Über die Punkte kleinster Summe der absoluten Abstände von n Geraden.

Von

Georg Baldauf,

Gymnasialoberlehrer.

Wissenschaftliche Beilage zu dem Programme des Königlichen Gymnasiums zu Plauen i. V.

Ostern 1898.

1898. Progr.-No. 568.

Über die Punkte

kleinster Summe der absoluten Abstände von n Geraden.

Von

Georg Baldauf,

Gymnasialoberlehrer.

Wissenschaftliche Beilage zu dem Programme des Königlichen Gymnasiums zu Plauen i. V.

Ostern 1898.

Leipzig.

Druck von Julius Klinkhardt.

1898.

1898. Prgr.-No. 68.

Einer Aufgabe, die Herr Professor Mayer im mathematischen Seminare der Universität Leipzig stellte, verdankt Verfasser die erste Anregung zu nachfolgenden Untersuchungen. Die Aufgabe verlangte, den Punkt kleinster Summe der absoluten Abstände von drei im Raume sich rechtwinklig kreuzenden Geraden zu bestimmen. Ihre Erweiterung führte auf n Gerade im Raume und hier vor allem auf die Frage, ob die Abstandssumme auch für n Gerade stets nur einen einzigen Minimal- und nie einen endlichen Maximalwert besitzt. Bei Feststellung der Kriterien, durch die diese Frage entschieden wird, erforderte besonders der Fall von n Geraden ein und derselben Ebene eingehende Behandlung. Daher beschäftigt sich der erste Teil mit ihm und mit mehreren andern Unterfällen, während der zweite die oben gestellte Frage bejaht und ein dritter n sich kreuzende Gerade behandelt.

Seinem hochgeschätzten Lehrer, Herrn Professor Mayer in Leipzig, sowie den verehrten Herren Professor Dedekind in Braunschweig und Dr. Heymann in Chemnitz fühlt sich Verfasser für gütige Erteilung verschiedener Auskünfte zu besonderem Danke verpflichtet.

Der absolute Abstand eines beweglichen Punktes P von einer festen Geraden Γ kann beliebig wachsen und andrerseits bis zur Grenze Null herabsinken, die stets dann und nur dann erreicht wird, wenn P auf Γ selbst rückt. Sind also mehrere Gerade $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ gegeben, so kann durch Lageänderung des Punktes P die Summe seiner absoluten Abstände von diesen Geraden (kurz gesagt, seine Abstandssumme)[1]) zwar beliebig groſs, aber nicht beliebig klein, jedenfalls nicht kleiner als Null gemacht werden. Es muſs also einen unteren Grenzwert geben, den die Abstandssumme wohl erreichen, unter den sie aber nicht herabsinken kann.

Nehmen wir nun zwei einander kreuzende Gerade an, so wird der Grenzwert erreicht für alle Punkte ihres gemeinsamen Lotes, die zwischen beiden Geraden liegen. Alle diese Punkte besitzen gleichgroſse Abstandssummen, die aber kleiner sind, als die Abstandssummen aller übrigen Raumpunkte.

Nehmen wir andrerseits zwei einander parallele Gerade an, so wird der Grenzwert erreicht für alle Punkte des ebenen Streifens, der zwischen beiden Geraden liegt, während alle andren beliebig in derselben Ebene oder im Raume gelegenen Punkte gröſsere Abstandssummen, d. h. gröſsere Summen ihrer absoluten Abstände von jenen Geraden, besitzen.

[1]) Unter der **Abstandssumme** eines Punktes wird künftighin immer die Summe seiner **absoluten** Abstände von den gegebenen Geraden verstanden, wie denn auch überall da, wo dies nicht besonders erwähnt ist, alle Abstände absolut zu nehmen sind. Die Abstandssumme wird symbolisch mit Σr_h bezeichnet werden.

Schneiden sich die beiden Geraden in der Endlichkeit, so wird der Grenzwert erreicht für ihren Schnittpunkt.

Wir erkennen also aus diesen drei einfachsten Fällen, daſs den unteren Grenzwert der Abstandssumme nicht nur einzelne Punkte, sondern auch Punkte einer Linie oder einer Fläche besitzen können. Diesen unteren Grenzwert wollen wir den Minimalwert der Abstandssumme nennen, wobei wir uns allerdings bewuſst sind, hin und wieder das Wort Minimum in einem weiteren Sinne zu benutzen, als dies sonst üblich ist. Wir stellen uns nun die

Aufgabe: „Gegeben sind n Gerade $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ in beliebiger Lage im Raume. Es sollen diejenigen Punkte, für welche die Summe ihrer absoluten Abstände $r_1, r_2, \ldots r_n$ von jenen Geraden ihren Minimalwert besitzt, gefunden und soll zugleich gezeigt werden, daſs endliche Maximalwerte nicht vorkommen."

I. Unterfälle.

Es sind dies die folgenden:

A) Alle Geraden schneiden einander in ein und demselben in der Endlichkeit gelegenen Punkte.

B) Alle Geraden laufen einander parallel.

C) Alle Geraden besitzen ein und dieselbe Gerade als gemeinsames Lot.

D) Alle Geraden liegen in ein und derselben Ebene.

Die Fälle können zum Teil ineinander übergreifen, z. B., wenn lauter parallele Gerade vorhanden sind, die zugleich alle in derselben Ebene liegen, so daſs sie auch gemeinsame Lote besitzen.

A) Alle Geraden Γ_h schneiden einander in ein und demselben, in der Endlichkeit gelegenen Punkte A.

Nehmen wir auf einem beliebig von A aus gelegten Strahle AX den Punkt P beliebig an, so gilt für den absoluten Abstand r_h des Punktes P von der Geraden Γ_h

$$r_h = AP \cdot \sin\,(AX,\ \Gamma_h),$$

wo AP und $\sin\,(AX, \Gamma_h)$ beide positiv zu nehmen sind. Nun kann AX höchstens mit einer von den Geraden Γ_h zusammenfallen, so daſs höchstens einer von den Sinus null werden kann, während alle andren sicher gröſser als null sind. Also ist die Abstandssumme des Punktes P

$$\Sigma r_h = AP \cdot \sum_1^n{}_h \sin\,(AX,\ \Gamma_h) > 0.$$

Lassen wir nun P auf AX von A wegrücken, so wird AP gröſser, während die Sinus alle ungeändert bleiben; also vergröſsert sich die Abstandssumme. Rückt umgekehrt P auf AX nach A zu, so wird die Abstandssumme immer kleiner, bis sie in A selbst mit AP den Wert null erreicht. Ein Punkt P auſserhalb A kann also unmöglich ausgezeichneter Punkt[1]) sein, da in seiner Nähe Punkte sowohl mit gröſserer als mit kleinerer Abstandssumme, als sie P besitzt, gelegen sind. Daher ist der Schnittpunkt A der Geraden Γ_h einziger und absoluter Minimalpunkt.

B) Alle Geraden Γ_h laufen einander parallel (schneiden einander in ein und demselben unendlich weit gelegenen Punkte).

---

[1]) d. h. Maximal- oder Minimalpunkt.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt P im Raume an und legen durch ihn die Gerade MN parallel zu den Γ_h, so besitzt jeder andere Punkt Q auf MN dieselbe Abstandssumme wie P, da für P und Q die einzelnen r_h dieselbe Länge besitzen. Es tritt also hier ein ausgezeichneter Wert für alle Punkte einer unendlichen Geraden ein. Wir legen nun durch P eine Ebene ε senkrecht zu den Γ_h; sie möge Γ_h in A_h schneiden. Dann sind die PA_h die von P auf die Γ_h gefällten Lote. Soll also die Abstandssumme für P ein Minimum werden, so brauchen wir P in ε nur so zu bestimmen, daſs die Summe seiner Abstände von den Punkten A_h ein Minimum wird. Haben wir einen solchen Punkt P_μ [1]) bestimmt, so löst die durch ihn parallel zu den Γ_h gelegte Gerade Γ_μ unsere Aufgabe.

Aus früheren Untersuchungen [2]) ist bekannt, daſs es nur einen einzigen Punkt, bezw. Punkte einer einzigen Strecke giebt, deren Abstandssumme von den A_h ein Minimum wird, daſs aber Maximalpunkte nicht vorkommen; und zwar ist eine Minimalstrecke nur dann möglich, wenn alle Punkte A_h in ein und derselben Geraden liegen und in gerader Anzahl vorhanden sind, wobei sie dann zwischen den mittelsten Punkten enthalten ist.

Also giebt es auch nur eine einzige Minimalgerade G_μ, bezw. einen einzigen ebenen Minimalstreifen, und zwar letzteren nur dann, wenn alle parallelen Geraden in ein und derselben Ebene liegen und in gerader Anzahl vorhanden sind; dann liegt der Minimalstreifen zwischen den beiden mittleren Geraden.

