r_h$ , so dass auch von  $A_m$  nach  $+\infty$  zu die Abstandssumme beständig wächst (was an sich klar ist, da man die ganze Gerade in zwei verschiedenen Richtungen durchlaufen kann und beidemale dieselben Eigenschaften eintreten müssen).

Die Formeln (13), (13') und (13'') liefern zugleich eine einfache graphische Darstellung der Ab- und Zunahme der Abstandssumme, wenn sich ein Punkt längs der  $x$  Axe bewegt. Errichten wir nämlich die Abstandssumme  $\Sigma_l r_h$  im zugehörigen Punkte  $A_l$  als positive Ordinate senkrecht zur Ebene  $\varepsilon$ , setzen also  $x_l = \Sigma_l r_h$ , so lehren die Formeln, daß die Endpunkte der Ordinaten zwischen  $A_k$  und  $A_{k+1}$  eine Strecke, zwischen  $-\infty$  und  $A_1$  und von  $A_m$  bis  $+\infty$  aber einen Strahl ausfüllen und zwar so, daß von  $A_1$ , bez.  $A_m$  an beide Strahlen nach der Unendlichkeit zu ansteigen.

Die Tangenten der Neigungswinkel dieser Strecken, bez. Strahlen gegen die  $+x$  Axe ergeben sich in einfacher Weise aus (9), (13') und (13'') nach der Formel  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{z' - z''}{x' - x''}$ . Liegen die Fußpunkte der Endordinaten in  $-\infty$  und  $A_1$ ,  $A_1$  und  $A_2$ ,  $\dots$   $A_{k-1}$  und  $A_k$ ,  $A_k$  und  $A_{k+1}$ ,  $\dots$   $A_{m-1}$  und  $A_m$ ,  $A_m$  und  $+\infty$ , so sind die Werte der Tangenten

$$-C, -A_1, \dots -A_{k-1}, -A_k, \dots -A_m, C.$$

Nach (11) und (11') nehmen also diese Werte beständig zu ( $C$  und alle  $C_h$  sind ja  $> 0$ ), d. h. keine zwei von den Strecken oder Strahlen, aus denen der Ort  $z_t = \sum_1 r_h$  besteht, haben dieselbe Neigung gegen die  $+x$  Axe. Dieser Ort stellt sich also dar als eine gebrochene Linie, die für  $x = -\infty$  aus  $+\infty$  herabsteigend einen niedrigsten Punkt, bez. eine niedrigste der  $x$  Axe parallele Strecke erreicht, ohne die  $x$  Axe zu überschreiten, und dann wieder ansteigend für  $x = +\infty$  in  $+\infty$  ausläuft.

Alles bisherige gibt uns nun den

**Satz I:** „Es mögen  $n$  Gerade  $\Gamma_h$  einer Ebene von einer beliebigen Geraden  $\Gamma$  in den Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , die in dieser Reihenfolge auf  $\Gamma$  liegen, geschnitten werden. Bewegt sich nun ein Punkt von der Unendlichkeit her immer in demselben Sinne nach  $A_1$ , weiter nach  $A_2, A_3$  u. s. f. bis  $A_m$  und schließlich in demselben Sinne von  $A_m$  weiter bis in die Unendlichkeit, so nimmt die Summe der absoluten Abstände des bewegten Punktes von den  $n$  Geraden bis  $A_1$  beständig ab und von  $A_m$  an beständig zu. Von  $A_1$  bis  $A_m$  erreicht die Abstandssumme ihren kleinsten Wert in einem einzigen von den Punkten  $A_h$  (der im Grenzfalle auf  $A_1$  oder auf  $A_m$  fallen kann) oder für alle Punkte einer Strecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten  $A_h$  und  $A_{h+1}$  (im Grenzfalle  $A_1$  und  $A_2$  oder  $A_{m-1}$  und  $A_m$ ), nimmt aber im übrigen von  $A_1$  bis  $A_h$  auch beständig ab und von  $A_h$ , bez.  $A_{h+1}$  bis  $A_m$  beständig zu. Auf jeder solchen Geraden gibt es also nur einen einzigen Minimalpunkt, bez. eine einzige Minimalstrecke, und zwar liegt der Punkt, bez. liegen die Endpunkte dieser Strecke stets auf den gegebenen Geraden  $\Gamma_h$ .“

Fällt  $\Gamma$  mit einer von den Geraden  $\Gamma_h$  zusammen, so ändert sich nichts an dem Satze. Es kann also in der Ebene  $\varepsilon$  nur einen einzigen Punkt, bez. eine einzige Strecke oder eine einzige Fläche geben, für den, bez. für deren Punkte die Abstandssumme ihr Minimum erreicht. Zugleich muß die Fläche durchaus lückenlos sein und darf keine einspringenden Randteile besitzen. Denn gäbe es zwei Minimalpunkte, -strecken oder -flächen, bez. eine Minimalfläche<sup>1)</sup>, die einspringende Randteile besäße oder im Innern unterbrochen wäre durch Punkte mit größerer Abstandssumme, so ließen sich stets in die Ebene Gerade legen, die mindestens zwei Minimalpunkte enthielten, zwischen denen keine Minimalpunkte vorhanden wären. Beim stetigen Übergange auf der Geraden von einem Punkte zum anderen müßte also die Abstandssumme, da sie sich ja stetig ändert, vom Zunehmen wiederum zum Abnehmen übergehen, was, wie oben bewiesen, unmöglich ist. Vergleichen wir also auch nur die Punkte der Ebene  $\varepsilon$  unter einander hinsichtlich der Abstandssumme, so giebt es nur eine einzige Minimal- und keine Maximalstelle.

Es gilt nun, die Lage der Minimalstelle näher festzusetzen. Zu dem Ende betrachten wir eins von den Flächenstücken, in die die Ebene  $\varepsilon$  durch die Geraden  $\Gamma_h$  geteilt wird, in deren Inneres also keine Gerade  $\Gamma_h$  eintritt. Sehen wir von dem Falle ab, in dem alle  $\Gamma_h$  einander parallel sind (es ist schon in B) erledigt), so finden wir stets in der Ebene  $\varepsilon$  eine Reihe geschlossener oder nicht

<sup>1)</sup> Das Wort „Minimalfläche“ und „Minimalstrecke“ ist hier wie später in einem anderen Sinne, als sonst üblich, gebraucht. Doch werde der Kürze wegen der Gebrauch entschuldigt!

geschlossener Vielecke. Keines von ihnen kann einen einspringenden Winkel besitzen, da alle  $I_h$  unbegrenzt sind. Nehmen wir also auf der Umrandung eines solchen Flächenstückes, das wir  $V$  nennen wollen, zwei beliebige Punkte  $P$  und  $Q$  an, so muß die Strecke  $PQ$  entweder ganz im Innern oder auf einer Grenzgeraden von  $V$  liegen.

Liegt nun  $PQ$  im Innern von  $V$ , so muß die Abstandssumme, wenn ein beweglicher Punkt von  $P$  nach  $Q$  wandert, da hierbei keine Gerade  $I_h$  durchquert wird, nach Satz I entweder beständig zu- oder beständig abnehmen oder konstant bleiben. Auf keinen Fall aber kann sie zwischen  $P$  und  $Q$  vom Fallen zum Steigen übergehen. Ein einzelner Minimalpunkt kann also nicht im Inneren eines Gebietes  $V$  vorkommen, d. h., ein einzelner Minimalpunkt kann nur auf einer von den Geraden  $I_h$  liegen.

Wir nehmen nun an, es gebe nur einen einzelnen Minimalpunkt  $P_\mu$  und er liege auf der Geraden  $I_k$ . Dann kann er nach Satz I nur auf einen von den Punkten fallen, wo  $I_k$  eine oder mehrere Gerade  $I_h$  trifft. Also kann ein einzelner Minimalpunkt nur unter den Punkten vorkommen, wo die  $I_h$  einander schneiden.

Nehmen wir andrerseits an, die Abstandssumme solle für alle Punkte einer Strecke ihren Minimalwert erreichen, so müssen nach Satz I wenigstens deren Endpunkte  $P_\mu$  und  $Q_\mu$  auf zwei Gerade  $I_k$  und  $I_l$  fallen. Ist nun  $R_\mu$  ein Punkt zwischen  $P_\mu$  und  $Q_\mu$  und legen wir durch  $R_\mu$  eine beliebige Gerade  $I$ , die nicht mit  $P_\mu Q_\mu$  zusammenfällt, so muß  $R_\mu$  auch auf  $I$  Minimalpunkt sein; nach Satz I muß also auch  $R_\mu$  auf eine von den Geraden  $I_h$  fallen. Da dies für alle Punkte zwischen  $I_k$  und  $I_l$  gilt, so muß also die Minimalstrecke  $I_k I_l$  ganz auf einer von den Geraden  $I_h$  liegen. Dabei muß sie nach Satz I zwischen zwei aufeinander folgende Schnittpunkte dieser Geraden mit den anderen Geraden  $I_h$  fallen.

Existiert schließlich eine Minimalfläche, d. h., sind für alle Punkte eines Stückes der Ebene die Abstandssummen einander gleich und kleiner als die Abstandssummen aller übrigen Punkte der Ebene  $\varepsilon$ , so muß, wie früher gezeigt, diese Fläche lückenlos sein und darf keine einspringenden Stellen an ihrer Umrandung besitzen.

Eine Verbindungsstrecke zweier beliebigen Punkte auf der Umrandung der Minimalfläche liegt also entweder ganz im Innern oder ganz auf der Umrandung der Fläche. Legen wir nun eine Gerade in der Ebene  $\varepsilon$  so, daß sie die Minimalfläche schneidet, so muß die Strecke, die in die Minimalfläche fällt, zugleich auf der Geraden Minimalstrecke sein. Also müssen die Endpunkte einer jeden Strecke, die quer durch die Minimalfläche gezogen ist, nach Satz I auf gewisse Gerade  $I_h$  fallen, d. h. die Minimalfläche muß rings von Geraden  $I_h$  umschlossen sein. Zugleich darf keine Gerade  $I_h$  sie durchqueren. Denn wäre dies der Fall, zerfiel also die Minimalfläche durch die Gerade  $I_k$  in zwei Teile  $V_\mu$  und  $V_\mu'$ , so müßte die Abstandssumme, wenn sie in  $V_\mu$  konstant ist, nach Satz I in  $V_\mu'$  zunehmen und umgekehrt, was gegen die Voraussetzung ist, daß die Abstandssumme in der ganzen Minimalfläche konstant sein soll.

Sehen wir nun auch hier von dem Falle ab, wo alle  $I_h$  einander parallel laufen, so wird es in der Ebene  $\varepsilon$  kein Gebiet geben können, das nur von zwei parallelen Geraden begrenzt ist. Also wird jede Gerade, die durch irgend ein Gebiet von  $\varepsilon$  gelegt wird, die Umrandung wenigstens einmal treffen müssen. Ist nun das betreffende Gebiet  $V$  nur halb begrenzt, so kann man in ihm stets Gerade  $I$  ziehen, von denen die Umrandung nur in einem einzigen Punkte  $P$  getroffen wird, die aber weiter das Gebiet bis zur Unendlichkeit durchqueren, ohne je wieder auf die Umrandung zu stoßen. Nach Satz I muß aber in diesem Falle auf  $I$  die Abstandssumme von  $P$  bis in die Unendlichkeit

fortwährend zunehmen, kann also innerhalb des Gebietes nicht einen konstanten Minimalwert erreichen. Also kann keines von den halbgeschlossenen Gebieten ein Gebiet konstanter Minimalsumme sein.

Wir nehmen nun weiter an, das vollständig (von gewissen der Geraden  $\Gamma_h$ ) begrenzte Gebiet  $V$  der Ebene  $\varepsilon$  besitze in drei Eckpunkten  $A_1, A_2, A_3$  dieselbe Abstandssumme  $\Sigma$ . Da nun durch  $V$  keine von den Geraden  $\Gamma_h$  läuft, so gehen zwischen  $A_1$  und  $A_2, A_1$  und  $A_3, A_2$  und  $A_3$  keine weiteren Geraden  $\Gamma_h$  hindurch. Also ist nach Satz I auch für alle Punkte der Strecken  $A_1A_2, A_1A_3$  und  $A_2A_3$ , mithin auch im ganzen Innern des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  der Wert der Abstandssumme gleich  $\Sigma$ . Dann muß aber der Wert überallhin im Gebiete  $V$  bis an die Grenzen ebenfalls den Wert  $\Sigma$  besitzen, wie oben bewiesen, d. h., das ganze Gebiet  $V$  ist Minimalfläche.

Ist dagegen  $V$  nicht Minimalfläche, so können höchstens zwei Eckpunkte gleiche Abstandssummen besitzen; denn sonst würden ihre Verbindungsstrecken Strecken konstanter Summe, also, da sie innerhalb  $V$  lägen,  $V$  Fläche konstanter Summe sein müssen, was gegen die Voraussetzung ist.

Fassen wir nun die bisherigen Ergebnisse zusammen, so erhalten wir den

**Satz II:** „Will man für  $n$  Gerade einer Ebene, die nicht alle einander parallel laufen, das Minimum der Abstandssumme aufsuchen, so bestimme man den Wert der Summe für sämtliche Schnittpunkte der Geraden. Ist unter deren Werten ein kleinster enthalten, so stellt er den Minimalwert und der betreffende Punkt den Minimalpunkt dar. Sind unter den Werten zwei und nur zwei gleich, aber kleiner als alle anderen (was nur möglich ist, wenn es Endpunkte einer von den Teilstrecken auf den Geraden  $\Gamma_h$  sind), so ist dieser Wert wiederum Minimalwert und die betreffende Strecke Minimalstrecke. Sind endlich unter den Werten mehr als zwei gleich, aber kleiner als alle anderen (was nur möglich ist, wenn die betreffenden Punkte Ecken eines der geschlossenen Flächenstücke und zwar sämtliche Ecken sind), so stellt diese Fläche die Minimalstelle und der betreffende Wert den Minimalwert der Abstandssumme dar. — Maxima oder relative Minima bestehen nicht.“

Die Minimalstelle ist hiernach, sobald mindestens eine von den Geraden  $\Gamma_h$  die anderen schneidet, stets endlich begrenzt. Sind dagegen alle Geraden  $\Gamma_h$  in der Ebene  $\varepsilon$  einander parallel, so ist sie, wie in B) gezeigt wurde, unbegrenzt. Jedenfalls wächst auf einem Strahle, der von der Minimalstelle ausläuft, ohne in ihr zu verlaufen, die Abstandssumme vom Minimalwerte  $\Sigma_\mu r_h$  stetig und unbegrenzt, je weiter man sich von der Minimalstelle entfernt. Daher muß es auf jedem solchen Strahle einen und nur einen Punkt geben, in welchem die Abstandssumme den Wert  $\mathcal{S} > \Sigma_\mu r_h$  erreicht. Es liegt nun noch die Frage nahe: Wie ordnen sich die Punkte, die ein und dieselbe beliebige Abstandssumme  $\mathcal{S}$  besitzen, in der Ebene  $\varepsilon$ ?