C) Die Geraden Γ_h besitzen ein und dieselbe Gerade Γ, von der jede Γ_h in A_h geschnitten wird, als gemeinsames Lot.

Es giebt in diesem Falle wiederum nur Minimalpunkte und zwar auf Γ. Zum Zwecke des Beweises fällen wir von einem beliebig gelegenen Punkt P das Lot PC_h auf die Ebene (Γ, Γ_h) und von C_h das Lot C_hB_h auf Γ_h und das Lot CB auf Γ. Alsdann ist bekanntlich auch PB_h Lot auf Γ_h und PB Lot auf Γ, B also für alle Γ_h derselbe Punkt auf Γ. Da nun $A_hBC_hB_h$ ein ebenes Viereck mit drei Rechten ist, so ist $BA_h = C_hB_h$. Da aber B_hC_hP auch ein Rechter ist, so ist $PB_h > C_hB_h$ und höchstens dann gleich C_hB_h, wenn P in die Ebene (Γ, Γ_h) fällt. P hat also von Γ_h gröſseren und nur im letzteren Falle denselben Abstand, als der Fuſspunkt B des von P auf Γ gefällten Lotes.

Nehmen wir nun an, daſs nicht alle Γ_h einander parallel sind (welcher Fall schon in B) erledigt ist), so kann P nicht gleichzeitig in alle Ebenen (Γ, Γ_h) fallen. Also ist die Abstandssumme für P gröſser als für B, so daſs nur auf Γ absolute Minimalpunkte liegen können. Nehmen wir dann Q auf BP an und fällen $QE_h \perp$ Ebene (Γ, Γ_h) und $E_hD_h \perp \Gamma_h$, so daſs auch $QD_h \perp \Gamma_h$ ist, so gilt $QD_h \gtrless PB_h$, je nachdem Q zwischen B und P oder über P hinaus liegt ($D_hE_h = B_hC_h$, $QE_h \gtrless PC_h$, $QE_hD_h = PC_hB_h = R$, also $QD_h \gtrless PB_h$). Geht also ein beweglicher Punkt auf BP von B nach der Unendlichkeit, so nimmt seine Abstandssumme beständig zu. Also kann auſserhalb Γ kein ausgezeichneter Punkt liegen. Nehmen wir nun einen Punkt P auf Γ an, so ist die Summe seiner absoluten Abstände von den Γ_h dargestellt durch die Summe seiner absoluten Abstände von den A_h, da ja alle Γ_h auf Γ senkrecht stehen. Es gilt also, P in Γ so zu bestimmen, daſs die Summe seiner absoluten Abstände von n Punkten A_h dieser Geraden ein Minimum wird. Wie bekannt, fällt der Minimalpunkt bei ungerader Anzahl der gegebenen Punkte, also auch der gegebenen Geraden, auf

---

[1]) Der Index μ bei Punkten, Geraden, Abständen u. s. w. soll künftighin immer andeuten, daſs ein Minimalpunkt in Frage kommt.

[2]) Simon, Über den Punkt kleinster Entfernungssumme und die Flächen $\Sigma r_n = \text{const.}$; Dissertation, Halle 1887. Dieser Dissertation verdankt Verfasser dieses viele Anregungen.

den mittelsten Punkt $A_{\frac{n+1}{2}}$. Bei gerader Anzahl der Punkte A_h, also auch der Geraden Γ_h, tritt dagegen das Minimum für alle Punkte der mittelsten Strecke auf Γ_h, $A_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}+1}$, ein. Maximalpunkte giebt es auch hier nicht.

D) Alle Geraden Γ_h liegen in ein und derselben Ebene ε.

Man kann nachweisen, dafs nur Minimalpunkte vorhanden sind und zwar nur in ε. Wir fällen dazu von einem beliebigen Punkte P aufserhalb ε das Lot auf ε und von seinem Fufspunkte B aus die Lote BB_h auf die Geraden Γ_h; alsdann sind auch die PB_h Lote der Γ_h. Also stellt PB_h den Abstand des Punktes P, BB_h den des Punktes B von Γ_h dar. Da $PBB_h = 90^\circ$ ist, so ist $PB_h > BB_h$. Also ist die Abstandssumme für P gröfser als für B.

Liegt weiter Q beliebig auf BP, so ist sein Abstand von Γ_h QB_h. Dann ist $QB_h \lesseqgtr PB_h$, je nachdem Q zwischen B und P oder über P hinausliegt. Bewegt sich also ein Punkt von B aus auf dem Lote der Ebene ε, so wächst seine Abstandssumme beständig, ohne je wieder abzunehmen. Aufserhalb ε kann also kein ausgezeichneter Punkt und in ε selbst können nur Minimalpunkte liegen. Danach kann es, solange wir Punkte des ganzen Raumes betrachten, in ε nur eine einzige Stelle geben, deren Punkte den Minimalwert der Abstandssumme besitzen.

Für die weiteren Betrachtungen fassen wir also nur Punkte der Ebene ε ins Auge. Hierbei dürfen wir aber nicht ohne weiteres annehmen, dafs, solange wir uns auf Punkte der Ebene ε beschränken, nur ein einziges Minimum existiert. Wir werden vielmehr auch für die Punkte der Ebene ε den Beweis noch besonders zu führen haben.

Wir beziehen nun in ε die Geraden Γ_h auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, indem wir die Hessesche Normalform benutzen:

(1) $$x \cos \alpha_h + y \sin \alpha_h - p_h = 0,\ p_h \geqq 0.$$

Dann ist der absolute Abstand irgend eines Punktes $P = x, y$ der Ebene ε von Γ_h bestimmt durch

(2) $$r_h = | p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h | \equiv | \mathfrak{p}_h |,$$

wo das Einschliefsen in || andeutet, dafs der absolute Wert der betreffenden Gröfse zu nehmen ist, während $\mathfrak{p}_h$ selbst positiv, null oder negativ ist, je nachdem P mit dem Koordinatenanfange auf derselben Seite von Γ_h liegt oder auf Γ_h fällt oder vom Koordinatenanfange aus jenseits Γ_h gelegen ist. Die Abstandssumme des Punktes $P = x, y$ ist also

(3) $$\Sigma r_h \equiv \sum_1^n h \, | \mathfrak{p}_h |.$$

Sie soll zu einem Minimum gemacht werden, wobei also, wie oben gesagt, nur Punkte der Ebene ε untereinander hinsichtlich ihrer Abstandssumme verglichen werden.

Bei stetiger Änderung von x und y ändert sich $\mathfrak{p}_h$ auch stetig. Da also $\mathfrak{p}_h$ in der Endlichkeit von positiven zu negativen Werten nur durch null übergehen kann, so ändert sich auch $| \mathfrak{p}_h |$ mit x und y stetig. Dabei kann es nur dann null werden, wenn P auf Γ_h rückt, bleibt aber sonst gröfser als null. Also mufs es auch in ε wenigstens eine Minimalstelle für die Summe aller r_h geben. Diese Stelle aus (3) durch Differentiation zu finden, ist unmöglich, da (3) eine Funktion ersten Grades in x und y ist. Es führt jedoch ein anderer Weg zum Ziele.

Lassen wir den Punkt P auf ε beliebig wandern, so ändert jedesmal, wenn er die Gerade Γ_h überschreitet, $\mathfrak{p}_h$ durch null hindurch sein Zeichen. War also vorher $p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h$ positiv, so wird nach dem Überschreiten von Γ_h $x \cos \alpha_h + y \sin \alpha_h - p_h$ positiv und umgekehrt.

Wir wollen nun zunächst eine beliebige Gerade Γ mit den n Geraden Γ_h zum Durchschnitt bringen und fragen, wie sich der Wert der Abstandssumme ändert, wenn wir die Gerade ihrer ganzen Länge nach durchlaufen. Zu dem Zwecke untersuchen wir zunächst die Abstandssummen in den einzelnen Schnittpunkten der Geraden Γ und der Γ_h. Wir können dabei, da über die Gleichungen (1) der Γ_h gar nichts weiter vorausgesetzt worden ist, ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung als schneidende Gerade die x Axe nehmen. Ferner können wir alle zur Geraden Γ parallelen Geraden Γ_h unberücksichtigt lassen, da die Summe der Abstände von ihnen bei der Wanderung über Γ unverändert bleibt. Endlich kann jede von den Geraden Γ_h, mit der etwa zufällig Γ zusammenfällt, außer Betracht bleiben, da ja der Abstand von ihr für alle Punkte von Γ null ist. Wir betrachten also nur die Summe der absoluten Abstände von alle den Geraden, die Γ, d. h. also die x Axe, in der Endlichkeit schneiden.