In dem Falle, wo die Geraden  $\Gamma_h$  sämtlich einander parallel sind, liegen die Punkte mit  $\Sigma r_h \equiv \mathcal{S}$  für  $\mathcal{S} > \Sigma_\mu r_h$  beiderseits von der Minimalstelle auf zwei Geraden, die den Geraden  $\Gamma_h$  parallel laufen, und zwar, je größer  $\mathcal{S}$  ist, in um so größerem Abstände von der Minimalstelle. Das folgt aus der Eigenschaft paralleler Geraden, überall denselben Abstand zu besitzen. Der Ort  $\Sigma r_h \equiv \mathcal{S}$  ist also hier nicht geschlossen.

Betrachten wir weiter den Fall, wo nicht alle  $\Gamma_h$  einander parallel laufen, so ist nach Satz II die Minimalstelle endlich begrenzt. Ein beliebiger Strahl, der von der Minimalstelle ausgeht, kann dann nicht allen  $\Gamma_h$  parallel sein; er muß also wenigstens gegen eine Gerade so verlaufen, daß er sich nach der Unendlichkeit zu unendlich weit von ihr entfernt. Daher muß es auf jedem solchen Strahle in der Endlichkeit einen Punkt mit der Abstandssumme  $\mathcal{S}$  geben. Da wir aber von der endlich begrenzten Minimalstelle (die im Grenzfalle ein Punkt ist) aus unendlich viele Strahlen ziehen können,

die gegen einander divergent verlaufen, so müssen um die Minimalstelle herum unendlich viele Punkte mit der Abstandssumme  $\mathfrak{S}$  liegen. Da nun die Anzahl der Gebiete, in die die Ebene  $\varepsilon$  durch die  $\Gamma_h$  zerlegt wird, endlich ist, so muß wenigstens in einem von diesen Gebieten mehr als ein Punkt mit der Abstandssumme  $\mathfrak{S}$  liegen.

Wir nehmen nun an, innerhalb des Gebietes  $V$  gebe es zwei Punkte  $K = x_k, y_k$  und  $L = x_l, y_l$ , für welche die Abstandssumme denselben Wert  $\mathfrak{S}$  annimmt, so daß also<sup>1)</sup>

$$(14) \quad \sum_k r_h \equiv \sum_l r_h \equiv \mathfrak{S}$$

ist. Nun ist nach Formel (2), Seite 4,

$$\sum r_h \equiv \sum_1^n |p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h|,$$

oder, wenn  $\varepsilon_h$  denjenigen Wert  $+1$  oder  $-1$  bedeutet, den man als Faktor zu  $p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h$  setzen muß, damit ein positiver Wert herauskommt,

$$\sum r_h \equiv \sum_1^n \varepsilon_h (p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h).$$

Also gilt nach (14)

$$(15) \quad \sum_1^n \varepsilon_h (p_h - x_k \cos \alpha_h - y_k \sin \alpha_h) \equiv \sum_1^n \varepsilon_h (p_h - x_l \cos \alpha_h - y_l \sin \alpha_h) \equiv \mathfrak{S}.$$

Da  $K$  und  $L$  in demselben Gebiete  $V$  der Ebene, also in gleicher Lage gegen  $\Gamma_h$ , vom Koordinatenanfange aus gesehen, liegen, so hat in beiden Summen der Formel (15)  $\varepsilon_h$  denselben Wert und behält ihn auch weiter für alle anderen Punkte innerhalb oder auf der Umrandung des Gebietes  $V$ .

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt  $M = x_m, y_m$  auf der Geraden  $KL$ . Seine Koordinaten sind bei variablen Parametern  $z$  und  $\lambda$  darstellbar durch

$$(16) \quad x_m = \frac{z x_k + \lambda x_l}{z + \lambda}, \quad y_m = \frac{z y_k + \lambda y_l}{z + \lambda}.$$

Daher ist seine Abstandssumme

$$(17) \quad \sum_m r_h \equiv \sum_1^n \varepsilon_h \left( p_h - \frac{z x_k + \lambda x_l}{z + \lambda} \cos \alpha_h - \frac{z y_k + \lambda y_l}{z + \lambda} \sin \alpha_h \right),$$

wobei  $\varepsilon_h$  dieselben Werte wie in (15) behält, solange  $M$  das Gebiet  $V$  nicht verläßt. Nehmen wir also an, daß  $M$  nicht außerhalb  $V$  liegt, also ein Punkt der innerhalb  $V$  gelegenen Strecke der Geraden  $KL$  ist, so folgt aus (17) wegen

$$p_h \equiv \frac{z p_h + \lambda p_h}{z + \lambda}$$

nach (15)

$$(18) \quad \begin{aligned} \sum_m r_h &\equiv \frac{z}{z + \lambda} \sum_1^n \varepsilon_h (p_h - x_k \cos \alpha_h - y_k \sin \alpha_h) \\ &\quad + \frac{\lambda}{z + \lambda} \sum_1^n \varepsilon_h (p_h - x_l \cos \alpha_h - y_l \sin \alpha_h); \\ \sum_m r_h &\equiv \frac{z}{z + \lambda} \mathfrak{S} + \frac{\lambda}{z + \lambda} \mathfrak{S}; \\ \sum_m r_h &\equiv \mathfrak{S}. \end{aligned}$$

Für jeden Punkt  $M$  auf  $KL$ , der innerhalb  $V$  liegt, besitzt also die Abstandssumme denselben Wert  $\mathfrak{S}$  wie in  $K$  und  $L$ . Da  $\mathfrak{S}$  nicht Minimalwert ist, können zugleich andere Punkte

<sup>1)</sup> Der Index beim Summenzeichen  $\Sigma$  deutet wieder an, für welchen Punkt die Abstandssumme zu bilden ist.

innerhalb  $V$  diese Summe nicht besitzen. Nach Satz I müssen dagegen alle Punkte auf der Verlängerung von  $KL$  über  $V$  hinaus, da auf der ganzen Strecke  $KL$  innerhalb  $V$  die Abstandssumme konstant ist, größere Abstandssummen besitzen, die unbegrenzt wachsen, je weiter man von  $V$  weggeht. In den Nachbargebieten von  $V$  müssen also Punkte mit der Abstandssumme  $\mathcal{S}$  zwischen der Minimalstelle und  $KL$  liegen. Verfolgen wir also von  $V$  aus die Punkte mit der Abstandssumme  $\mathcal{S}$ , so werden sie auf einer gebrochenen Linie mit lauter nach innen hohlen Winkeln liegen, von der die Minimalstelle umschlossen wird.<sup>1)</sup> Diese Linie kann die Minimalstelle nur einmal umlaufen, da ja auf jedem von dieser Stelle ausgehenden Strahle der Wert  $\mathcal{S}$  nur einmal erreicht wird, und muß sich schließen, da man den Wert  $\mathcal{S}$  von der Minimalstelle aus nach allen Richtungen hin in endlicher Entfernung antrifft. Sie stellt also die Umrandung eines geradseitigen Vielecks dar. Innerhalb des Vielecks liegen dann Punkte mit Abstandssummen, die zwischen dem Minimalwerte und  $\mathcal{S}$  liegen, außerhalb solche, die größere Abstandssummen besitzen. Es fragt sich nun weiter: wie verhalten sich die Örter verschiedener Abstandssummen  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$  gegenseitig?

Dafs keine Strecke mit  $\Sigma r_h \equiv \mathcal{S}$  von einer Strecke  $\Sigma r_h \equiv \mathcal{S}'$  innerhalb  $V$  geschnitten werden kann, ist ohne weiteres klar, da ja sonst im Schnittpunkte die Abstandssumme zwei verschiedene Werte,  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$ , haben müßte. Wir können aber nachweisen, dafs beide Strecken in  $V$  einander parallel laufen müssen. Wird nämlich  $M = x_m, y_m$  als laufender Punkt einer zu  $KL$  parallelen Strecke betrachtet, so lassen sich seine Koordinaten bei konstantem  $e$  und  $f$  und variablem  $x$  und  $\lambda$  durchstellen durch:

$$(19) \quad x_m = \frac{x x_k + \lambda x_l}{x + \lambda} + e, \quad y_m = \frac{x y_k + \lambda y_l}{x + \lambda} + f.$$

Solange also  $M$  innerhalb  $V$  liegt, ist

$$\Sigma_m r_h \equiv \sum_1^n \varepsilon_h \left( p_h - \left( \frac{x x_k + \lambda x_l}{x + \lambda} + e \right) \cos \alpha_h - \left( \frac{x y_k + \lambda y_l}{x + \lambda} + f \right) \sin \alpha_h \right),$$

wo  $\varepsilon_h$  denselben Wert besitzt wie für  $K$  und  $L$ , d. h., wie in (15). Das giebt analog dem früheren

$$(20) \quad \Sigma_m r_h \equiv \mathcal{S} - e \sum_1^n \varepsilon_h \cos \alpha_h - f \sum_1^n \varepsilon_h \sin \alpha_h.$$

Rechts stehen aber jetzt nur noch konstante Größen, so dafs auch auf jeder zu  $KL$  parallelen Geraden, soweit sie innerhalb  $V$  liegt, die Abstandssumme konstant ist. Wir gewinnen also den

**Satz III:** „Sind die Geraden  $\Gamma_h$  nicht alle einander parallel, so stellen die Örter konstanter Abstandssummen gebrochene, in sich geschlossene Linien dar, von denen die Minimalstelle sowohl, wie alle Örter mit kleinerer Abstandssumme ein —, die Örter mit größerer Abstandssumme aber ausgeschlossen werden, während innerhalb desselben Gebietes der Ebene die Örter mit verschiedener Abstandssumme einander parallel laufen. Hat man also einen solchen Ort konstruiert, so liegt die Minimalstelle stets in seinem Innern.“ —

Die Formel (20) gewinnt nun noch eine weitere Bedeutung insofern, als wir aus ihr die Bedingung ziehen können, die erforderlich ist, damit innerhalb des ganzen Gebietes  $V$  die Abstandssumme konstant ist, d. h. wie oben gezeigt, damit es eine Minimalfläche giebt. Da sich verschiedene Parallelen bei der Parameterdarstellung (19) nur durch  $e$  und  $f$  unterscheiden und diese Größen innerhalb  $V$  zwischen gewissen Grenzen unendlich viele verschiedene Werte annehmen können, so ist die Summe in (20) nur dann konstant, sobald innerhalb  $V$  gleichzeitig die Bedingungen

<sup>1)</sup> Der Fall von lauter einander parallelen  $\Gamma_h$  ist ausgeschlossen worden!

$$(21) \quad \sum_1^n \varepsilon_h \cos \alpha_h \equiv 0, \quad \sum_1^n \varepsilon_h \sin \alpha_h \equiv 0$$

erfüllt sind. Am einfachsten werden diese Formeln, wenn wir den Koordinatenanfang in das Gebiet  $V$  legen, da dann alle  $\varepsilon_h$  den Wert  $+1$  annehmen. Dann gilt also innerhalb  $V$

$$(22) \quad \sum_1^n \cos \alpha_h \equiv 0, \quad \sum_1^n \sin \alpha_h \equiv 0.$$

Denken wir uns nun von irgend einem Punkte  $P$  innerhalb  $V$  die Abstände nach den  $\Gamma_h$  gezogen und auf ihnen in  $P$  gleiche Kräfte  $K$  angebracht, so geben deren Projektionen auf die  $x$  Axe und auf die  $y$  Axe addiert

$$\Sigma_x \equiv \sum_1^n K \cos \alpha_h \equiv K \sum_1^n \cos \alpha_h; \quad \Sigma_y \equiv \sum_1^n K \sin \alpha_h \equiv K \sum_1^n \sin \alpha_h.$$

Nach (22) sind also diese Summen innerhalb  $V$  identisch null, d. h., die gleichen Kräfte halten sich in  $P$  das Gleichgewicht, sobald die Abstandssumme in  $V$  konstant ist. Halten sich aber umgekehrt in irgend einem Punkte von  $V$  die gleichen Kräfte  $K$ , in der Richtung der Abstände angebracht, das Gleichgewicht, so bestehen die Gleichungen (22) [bez. (21)]; dann ist wiederum im ganzen Gebiete  $V$  nach (20) die Summe konstant. Also gewinnen wir den

**Satz IV:** „Giebt es irgend ein Gebiet der Ebene, in welchem gilt:

$$\sum_1^n \varepsilon_h \cos \alpha_h \equiv 0, \quad \sum_1^n \varepsilon_h \sin \alpha_h \equiv 0,$$

wobei  $\varepsilon_h$  beidemale denselben Wert  $+1$  oder  $-1$  besitzt, — oder, was dasselbe heißt, giebt es innerhalb des Gebietes  $V$  irgend einen Punkt, in dem sich gleiche Kräfte, in der Richtung der Abstände  $r_h$  angebracht, das Gleichgewicht halten —, so besitzt in dem betreffenden Gebiete die Abstandssumme einen konstanten Wert und zwar ihren Minimalwert, so daß das betreffende Gebiet Minimalstelle ist.“

Hiernach ist es in vielen Fällen sehr leicht, zu entscheiden, ob ein Gebiet mit minimaler Abstandssumme vorhanden ist oder nicht.

Bei zwei Geraden ist dies nur möglich, sobald sie einander parallel sind, da hier die zwei gleichen Kräfte entgegengesetzt gerichtet sein müssen, um sich gegenseitig aufzuheben. Dann ist der Streifen zwischen den Geraden Minimalfläche.

Drei gleiche Kräfte heben sich auf, sobald sie Winkel von  $120^\circ$  mit einander bilden. Sobald also drei Gerade ein gleichseitiges Dreieck bilden, ist die Abstandssumme, wie auch elementar leicht beweisbar ist, in diesem Dreiecke konstant und von kleinstem Werte. Bilden sie kein gleichseitiges Dreieck, so giebt es keine Minimalfläche.

Vier gleiche Kräfte heben sich nur dann auf, wenn je zwei in entgegengesetzte Richtung fallen (immer natürlich angenommen, daß alle Geraden  $\Gamma_h$ , also auch alle  $r_h$  in derselben Ebene liegen). Bilden also vier Gerade ein Parallelogramm, so ist dies Minimalfläche, und laufen alle vier einander parallel, so ist der mittlere Streifen Minimalfläche. Andere Fälle giebt es bei vier Geraden nicht.