Es mögen nun im ganzen auf der x Axe m Schnittpunkte vorhanden sein, die wir der Reihe nach, wie sie auf der x Axe einander folgen, wenn wir von $-\infty$ nach $+\infty$ gehen, $A_1, A_2, \cdots\cdot A_m$ nennen. Ihre Abscissen mögen $x_1, x_2, \cdots\cdot x_m$ heißen, so daß $x_1 < x_2 < \cdots\cdot < x_m$ ist, während ihre Ordinaten alle null sind. Von den n Geraden Γ_h mögen nur durch A_1 g_1, durch A_2 $g_2 - g_1, \cdots$ durch A_h $g_h - g_{h-1}, \cdots\cdot$ durch A_m $g_m - g_{m-1}$ Gerade laufen, wobei einzelne oder alle von diesen Anzahlen g_1 und $g_h - g_{h-1}$ den Wert 1 haben können und $g_m = n$ ist.

Für irgend einen beliebigen Punkt $P = x, 0$ der x Axe ist also nach (3) die Abstandssumme

$$\Sigma r_h \equiv \sum_1^n{}_h \,| p_h - x \cos\alpha_h |, \tag{4}$$

wo wiederum, wie auch künftig, $||$ den absoluten Wert bedeutet. Für den Punkt $A_l = x_l, 0$ gilt also[1])

$$\Sigma_l r_h \equiv \sum_1^n{}_h \,| p_h - x_l \cos\alpha_h |. \tag{4'}$$

Nun laufen $\Gamma_1, \cdots\cdot \Gamma_{g_1}$ durch A_1. Ist ferner für A_1 $x_1 < 0$, schneiden also die Gerader $\Gamma_1, \cdots \Gamma_{g_1}$ die negative x Axe, so ist für sie $90^\circ < \alpha_h < 270^\circ$, also $\cos\alpha_h < 0$, $x_1 \cos\alpha_h > 0$; ist aber $x_1 > 0$, so ist $-90^\circ < \alpha_h < 90^\circ$, also $\cos\alpha_h > 0$, $x_1 \cos\alpha_h > 0$. Auf alle Fälle können wir also, auch hinsichtlich des Vorzeichens, $p_h = x_1 \cos\alpha_h$ setzen für $h = 1, \cdots\cdot g_1$. Ebenso gilt für $h = g_1 + 1, \cdots g_2$ $p_h = x_2 \cos\alpha_h$ u. s. w. Also folgt aus (4')

$$\Sigma_l r_h \equiv \sum_1^{g_1}{}_h \,| (x_1 - x_l) \cos\alpha_h | + \sum_{g_1+1}^{g_2}{}_h \,| (x_2 - x_l) \cos\alpha_h | + \cdots + \sum_{g_{m-1}+1}^{g_m}{}_h \,| (x_m - x_l) \cos\alpha_h |. \tag{5}$$

Wir führen nun zur Abkürzung ein

$$\sum_{g_{k-1}+1}^{g_k}{}_h \,| \cos\alpha_h | \equiv C_k;\quad \sum_1^{g_1}{}_h \,| \cos\alpha_h | \equiv C_1;\quad \sum_1^m{}_k C_k \equiv C;\quad \sum_1^m{}_k x_k C_k \equiv S. \tag{6}$$

Lassen wir nun A_l der Reihe nach mit $A_1, A_2, \cdots\cdot A_k, \cdots\cdot A_m$ zusammenfallen und bedenken, daß $x_1 < x_2 \cdots < x_k \cdots < x_m$ ist, so folgt:

$$\begin{cases} \Sigma_1 r_h \equiv (x_1 - x_1) C_1 + (x_2 - x_1) C_2 + \cdots + (x_m - x_1) C_m; \\ \Sigma_2 r_h \equiv -(x_1 - x_2) C_1 + (x_2 - x_2) C_2 + \cdots + (x_m - x_2) C_m; \\ \Sigma_k r_h \equiv -(x_1 - x_k) C_1 - (x_2 - x_k) C_2 - \cdots - (x_{k-1} - x_k) C_{k-1} + (x_k - x_k) C_k + (x_{k+1} - x_k) C_{k+1} \\ \qquad\qquad + \cdots + (x_m - x_k) C_m; \\ \Sigma_m r_h \equiv -(x_1 - x_m) C_1 - (x_2 - x_m) C_2 - \cdots - (x_{m-1} - x_m) C_{m-1} + (x_m - x_m) C_m. \end{cases} \tag{7}$$

---

[1]) Unter $\Sigma_l r_h$ verstehen wir die Abstandssumme für den Punkt A_l.

Da keine Gerade zur x Axe parallel läuft, so ist hierin kein einziger $(\cos\alpha_h) = 0$, also alle C_h und damit auch $C > 0$. — Wir können nun statt (7) unter Benutzung von (6) schreiben:

$$(8)\quad \begin{cases} \Sigma_1 r_h \equiv S - x_1 C; \\ \Sigma_2 r_h \equiv S - x_2 C + 2(x_2 - x_1) C_1; \\ \Sigma_k r_h \equiv S - x_k C + 2(x_k - x_1) C_1 + \cdots + 2(x_k - x_{k-1}) C_{k-1}; \\ \Sigma_{k+1} r_h \equiv S - x_{k+1} C + 2(x_{k+1} - x_1) C_1 + \cdots + 2(x_{k+1} - x_{k-1}) C_{k-1} + 2(x_{k+1} - x_k) C_k; \\ \Sigma_m r_h \equiv S - x_m C + 2(x_m - x_1) C_1 + \cdots + 2(x_m - x_{m-1}) C_{m-1}. \end{cases}$$

Subtrahieren wir nun $\Sigma_{k+1} r_h$ von $\Sigma_k r_h$ so, dafs wir die untereinander stehenden Glieder subtrahieren, so folgt

$$(9)\quad \Sigma_k r_h - \Sigma_{k+1} r_h \equiv (x_{k+1} - x_k)(C - 2\sum_1^k C_k) \equiv (x_{k+1} - x_k) \Delta_k.$$

Nach unseren früheren Festsetzungen ist aber $x_{k+1} > x_k$, also $x_{k+1} - x_k > 0$. Daher ist das Vorzeichen von $\Sigma_k r_h - \Sigma_{k+1} r_h$ stets gleich dem Vorzeichen der Differenz

$$(10)\quad \Delta_k \equiv C - 2\sum_1^k C_k.$$

Ausführlich geschrieben giebt das

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta_1 \equiv C - 2C_1; \\ \Delta_2 \equiv C - 2C_1 - 2C_2; \\ \text{endlich} \\ \Delta_{m-1} \equiv C - 2C_1 - 2C_2 - \cdots - 2C_{m-1}. \end{cases}$$

Da nun alle C_h positiv sind, so ist hiernach

$$(11')\quad \Delta_1 > \Delta_2 > \cdots > \Delta_{m-1}.$$

Ist also $\Delta_1 < 0$, so sind auch alle anderen $\Delta_h < 0$; das lehrt nach (9)

$$\Sigma_1 r_h < \Sigma_2 r_h < \cdots < \Sigma_m r_h;$$

d. h., gehen wir durch alle Punkte A_h von A_1 bis A_m, so nimmt die Abstandssumme beständig zu. Ist $\Delta_{m-1} > 0$, so sind auch alle anderen $\Delta_h > 0$, also nach (9)

$$\Sigma_1 r_h > \Sigma_2 r_h > \cdots > \Sigma_m r_h.$$

Dann nimmt die Abstandssumme von A_1 bis A_m in den Punkten A_h beständig ab.

Ist $\Delta_{k-1} > 0$, aber $\Delta_k < 0$, so sind auch $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_{k-2} > 0$, aber $\Delta_{k+1}, \cdots \Delta_{m-1} < 0$. Dann ist also

$$\Sigma_1 r_h > \Sigma_2 r_h > \cdots > \Sigma_{k-1} r_h > \Sigma_k r_h < \Sigma_{k+1} r_h < \cdots < \Sigma_m r_h;$$

d. h., die Abstandssume nimmt in den Punkten A_k von A_1 bis A_k ab und dann wieder zu bis A_m.

Ist endlich $\Delta_k = 0$, so sind $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_{k-1} > 0$, aber $\Delta_{k+1}, \cdots \Delta_{m+1} < 0$. Das giebt

$$\Sigma_1 r_h > \Sigma_2 r_h > \cdots > \Sigma_{k-1} r_h > \Sigma_k r_h = \Sigma_{k+1} r_h < \Sigma_{k+2} r_h \cdots < \Sigma_m r_h.$$

Die Abstandssumme nimmt also in den Punkten A_h von A_1 bis A_k ab, bleibt sich in A_k und A_{k+1} gleich und nimmt dann wieder zu bis A_m.

Da diese vier Fälle alle Möglichkeiten von (11) erschöpfen, so erkennen wir, dafs die Abstandssumme, wenn man die Punkte A_h auf der x Axe vom ersten zum letzten oder umgekehrt durchläuft, niemals aus dem Zunehmen wieder ins Abnehmen übergehen kann. Es giebt also unter den Punkten A_h entweder einen mit kleinster Abstandssumme oder aber zwei mit gleicher Abstandssumme, die aber kleiner ist als die Abstandssumme der übrigen. Auch giebt es weder Maxima, noch relative Minima, noch zwei Punkte A_l auf einer und derselben Seite des einen, bez. der zwei

Minimalpunkte, die dieselbe Abstandssumme besitzen. (Diese Bemerkung erlangt später ihre Bedeutung.)

Wir wollen nun einen Punkt zwischen A_k nnd A_{k+1} in Betracht ziehen, der wieder A_l heißen möge. Seine Koordinaten sind

(12) $$x_l = x_k + \mu(x_{k+1} - x_k), \quad \text{wo } 0 < \mu < 1;\ y_l = 0.$$

Also ist

$$x_1 < \cdots < x_k < x_l < x_{k+1} < \cdots < x_m.$$

Daher ist für A_l nach (5)

$$\Sigma_l r_h \equiv -(x_1 - x_l)C_1 - \cdots - (x_k - x_l)C_k + (x_{k+1} - x_l)C_{k+1} + \cdots + (x_m - x_l)C_m;$$

also in Rücksicht auf (12)

$$\Sigma_l r_h \equiv [-(x_1 - x_k)C_1 - \cdots + (x_k - x_k)C_k + (x_{k+1} - x_k)C_{k+1} + \cdots + (x_m - x_k)C_m]$$
$$+ \mu(x_{k+1} - x_k)(C_1 + \cdots + C_k - C_{k+1} - \cdots - C_m);$$

nach (6) und (7) giebt das

$$\Sigma_l r_h \equiv \Sigma_k r_h - \mu(x_{k+1} - x_k)(C - 2\sum_1^k {}_h C_k).$$

Nehmen wir endlich Rücksicht auf (9), so können wir schreiben

(13) $$\Sigma_l r_h \equiv \Sigma_k r_h + \mu(\Sigma_{k+1} r_h - \Sigma_k r_h).$$

Lassen wir jetzt μ stetig wachsen von 0 bis 1, d. h., verschieben wir A_l von A_k bis A_{k+1}, so wächst auch $\Sigma_l r_h$ stetig von $\Sigma_k r_h$ bis $\Sigma_{k+1} r_h$ oder nimmt von $\Sigma_k r_h$ bis $\Sigma_{k+1} r_h$ stetig ab, je nachdem $\Sigma_k r_h$ kleiner oder gröfser als $\Sigma_{k+1} r_h$ ist; ist aber $\Sigma_k r_h = \Sigma_{k+1} r_h$, so bleibt $\Sigma_l r_h$ von A_k bis A_{k+1} eben so grofs. Die Abstandssumme kann also zwischen A_k und A_{k+1} keinesfalls vom Fallen zum Steigen oder umgekehrt übergehen, d. h. zwischen A_k und A_{k+1} kann es kein Minimum oder Maximum der Abstandssumme auf der x Axe geben.

Lassen wir nun A_l von $-\infty$ bis A_1 laufen, so ist $x_l < x_1$, also

$$\Sigma_l r_h \equiv (x_1 - x_l)C_1 + (x_2 - x_l)C_2 + \cdots + (x_m - x_l)C_m;$$
$$\Sigma_l r_h \equiv S - x_l C.$$

Nach (8) ist also

(13') $$\Sigma_l r_h - \Sigma_1 r_h \equiv (x_1 - x_l)C,$$

also, da $C > 0$ und $x_1 - x_l > 0$ ist, auch $\Sigma_l r_h - \Sigma_1 r_h > 0$, also $\Sigma_l r_h > \Sigma_1 r_h$ und zwar um so gröfser, je mehr sich x_l dem Werte $-\infty$ nähert, d. h., je weiter sich A_l von x_1 nach $-\infty$ hin entfernt. Auf dem Strahle $(A_1, -\infty)$ nimmt also die Abstandssumme in der Richtung nach $-\infty$ beständig zu.

Für einen Punkt A_l, der von A_m nach $+\infty$ zu liegt, ist

(13'') $$\Sigma_l r_h - \Sigma_m r_h \equiv (x_l - x_m)C,$$

also, da für ihn $x_l > x_m$ ist, $\Sigma_l r_h > \Sigma_m r_h$, so dass auch von A_m nach $+\infty$ zu die Abstandssumme beständig wächst (was an sich klar ist, da man die ganze Gerade in zwei verschiedenen Richtungen durchlaufen kann und beidemale dieselben Eigenschaften eintreten müssen).

Die Formeln (13), (13') und (13'') liefern zugleich eine einfache graphische Darstellung der Ab- und Zunahme der Abstandssumme, wenn sich ein Punkt längs der x Axe bewegt. Errichten wir nämlich die Abstandssumme $\Sigma_l r_h$ im zugehörigen Punkte A_l als positive Ordinate senkrecht zur Ebene ε, setzen also $z_l = \Sigma_l r_h$, so lehren die Formeln, dafs die Endpunkte der Ordinaten zwischen A_k und A_{k+1} eine Strecke, zwischen $-\infty$ und A_1 und von A_m bis $+\infty$ aber einen Strahl ausfüllen und zwar so, dafs von A_1, bez. A_m an beide Strahlen nach der Unendlichkeit zu ansteigen.

2

Die Tangenten der Neigungswinkel dieser Strecken, bez. Strahlen gegen die $+x$ Axe ergeben sich in einfacher Weise ans (9), (13') und (13'') nach der Formel $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{z' - z''}{x' - x''}$. Liegen die Fufspunkte der Endordinaten in

$$-\infty \text{ und } A_1,\quad A_1 \text{ und } A_2,\quad \cdots A_{k-1} \text{ und } A_k,\quad A_k \text{ und } A_{k+1},\quad \cdots A_{m-1} \text{ und } A_m,\quad A_m \text{ und } +\infty,$$

so sind die Werte der Tangenten

$$-C,\quad -\Delta_1,\quad \cdots -\Delta_{k-1},\quad -\Delta_k,\quad \cdots -\Delta_m,\quad C.$$

Nach (11) und (11') nehmen also diese Werte beständig zu (C und alle C_h sind ja > 0), d. h. keine zwei von den Strecken oder Strahlen, aus denen der Ort $z_l = \Sigma_l r_h$ besteht, haben dieselbe Neigung gegen die $+x$ Axe. Dieser Ort stellt sich also dar als eine gebrochene Linie, die für $x = -\infty$ aus $+\infty$ herabsteigend einen niedrigsten Punkt, bez. eine niedrigste der x Axe parallele Strecke erreicht, ohne die x Axe zu überschreiten, und dann wieder ansteigend für $x = +\infty$ in $+\infty$ ausläuft.

Alles bisherige giebt uns nun den

Satz I: „Es mögen n Gerade Γ_h einer Ebene von einer beliebigen Geraden Γ in den Punkten $A_1, A_2, \cdots A_m$, die in dieser Reihenfolge auf Γ liegen, geschnitten werden. Bewegt sich nun ein Punkt von der Unendlichkeit her immer in demselben Sinne nach A_1, weiter nach A_2, A_3 u. s. f. bis A_m und schliefslich in demselben Sinne von A_m weiter bis in die Unendlichkeit, so nimmt die Summe der absoluten Abstände des bewegten Punktes von den n Geraden bis A_1 beständig ab und von A_m an beständig zu. Von A_1 bis A_m erreicht die Abstandssumme ihren kleinsten Wert in einem einzigen von den Punkten A_h (der im Grenzfalle auf A_1 oder auf A_m fallen kann) oder für alle Punkte einer Strecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten A_h und A_{h+1} (im Grenzfalle A_1 und A_2 oder A_{m-1} und A_m), nimmt aber im übrigen von A_1 bis A_h auch beständig ab und von A_h, bez. A_{h+1} bis A_m beständig zu. Auf jeder solchen Geraden giebt es also nur einen einzigen Minimalpunkt, bez. eine einzige Minimalstrecke, und zwar liegt der Punkt, bez. liegen die Endpunkte dieser Strecke stets auf den gegebenen Geraden Γ_h."