Von mehr als vier Geraden können so bestimmte Angaben nicht mehr gemacht werden. Denn in den notwendigen Bedingungsgleichungen

$$\sum_1^n \cos \alpha_h = 0, \quad \sum_1^n \sin \alpha_h = 0,$$

treten dann mindestens zwei Winkel auf, die wir beliebig annehmen dürfen, so daß die Aufgabe ganz unbestimmt wird. Nur folgendes können wir noch feststellen:

Ist  $n$  beliebig, so ist jedes regelmäßige  $n$  Eck, sowie jedes  $n$  Eck, dessen Seiten denen eines regelmäßigen  $n$  Ecks parallel laufen und das nur hohle Winkel besitzt, d. h. also, jedes  $n$  Eck, das durch Dehnung oder Zusammenziehung ohne Änderung der Winkel aus einem regelmäßigen  $n$  Ecke hervorgeht, Minimalfläche für die  $n$  Geraden, in denen seine Seiten liegen. Denn legen wir den Koordinatenanfang innerhalb des Vielecks, so ist

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2\pi}{n}, \quad \alpha_3 = \alpha_2 + \frac{2\pi}{n} = \alpha_1 + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad \dots \quad \alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{2\pi}{n} = \alpha_1 + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n};$$

also gilt, da statt  $\alpha_1 + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \alpha_1 + 2\pi$  gesetzt werden darf, ohne daß sich die Funktionen von  $\alpha_1$  ändern, nach einer bekannten Formel

$$\sum_1^n \cos \alpha_h \equiv \sum_1^n \cos \left( \alpha_1 + h \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \equiv \frac{\sin \left( \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \cdot \cos \left( \alpha_1 + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} \right)} \equiv \frac{\sin \pi \cdot \cos \left( \alpha_1 + \frac{n+1}{n} \pi \right)}{\sin \frac{\pi}{n}} \equiv 0;$$

$$\sum_1^n \sin \alpha_h \equiv \sum_1^n \sin \left( \alpha_1 + h \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \equiv \frac{\sin \left( \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \cdot \sin \left( \alpha_1 + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} \right)} \equiv \frac{\sin \pi \cdot \sin \left( \alpha_1 + \frac{n+1}{n} \pi \right)}{\sin \frac{\pi}{n}} \equiv 0.$$

Also sind für jedes solche Vieleck die Bedingungen (22) erfüllt, das Vieleck selbst daher Minimalfläche.

Ist ferner  $n$  gerade, so erfüllt jedes  $n$  Eck mit lauter hohlen Winkeln, in dem jede Seite ihrer Gegenseite parallel läuft, die Gleichungen (21). Denn sind  $I_k$  und  $I_l$  diese Gegenseiten, so ist, sobald der Koordinatenanfang im Innern des Vielecks, also zwischen  $I_k$  und  $I_l$  liegt,  $\alpha_k = \alpha_l \pm \pi$ , also  $\cos \alpha_k = -\cos \alpha_l$ ,  $\sin \alpha_k = -\sin \alpha_l$ . Daher heben sich die Kosinusse und die Sinusse von  $\alpha_k$  und  $\alpha_l$  gegenseitig auf, daher alle Kosinusse und Sinusse, da wir sie in  $\frac{n}{2}$  solcher Paare ordnen können. Ist ferner  $n$  gerade und sind alle Geraden parallel, so erfüllt der mittelste Streifen auch die Gleichungen (21), der, wie schon früher bewiesen, Minimalfläche ist. Einfacher ist hier der statische Beweis.

Lassen sich ferner die  $n$  Geraden in Gruppen so ordnen, daß jede von diesen Gruppen eine Figur der obigen drei Arten bildet und daß alle diese Figuren ein Flächenstück  $V$  gemein haben, so ist  $V$  Minimalfläche, da bei ihm die Geraden jeder einzelnen Gruppe, also auch alle Geraden die Gleichungen (22) erfüllen, sobald der Koordinatenanfang im Innern von  $V$  liegen. (Liegen z. B. ein Parallelogramm und ein gleichseitiges Dreieck zum Teil ineinander, so ist das beiden gemeinsame Flächenstück Minimalfläche für die betreffenden sieben Geraden u. s. w.)

Als Nachtrag zu der Untersuchung der geometrischen Örter mag noch folgendes gegeben werden. Sind  $n$  Gerade der Ebene  $\epsilon$  nicht alle einander parallel, so schneiden sie außer einer gewissen Anzahl begrenzter Gebiete, deren Anzahl im Grenzfalle gleich null ist, stets  $2n$  halbbegrenzte Gebiete mit parallelen oder divergenten Randstrahlen<sup>1)</sup> heraus, die im Endlichen in eine gebrochene Linie mit lauter nach dem Inneren des Gebietes hohlen Winkeln oder in einen Punkt auslaufen. Es läßt sich dann stets in die Ebene eine geschlossene Linie (am einfachsten Kreislinie) legen, die alle

<sup>1)</sup> Wir verstehen unter Randstrahlen diejenigen Strahlen, durch welche das betreffende halbbegrenzte Gebiet bis in die Unendlichkeit hin von den benachbarten halbbegrenzten Gebieten geschieden wird.

begrenzten Gebiete in sich schließt und jedes halbbegrenzte Gebiet so durchquert, daß es die Randstrahlen je nur einmal schneidet. Wir wandern nun von einem beliebigen Gebiete, daß wir  $V_1$  nennen, auf dieser Linie fort und nennen die Gebiete, wie sie weiter aufeinander folgen,  $V_2, V_3, \dots, V_n, V_{1+n}, V_{2+n}, \dots, V_{n+n}$ . Es läßt sich dann der Satz nachweisen:

**Satz V:** „Die Örter des Flächenstückes  $V_s (s \leq n)$  sind denen des Flächenstückes  $V_{s+n}$  parallel.“

Es mögen zunächst unter den Geraden  $\Gamma_h$  keine Parallelen vorkommen. Gehen wir nun von  $V_s$  bis  $V_{s+n}$ , so überschreiten wir, da jede Gerade die Ebene in zwei vollständig getrennte Teile zerlegt, der Reihe nach alle Geraden  $\Gamma_h$  je einmal und dann von  $V_{s+n}$  bis  $V_s$  in demselben Sinne weitergehend alle  $\Gamma_h$  wiederum je einmal in derselben Reihenfolge. Heißt also in  $V_s$  die Abstandssumme

$$(23) \quad \sum_s r_h \equiv \sum_1^n \varepsilon_h (p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h),$$

so gilt in  $V_{s+n}$ , da man von  $V_s$  bis  $V_{s+n}$  alle  $\Gamma_h$  je einmal überschreitet,

$$(24) \quad \sum_{s+n} r_h \equiv \sum_1^n \varepsilon_h (x \cos \alpha_h + y \sin \alpha_h - p_h).$$

Es möge nun für zwei Punkte  $K$  und  $L$  in  $V_s$  gelten

$$(25) \quad \sum_1^n \varepsilon_h (p_h - x_k \cos \alpha_h - y_k \sin \alpha_h) \equiv \sum_1^n \varepsilon_h (p_h - x_l \cos \alpha_h - y_l \sin \alpha_h) \equiv \mathfrak{C}.$$

Ferner möge  $M = x_m, y_m$  wiederum in der Form (19) als laufender Punkt auf einer Parallelen zu  $KL$  dargestellt sein. Liegt nun  $M$  in  $V_{s+l}$ , so ist nach (24)

$$\sum_m r_h \equiv \sum_1^n \varepsilon_h \left( \left( \frac{x x_k + \lambda x_l}{z + \lambda} + e \right) \cos \alpha_h + \left( \frac{x y_k + \lambda y_l}{z + \lambda} + f \right) \sin \alpha_h - p_h \right),$$

also nach (25)

$$(26) \quad \sum_m r_h \equiv -\mathfrak{C} + e \sum_1^n \varepsilon_h \cos \alpha_h + f \sum_1^n \varepsilon_h \sin \alpha_h,$$

also auch konstant. Diese Formel gilt, so lange  $M$  in  $V_{s+n}$  liegt und alle  $\Gamma_h$  einander schneiden.

Wir nehmen weiter an, daß unter den  $\Gamma_h$  Parallele vorkommen; es mögen  $m$  Gruppen von Geraden vorhanden sein, zu denen  $g_1, g_2 - g_1, \dots, g_m - g_{m-1}$  Gerade gehören, wobei  $g_m = n$  ist, einzelne von den Anzahlen  $g_1$  und  $g_h - g_{h-1}$  gleich 1 sein können und, wenn mehrere Gerade zu derselben Gruppe gehören, diese alle einander, aber nicht den anderen Geraden parallel laufen. Dann gibt es in der Ebene  $\varepsilon$  wiederum  $2n$  halbbegrenzte Gebiete, und zwar werden  $2m$  von divergenten,  $2(n - m)$  von parallelen Randstrahlen begrenzt. Wir gehen nun wiederum auf einem geschlossenen Wege so um die vollständig begrenzten Gebiete herum, daß jedes halbbegrenzte Gebiet gerade einmal durchquert, also jeder Randstrahl einmal überschritten wird. Wir beginnen bei einer von den beiden äußersten Geraden der ersten Gruppe, bez. mit der einzigen der Gruppe gehörigen Geraden; von ihr aus überschreiten wir erst alle Geraden der ersten Gruppe, gehen dann zur zweiten über u. s. w. So treffen wir der Reihe nach die 1. Gruppe  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{g_1}$ , die 2. Gruppe  $\Gamma_{g_1+1}, \dots, \Gamma_{g_2}$  u. s. f., endlich die  $m$ -Gruppe  $\Gamma_{g_{m-1}+1}, \dots, \Gamma_n$ . Nun treffen wir wiederum die Geraden der ersten Gruppe, aber nun, da  $\Gamma_{g_1}$  als Parallele zu  $\Gamma_1$  auf einer und derselben Seite von  $\Gamma_1$  verläuft, in umgekehrter Reihenfolge. So folgen sich jetzt  $\Gamma_{g_1}, \dots, \Gamma_1, \Gamma_{g_2}, \dots, \Gamma_{g_1+1}, \dots, \Gamma_n, \dots, \Gamma_{g_{m-1}+1}$ . Nun gelangen wir zum zweiten Male nach  $\Gamma_1$ , haben also den Rundgang vollendet.

Die Gebiete, die wir treffen, nennen wir  $V_1, \dots, V_{g_1-1}, \underline{V_{g_1}}, \dots, V_{n-1}, \underline{V_n}, V_{1+n}, \dots, V_{g_1-1+n}, \underline{V_{g_1+n}}, \dots, V_{n-1+n}, \underline{V_{n+n}}$ . Dabei besitzen die unterstrichenen Gebiete divergente Randstrahlen, da man in ihnen von einer Geradengruppe zur nächsten übergeht, die nicht unterstrichenen parallele.

Gehen wir nun von  $V_{g_1}$  nach  $V_{g_1+n}$ , so überschreiten wir, von  $\Gamma_{g_1+1}$  anfangend, alle Gerade bis  $\Gamma_n$ , dann noch  $\Gamma_{g_1}$  bis  $\Gamma_1$ , worauf wir nach  $V_{g_1+n}$  gelangen. Da wir alle  $\Gamma_h$  überschritten haben, so sind auch in  $V_{g_1}$  und  $V_{g_1+n}$  und somit in allen zusammengehörigen Gebieten mit divergenten Randstrahlen die Örter gegenseitig parallel.

Gehen wir aber etwa von  $V_k$  aus, wo  $k \leq \frac{g_1}{2}$  ist (vorausgesetzt ist hier, daß zur ersten Gruppe mehr als eine Gerade gehört, was stets erreichbar ist, da überhaupt parallele Gerade vorkommen), so überschreiten wir bis  $V_{k+n} \Gamma_{k+1}, \dots, \Gamma_{g_1}, \dots, \Gamma_n, \Gamma_{g_1}, \Gamma_{g_1-1}, \dots, \Gamma_{g_1-k+1}$ , da es wiederum  $n$  Gerade sein müssen. Da nun  $k \leq \frac{g_1}{2}$  ist, so ist  $g_1 - k + 1 \geq \frac{g_1}{2} + 1$ , also  $> k$ . Es werden daher  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  gar nicht,  $\Gamma_{k+1}, \dots, \Gamma_{g_1-1}$  je einmal,  $\Gamma_{g_1-k+1}, \dots, \Gamma_{g_1}$  je zweimal,  $\Gamma_{g_1+1}, \dots, \Gamma_n$  je einmal überschritten. Wenden wir nun wieder die Abkürzung  $\wp_h$  für  $p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h$  an, so ist

$$(27) \quad \Sigma_k r_h \equiv \sum_1^n \varepsilon_h \wp_h;$$

$$\Sigma_{k+n} r_h \equiv \sum_1^k \varepsilon_h \wp_h + \sum_{g_1-k+1}^{g_1} \varepsilon_h \wp_h - \sum_{k+1}^{g_1-k} \varepsilon_h \wp_h - \sum_{g_1+1}^n \varepsilon_h \wp_h;$$

$$(28) \quad \Sigma_{k+n} r_h \equiv 2 \left( \sum_1^k \varepsilon_h \wp_h + \sum_{g_1-k+1}^{g_1} \varepsilon_h \wp_h \right) - \sum_1^n \varepsilon_h \wp_h.$$

Nun liegt  $V_k$  zwischen  $\Gamma_k$  und  $\Gamma_{k+1}$ ,  $V_{k+n}$  zwischen  $\Gamma_{g_1-k+1}$  und  $\Gamma_{g_1-k}$ , beide also zwischen  $\Gamma_k$  und  $\Gamma_{g_1-k}$ , also auch zwischen  $\Gamma_{k-1}$  und  $\Gamma_{g_1-k+1}, \dots, \Gamma_2$  und  $\Gamma_{g_1-1}, \Gamma_1$  und  $\Gamma_{g_1}$ . Da dies Parallele sind, so sind für alle Punkte sowohl in  $V_k$  als in  $V_{k+n}$   $\varepsilon_1 \wp_1 + \varepsilon_{g_1} \wp_{g_1}, \varepsilon_2 \wp_2 + \varepsilon_{g_1-1} \wp_{g_1-1}, \dots, \varepsilon_k \wp_k + \varepsilon_{g_1-k+1} \wp_{g_1-k+1}$  einzeln konstant, so daß statt (28) gesetzt werden kann

$$(29) \quad \Sigma_{k+n} r_h \equiv l - \sum_1^n \varepsilon_h \wp_h,$$

wo die  $\varepsilon_h$  dieselben Werte wie in (27) besitzen. Nun läßt sich ebenso wie oben leicht nachweisen, daß in  $V_k$  und  $V_{k+n}$  ebenfalls die Örter gegenseitig parallel sind. Da man die Zählung der Geraden auch umgekehrt vornehmen kann, so ist somit der Satz V auch für  $k \geq \frac{g_1}{2}$ , also überhaupt bewiesen.

Damit wären die wesentlichsten Eigenschaften der Abstandssumme abgeleitet. Es sei gestattet, noch eine Reihe weiterer ohne Beweis, der in jedem Einzelfalle leicht erbracht werden kann, einfach anzuführen. Dabei wird vorausgesetzt, daß nicht alle  $\Gamma_h$  einander parallel sind.

1) Nimmt man den Wert  $\mathcal{S}$  der Abstandssumme hinreichend groß an, so stellt stets der Ort  $\Sigma r_h \equiv \mathcal{S}$  die Umrandung eines Vielecks mit  $2n$  Seiten und zwar parallelen Gegenseiten dar.

2) Gibt es nur einen einzigen Minimalpunkt und schneiden sich in ihm  $m$  Gerade  $\Gamma_h$ , so stellt  $\Sigma r_h \equiv \mathcal{S}$  bei hinreichend kleinem  $\mathcal{S}$  (d. h., wenn  $\mathcal{S}$  nur wenig größer als die Minimalsumme ist) ein  $2m$  Eck mit unendlich kleinen Seiten dar.