Fällt Γ mit einer von den Geraden Γ_h zusammen, so ändert sich nichts an dem Satze. Es kann also in der Ebene ε nur einen einzigen Punkt, bez. eine einzige Strecke oder eine einzige Fläche geben, für den, bez. für deren Punkte die Abstandssumme ihr Minimum erreicht. Zugleich mufs die Fläche durchaus lückenlos sein und darf keine einspringenden Randteile besitzen. Denn gäbe es zwei Minimalpunkte, -strecken oder -flächen, bez. eine Minimalfläche [1]), die einspringende Randteile besäfse oder im Innern unterbrochen wäre durch Punkte mit gröfserer Abstandssumme, so liefsen sich stets in die Ebene Gerade legen, die mindestens zwei Minimalpunkte enthielten, zwischen denen keine Minimalpunkte vorhanden wären. Beim stetigen Übergange auf der Geraden von einem Punkte zum anderen müfste also die Abstandssumme, da sie sich ja stetig ändert, vom Zunehmen wiederum zum Abnehmen übergehen, was, wie oben bewiesen, unmöglich ist. Vergleichen wir also auch nur die Punkte der Ebene ε unter einander hinsichtlich der Abstandssumme, so giebt es nur eine einzige Minimal- und keine Maximalstelle.

Es gilt nun, die Lage der Minimalstelle näher festzusetzen. Zu dem Ende betrachten wir eins von den Flächenstücken, in die die Ebene ε durch die Geraden Γ_h geteilt wird, in deren Inneres also keine Gerade Γ_h eintritt. Sehen wir von dem Falle ab, in dem alle Γ_h einander parallel sind (es ist schon in B) erledigt), so finden wir stets in der Ebene ε eine Reihe geschlossener oder nicht

---

[1]) Das Wort „Minimalfläche" und „Minimalstrecke" ist hier wie später in einem anderen Sinne, als sonst üblich, gebraucht. Doch werde der Kürze wegen der Gebrauch entschuldigt!

geschlossener Vielecke. Keines von ihnen kann einen einspringenden Winkel besitzen, da alle Γ_h unbegrenzt sind. Nehmen wir also auf der Umrandung eines solchen Flächenstückes, das wir V nennen wollen, zwei beliebige Punkte P und Q an, so mufs die Strecke PQ entweder ganz im Innern oder auf einer Grenzgeraden von V liegen.

Liegt nun PQ im Innern von V, so mufs die Abstandssumme, wenn ein beweglicher Punkt von P nach Q wandert, da hierbei keine Gerade Γ_h durchquert wird, nach Satz I entweder beständig zu- oder beständig abnehmen oder konstant bleiben. Auf keinen Fall aber kann sie zwischen P und Q vom Fallen zum Steigen übergehen. Ein einzelner Minimalpunkt kann also nicht im Inneren eines Gebietes V vorkommen, d. h., ein einzelner Minimalpunkt kann nur auf einer von den Geraden Γ_h liegen.

Wir nehmen nun an, es gebe nur einen einzelnen Minimalpunkt P_μ und er liege auf der Geraden Γ_k. Dann kann er nach Satz I nur auf einen von den Punkten fallen, wo Γ_k eine oder mehrere Gerade Γ_h trifft. Also kann ein einzelner Minimalpunkt nur unter den Punkten vorkommen, wo die Γ_h einander schneiden.

Nehmen wir andrerseits an, die Abstandssumme solle für alle Punkte einer Strecke ihren Minimalwert erreichen, so müssen nach Satz I wenigstens deren Endpunkte P_μ und Q_μ auf zwei Gerade Γ_k und Γ_l fallen. Ist nun R_μ ein Punkt zwischen P_μ und Q_μ und legen wir durch R_μ eine beliebige Gerade Γ, die nicht mit $P_\mu Q_\mu$ zusammenfällt, so mufs R_μ auch auf Γ Minimalpunkt sein; nach Satz I mufs also auch R_μ auf eine von den Geraden Γ_h fallen. Da dies für alle Punkte zwischen Γ_k und Γ_l gilt, so mufs also die Minimalstrecke $\Gamma_k \Gamma_l$ ganz auf einer von den Geraden Γ_h liegen. Dabei mufs sie nach Satz I zwischen zwei aufeinander folgende Schnittpunkte dieser Geraden mit den anderen Geraden Γ_h fallen.

Existiert schliefslich eine Minimalfläche, d. h., sind für alle Punkte eines Stückes der Ebene die Abstandssummen einander gleich und kleiner als die Abstandssummen aller übrigen Punkte der Ebene ε, so mufs, wie früher gezeigt, diese Fläche lückenlos sein und darf keine einspringenden Stellen an ihrer Umrandung besitzen.

Eine Verbindungsstrecke zweier beliebigen Punkte auf der Umrandung der Minimalfläche liegt also entweder ganz im Innern oder ganz auf der Umrandung der Fläche. Legen wir nun eine Gerade in der Ebene ε so, dafs sie die Minimalfläche schneidet, so mufs die Strecke, die in die Minimalfläche fällt, zugleich auf der Geraden Minimalstrecke sein. Also müssen die Endpunkte einer jeden Strecke, die quer durch die Minimalfläche gezogen ist, nach Satz I auf gewisse Gerade Γ_h fallen, d. h. die Minimalfläche mufs rings von Geraden Γ_h umschlossen sein. Zugleich darf keine Gerade Γ_h sie durchqueren. Denn wäre dies der Fall, zerfiele also die Minimalfläche durch die Gerade Γ_k in zwei Teile V_μ und V_μ', so müfste die Abstandssumme, wenn sie in V_μ konstant ist, nach Satz I in V_μ' zunehmen und umgekehrt, was gegen die Voraussetzung ist, dafs die Abstandssumme in der ganzen Minimalfläche konstant sein soll.

Sehen wir nun auch hier von dem Falle ab, wo alle Γ_h einander parallel laufen, so wird es in der Ebene ε kein Gebiet geben können, das nur von zwei parallelen Geraden begrenzt ist. Also wird jede Gerade, die durch irgend ein Gebiet von ε gelegt wird, die Umrandung wenigstens einmal treffen müssen. Ist nun das betreffende Gebiet V nur halb begrenzt, so kann man in ihm stets Gerade Γ ziehen, von denen die Umrandung nur in einem einzigen Punkte P getroffen wird, die aber weiter das Gebiet bis zur Unendlichkeit durchqueren, ohne je wieder auf die Umrandung zu stofsen. Nach Satz I mufs aber in diesem Falle auf Γ die Abstandssumme von P bis in die Unendlichkeit fortwährend zunehmen, kann also innerhalb des Gebietes nicht einen konstanten Minimalwert erreichen. Also kann keines von den halbgeschlossenen Gebieten ein Gebiet konstanter Minimalsumme sein.

Wir nehmen nun weiter an, das vollständig (von gewissen der Geraden Γ_h) begrenzte Gebiet V der Ebene ε besitze in drei Eckpunkten A_1, A_2, A_3 dieselbe Abstandssumme Σ. Da nun durch V keine von den Geraden Γ_h läuft, so gehen zwischen A_1 und A_2, A_1 und A_3, A_2 und A_3 keine weiteren Geraden Γ_h hindurch. Also ist nach Satz I auch für alle Punkte der Strecken A_1A_2, A_1A_3 und A_2A_3, mithin auch im ganzen Innern des Dreiecks $A_1A_2A_3$ der Wert der Abstandssumme gleich Σ. Dann mufs aber der Wert überallhin im Gebiete V bis an die Grenzen ebenfalls den Wert Σ besitzen, wie oben bewiesen, d. h., das ganze Gebiet V ist Minimalfläche.

Ist dagegen V nicht Minimalfläche, so können höchstens zwei Eckpunkte gleiche Abstandssummen besitzen; denn sonst würden ihre Verbindungsstrecken Strecken konstanter Summe, also, da sie innerhalb V lägen, V Fläche konstanter Summe sein müssen, was gegen die Voraussetzung ist.

Fassen wir nun die bisherigen Ergebnisse zusammen, so erhalten wir den

Satz II: „Will man für n Gerade einer Ebene, die nicht alle einander parallel laufen, das Minimum der Abstandssumme aufsuchen, so bestimme man den Wert der Summe für sämtliche Schnittpunkte der Geraden. Ist unter deren Werten ein kleinster enthalten, so stellt er den Minimalwert und der betreffende Punkt den Minimalpunkt dar. Sind unter den Werten zwei und nur zwei gleich, aber kleiner als alle anderen (was nur möglich ist, wenn es Endpunkte einer von den Teilstrecken auf den Geraden Γ_h sind), so ist dieser Wert wiederum Minimalwert und die betreffende Strecke Minimalstrecke. Sind endlich unter den Werten mehr als zwei gleich, aber kleiner als alle anderen (was nur möglich ist, wenn die betreffenden Punkte Ecken eines der geschlossenen Flächenstücke und zwar sämtliche Ecken sind), so stellt diese Fläche die Minimalstelle und der betreffende Wert den Minimalwert der Abstandssumme dar. — Maxima oder relative Minima bestehen nicht. —“

Die Minimalstelle ist hiernach, sobald mindestens eine von den Geraden Γ_h die anderen schneidet, stets endlich begrenzt. Sind dagegen alle Geraden Γ_h in der Ebene ε einander parallel, so ist sie, wie in B) gezeigt wurde, unbegrenzt. Jedenfalls wächst auf einem Strahle, der von der Minimalstelle ausläuft, ohne in ihr zu verlaufen, die Abstandssumme vom Minimalwerte $\Sigma_\mu r_h$ stetig und unbegrenzt, je weiter man sich von der Minimalstelle entfernt. Daher mufs es auf jedem solchen Strahle einen und nur einen Punkt geben, in welchem die Abstandssumme den Wert $\mathfrak{S} > \Sigma_\mu r_h$ erreicht. Es liegt nun noch die Frage nahe: W i e o r d n e n s i c h d i e P u n k t e , d i e e i n u n d d i e s e l b e b e l i e b i g e A b s t a n d s s u m m e $\mathfrak{S}$ b e s i t z e n , i n d e r E b e n e ε?