3) Gibt es eine Minimalstrecke, durch deren beide Endpunkte außer der Geraden  $\Gamma_h$ , auf der sie liegt, noch im ganzen  $m$  weitere  $\Gamma_h$  laufen, so erhält man bei hinreichend kleinem  $\varepsilon$  ein  $2(m+1)$  Eck mit zwei endlichen, einander und der Minimalstrecke parallelen und außerdem  $2m$  unendlich kleinen Seiten.

4) Gibt es ein Minimalviereck mit  $k$  Ecken, durch die außer den  $k$  Geraden  $\Gamma_h$ , auf denen sie liegen, noch im ganzen  $m$  weitere Gerade (natürlich außerhalb des Vielecks) laufen, so erhält man bei hinreichend kleinem  $\varepsilon$  ein  $2(k+m)$  Eck mit  $k$  endlichen und zwar den benachbarten Seiten des Vielecks parallelen und außerdem  $k+2m$  unendlich kleinen Seiten.

5) Für drei Gerade einer Ebene erhält man (außer der mittelsten Geraden bei drei parallelen):

a) eine Minimalfläche: wenn sie ein gleichseitiges Dreieck einschließen (eben dies Dreieck);

b) eine Minimalstrecke:  $\alpha$ ) wenn zwei parallele durch eine dritte geschnitten werden (die Strecke auf der letzteren);

$\beta$ ) wenn sie ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Schenkel größer als die Grundlinie sind (die Grundlinie);

c) einen Minimalpunkt:  $\alpha$ ) wenn sie durch ein und denselben Punkt laufen (diesen Punkt);

$\beta$ ) wenn sie ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Schenkel kleiner als die Grundlinie ist (die Spitze);

$\gamma$ ) wenn sie ein ungleichseitiges Dreieck bilden (den Scheitel des größten Dreieckswinkels).

NB. Man kann, sobald ein Dreieck entsteht, kurz sagen: der Eckpunkt mit kleinster Höhe, bez., wenn zwei gleiche Höhen vorhanden sind, die kleiner als die dritte sind, die Seite, von deren Endpunkten sie auslaufen, bez., wenn drei gleiche Höhen vorhanden sind, das ganze Dreieck ist Minimalstelle.

6) Für ein ungleichseitiges Dreieck konstruiert man einen Ort konstanter Abstandssumme im Innern so, daß man die kleinste Seite von ihren Endpunkten aus auf den größeren abträgt und die so erhaltenen Punkte verbindet; die anderen sind parallel zu dieser Strecke. Im gleichschenkligen Dreiecke laufen sie der Grundlinie parallel. — Für ein beliebiges Dreieck konstruiert man einen Ort außerhalb so, daß man irgend eine Seite von ihren Endpunkten aus auf den Verlängerungen der anderen abträgt. Nach Satz V erhält man so die Örter in zwei halbbegrenzten Gebieten (in dem einen in der Unendlichkeit zusammenhängenden Dreiecke), also durch Benutzung jeder Seite alle Örter. — Im Falle b)  $\alpha$ ) erhält man die Örter in den Winkeln, indem man sie so legt, daß sie auf der Parallelen und der Schneidenden Strecken abschneiden, die sich wie 2:1 verhalten.

7) Trägt man in jedem Punkte  $P=x, y$  der Ebene  $\varepsilon$  die zugehörige Abstandssumme senkrecht zur Ebene ab, so besteht die Fläche  $z = \Sigma r_h$  aus Ebenenstücken, die einander nicht parallel sind und um so steiler ansteigen, je weiter sie von der Minimalstelle entfernt sind. Die Ebenenstücke werden von gebrochenen Linien ohne einspringende Winkel vollständig oder nur teilweise begrenzt. Je nachdem ein Minimalpunkt, eine Minimalstrecke oder eine Minimalfläche vorhanden ist, besitzt die Fläche  $z = \Sigma r_h$  nur einen einzigen tiefsten Punkt oder eine tiefste, zu  $\varepsilon$  parallele Kante oder ein tiefstes, zu  $\varepsilon$  paralleles, vollständig begrenztes Flächenstück, und umgekehrt.

## II. Geometrische Behandlung des allgemeinen Falles.

Es mögen jetzt  $n$  Gerade  $\Gamma_h$  ganz beliebig im Raume liegen. Wir fragen zunächst wieder nach Anzahl und Art der ausgezeichneten Punkte. Dabei verfahren wir genau wie bei  $n$  Geraden ein und derselben Ebene, indem wir die Änderung der Abstandssumme längs einer beliebigen Geraden des Raumes  $\Gamma$  untersuchen. Dabei dürfen wir wiederum alle zu  $\Gamma$  parallelen Geraden  $\Gamma_h$ , sowie eine etwa auf  $\Gamma$  fallende  $\Gamma_h$  unberücksichtigt lassen, da ja alle Punkte auf  $\Gamma$  von ihnen ein und denselben Abstand besitzen. Daher nehmen wir für die folgende Betrachtung an, daß jede  $\Gamma_h$  entweder  $\Gamma$  schneidet (in der Endlichkeit) oder sich mit  $\Gamma$  kreuzt. Alsdann sind drei verschiedene Fälle möglich:

- A) Alle Geraden  $\Gamma_h$  schneiden  $\Gamma$ .
- B) Alle Geraden  $\Gamma_h$  kreuzen sich mit  $\Gamma$ .
- C) Es giebt sowohl Gerade  $\Gamma_h$ , die  $\Gamma$  schneiden, als solche, die sich mit  $\Gamma$  kreuzen.

Wir wollen diese Fälle einzeln in Betracht ziehen.

- A) Alle Geraden  $\Gamma_h$  schneiden  $\Gamma$  und zwar  $\Gamma_h$  in  $A_h$ .

Wir fällen von einem beliebigen Punkte  $P$  der Geraden  $\Gamma$  die Lote  $PB_h$  auf die  $\Gamma_h$ . Drehen wir nun  $\Gamma_h$  um  $\Gamma$  so, daß der Winkel  $(\Gamma, \Gamma_h)$  ungeändert bleibt, lassen also  $\Gamma_h$  den Mantel eines Rotationskegels mit der Axe  $\Gamma$  beschreiben, so ändert sich auch die Länge des Lotes  $PB_h$  nicht ( $PB_h = PA_h \cdot \sin(\Gamma, \Gamma_h)$ ). Durch diese Drehung können wir aber alle  $\Gamma_h$ , ohne daß die Abstandssumme für irgend einen Punkt auf  $\Gamma$  geändert wird, in ein und dieselbe Ebene bringen, in der natürlich auch  $\Gamma$  liegt. Dann haben wir aber wiederum den Fall ID). Es giebt also auch, wenn alle  $\Gamma_h$   $\Gamma$  schneiden, auf  $\Gamma$  nur Minimalpunkte und zwar entweder einen einzigen, der dann auf einen von den Punkten  $A_h$  fällt, oder unzählig viele, von denen dann die ganze Strecke zwischen zwei auf  $\Gamma$  einander folgenden Punkten  $A_h$  und  $A_{h+1}$  erfüllt ist.

Die graphische Darstellung (die wir hier in einer  $\Gamma$  enthaltenden Ebene so vornehmen, daß wir in jedem Punkte  $P$  auf  $\Gamma$  ein Lot gleich der Abstandssumme nach ein und derselben Seite von  $\Gamma$  errichten) liefert also ebenso wie in ID) eine gebrochene Linie, die ganz auf der einen Seite von  $\Gamma$  liegt und  $\Gamma$  nur erhabene Winkel zuehrt, so daß sie entweder einen einzigen zunächst an  $\Gamma$  gelegenen Punkt oder aber eine zunächst an  $\Gamma$  gelegene,  $\Gamma$  parallele Strecke besitzt.

- B) Alle Geraden  $\Gamma_h$  kreuzen sich mit  $\Gamma$ .

Fällen wir von einem beliebigen Punkte der Geraden  $\Gamma$  die Lote  $PB_h$  auf die  $\Gamma_h$  und konstruieren die gemeinsame Lote von  $\Gamma$  und jeder  $\Gamma_h$ ,  $A_h C_h$ , so ist

$$PB_h^2 = PA_h^2 \cdot \sin^2(\Gamma, \Gamma_h) + A_h C_h^2,$$

also, wenn wir auf  $\Gamma$  die Strecken von irgend einem Punkte  $O$  an messen und  $OP = x$ ,  $OA_h = a_h$  und zugleich  $A_h C_h = c_h$  setzen,

$$(1) \quad PB_h^2 = (x - a_h)^2 \sin^2(\Gamma, \Gamma_h) + c_h^2.$$

Daher ist für  $P$  die Abstandssumme

$$(2) \quad \Sigma r_h \equiv \sum_1^n \sqrt{(x - a_h)^2 \sin^2(\Gamma, \Gamma_h) + c_h^2}.$$

Da keine Gerade  $\Gamma_h$  von  $\Gamma$  geschnitten wird (d. h., alle  $c_h > 0$  sind), so wird kein  $r_h = 0$ ; also bestimmt sich die Strecke  $x$  für einen ausgezeichneten Punkt aus der Gleichung

$$(3) \quad \frac{d \Sigma r_h}{dx} \equiv \sum_1^n \frac{(x - a_h) \sin^2(\Gamma, \Gamma_h)}{r_h},$$

während das Eintreten eines Minimums abhängt von der Bedingung

$$(4) \quad \frac{d^2 \Sigma r_h}{dx^2} \equiv \sum_1^n \frac{c_h^2 \sin^2 (I, I_h)}{r_h^3} > 0.$$

Letztere Bedingung ist für alle Punkte auf  $I$  erfüllt, da ja auch keine Gerade  $I_h$  zu  $I$  parallel läuft, also kein  $\sin (I, I_h)$  null wird. Daher kann auf  $I$  nur ein Minimum eintreten. Da zugleich für sehr große negative  $x$   $\frac{d \Sigma r_h}{dx} < 0$ , für sehr große positive  $x$  aber  $> 0$  ist und sich dieser Ausdruck mit  $x$  stetig ändert (ein Verschwinden der Nenner ist ja ausgeschlossen), so muß es stets einen Wert  $x$  geben, der die Gleichung (3) löst. Zugleich kann es nicht mehr als einen geben, da auf  $I$  nur Minima vorkommen und sich auch die Abstandssumme selbst mit  $x$  stetig ändert. Es giebt also auf  $I$  stets einen und nur einen ausgezeichneten und zwar einen Minimalpunkt.

Fällt man nun  $PD_h \perp$  Ebene  $(A_h, I_h)$  und  $D_h E_h \perp I$ , so ist auch  $B_h E_h \perp A_h P$ , also einmal  $PE_h = PB_h \cos B_h \hat{P}E_h$  und andererseits  $PE_h = PD_h \sin \hat{P}D_h E_h = PA_h \sin^2 \hat{P}A_h D_h$ , also  $PB_h \cos B_h \hat{P}E_h = PA_h \sin^2 \hat{P}A_h D_h$ , d. h.  $r_h \cos (r_h, I) = (x - a_h) \sin^2 (I, I_h)$ . Daher können wir statt (3), indem wir noch einen konstanten Faktor  $k$  hinzusetzen, schreiben

$$\sum_1^n k \cos (r_h, I) = 0.$$

Das läßt aber wiederum eine mechanische Deutung zu, die wir aussprechen in dem

**Satz VI:** „Kreuzen sich alle Geraden  $I_h$  mit  $I$ , so giebt es auf  $I$  stets einen und nur einen ausgezeichneten und zwar einen Minimalpunkt; er liegt so, daß gleiche Kräfte, an ihm in der Richtung der  $r_h$  angreifend, keine Verschiebung längs  $I$  bewirken können, sich also das Gleichgewicht halten, wenn  $I$  eine starre Gerade ist.“

Stellen wir wiederum in einer durch  $I$  gelegten Ebene die Abstandssumme längs  $I$  graphisch dar, so ergibt sich eine Kurve, die nach (2) ganz auf der einen Seite von  $I$  liegt und  $I$  nicht trifft, nach (4)  $I$  ihre konvexe Seite zukehrt; sie fällt also von  $x = -\infty$ , von unendlich großen Ordinaten herabsteigend, bis zur Ordinate des Minimalpunktes, um dann wieder bis  $x = +\infty$  zu unendlich großen Ordinaten anzusteigen.

[Ist nur eine einzige Gerade  $I_h$  vorhanden, so stellt nach (2) die Kurve einen Hyperbelzweig dar, der gegen das Lot im Minimalpunkte symmetrisch liegt. Bei  $n$  Geraden können wir schreiben

$$\Sigma r_h \equiv |x| \cdot \sum_1^n \sqrt{\left(1 - \frac{a_h}{x}\right)^2 \sin^2 (I, I_h) + \left(\frac{c_h}{x}\right)^2}, \quad \text{tg } \varphi \equiv \pm \sum_1^n \frac{\left(1 - \frac{a_h}{x}\right) \sin^2 (I, I_h)}{\sqrt{\left(1 - \frac{a_h}{x}\right)^2 \sin^2 (I, I_h) + \left(\frac{c_h}{x}\right)^2}},$$

wobei wir mit  $\varphi$  den Winkel der Kurventangente mit der  $+x$  Axe bezeichnen und vor das Summenzeichen  $\pm$  zu setzen haben, je nachdem  $x \geq 0$  ist; also verläuft auch diese Kurve nach  $\pm \infty$  hin symmetrisch.]

C) Es giebt sowohl Gerade  $I_h$ , die  $I$  schneiden, als solche, die sich mit  $I$  kreuzen.

Sind  $I_1, I_2, \dots, I_m$  die Geraden, die  $I$  schneiden, und  $I_{m+1}, \dots, I_n$  diejenigen, die sich mit  $I$  kreuzen, so können wir die Abstandssumme in zwei Teile zerlegen, von denen der erste,  $\sum_1^m r_h$ , nur die Abstände von den schneidenden, der andere,  $\sum_{m+1}^n r_h$ , nur die von den kreuzenden Geraden enthält. Nach II A) liefert die graphische Darstellung der ersten Summe eine gegen  $I$  konvexe, ganz auf ein und derselben Seite von  $I$  gelegene gebrochene Linie. Die graphische Darstellung der zweiten

Summe liefert nach IIB) eine Kurve, die ebenfalls gegen  $\Gamma$  konvex ist und mit der gebrochenen Linie ganz auf derselben Seite von  $\Gamma$  liegt. Das Bild der Gesamtsumme gewinnen wir dann, indem wir für jeden Punkt auf  $\Gamma$  die Ordinaten beider Kurven addieren, also durch sogenannte Superposition der gebrochenen Linie und der Kurve.

Nun liefert die Superposition zweier nach unten konvexer Kurven  $K_1$  und  $K_2$  stets wieder eine nach unten konvexe Kurve  $K_3$ . Denn wenn wir die Ordinaten der einzelnen Kurven, die zu derselben Abszisse gehören, mit  $y_1, y_2, y_3$  bezeichnen, so ist  $y_1 + y_2 = y_3$ , also auch nach zweimaliger Differentiation  $y_1'' + y_2'' = y_3''$ . Ist also  $y_1'' > 0$  über die ganze Kurve  $K_1$  und  $y_2'' > 0$  über die ganze Kurve  $K_2$ , so ist auch  $y_3'' > 0$  über die ganze Kurve  $K_3$ , d. h., auch  $K_3$  nach unten konvex. Oder anschaulich ausgedrückt: weil bei den Kurven  $K_1$  und  $K_2$  der nachfolgende Punkt stets über der Tangente des vorhergehenden liegt, muß dies Verhältnis bei der durch Superposition entstehenden Kurve  $K_3$  erst recht bestehen. Zugleich erkennt man hieran, daß der Satz auch richtig bleibt, wenn etwa an Stelle der einen Kurve eine gebrochene Linie tritt, die durchaus nach unten erhabene Winkel kehrt.

Daraus erkennen wir, daß bei der Zusammensetzung der gebrochenen Linie und der Kurve, die ja beide gegen  $\Gamma$  nur erhaben sind, wieder eine nach  $\Gamma$  erhabene Kurve entstehen muß, die zugleich von  $x = -\infty$ , von unendlich hohen Ordinaten herabsteigend, bis zu einem gewissen Punkte sinkt, um dann wieder bis  $x = +\infty$  zu unendlich hohen Ordinaten aufzusteigen. [Da bei der Superposition nach einmaliger Differentiation  $y_1' + y_2' = y_3'$  ist und sich in unserem Falle  $y_2'$  stetig ändert,  $y_1'$  aber konstant ist und nur an einzelnen diskreten Stellen seinen Wert sprungweise ändert, so wird sich auch  $y_3'$  im allgemeinen stetig ändern und nur an den Stellen springen, wo auch  $y_1'$  springt, d. h.  $K_3$  ist im allgemeinen stetig gekrümmt, besitzt aber einzelne ausspringende Spitzen.]

Daraus folgt, daß  $K_3$  keinen Punkt besitzt, in welchem es vom Steigen zum Fallen übergeht, und einen und nur einen, in dem es vom Fallen zum Steigen übergeht, d. h., auf  $\Gamma$  giebt es nur einen ausgezeichneten und zwar einen Minimalpunkt.

Fassen wir nun die Resultate von I) und II) zusammen und bedenken noch, daß wir ohne Änderung der Form der Kurve  $K_3$  beliebig viele zu  $\Gamma$  parallele Gerade  $\Gamma_h$  und schließlich auch eine in  $\Gamma$  fallende Gerade  $\Gamma_h$  hinzufügen dürfen, so gewinnen wir den

**Satz VII:** „Sind  $n$  Gerade  $\Gamma_h$  im Raume beliebig gegeben und nimmt man noch eine Gerade  $\Gamma$  im Raume beliebig an (die auch auf eine der  $\Gamma_h$  fallen kann), so besitzt die Abstandssumme  $\Sigma r_h$  auf  $\Gamma$  stets einen und nur einen ausgezeichneten und zwar einen Minimalwert. — Kreuzt sich  $\Gamma$  mit einzelnen oder allen  $\Gamma_h$ , so giebt es auf  $\Gamma$  nur einen einzelnen Punkt, in dem die Abstandssumme den Minimalwert besitzt. Schneidet dagegen  $\Gamma$  alle  $\Gamma_h$  in endlicher oder unendlicher Entfernung, so kann es auf  $\Gamma$  auch eine ganze Strecke geben, für deren Punkte der Minimalwert eintritt. In letzterem Falle liegt die Minimalstrecke stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schnittpunkten von  $\Gamma$  mit dem  $\Gamma_h$ , wie denn auch dann, wenn auf  $\Gamma$  nur ein Minimalpunkt vorkommt und schneidende Gerade vorhanden sind, dieser Punkt stets in einen der Schnittpunkte fallen muß.“

Vergleichen wir nun wiederum die Abstandssummen aller Punkte des Raumes untereinander, so geht aus Satz VII, genau wie in dem Falle, wo alle  $\Gamma_h$  in ein und derselben Ebene liegen, hervor, daß es nur eine einzige Minimalstelle im Raume geben kann. (Daß es eine solche geben muß, wurde in der Einleitung gezeigt.)

Giebt es nun keine Gerade  $\Gamma$ , von der alle  $\Gamma_h$  (in endlicher oder unendlicher Entfernung) geschnitten werden, so kann es auf jeder Geraden im Raume nur einen einzigen Minimal-

punkt geben, d. h., es giebt überhaupt nur einen Minimalpunkt im Raume. — Geht ferner durch jeden Raumpunkt höchstens eine Gerade, von der alle  $\Gamma_h$  geschnitten werden, so kann man auf einen Minimalpunkt oder eine Minimalstrecke kommen. — Lassen sich endlich durch irgend einen Raumpunkt  $P$  zwei Gerade  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  legen, von denen alle  $\Gamma_h$  geschnitten werden, so liegen alle  $\Gamma_h$  in der Ebene  $(\Gamma, \Gamma')$ , so daß nicht nur durch  $P$ , sondern überhaupt durch alle Punkte dieser Ebene unzählig viele Gerade gehen, die alle  $\Gamma_h$  schneiden. Dann kann man aber (nach ID) einen Minimalpunkt, eine Minimalstrecke oder ein Minimalvieleck mit lauter ausspringenden Winkeln erhalten. — Dagegen ist es unmöglich, daß die Minimalstelle drei Dimensionen besitzt. Denn sollte dies der Fall sein, so müßten durch jeden Punkt im Innern Gerade in jeder beliebigen Richtung laufen, die alle  $\Gamma_h$  schneiden. Das ist aber unmöglich, da durch jeden Punkt unzählig viele Gerade gelegt werden können, die sich mit einer bestimmten von den Geraden  $\Gamma_h$  kreuzen.

So gewinnen wir als Endresultat der allgemeinen Betrachtungen den

**Satz VIII:** „Bei  $n$  beliebigen Geraden im Raume kann die Stelle der kleinsten Abstandssumme ein Punkt, eine Strecke (Gerade) oder ein ebenes Vieleck mit lauter ausspringenden Winkeln (gerader Parallelstreifen) sein; auf alle Fälle giebt es eine und nur eine Stelle. Ein Vieleck (Parallelstreifen) ist nur dann möglich, wenn alle Geraden in ein und derselben Ebene liegen, eine Strecke (Gerade) nur, wenn es wenigstens eine Gerade giebt, die alle jene Geraden in endlicher oder unendlicher Entfernung schneidet.“

### III. Analytische Behandlung des Falles von $n$ einander kreuzenden Geraden.

In II) ist Anzahl und Art der ausgezeichneten Werte der Abstandssumme im allgemeinen bestimmt worden. Es erübrigt noch, die Lage der Minimalpunkte bei gegebenen Geraden näher zu bestimmen. Diese Untersuchung wollen wir zunächst nur für  $h$  einander kreuzende Gerade  $\Gamma_h$  durchführen, von denen wir noch weiter annehmen, daß sie einander nicht unendlich nahe kommen. Die Ergebnisse lassen sich vielfach auch auf den allgemeinsten Fall von  $n$  Geraden übertragen, vor allem, was die Entwicklung der später zu untersuchenden Differenz  $\mathcal{A}$  betrifft.

Wir beziehen die Geraden  $\Gamma_h$  auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch:

$$(1) \quad x = a_h + q_h \cos \alpha_h, \quad y = b_h + q_h \cos \beta_h, \quad z = c_h + q_h \cos \gamma_h, \quad h = 1, 2, \dots, n.$$

Hierin sind  $\cos \alpha_h, \cos \beta_h, \cos \gamma_h$  die Richtungscosinusse von  $\Gamma_h$ <sup>1)</sup>, für die bekanntlich die Identität

$$(2) \quad \cos^2 \alpha_h + \cos^2 \beta_h + \cos^2 \gamma_h \equiv 1$$

besteht. — Der Abstand  $r_h$  irgend eines Raumpunktes  $P = x, y, z$  von  $\Gamma_h$  bestimmt sich durch

$$(3) \quad r_h^2 = \xi_h^2 + \eta_h^2 + \zeta_h^2,$$

wo zur Abkürzung eingeführt ist

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_h \equiv x - a_h - q_h \cos \alpha_h, & \eta_h \equiv y - b_h - q_h \cos \beta_h, & \zeta_h \equiv z - c_h - q_h \cos \gamma_h, \\ q_h \equiv (x - a_h) \cos \alpha_h + (y - b_h) \cos \beta_h + (z - c_h) \cos \gamma_h. \end{cases}$$

Zugleich ist

$$(5) \quad \frac{dr_h}{dx} \equiv \frac{\xi_h}{r_h} \equiv -\cos(r_h, x), \quad \frac{dr_h}{dy} \equiv \frac{\eta_h}{r_h} \equiv -\cos(r_h, y), \quad \frac{dr_h}{dz} \equiv \frac{\zeta_h}{r_h} \equiv -\cos(r_h, z).$$

<sup>1)</sup> Wir messen für jede Richtung die hohlen Winkel, die sie mit den Richtungen der positiven Koordinatenachsen bildet; bei den Geraden  $P_h$  und den später einzuführenden Geraden  $G_h$  giebt es zweierlei Tripel von Richtungswinkeln, die sich paarweise zu  $180^\circ$  ergänzen; wir nehmen an, daß stets ein und dasselbe Tripel benutzt wird. Zugleich sei ein für allemal bemerkt, daß alle vorkommenden Sinusse positiv sind.

Hierin ist  $r_h$  positiv und in der Richtung von  $P$  nach  $\Gamma_h$  zu genommen; zugleich gilt wieder die Identität

$$(6) \quad \cos^2(r_h, x) + \cos^2(r_h, y) + \cos^2(r_h, z) \equiv 1.$$

$r_h$  kann nur dann null werden, wenn  $P$  auf  $\Gamma_h$  rückt, d. h., wenn  $\xi_h, \eta_h, \zeta_h$  einzeln null werden. Dann werden nach (5) die partiellen ersten Differentialquotienten von  $r_h$  nach  $x, y, z$  unbestimmt, was sich mit der geometrischen Anschauung deckt, die uns lehrt, daß in jedem Punkte von  $\Gamma_h$  unzählige viele Lote errichtet werden können. Zugleich aber zeigt (5), daß in diesem Falle die Werte der Differentialquotienten zwar unbestimmt, aber nicht unendlich werden können, sondern zwischen  $-1$  und  $+1$  liegen. Sonst sind die Differentialquotienten stets bestimmt und endlich. Nehmen wir also an, der Minimalpunkt liege außerhalb aller  $\Gamma_h$  (Minimum erster Art)<sup>1)</sup>, so dürfen wir die Taylorsche Entwicklung benutzen. Liegt er aber auf einer  $\Gamma_h$  (Minimum zweiter Art)<sup>1)</sup>, so bedarf es einer besonderen Betrachtung.

Es sei also zunächst  $P_\mu = x_\mu, y_\mu, z_\mu$  ein außerhalb aller  $\Gamma_h$  liegender Punkt, für den die Abstandssumme

$$(7) \quad \Sigma r_{h,\mu} \equiv \sum_1^n \sqrt{\xi_{h\mu}^2 + \eta_{h\mu}^2 + \zeta_{h\mu}^2}$$

ihren kleinsten Wert erreicht. ( $\sqrt{\quad}$  deutet an, daß der absolute Wert der Quadratwurzel zu nehmen ist.) Wenn dann  $P' = x', y', z'$  ein benachbarter Punkt, also

$$(8) \quad r^2 = (x' - x_\mu)^2 + (y' - y_\mu)^2 + (z' - z_\mu)^2$$

hinreichend klein und  $r_h'$  sein Abstand von  $\Gamma_h$  ist, so muß

$$(9) \quad \Delta \equiv \Sigma r_h' - \Sigma r_{h,\mu}$$

größer als null oder mindestens gleich null sein (da es in unserem Falle, wie IIB) lehrt, auch eine Minimalstrecke geben kann). Wenn wir nun  $r$  in der Richtung von  $P_\mu$  nach  $P'$ , sowie  $r_{h,\mu}$  in der Richtung von  $P_\mu$  nach  $\Gamma_h$  nehmen und noch  $n$  neue Gerade  $G_{h,\mu}$  einführen, die auf den Ebenen  $(r_{h,\mu}, \Gamma_h)$  oder, was dasselbe ist,  $(P_\mu, \Gamma_h)$  senkrecht stehen, so giebt die Entwicklung der Differenz (9)

$$(10) \quad \Delta \equiv -r \sum_1^n \cos(r, r_{h,\mu}) + \frac{r^2}{2} \sum_1^n \frac{\cos^2(r, G_{h,\mu})}{r_{h,\mu}} + \frac{r^3}{2} \sum_1^n \frac{\cos(r, r_{h,\mu}) \cos^2(r, G_{h,\mu})}{r_{h,\mu}^2}.$$

Denn es wird das erste Glied der Entwicklung

$$V_1 \equiv -\sum_1^n ((x' - x_\mu) \cos(r_{h,\mu}, x) + (y' - y_\mu) \cos(r_{h,\mu}, y) + (z' - z_\mu) \cos(r_{h,\mu}, z)),$$

woraus zufolge der Eigenschaften der Richtungscosinusse<sup>2)</sup> das erste Glied von (10) folgt. — Ferner wird

$$V_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_1^n \frac{1}{r_{h,\mu}} [(x' - x_\mu)^2 (1 - \cos^2 \alpha_h - \cos^2(r_{h,\mu}, x)) - 2(x' - x_\mu)(y' - y_\mu) (\cos \alpha_h \cos \beta_h + \cos(r_{h,\mu}, x) \cos(r_{h,\mu}, y)) \dots],$$

wo der Kürze wegen in der eckigen Klammer eine Reihe von Gliedern weggelassen ist, die man erhält, indem man in den angeführten Gliedern alle  $x, y, \alpha, \beta$  mit  $y, z, \beta, \gamma$  bez.  $z, x, \gamma, \alpha$  vertauscht; obige Formel giebt

$$V_2 \equiv \frac{r^2}{2} \sum_1^n \frac{1}{r_{h,\mu}} [1 - \cos^2(r, \Gamma_h) - \cos^2(r, r_{h,\mu})],$$

<sup>1)</sup> Benennung nach Simon, l. c., Seite 3.