In dem Falle, wo die Geraden Γ_h sämtlich einander parallel sind, liegen die Punkte mit $\Sigma r_h \equiv \mathfrak{S}$ für $\mathfrak{S} > \Sigma_\mu r_h$ beiderseits von der Minimalstelle auf zwei Geraden, die den Geraden Γ_h parallel laufen, und zwar, je gröfser $\mathfrak{S}$ ist, in um so gröfserem Abstande von der Minimalstelle. Das folgt aus der Eigenschaft paralleler Geraden, überall denselben Abstand zu besitzen. Der Ort $\Sigma r_h \equiv \mathfrak{S}$ ist also hier nicht geschlossen.

Betrachten wir weiter den Fall, wo nicht alle Γ_h einander parallel laufen, so ist nach Satz II die Minimalstelle endlich begrenzt. Ein beliebiger Strahl, der von der Minimalstelle ausgeht, kann dann nicht allen Γ_h parallel sein; er mufs also wenigstens gegen eine Gerade so verlaufen, dafs er sich nach der Unendlichkeit zu unendlich weit von ihr entfernt. Daher mufs es auf jedem solchen Strahle in der Endlichkeit einen Punkt mit der Abstandssumme $\mathfrak{S}$ geben. Da wir aber von der endlich begrenzten Minimalstelle (die im Grenzfalle ein Punkt ist) aus unendlich viele Strahlen ziehen können, die gegen einander divergent verlaufen, so müssen um die Minimalstelle herum unendlich viele Punkte mit der Abstandssumme $\mathfrak{S}$ liegen. Da nun die Anzahl der Gebiete, in die die Ebene ε durch die Γ_h zerlegt wird, endlich ist, so muſs wenigstens in einem von diesen Gebieten mehr als ein Punkt mit der Abstandssumme $\mathfrak{S}$ liegen.

Wir nehmen nun an, innerhalb des Gebietes V gebe es zwei Punkte $K = x_k, y_k$ und $L = x_l, y_l$, für welche die Abstandssumme denselben Wert $\mathfrak{S}$ annimmt, so daſs also[1])

$$\Sigma_k r_h = \Sigma_l r_h = \mathfrak{S} \tag{14}$$

ist. Nun ist nach Formel (2), Seite 4,

$$\Sigma r_h = \sum_1^n{}_h \, | \, p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h \, |,$$

oder, wenn ε_h denjenigen Wert $+1$ oder -1 bedeutet, den man als Faktor zu $p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h$ setzen muſs, damit ein positiver Wert herauskommt,

$$\Sigma r_h = \sum_1^n{}_h \varepsilon_h \, (p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h).$$

Also gilt nach (14)

$$\sum_1^n{}_h \varepsilon_h \, (p_h - x_k \cos \alpha_h - y_k \sin \alpha_h) = \sum_1^n{}_h \varepsilon_h \, (p_h - x_l \cos \alpha_h - y_l \sin \alpha_h) = \mathfrak{S}. \tag{15}$$

Da K und L in demselben Gebiete V der Ebene, also in gleicher Lage gegen Γ_h, vom Koordinatenanfange aus gesehen, liegen, so hat in beiden Summen der Formel (15) ε_h denselben Wert und behält ihn auch weiter für alle anderen Punkte innerhalb oder auf der Umrandung des Gebietes V.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt $M = x_m, y_m$ auf der Geraden KL. Seine Koordinaten sind bei variablen Parametern $\varkappa$ und λ darstellbar durch

$$x_m = \frac{\varkappa x_k + \lambda x_l}{\varkappa + \lambda}, \; y_m = \frac{\varkappa y_k + \lambda y_l}{\varkappa + \lambda}. \tag{16}$$

Daher ist seine Abstandssumme

$$\Sigma_m r_h = \sum_1^n{}_h \varepsilon_h \left(p_h - \frac{\varkappa x_k + \lambda y_l}{\varkappa + \lambda} \cos \alpha_h - \frac{\varkappa y_k + \lambda y_l}{\varkappa + \lambda} \sin \alpha_h \right), \tag{17}$$

wobei ε_h dieselben Werte wie in (15) behält, solange M das Gebiet V nicht verläſst. Nehmen wir also an, daſs M nicht auſserhalb V liegt, also ein Punkt der innerhalb V gelegenen Strecke der Geraden KL ist, so folgt aus (17) wegen

$$p_h = \frac{\varkappa p_h + \lambda p_h}{\varkappa + \lambda}$$

nach (15)

$$\Sigma_m r_h = \frac{\varkappa}{\varkappa + \lambda} \sum_1^n{}_h \varepsilon_h \, (p_h - x_k \cos \alpha_h - y_k \sin \alpha_h)$$

$$+ \frac{\lambda}{\varkappa + \lambda} \sum_1^n{}_h \varepsilon_h \, (p_h - x_l \cos \alpha_h - y_l \sin \alpha_h);$$

$$\Sigma_m r_h = \frac{\varkappa}{\varkappa + \lambda} \mathfrak{S} + \frac{\lambda}{\varkappa + \lambda} \mathfrak{S};$$

$$\Sigma_m r_h = \mathfrak{S}. \tag{18}$$

Für jeden Punkt M auf KL, der innerhalb V liegt, besitzt also die Abstandssumme denselben Wert $\mathfrak{S}$ wie in K und L. Da $\mathfrak{S}$ nicht Minimalwert ist, können zugleich andere Punkte

[1]) Der Index beim Summenzeichen Σ deutet wieder an, für welchen Punkt die Abstandssumme zu bilden ist.

innerhalb V diese Summe nicht besitzen. Nach Satz I müssen dagegen alle Punkte auf der Verlängerung von KL über V hinaus, da auf der ganzen Strecke KL innerhalb V die Abstandssumme konstant ist, gröfsere Abstandssummen besitzen, die unbegrenzt wachsen, je weiter man von V weggeht. In den Nachbargebieten von V müssen also Punkte mit der Abstandssumme $\mathfrak{S}$ zwischen der Minimalstelle und KL liegen. Verfolgen wir also von V aus die Punkte mit der Abstandssumme $\mathfrak{S}$, so werden sie auf einer gebrochenen Linie mit lauter nach innen hohlen Winkeln liegen, von der die Minimalstelle umschlossen wird.[1]) Diese Linie kann die Minimalstelle nur einmal umlaufen, da ja auf jedem von dieser Stelle ausgehenden Strahle der Wert $\mathfrak{S}$ nur einmal erreicht wird, und mufs sich schliefsen, da man den Wert $\mathfrak{S}$ von der Minimalstelle aus nach allen Richtungen hin in endlicher Entfernung antrifft. Sie stellt also die Umrandung eines geradseitigen Vielecks dar. Innerhalb des Vielecks liegen dann Punkte mit Abstandssummen, die zwischen dem Minimalwerte und $\mathfrak{S}$ liegen, aufserhalb solche, die gröfsere Abstandssummen besitzen. Es fragt sich nun weiter: wie verhalten sich die Örter verschiedener Abstandssummen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ gegenseitig?