<sup>2)</sup> Sind  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  die Richtungscosinusse von  $r$  und  $\cos \alpha_h, \cos \beta_h, \cos \gamma_h$  die von  $r_h$ , so gilt bekanntlich  $\cos \alpha \cos \alpha_h + \cos \beta \cos \beta_h + \cos \gamma \cos \gamma_h \equiv \cos(r, r_h)$ .

also, da  $\Gamma_h, r_{h\mu}, G_{h\mu}$  drei aufeinander senkrechte Gerade sind, das zweite Glied in (10). — Endlich wäre das dritte Glied der Entwicklung von  $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} V_3 \equiv & \frac{1}{2} \sum_1^n \frac{1}{r_{h\mu}^3} [(x' - x_\mu)^2 (\cos(r_{h\mu}, x) - \cos^2 \alpha_h \cos(r_{h\mu}, x) - \cos^3(r_{h\mu}, x)) \\ & + (x' - x_\mu)^2 (y' - y_\mu) (\cos(r_{h\mu}, y) - \cos^2 \alpha_h \cos(r_{h\mu}, y) - 2 \cos \alpha_h \cos \beta_h \cos(r_{h\mu}, x) \\ & \quad - 3 \cos^2(r_{h\mu}, x) \cos(r_{h\mu}, y)) \\ & + (x' - x_\mu) (y' - y_\mu)^2 (\cos(r_{h\mu}, x) - \cos^2 \beta_h \cos(r_{h\mu}, x) - 2 \cos \alpha_h \cos \beta_h \cos(r_{h\mu}, y) \\ & \quad - 3 \cos(r_{h\mu}, x) \cos^2(r_{h\mu}, y)) \\ & - 2(x' - x_\mu) (y' - y_\mu) (z' - z_\mu) (\cos \beta_h \cos \gamma_h + \cos(r_{h\mu}, y) \cos(r_{h\mu}, z)) \cos(r_{h\mu}, x) \cdot \cdot \cdot], \end{aligned}$$

wo die fehlenden Glieder wiederum durch cyklische Vertauschung von  $x, y, z$ , bez.  $\alpha, \beta, \gamma$  gefunden werden können.  $V_3$  giebt zusammengezogen

$$\begin{aligned} V_3 & \equiv \frac{r^3}{2} \sum_1^n \frac{\cos(r, r_{h\mu})}{r_{h\mu}^3} [1 - \cos^2(r, \Gamma_h) - \cos^2(r, r_{h\mu})]; \\ V_3 & \equiv \frac{r^3}{2} \sum_1^n \frac{\cos(r, r_{h\mu}) \cos^2(r, G_{h\mu})}{r_{h\mu}^3}. \end{aligned}$$

Hieraus läßt sich das Restglied der Taylorsche Reihe ableiten.<sup>1)</sup> Ist nämlich  $P'' = x'', y'', z''$  ein gewisser Punkt zwischen  $P$  und  $P'$ , gelten also für seine Koordinaten die Gleichungen

$$x'' = (1 - \mathcal{D})x_\mu + \mathcal{D}x', \quad y'' = (1 - \mathcal{D})y_\mu + \mathcal{D}y', \quad z'' = (1 - \mathcal{D})z_\mu + \mathcal{D}z', \quad 0 < \mathcal{D} < 1,$$

und bedeuten  $r_{h\mu}$  seinen Abstand von  $\Gamma_h$  und weiter  $\mathcal{G}_{h\mu}$  eine auf der Ebene  $(v_{h\mu}, \Gamma_h)$ , d. h., auf der Ebene  $(P'', \Gamma_h)$  senkrechte Gerade, so müssen wir zur Bildung des Restgliedes jeden  $\cos(r_{h\mu}, x)$ ,  $\cos(r_{h\mu}, y)$ ,  $\cos(r_{h\mu}, z)$ ,  $\cos(r, r_{h\mu})$ ,  $\cos(r, G_{h\mu})$ ,  $r_{h\mu}$  vertauschen mit  $\cos(v_{h\mu}, x)$ ,  $\cos(v_{h\mu}, y)$ ,  $\cos(v_{h\mu}, z)$ ,  $\cos(r, v_{h\mu})$ ,  $\cos(r, \mathcal{G}_{h\mu})$ ,  $v_{h\mu}$ , während das übrige ungeändert bleibt. Das sagt aber nichts anderes, als daß wir jedes  $r_{h\mu}$  mit  $v_{h\mu}$  und jedes  $G_{h\mu}$  mit  $\mathcal{G}_{h\mu}$  vertauschen müssen, während  $r$  bleibt. Also folgt aus dem letzten Wert von  $V_3$  der Wert des Restgliedes in (10).

Nach bekannter Schlußweise kann man aus (10) folgern, daß  $\mathcal{A}$  nur dann sein Zeichen behalten kann, sobald die Identität

$$(11) \quad \sum_1^n \cos(r, r_{h\mu}) \equiv 0$$

besteht, in welche Richtung von  $P_\mu$  aus auch  $r$  gelegt wird, da mit Umlegung der Richtung von  $r$  das Zeichen von  $\cos(r, r_{h\mu})$  wechselt. Denken wir uns links den konstanten Faktor  $k$  hinzugesetzt, so erhalten wir wiederum eine, übrigens bekannte<sup>2)</sup>, mechanische Deutung.

**Satz IX:** „In jedem Minimalpunkte  $P_\mu$ , der außerhalb aller Geraden  $\Gamma_h$  liegt, besitzen die von diesem Punkte auf die  $\Gamma_h$  gefällten Lote solche Richtungen, daß sich gleiche Kräfte, in diesen Richtungen an  $P_\mu$  angreifend, das Gleichgewicht halten.“

(11) liefert nun zugleich drei Gleichungen zur Bestimmung der Koordinaten von  $P_\mu$ . Denn ausführlicher geschrieben giebt es (unter Weglassung des Index  $\mu$ )

<sup>1)</sup> Nach Analogie der Lagrangeschen Restformel für zwei Variable; siehe Harnack, Elemente der Diff.- und Int.-Rechnung, S. 104.

<sup>2)</sup> Siehe Peano, Die Grundzüge der geometrischen Calculs, deutsch von Schepp, Seite 36. — Entsprechende Sätze gelten für einen Minimalpunkt der Summe der Abstände von  $n$  Punkten (Simon, l. c., Seite 32), sowie, wie leicht nachzuweisen ist, von  $m$  Punkten und  $n$  Geraden, vorausgesetzt, daß der Minimalpunkt außerhalb aller Punkte und Geraden liegt. Für  $n$  Gerade gelten zugleich Sätze, die denen von Simon, l. c., Seite 32 u. s. w. entsprechen, deren Anführung wegen Raummangels hier unterbleiben muß.

$$\sum_1^n (\cos(r, x) \cos(r_h, x) + \cos(r, y) \cos(r_h, y) + \cos(r, z) \cos(r_h, z)) = 0,$$

zerfällt also in die drei Gleichungen

$$(12) \quad \sum_1^n \cos(r_h, x) = 0, \quad \sum_1^n \cos(r_h, y) = 0, \quad \sum_1^n \cos(r_h, z) = 0.$$

Diese Gleichungen genügen zur Bestimmung der Koordinaten des Minimalpunktes, haben aber nicht notwendig ein System Lösungen, für das alle  $r_h > 0$  werden. Tritt dieser Fall ein, so besteht eben kein Minimum erster Art.

Es fragt sich nun: ist jeder Punkt  $P_\mu$ , dessen Koordinaten für  $r_h > 0$  (11) oder (12) genügen, ein Minimalpunkt? Für solche Punkte  $P_\mu$  nimmt nach (10)  $\mathcal{A}$  folgende Form an:

$$(13) \quad \mathcal{A} \equiv \frac{r^2}{2} \cdot \sum_1^n \frac{\cos^2(r, G_{h\mu})}{r_{h\mu}} + \frac{r^3}{2} \cdot \sum_1^n \frac{\cos(r, r_{h\mu}) \cos^2(r, \mathfrak{G}_{h\mu})}{r_{h\mu}^2},$$

oder, wie wir einfacher schreiben wollen, es gilt

$$(14) \quad 2\mathcal{A} \equiv r^2 \cdot F_2 + r^3 \cdot F_3.$$

Nun enthält  $F_2$  lauter positive Glieder. Soll es also verschwinden, so müssen alle Glieder einzeln null werden, d. h., es muß irgend eine Richtung  $r'$  von  $r$  geben, für welche gilt

$$(15) \quad \cos(r', G_{h\mu}) = 0, \quad h = 1, 2, \dots, n.^1)$$

Nun sind die  $G_{h\mu}$  nach ihrer Erklärung Lote der Ebenen  $(P_\mu, \Gamma_h)$ , müssen aber nach (15) auch zu  $r'$  senkrecht stehen. Da nun  $r'$  von  $P_\mu$  ausläuft, so kann  $G_{h\mu}$  nur dann auf  $r'$  senkrecht stehen, wenn  $r'$  in die Ebene  $(P_\mu, \Gamma_h)$  fällt, auf der  $G_{h\mu}$  senkrecht steht. Damit also die Gleichungen (15) gleichzeitig bestehen können, ist es notwendig, daß durch  $P_\mu$  eine Gerade läuft, die in allen Ebenen  $(P_\mu, \Gamma_h)$  liegt, d. h. also, die alle  $\Gamma_h$  in endlicher oder unendlicher Entfernung schneidet.<sup>2)</sup> Wir kommen also auch bei der analytischen Behandlung unserer Aufgabe auf den Sonderfall, der sich bei der geometrischen Betrachtung herausstellte.

Sind nun die Gleichungen (15) erfüllt, so liegen  $P_\mu, \Gamma_h, r_{h\mu}, r'$ , also auch noch  $P', P'', r_{h\mu}$  in ein und derselben Ebene. Da nun  $\mathfrak{G}_{h\mu}$  senkrecht steht auf der Ebene  $(P_\mu, r_{h\mu})$ , d. h., auf der Ebene  $(P_\mu, \Gamma_h)$ , so steht es auch senkrecht auf  $r'$ , so daß auch alle  $\cos(r', \mathfrak{G}_{h\mu}) \equiv 0$  werden. Das heißt aber, daß mit  $F_2$  auch stets  $F_3$  und damit  $\mathcal{A}$  identisch verschwindet, oder, was dasselbe ist, daß die Abstandssumme in der Umgebung von  $P_\mu$  konstant ist. Das giebt den wichtigen

**Satz X:** „Verschwindet in dem Punkte  $P_\mu$ , für dessen Koordinaten bei  $r_{h\mu} > 0$  das erste Glied in  $\mathcal{A}$  null wird, auch das zweite Glied, so verschwindet  $\mathcal{A}$  überhaupt. Dieser Fall tritt dann und nur dann ein, wenn sich durch  $P_\mu$  eine Gerade<sup>3)</sup> so legen läßt, daß sie alle  $\Gamma_h$  schneidet<sup>4)</sup>. Auf dieser Geraden ist dann die Abstandssumme über eine ganze Strecke, die  $P_\mu$  in sich enthält, konstant.“

Wir unterscheiden also weiterhin zwei Fälle: Durch  $P_\mu$  kann gar keine und kann eine einzige Gerade laufen, die alle  $\Gamma_h$  schneidet.

<sup>1)</sup> Anstatt der  $n$  Gleichungen (15) kann man auch die eine  $\sum_1^n \cos^2(r', G_{h\mu}) = 0$  setzen.

<sup>2)</sup> Die bisherigen Betrachtungen gelten ganz allgemein für jeden Fall, wo bei  $n$  Geraden der Minimalpunkt außerhalb aller  $\Gamma_h$  liegt. Setzen wir nicht lauter einander kreuzende Gerade voraus, so kann es durch  $P_\mu$  auch mehr als eine Gerade geben, die alle  $\Gamma_h$  schneidet; dann liegen die  $\Gamma_h$  in ein und derselben Ebene, wie schon in II) bemerkt wurde.

<sup>3)</sup> „wenigstens eine Gerade“ im allgemeinen Falle; in unserem Falle, da sich die  $\Gamma_h$  kreuzen, nur eine.

<sup>4)</sup> „in endlicher oder unendlicher Entfernung“, was nicht immer wiederholt werden soll.

A. Durch  $P_\mu = x_\mu, y_\mu, z_\mu$  ( $r_{h\mu} > 0$ ) läßt sich keine Gerade legen, von der alle  $\Gamma_h$  geschnitten werden.

Dann ist  $F_2$  für jede Richtung von  $r$  größer als null. Wir nehmen nun zunächst an,  $P_\mu$  liege in endlicher Entfernung<sup>1)</sup> von allen  $\Gamma_h$ , d. h., um  $P_\mu$  als Mittelpunkt lasse sich eine Kugel mit endlichem Halbmesser  $R$  so legen, daß sie sich keiner  $\Gamma_h$  bis auf unendlich kleinen Abstand nähert, sie also auch weder berührt noch schneidet. Dann sind für alle Punkte im Innern oder auf der Oberfläche dieser Kugel die  $r_h$  endlich. Ferner nehmen wir an, daß auch  $F_2$  endliche Größe besitze, d. h., daß für alle Richtungen von  $r$  die Summe der Quadrate der  $\cos(r, G_{h\mu})$  endlich sei.

Wir legen nun irgend eine Richtung  $r'$  von  $r$  fest und suchen, indem wir mit  $P'$  in dieser Richtung von  $P_\mu$  bis an die Oberfläche der Kugel  $R$  gehen, den größten absoluten Wert von  $\cos(r', r_h) \cos^2(r', \mathfrak{G}_h) : r_h^3$  auf, der nach unseren Festsetzungen keinesfalls unendlich groß ist. Den so erhaltenen Wert setzen wir für jedes  $h$  in  $F_3$  ein und erhalten so in  $F_3'$  einen oberen Grenzwert, den der absolute Wert von  $F_3$  im äußersten Falle erreichen kann (nicht muß), keinesfalls aber überschreitet. Da nun zugleich für die betreffende Richtung  $r'$   $F_2$  einen konstanten endlichen Wert  $F_2'$  besitzt, so ist, so lange sich  $P'$  innerhalb der Kugel  $R$  befindet:

$$(16) \quad \mathcal{A} \geq r^2 \cdot (F_2' - r \cdot F_3').$$

Wir erreichen also sicher, daß  $\mathcal{A} > 0$  wird, sobald wir  $r$  so bestimmen, daß es weniger als der kleinere von den Werten  $R$  und  $\frac{F_2'}{F_3'}$  beträgt. Das aber sind nach unseren Festsetzungen beides endliche Werte. Es giebt also in diesem Falle stets eine Kugel mit endlichem Radius um den Mittelpunkt  $P_\mu$ , innerhalb deren  $\mathcal{A}$  durchaus größer als null ist, und zwar nimmt, wie (14) zeigt,  $\mathcal{A}$  immer mehr und mehr ab, je mehr sich  $r$  bei gegebener Richtung  $r'$  von der oben bestimmten Grenze dem Wert null nähert. Das genügt aber, um  $P_\mu$  als Minimalpunkt zu charakterisieren, da ja  $\mathcal{A}$  rings um  $P_\mu$  nach allen Seiten zunimmt und zwar nicht bloß in unendlicher Nähe von  $P_\mu$ , sondern auch noch in endlicher Entfernung.<sup>2)</sup>

Giebt es nun eine Richtung  $r'$  von  $r$ , für welche  $F_2$  unendlich klein wird, so müssen entweder alle  $\cos(r, G_{h\mu})$  unendlich klein oder nur ein Teil von ihnen unendlich klein, der andere null werden. Nun wird für jeden  $\cos(r, G_{h\mu})$ , der verschwindet, auch der zugehörige  $\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu})$  null; das hatten wir oben gezeigt, doch folgt es auch aus der Gleichung zwischen diesen Kosinussen. Es gilt ja

$\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu}) \equiv \cos(r, \Gamma_h) \cos(\mathfrak{G}_{h\mu}, \Gamma_h) + \cos(r, r_{h\mu}) \cos(\mathfrak{G}_{h\mu}, r_{h\mu}) + \cos(r, G_{h\mu}) \cos(\mathfrak{G}_{h\mu}, G_{h\mu});$   
das giebt, da  $\cos(G_{h\mu}, \Gamma_h) \equiv 0$  ist und da Ebene  $(G_{h\mu}, r_{h\mu})$  ebenso wie Ebene  $(\mathfrak{G}_{h\mu}, r_{h\mu})$  auf  $\Gamma_h$  senkrecht steht,

$$(17) \quad \cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu}) \equiv \frac{\cos(r, G_{h\mu})}{r_{h\mu}} [r \cos(r, r_{h\mu}) + \sqrt{r_{h\mu}^2 - r^2 \cos^2(r, G_{h\mu})}].$$

Hiernach wird aber mit  $\cos(r, G_{h\mu})$  der zugehörige  $\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu})$  nicht nur gleichzeitig null, sondern auch gleichzeitig unendlich klein und zwar, da alle  $r_{h\mu}$  endlich sind, von derselben Ordnung. Ist also für irgend eine Richtung  $r'$   $F_2'$  unendlich klein, so gilt dies auch von  $F_3'$ , und zwar wird es unendlich klein von derselben Ordnung. Daher ist in diesem Falle  $F_2' : F_3'$  ebenfalls endlich und

<sup>1)</sup> D. h. die Entfernung ist weder null noch unendlich klein; denselben Sinn soll das Wort „endlich“ auch weiterhin haben.