Dafs keine Strecke mit $\Sigma r_h \equiv \mathfrak{S}$ von einer Strecke $\Sigma r_h \equiv \mathfrak{S}'$ innerhalb V geschnitten werden kann, ist ohne weiteres klar, da ja sonst im Schnittpunkte die Abstandssumme zwei verschiedene Werte, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, haben müfste. Wir können aber nachweisen, dafs beide Strecken in V einander parallel laufen müssen. Wird nämlich $M = x_m, y_m$ als laufender Punkt einer zu KL parallelen Strecke betrachtet, so lassen sich seine Koordinaten bei konstantem e und f und variablem $\varkappa$ und λ durchstellen durch:

$$x_m = \frac{\varkappa x_k + \lambda x_l}{\varkappa + \lambda} + e,\; y_m = \frac{\varkappa y_k + \lambda y_l}{\varkappa + \lambda} + f. \tag{19}$$

Solange also M innerhalb V liegt, ist

$$\Sigma_m r_h \equiv \sum_1^n{}_h \varepsilon_h \left(p_h - \left(\frac{\varkappa x_k + \lambda x_l}{\varkappa + \lambda} + e\right) \cos \alpha_h - \left(\frac{\varkappa y_k + \lambda y_l}{\varkappa + \lambda} + f\right) \sin \alpha_h\right),$$

wo ε_h denselben Wert besitzt wie für K und L, d. h., wie in (15). Das giebt analog dem früheren

$$\Sigma_m r_h \equiv \mathfrak{S} - e \sum_1^n{}_h \varepsilon_h \cos \alpha_h - f \sum_1^n{}_h \varepsilon_h \sin \alpha_h. \tag{20}$$

Rechts stehen aber jetzt nur noch konstante Gröfsen, so dafs auch auf jeder zu KL parallelen Geraden, soweit sie innerhalb V liegt, die Abstandssumme konstant ist. Wir gewinnen also den

Satz III: „Sind die Geraden Γ_h nicht alle einander parallel, so stellen die Örter konstanter Abstandssummen gebrochene, in sich geschlossene Linien dar, von denen die Minimalstelle sowohl, wie alle Örter mit kleinerer Abstandssumme ein —, die Örter mit gröfserer Abstandssumme aber ausgeschlossen werden, während innerhalb desselben Gebietes der Ebene die Örter mit verschiedener Abstandssumme einander parallel laufen. Hat man also einen solchen Ort konstruiert, so liegt die Minimalstelle stets in seinem Innern." —

Die Formel (20) gewinnt nun noch eine weitere Bedeutung insofern, als wir aus ihr die Bedingung ziehen können, die erforderlich ist, damit innerhalb des ganzen Gebietes V die Abstandssumme konstant ist, d. h. wie oben gezeigt, damit es eine Minimalfläche giebt. Da sich verschiedene Parallelen bei der Parameterdarstellung (19) nur durch e und f unterscheiden und diese Gröfsen innerhalb V zwischen gewissen Grenzen unendlich viele verschiedene Werte annehmen können, so ist die Summe in (20) nur dann konstant, sobald innerhalb V gleichzeitig die Bedingungen

---

[1]) Der Fall von lauter einander parallelen Γ_h ist ausgeschlossen worden!

(21) $$\sum_1^n \varepsilon_h \cos \alpha_h \equiv 0, \quad \sum_1^n \varepsilon_h \sin \alpha_h \equiv 0$$

erfüllt sind. Am einfachsten werden diese Formeln, wenn wir den Koordinatenanfang in das Gebiet V legen, da dann alle ε_h den Wert $+1$ annehmen. Dann gilt also innerhalb V

(22) $$\sum_1^n \cos \alpha_h \equiv 0, \quad \sum_1^n \sin \alpha_h \equiv 0.$$

Denken wir uns nun von irgend einem Punkte P innerhalb V die Abstände nach den Γ_h gezogen und auf ihnen in P gleiche Kräfte K angebracht, so geben deren Projektionen auf die x Axe und auf die y Axe addiert

$$\Sigma_x \equiv \sum_1^n K \cos \alpha_h \equiv K \sum_1^n \cos \alpha_h; \quad \Sigma_y \equiv \sum_1^n K \sin \alpha_h \equiv K \sum_1^n \sin \alpha_h.$$

Nach (22) sind also diese Summen innerhalb V identisch null, d. h., die gleichen Kräfte halten sich in P das Gleichgewicht, sobald die Abstandssumme in V konstant ist. Halten sich aber umgekehrt in irgend einem Punkte von V die gleichen Kräfte K, in der Richtung der Abstände angebracht, das Gleichgewicht, so bestehen die Gleichungen (22) [bez. (21)]; dann ist wiederum im ganzen Gebiete V nach (20) die Summe konstant. Also gewinnen wir den

Satz IV: „Giebt es irgend ein Gebiet der Ebene, in welchem gilt:

$$\sum_1^n \varepsilon_h \cos \alpha_h \equiv 0, \quad \sum_1^n \varepsilon_h \sin \alpha_h \equiv 0,$$

wobei ε_h beidemale denselben Wert $+1$ oder -1 besitzt, — oder, was dasselbe heifst, giebt es innerhalb des Gebietes V irgend einen Punkt, in dem sich gleiche Kräfte, in der Richtung der Abstände r_h angebracht, das Gleichgewicht halten —, so besitzt in dem betreffenden Gebiete die Abstandssumme einen konstanten Wert und zwar ihren Minimalwert, so dafs das betreffende Gebiet Minimalstelle ist.“

Hiernach ist es in vielen Fällen sehr leicht, zu entscheiden, ob ein Gebiet mit minimaler Abstandssumme vorhanden ist oder nicht.

Bei zwei Geraden ist dies nur möglich, sobald sie einander parallel sind, da hier die zwei gleichen Kräfte entgegengesetzt gerichtet sein müssen, um sich gegenseitig aufzuheben. Dann ist der Streifen zwischen den Geraden Minimalfläche.

Drei gleiche Kräfte heben sich auf, sobald sie Winkel von 120° mit einander bilden. Sobald also drei Gerade ein gleichseitiges Dreieck bilden, ist die Abstandssumme, wie auch elementar leicht beweisbar ist, in diesem Dreiecke konstant und von kleinstem Werte. Bilden sie kein gleichseitiges Dreieck, so giebt es keine Minimalfläche.

Vier gleiche Kräfte heben sich nur dann auf, wenn je zwei in entgegengesetzte Richtung fallen (immer natürlich angenommen, dafs alle Geraden Γ_h, also auch alle r_h in derselben Ebene liegen). Bilden also vier Gerade ein Parallelogramm, so ist dies Minimalfläche, und laufen alle vier einander parallel, so ist der mittlere Streifen Minimalfläche. Andere Fälle giebt es bei vier Geraden nicht.

Von mehr als vier Geraden können so bestimmte Angaben nicht mehr gemacht werden. Denn in den notwendigen Bedingungsgleichungen

$$\sum_1^n \cos \alpha_h = 0, \quad \sum_1^n \sin \alpha_h = 0,$$

treten dann mindestens zwei Winkel auf, die wir beliebig annehmen dürfen, so daſs die Aufgabe ganz unbestimmt wird. Nur folgendes können wir noch feststellen:

Ist n beliebig, so ist jedes regelmäſsige n Eck, sowie jedes n Eck, dessen Seiten denen eines regelmäſsigen n Ecks parallel laufen und das nur hohle Winkel besitzt, d. h. also, jedes n Eck, das durch Dehnung oder Zusammenziehung ohne Änderung der Winkel aus einem regelmäſsigen n Ecke hervorgeht, Minimalfläche für die n Geraden, in denen seine Seiten liegen. Denn legen wir den Koordinatenanfang innerhalb des Vielecks, so ist

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2\pi}{n}, \quad \alpha_3 = \alpha_2 + \frac{2\pi}{n} = \alpha_1 + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad \cdots \alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{2\pi}{n} = \alpha_1 + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n};$$

also gilt, da statt α_1 $\alpha_1 + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \alpha_1 + 2\pi$ gesetzt werden darf, ohne daſs sich die Funktionen von α_1 ändern, nach einer bekannten Formel

$$\sum_1^n{}_h \cos \alpha_h \equiv \sum_1^n{}_h \cos\left(\alpha_1 + h \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \equiv \frac{\sin\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\alpha_1 + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} \equiv \frac{\sin \pi \cdot \cos\left(\alpha_1 + \frac{n+1}{n}\pi\right)}{\sin \frac{\pi}{n}} \equiv 0;$$

$$\sum_1^n{}_h \sin \alpha_h \equiv \sum_1^n{}_h \sin\left(\alpha_1 + h \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \equiv \frac{\sin\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\alpha_1 + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} \equiv \frac{\sin \pi \cdot \sin\left(\alpha_1 + \frac{n+1}{n}\pi\right)}{\sin \frac{\pi}{n}} \equiv 0.$$

Also sind für jedes solche Vieleck die Bedingungen (22) erfüllt, das Vieleck selbst daher Minimalfläche.

Ist ferner n gerade, so erfüllt jedes n Eck mit lauter hohlen Winkeln, in dem jede Seite ihrer Gegenseite parallel läuft, die Gleichungen (21). Denn sind Γ_k und Γ_l diese Gegenseiten, so ist, sobald der Koordinatenanfang im Innern des Vielecks, also zwischen Γ_k und Γ_l liegt, $\alpha_k = \alpha_l \pm \pi$, also $\cos \alpha_k = -\cos \alpha_l$, $\sin \alpha_k = -\sin \alpha_l$. Daher heben sich die Kosinusse und die Sinusse von α_k und α_l gegenseitig auf, daher alle Kosinusse und Sinusse, da wir sie in $\frac{n}{2}$ solcher Paare ordnen können. Ist ferner n gerade und sind alle Geraden parallel, so erfüllt der mittelste Streifen auch die Gleichungen (21), der, wie schon früher bewiesen, Minimalfläche ist. Einfacher ist hier der statische Beweis.