<sup>2)</sup> Siehe Scheeffler, Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Variablen, Mathem. Annalen XXXV, Seite 544, wo entsprechendes für ein Minimum bei zwei Variablen festgesetzt wird; es tritt nur dort an Stelle der Kugel, innerhalb deren die Funktion nach allen Richtungen zunehmen muß, ein Kreis.

zugleich von null verschieden, da  $F_2'$  keinesfalls null ist. Es gibt also auch in diesem Falle einen endlichen Bereich, innerhalb dessen  $\mathcal{A}$  von  $P_\mu$  an stetig wächst, wenn auch in der Richtung  $r'$  und in der gerade entgegengesetzten nur unendlich langsam. Also ist auch in diesem Falle  $P_\mu$  Minimalpunkt.

Liegt endlich  $P_\mu$  irgend einer Geraden  $\Gamma_h$ , etwa  $\Gamma_1$ , unendlich nahe, ist also  $r_1$  unendlich klein, genügen aber trotzdem die Koordinaten von  $P_\mu$  den Gleichungen (12) für  $r_h > 0$ , so bilden wir die Differenz  $\mathcal{A}$  in zwei Teilen:

$$(18) \quad \mathcal{A} \equiv (r_1' - r_{1\mu}) + \sum_2^n (r_h' - r_{h\mu}).$$

Da sich die  $\Gamma_h$  nicht unendlich nahe kommen, so sind sicher alle  $r_{h\mu}$  für  $h=2, 3, \dots, n$  endlich, sobald  $r_{1\mu}$  unendlich klein ist. Wir können also das zweite Glied rechts wie früher entwickeln, während wir das erste für sich behandeln müssen. Nun ist, sobald  $P_\mu P' = r$  gesetzt wird,

$$r_1' = \sqrt{r_{1\mu}^2 - 2r_{1\mu}r \cos(r, r_{1\mu}) + r^2 \sin^2(r, \Gamma_1)},$$

wie sich leicht beweisen läßt, wenn man  $r_1'$  auf die Ebene  $(P_\mu, \Gamma_1)$ , in der auch  $r_{1\mu}$  liegt, und  $r$  auf  $r_{1\mu}$  projiziert.

Gehen wir nun zunächst von  $P_\mu$  aus auf einem Strahle, der in der Ebene  $(P_\mu, \Gamma_1)$  liegt, so ist  $\sin^2(r, \Gamma_1) \equiv \cos^2(r, r_{1\mu})$ , also  $r_1' = |r_{1\mu} - r \cos(r, r_{1\mu})|$ . Befinden wir uns also auf derjenigen Seite von  $\Gamma_1$ , wo  $P_\mu$  liegt, so folgt unter Benutzung der früheren Entwicklung, da  $r_1' = r_{1\mu} - r_1 \cos(r, r_{1\mu})$  ist,

$$\mathcal{A} \equiv -r \cos(r, r_{1\mu}) - r \sum_2^n \cos(r, r_{h\mu}) + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3,$$

also zufolge der Identität (11), der ja die Koordinaten von  $P_\mu$  genügen,

$$\mathcal{A} \equiv \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Da nun die Gerade, in der  $r$  liegt,  $\Gamma_1$  schneidet, kann sie nicht alle übrigen Geraden  $\Gamma_h$  schneiden; also ist in dieser Richtung  $\mathcal{A}$  bis an  $\Gamma_1$  nach dem früheren positiv.

Überschreiten wir  $\Gamma_1$ , so folgt  $r_1' = r \cos(r, r_{1\mu}) - r_{1\mu}$ , also

$$\mathcal{A} \equiv -2r_{1\mu} + r \cos(r, r_{1\mu}) - r \sum_2^n \cos(r, r_{h\mu}) + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3,$$

also wegen (11)

$$\mathcal{A} \equiv 2r_1' + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Hierin ist das erste Glied größer als null, und nach dem früheren auch die Summe der anderen Glieder, also sicher  $\mathcal{A} > 0$ . Solange wir also innerhalb der Ebene  $(P_\mu, \Gamma_1)$  bleiben, ist  $\mathcal{A}$  rings um  $P_\mu$  überall positiv und zwar innerhalb eines endlichen Bereiches.

Verlassen wir nun die Ebene  $(P_\mu, \Gamma_1)$ , so wird  $\sin^2(r, \Gamma_1) \equiv \cos^2(r, r_{1\mu}) + \cos^2(r, G_{1\mu})$ , also  $\sin^2(r, \Gamma_1) > \cos^2(r, r_{1\mu})$ , da dann  $r$  nicht mehr senkrecht zu  $G_{1\mu}$  stehen kann. Daher gilt

$$r_1' > \sqrt{r_{1\mu}^2 - 2r_{1\mu}r \cos(r, r_{1\mu}) + r^2 \cos^2(r, r_{1\mu})},$$

$$d. h. \quad r_1' > |r_{1\mu} - r \cos(r, r_{1\mu})|.$$

Ganz entsprechend wie oben läßt sich also zeigen, daß an Stelle des Identitätszeichens überall das Zeichen  $>$  tritt, daß  $\mathcal{A}$  innerhalb eines endlichen Bereiches überall positiv ist. Also folgt der

**Satz XI:** „Jeder Punkt  $P_\mu$ , dessen Koordinaten für  $r_h > 0$  den Gleichungen (12) genügen, ist Minimalpunkt der Abstandssumme, sobald sich durch ihn keine Gerade legen läßt, die alle  $\Gamma_h$  schneidet.“

Da nun in der Umgebung von  $P_\mu$  keine Punkte mit ebenso großer Abstandssumme liegen, sondern  $\mathcal{A}$  überall in der Umgebung von  $P_\mu$  größer als null ist, so ist nach den Ergebnissen von II)  $P_\mu$  einziger Minimalpunkt im ganzen Raume, so daß auf den  $\Gamma_h$  keine weiteren Minimalpunkte liegen können. Man braucht also in diesem Falle die Punkte auf den  $\Gamma_h$  nicht besonders zu untersuchen.

B) Durch  $P_\mu$  geht eine Gerade  $\Gamma$ , von der alle  $\Gamma_h$  geschnitten werden.

Wir haben oben gesehen, daß in diesem Falle  $\mathcal{A}$  für Nachbarnpunkte von  $P_\mu$ , die auf  $\Gamma$  liegen, verschwindet, daß also die Abstandssumme für eine ganze Reihe von Punkten konstant ist. Wie in II) gezeigt wurde, reicht dann die Strecke konstanter Abstandssumme bis an diejenigen Schnittpunkte von  $\Gamma$  mit den  $\Gamma_h$ , die beiderseits am nächsten an  $P_\mu$  liegen.

Für die weiteren Untersuchungen verlegen wir der Einfachheit wegen die  $x$ -Axe nach  $\Gamma$  und den Koordinatenanfang nach  $P_\mu$ . Wir benennen die Schnittpunkte wieder mit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  und ihre Abscissen mit  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , wobei wir annehmen, daß

$$(19) \quad a_1 < a_2 < \dots < a_k < 0 < a_{k+1} < \dots < a_n$$

ist. Dann können wir setzen (indem wir zunächst noch annehmen, daß alle  $A_h$  in der Endlichkeit liegen)

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma r_h &\equiv \sum_1^n \sqrt{(x - a_h - \varrho_h \cos \alpha_h)^2 + (y - \varrho_h \cos \beta_h)^2 + (z - \varrho_h \cos \gamma_h)^2}, \\ \varrho_h &\equiv (x - a_h) \cos \alpha_h + y \cos \beta_h + z \cos \gamma_h, \end{aligned} \right.$$

also wegen (19)

$$(21) \quad \Sigma_\mu r_h \equiv - \sum_1^k a_h \sin \alpha_h + \sum_{k+1}^n a_h \sin \alpha_h.$$

Die Gleichungen, aus denen sich ein Minimalpunkt bestimmt, lauten

$$(22) \quad \sum_1^n \frac{x - a_h - \varrho_h \cos \alpha_h}{r_h} = 0, \quad \sum_1^n \frac{y - \varrho_h \cos \beta_h}{r_h} = 0, \quad \sum_1^n \frac{z - \varrho_h \cos \gamma_h}{r_h} = 0.$$

Soll also  $P_\mu = 0,0,0$  ihnen genügen, so müssen die  $\Gamma_h$  folgende Identitäten erfüllen:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^k \sin \alpha_h - \sum_{k+1}^n \sin \alpha_h &\equiv 0; \quad - \sum_1^k \cot \alpha_h \cos \beta_h + \sum_{k+1}^n \cot \alpha_h \cos \beta_h \equiv 0; \\ - \sum_1^k \cot \alpha_h \cos \gamma_h + \sum_{k+1}^n \cot \alpha_h \cos \gamma_h &\equiv 0. \end{aligned} \right.$$

Wir nehmen also an, daß diesen Identitäten durch die  $\Gamma_h$  genügt wird.

Ist nun  $P_\nu$  ein beliebiger Punkt zwischen  $A_k$  und  $A_{k+1}$ , also  $a_k < x_\nu < a_{k+1}$ ,  $y_\nu = 0$ ,  $z_\nu = 0$ , so folgt

$$\Sigma_\nu r_h \equiv \sum_1^k (x_\nu - a_h) \sin \alpha_h + \sum_{k+1}^n (a_h - x_\nu) \sin \alpha_h \equiv x_\nu \left( \sum_1^k \sin \alpha_h - \sum_{k+1}^n \sin \alpha_h \right) + \Sigma_\mu r_h,$$

also wegen der ersten Identität (23)

$$\Sigma_\nu r_h \equiv \Sigma_\mu r_h.$$

Dasselbe gilt auch noch, wenn  $P_\nu$  auf  $A_k$  oder  $A_{k+1}$  rückt, wie leicht zu beweisen ist. Rückt aber  $P_\nu$  auf  $\Gamma$  über  $A_k$  hinaus, so daß etwa  $a_l < x_\nu < a_{l+1} \leq a_k$  ist, so folgt

$$\begin{aligned} \Sigma_\nu r_h &\equiv \sum_1^l (x_\nu - a_h) \sin \alpha_h + \sum_{l+1}^n (a_h - x_\nu) \sin \alpha_h \equiv x_\nu \left( \sum_1^l \sin \alpha_h - \sum_{k+1}^n \sin \alpha_h \right) \\ &\quad - \sum_1^k a_h \sin \alpha_h + \sum_{k+1}^n a_h \sin \alpha_h + 2 \sum_{l+1}^k (a_h - x_\nu) \sin \alpha_h, \end{aligned}$$

also in Rücksicht auf die erste Identität (23) und auf (21)

$$(24) \quad \Sigma_\nu r_h \equiv \Sigma_\mu r_h + 2 \sum_{l+1}^k (a_h - x_\nu) \sin \alpha_h > \Sigma_\mu r_h,$$

da  $x_\nu < a_h$  ist für alle Indices  $h$ , die größer als  $l$  sind. Entsprechendes gilt, sobald wir auf  $\Gamma$  über  $A_{k+1}$  hinausgehen. Zugleich ist unmöglich, da alle  $\sin \alpha_h > 0$  sind, daß  $P_\mu$  auf einen der beiden Halbstrahlen auf  $\Gamma$  rückt. (Alles dies ist in II) schon besprochen, mag aber hier im analytischen Teile nochmals erwähnt werden.)

Wir untersuchen nun zunächst Punkte  $P^\nu$  in der Umgebung von  $A_k$ . Solche Punkte sind bestimmt durch  $x' = a_k + r \cos \alpha$ ,  $y' = r \cos \beta$ ,  $z' = r \cos \gamma$ ; also wird für sie  $r_k' = r \sin(r, \Gamma_k)$ . Daher ist

$$(25) \quad \mathcal{A} \equiv r \sin(r, \Gamma_k) + \sum_1^n (r_{h'} - r_{h\mu}),$$

wo der Accent beim Summenzeichen andeuten soll, daß der Index  $k$  bei der Summierung zu überspringen ist. Die Summe in (25) enthält nur endliche (d. h., nicht unendlich kleine) Abstände, da ja keine Gerade  $\Gamma_h$  unendlich nahe an  $\Gamma_k$  herankommt, so daß wir sie wie früher entwickeln dürfen. Also folgt

$$(26) \quad \mathcal{A} \equiv r \left( \sin(r, \Gamma_k) - \sum_1^n \cos(r, r_{h\mu}) \right) + \frac{r^2}{2} \sum_1^n \frac{\cos^2(r, G_{h\mu})}{r_{h\mu}} + \frac{r^3}{2} \sum_1^n \frac{\cos(r, r_{h\mu}) \cos^2(r, \mathcal{G}_{h\mu})}{r_{h\mu}^2},$$

Nun ist nach (5)

$$\cos(r_{h\mu}, x) \equiv - \frac{(a_k - a_h) \sin \alpha_h}{|a_k - a_h|}, \quad \cos(r_{h\mu}, y) \equiv \frac{(a_k - a_h) \cot \alpha_h \cos \beta_h}{|a_k - a_h|}, \\ \cos(r_{h\mu}, z) \equiv \frac{(a_k - a_h) \cot \alpha_h \cos \gamma_h}{|a_k - a_h|},$$

also wegen (19)

$$\cos(r, r_{h\mu}) \equiv \begin{cases} -\cos \alpha \sin \alpha_h + \cos \beta \cot \alpha_h \cos \beta_h + \cos \gamma \cot \alpha_h \cos \gamma_h, & h < k; \\ \cos \alpha \sin \alpha_h - \cos \beta \cot \alpha_h \cos \beta_h - \cos \gamma \cot \alpha_h \cos \gamma_h, & h > k. \end{cases}$$

Das giebt infolge der Identitäten (23)

$$(27) \quad \sum_1^n \cos(r, r_{h\mu}) \equiv \cos \alpha \sin \alpha_k - \cos \beta \cot \alpha_k \cos \beta_k - \cos \gamma \cot \alpha_k \cos \gamma_k.$$

Fällen wir nun von irgend einem Punkte der Strecke  $A_k A_{k+1}$ , etwa vom Koordinatenanfang, das Lot auf  $\Gamma_k$  und nennen es  $r_{k\theta}$ , so ist

$$\cos(r_{k\theta}, x) \equiv -\sin \alpha_k, \quad \cos(r_{k\theta}, y) \equiv \cot \alpha_k \cos \beta_k, \quad \cos(r_{k\theta}, z) \equiv \cot \alpha_k \cos \gamma_k,$$

also nach (27)

$$\cos(r, r_{k\theta}) \equiv -\cos \alpha \sin \alpha_k + \cos \beta \cot \alpha_k \cos \beta_k + \cos \gamma \cot \alpha_k \cos \gamma_k \equiv -\sum_1^n \cos(r, r_{h\mu}).$$

Setzen wir dies in (26) ein und nennen wiederum die Koeffizienten von  $\frac{r^2}{2}$  und  $\frac{r^3}{2}$   $F_2$  und  $F_3$ , so folgt

$$(28) \quad \mathcal{A} \equiv r (\sin(r, \Gamma_k) + \cos(r, r_{k\theta})) + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Wir legen zunächst  $r$  in die Ebene  $(\Gamma_k, r_{k\theta})$ , d. h., in die Ebene  $(\Gamma, \Gamma_k)$ . Dann wird  $\sin^2(r, \Gamma_k) \equiv \cos^2(r, r_{k\theta})$ , also  $\cos(r, r_{k\theta}) \equiv \pm \sin(r, \Gamma_k)$ . Nun laufen von  $A_k$  aus 4 feste Strahlen: die zwei auf  $\Gamma$  und die zwei auf  $\Gamma_k$ ; von jenen nennen wir den, auf dem  $A_k A_{k+1}$  liegt,  $\Gamma'$ , den anderen  $\Gamma''$ , während wir diese beliebig mit  $\Gamma_k'$  und  $\Gamma_k''$  bezeichnen. Liegt  $P^\nu$  auf  $\Gamma'$ , so ist  $\mathcal{A} \equiv 0$ , wie schon

oben bewiesen; liegt es aber auf  $\Gamma'$ , so ist  $\mathcal{A} > 0$  und wächst, wie (24) zeigt, um so mehr, je weiter  $P'$  nach  $-\infty$  zu läuft. Legen wir weiter  $r$  auf  $\Gamma_k'$  oder  $\Gamma_k''$ , so wird  $\sin(r, \Gamma_k) \equiv \cos(r, r_{k0}) \equiv 0$ , also

$$\mathcal{A} \equiv \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Da nun  $\Gamma_k$  keine von den anderen Geraden schneidet, so ist  $F_2$  größer als null und endlich (nicht unendlich klein) und  $F_3$  keinesfalls unendlich groß; also wächst  $\mathcal{A}$  in der Nähe von  $A_k$ , wie schon früher bewiesen, innerhalb eines endlichen Bereiches auf  $\Gamma_k$ , ist also zugleich Minimalpunkt auf  $\Gamma_k$ .

Legen wir nun  $r$  in einen der beiden Winkel auf der Ebene  $(\Gamma, \Gamma_k)$ , die  $\Gamma'$  als Schenkel enthalten, so wird  $\cos(r, r_{k0}) \equiv +\sin(r, \Gamma_k)$ ,<sup>1)</sup> also

$$\mathcal{A} \equiv 2r \sin(r, \Gamma_k) + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Es läßt sich hier genau wie früher zeigen, daß  $\mathcal{A}$  innerhalb eines endlichen Bereiches um  $A_k$  positiv ist, zumal mit  $\sin(r, \Gamma_k)$  alle  $\cos(r, G_{h\mu})$  und  $\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu})$  unendlich klein von derselben Ordnung werden und alle  $r_{h\mu} > 0$  und endlich sind.

Legen wir endlich  $r$  in einen der beiden Winkel auf der Ebene  $(\Gamma, \Gamma_k)$ , von denen  $\Gamma'$  (also  $A_k A_{k+1}$ ) Schenkel ist, so wird  $\cos(r, r_{k0}) \equiv -\sin(r, \Gamma_k)$ <sup>1)</sup>, also

$$\mathcal{A} \equiv \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Diese Differenz ist null auf  $A_k A_{k+1}$ , im übrigen aber, da mit  $F_2$  auch  $F_3$  stets unendlich klein von derselben Ordnung wird und  $F_2$  positiv ist, innerhalb eines endlichen Bereiches um  $A_k$  größer als null, wenn auch in der Nähe von  $A_k A_{k+1}$  nur um unendlich wenig.

Verläßt endlich  $r$  die Ebene  $(\Gamma, \Gamma_k)$ , so wird  $\sin^2(r, \Gamma_k) > \cos^2(r, r_{k0})$  (wäre  $G_{k0}$  noch eine dritte, auf  $\Gamma_k$  und  $r_{k0}$  senkrechte Gerade, so wäre  $\sin^2(r, \Gamma_k) \equiv \cos^2(r, r_{k0}) + \cos^2(r, G_{k0})$ , woraus obige Ungleichung folgt, da für Strahlen, die von  $A_k$  aus die Ebene  $(\Gamma, \Gamma_k)$  verlassen, Winkel  $(r, G_{k0}) \leq 90^\circ$ ) ist. Also wird

$$\mathcal{A} > 2r |\cos(r, r_{k0})| + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Nun ist für alle Strahlen  $r$ , die nicht in der Ebene  $(\Gamma, \Gamma_k)$  liegen, Winkel  $(r, r_{k0}) \geq 90^\circ$ , also das erste Glied entschieden größer als null. Da auch das zweite größer als null ist und sich unschwer zeigen läßt, daß mit unendlich abnehmendem  $|\cos(r, r_{k0})|$  auch  $F_2$  und  $F_3$  unendlich klein von derselben Ordnung werden, so ist wiederum  $\mathcal{A}$  in einem endlichen Bereiche um  $A_k$  durchaus größer als null.

Wie wir uns also auch von  $A_k$  aus bewegen, die Differenz  $\mathcal{A}$  bleibt innerhalb eines endlichen Bereiches entweder größer als null oder sinkt höchstens bis null herab. Entsprechendes können wir auch von der Umgebung des Punktes  $A_{k+1}$ , wie von der Umgebung jedes Punktes zwischen  $A_k$  und  $A_{k+1}$  nachweisen. Also sind alle diese Punkte nach unserer erweiterten Erklärung Minimalpunkte. Es folgt daher als Ergänzung des Satzes XI

**Satz XII:** „Auch wenn durch einen Punkt  $P_\mu$ , dessen Koordinaten für  $r_h > 0$  den Gleichungen (12) genügen, eine Gerade  $\Gamma$  läuft, die alle  $\Gamma_h$  schneidet, ist  $P_\mu$  Minimalpunkt. Doch giebt es in diesem Falle eine Minimalstrecke, die von  $P_\mu$  bis an die beiderseits zunächst liegenden Schnittpunkte von  $\Gamma$  mit den  $\Gamma_h$  reicht.“

<sup>1)</sup> Man muß beachten, daß  $r$  und  $r_{k0}$  beide von  $\Gamma$  weg gerichtet sind.

Wir hatten zwar oben angenommen, daß keine von den Geraden  $I_h$  zu  $\Gamma$  parallel läuft. Ist dies aber doch der Fall, also etwa  $I_1$  parallel zu  $\Gamma$ , so ändert sich an der Schlußweise nichts, indem sich die Entwicklung der Summe nur für  $r_1$  unwesentlich umgestaltet. Auch in diesem Falle ist also der Satz XII richtig.

Damit wäre die Frage nach einem Minimum erster Art, wo es also außerhalb der  $I_h$  Minimalpunkte giebt, vollständig erledigt. Die Voraussetzung dazu ist, daß die Gleichungen (12) ein Lösungssystem besitzen, für das alle  $r_h > 0$  werden. Da das nicht notwendig der Fall ist, so müssen wir weiter fragen: was tritt ein, sobald die Gleichungen (12) kein Lösungssystem für  $r_h > 0$  besitzen?

Da jedenfalls ein Minimalpunkt vorhanden sein muß, so tritt dann bestimmt ein Minimum zweiter Art ein. Wir brauchen also nur auf jeder  $I_h$  den Minimalpunkt nach II B) zu suchen und die  $n$  Abstandssummen untereinander zu vergleichen, um den Punkt mit der kleinsten Abstandssumme als Minimalpunkt im Raume ansprechen zu können. (Da außerhalb der  $I_h$  keine Minimalpunkte liegen sollen und alle  $I_h$  einander kreuzen, so giebt es nach II B) nur einen einzigen Minimalpunkt.) Stellen wir wieder die Differenz  $\mathcal{A}$  zwischen der Abstandssumme des betreffenden Punktes  $P_\mu$ , der auf  $I_1$  liegen möge, und der Abstandssumme eines benachbarten Punktes her, so ergeben sich durch Entwicklungen, die denen in III B) sehr ähnlich sind, die Bedingungen für den Minimalpunkt:

$$(29) \quad \sum_2^n \cos(r_{h\mu}, I_1) \equiv 0;$$

$$(30) \quad \left( \sum_2^n \cos(r_{h\mu}, r_1) \right)^2 + \left( \sum_2^n \cos(r_{h\mu}, G_1) \right)^2 \leq 1.$$

Hierin sind  $r_1$  und  $G_1$  zwei auf einander und auf  $I_1$  senkrechte, im übrigen beliebige Gerade. (29) liefert wieder den Satz VI; aus beiden Bedingungen aber gewinnt man den

**Satz XIII:** „Ist ein Punkt  $P_\mu$  auf  $I_1$  alleiniger Minimalpunkt und greifen an ihm in der Richtung der  $r_{h\mu}$   $n - 1$  gleiche Kräfte  $k$  an, so setzen sich diese zusammen zu einer Resultante, die senkrecht auf  $I_1$  steht und höchstens die Größe  $k$  besitzt.“

Sehr einfach können wir endlich ableiten den

**Satz XIV:** „Ist in (30) die linke Seite identisch null, so ist  $P_\mu$  zugleich Minimalpunkt der  $n - 1$  Geraden  $I_2, \dots, I_n$  allein; ist sie aber größer als null, so verliert  $P_\mu$  seine Minimaleigenschaft, sobald  $I_1$  weggelassen wird.“

Mit diesen Sätzen finde die Untersuchung der einander kreuzenden Geraden ihren Abschluß. Vielleicht bietet sich Gelegenheit, später einmal auf den allgemeinen Fall zurückzukommen.



Wir hatten zwar oben gesehen, dass dies aber doch der Fall, also sich die Entwicklung der Summe der Satz XII richtig.

Damit wäre die Frage, ob Minimalpunkte gibt, vollständige Lösungssystem besitzen, für wir weiter fragen: was tritt ein?

Da jedenfalls ein Minimalpunkt zweiter Art ein. Wir brauchen die  $n$  Abstandssummen unterhalb als Minimalpunkt im Raum liegen sollen und alle  $I_h$  ein Stellen wir wieder die Differenz auf  $I_1$  liegen möge, und der Entwicklungen, die denen in

(29)

(30)

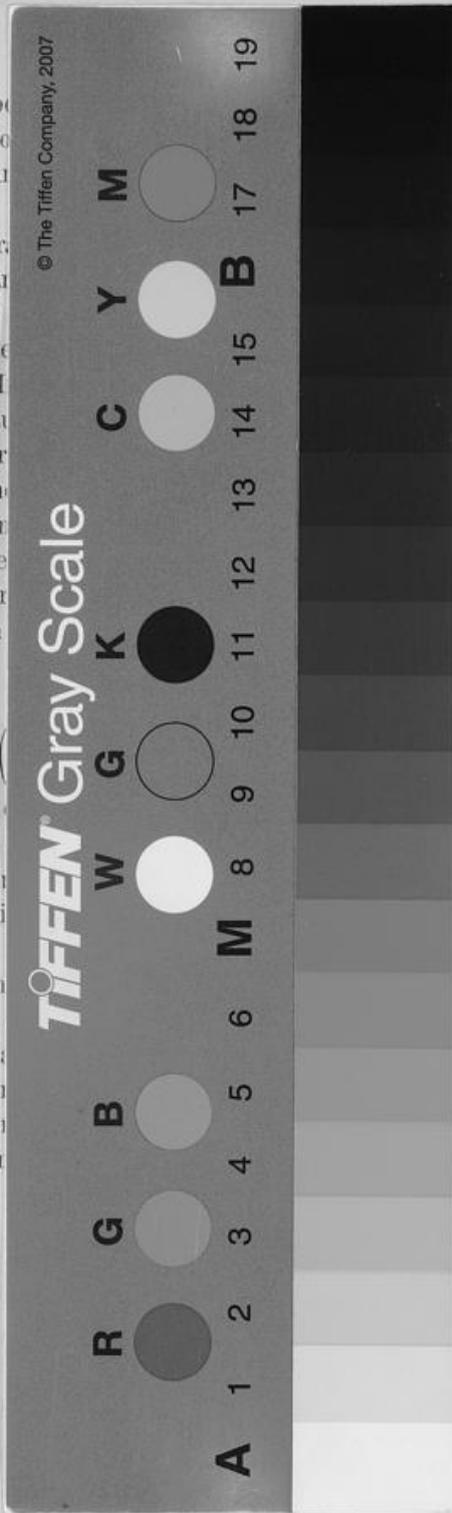
Hierin sind  $r_1$  und  $r_2$  (29) liefert wieder den Satz

**Satz XIII:** „Ist ein Punkt in der Richtung der  $r_{h\mu}$   $n - 1$  Geraden senkrecht auf  $I_1$  steht und

Sehr einfach können

**Satz XIV:** „Ist in  $n - 1$  Geraden  $I_2, \dots, I_n$  eine Gerade, sobald  $I_1$  weggelassen

Mit diesen Sätzen für die Geraden. Vielleicht bietet sich Gelegenheit



Geraden  $I_h$  zu  $I$  parallel läuft. Ist  $I$  an der Schlussweise nichts, indem  $I$  ist. Auch in diesem Falle ist also

wo es also außerhalb der  $I_h$  ist, dass die Gleichungen (12) ein notwendig der Fall ist, so müssen Lösungssystem für  $r_h > 0$  besitzen? tritt dann bestimmt ein Minimum (Minimalpunkt nach II B) zu suchen und mit der kleinsten Abstandssumme innerhalb der  $I_h$  keine Minimalpunkte (nur einen einzigen Minimalpunkt.) des betreffenden Punktes  $P_\mu$ , der von dem Punkte her, so ergeben sich durch die Gleichungen für den Minimalpunkt:

1.

Gerade, im übrigen beliebige Gerade. Nimmt man den Punkt und greifen an ihm in der Richtung der Geraden zusammen zu einer Resultante, die

ist  $P_\mu$  zugleich Minimalpunkt der Geraden, so verliert  $P_\mu$  seine Minimaleigenschaft. In dem Fall zurückzukommen.