Lassen sich ferner die n Geraden in Gruppen so ordnen, daſs jede von diesen Gruppen eine Figur der obigen drei Arten bildet und daſs alle diese Figuren ein Flächenstück V gemein haben, so ist V Minimalfläche, da bei ihm die Geraden jeder einzelnen Gruppe, also auch alle Geraden die Gleichungen (22) erfüllen, sobald der Koordinatenanfang im Innern von V liegen. (Liegen z. B. ein Parallelogramm und ein gleichseitiges Dreieck zum Teil ineinander, so ist das beiden gemeinsame Flächenstück Minimalfläche für die betreffenden sieben Geraden u. s. w.)

Als Nachtrag zu der Untersuchung der geometrischen Örter mag noch folgendes gegeben werden. Sind n Gerade der Ebene ε nicht alle einander parallel, so schneiden sie auſser einer gewissen Anzahl begrenzter Gebiete, deren Anzahl im Grenzfalle gleich null ist, stets $2n$ halbbegrenzte Gebiete mit parallelen oder divergenten Randstrahlen[1]) heraus, die im Endlichen in eine gebrochene Linie mit lauter nach dem Inneren des Gebietes hohlen Winkeln oder in einen Punkt auslaufen. Es läſst sich dann stets in die Ebene eine geschlossene Linie (am einfachsten Kreislinie) legen, die alle

[1]) Wir verstehen unter Randstrahlen diejenigen Strahlen, durch welche das betreffende halbbegrenzte Gebiet bis in die Unendlichkeit hin von den benachbarten halbbegrenzten Gebieten geschieden wird.

begrenzten Gebiete in sich schliefst und jedes halbbegrenzte Gebiet so durchquert, dafs es die Randstrahlen je nur einmal schneidet. Wir wandern nun von einem beliebigen Gebiete, dafs wir V_1 nennen, auf dieser Linie fort und nennen die Gebiete, wie sie weiter aufeinander folgen, V_2, V_3, $\ldots V_n$, V_{1+n}, V_{2+n}, $\ldots V_{n+n}$. Es läfst sich dann der Satz nachweisen:

Satz V: „Die Örter des Flächenstückes $V_s (s \leqq n)$ sind denen des Flächenstückes V_{s+n} parallel."

Es mögen zunächst unter den Geraden Γ_h keine Parallelen vorkommen. Gehen wir nun von V_s bis V_{s+n}, so überschreiten wir, da jede Gerade die Ebene in zwei vollständig getrennte Teile zerlegt, der Reihe nach alle Geraden Γ_h je einmal und dann von V_{s+n} bis V_s in demselben Sinne weitergehend alle Γ_h wiederum je einmal in derselben Reihenfolge. Heifst also in V_s die Abstandssumme

(23) $$\Sigma_s r_h \equiv \sum_1^n {}_h \varepsilon_h (p_h - x \cos \alpha_h - y \sin \alpha_h),$$

so gilt in V_{s+n}, da man von V_s bis V_{s+n} alle Γ_h je einmal überschreitet,

(24) $$\Sigma_{s+n} r_h \equiv \sum_1^n {}_h \varepsilon_h (x \cos \alpha_h + y \sin \alpha_h - p_h).$$

Es möge nun für zwei Punkte K und L in V_s gelten

(25) $$\sum_1^n {}_h \varepsilon_h (p_h - x_k \cos \alpha_h - y_k \sin \alpha_h) \equiv \sum_1^n {}_h \varepsilon_h (p_h - x_l \cos \alpha_h - y_l \sin \alpha_h) \equiv \mathfrak{S}.$$

Ferner möge $M = x_m, y_m$ wiederum in der Form (19) als laufender Punkt auf einer Parallelen zu KL dargestellt sein. Liegt nun M in V_{s+l}, so ist nach (24)

$$\Sigma_m r_h \equiv \sum_1^n {}_h \varepsilon_h \left(\left(\frac{\varkappa x_k + \lambda x_l}{\varkappa + \lambda} + e \right) \cos \alpha_h + \left(\frac{\varkappa y_k + \lambda y_l}{\varkappa + \lambda} + f \right) \sin \alpha_h - p_h \right),$$

also nach (25)

(26) $$\Sigma_m r_h \equiv - \mathfrak{S} + e \sum_1^n {}_h \varepsilon_h \cos \alpha_h + f \sum_1^n {}_h \varepsilon_h \cos \alpha_h,$$

also auch konstant. Diese Formel gilt, so lange M in V_{s+n} liegt und alle Γ_h einander schneiden.

Wir nehmen weiter an, dafs unter den Γ_h Parallele vorkommen; es mögen m Gruppen von Geraden vorhanden sein, zu denen g_1, $g_2 - g_1$, $\cdots g_m - g_{m-1}$ Gerade gehören, wobei $g_m = n$ ist, einzelne von den Anzahlen g_1 und $g_h - g_{h-1}$ gleich 1 sein können und, wenn mehrere Gerade zu derselben Gruppe gehören, diese alle einander, aber nicht den anderen Geraden parallel laufen. Dann giebt es in der Ebene ε wiederum $2n$ halbbegrenzte Gebiete, und zwar werden $2m$ von divergenten, $2(n-m)$ von parallelen Randstrahlen begrenzt. Wir gehen nun wiederum auf einem geschlossenen Wege so um die vollständig begrenzten Gebiete herum, dafs jedes halbbegrenzte Gebiet gerade einmal durchquert, also jeder Randstrahl einmal überschritten wird. Wir beginnen bei einer von den beiden äufsersten Geraden der ersten Gruppe, bez. mit der einzigen der Gruppe gehörigen Geraden; von ihr aus überschreiten wir erst alle Geraden der ersten Gruppe, gehen dann zur zweiten über u. s. w. So treffen wir der Reihe nach die 1. Gruppe $\Gamma_1, \cdots \Gamma_{g_1}$, die 2. Gruppe $\Gamma_{g_1+1}, \cdots \Gamma_{g_2}$ u. s. f., endlich die m-Gruppe $\Gamma_{g_{m-1}+1}, \ldots \Gamma_n$. Nun treffen wir wiederum die Geraden der ersten Gruppe, aber nun, da Γ_{g_1} als Parallele zu Γ_1 auf einer und derselben Seite von Γ_1 verläuft, in umgekehrter Reihenfolge. So folgen sich jetzt $\Gamma_{g_1}, \cdots \Gamma_1$, $\Gamma_{g_2}, \cdots \Gamma_{g_1+1}, \cdots \Gamma_n, \cdots \Gamma_{g_{m-1}+1}$. Nun gelangen wir zum zweiten Male nach Γ_1, haben also den Rundgang vollendet.

Die Gebiete, die wir treffen, nennen wir $V_1, \ldots V_{g_1-1}, \underline{V_{g_1}}, \ldots V_{n-1}, \underline{V_n}, V_{1+n}, \ldots V_{g_1-1+n}, \underline{V_{g_1+n}}, \ldots V_{n-1+n}, \underline{V_{n+n}}$. Dabei besitzen die unterstrichenen Gebiete divergente Randstrahlen, da man in ihnen von einer Geradengruppe zur nächsten übergeht, die nicht unterstrichenen parallele.

Gehen wir nun von V_{g_1} nach V_{g_1+n}, so überschreiten wir, von Γ_{g_1+1} anfangend, alle Gerade bis Γ_n, dann noch Γ_{g_1} bis Γ_1, worauf wir nach $V_{g}{}_{+n}$ gelangen. Da wir alle Γ_h überschritten haben, so sind auch in V_{g_1} und V_{g_1+n} und somit in allen zusammengehörigen Gebieten mit divergenten Randstrahlen die Örter gegenseitig parallel.

Gehen wir aber etwa von V_k aus, wo $k \leqq \frac{g_1}{2}$ ist (vorausgesetzt ist hier, dafs zur ersten Gruppe mehr als eine Gerade gehört, was stets erreichbar ist, da überhaupt parallele Gerade vorkommen), so überschreiten wir bis V_{k+n} $\Gamma_{k+1}, \ldots \Gamma_{g_1}, \ldots \Gamma_n, \Gamma_{g_1}, \Gamma_{g_1-1}, \ldots \Gamma_{g_1-k+1}$, da es wiederum n Gerade sein müssen. Da nun $k \leqq \frac{g_1}{2}$ ist, so ist $g_1 - k + 1 \geqq \frac{g_1}{2} + 1$, also $> k$. Es werden daher $\Gamma_1, \ldots \Gamma_k$ gar nicht, $\Gamma_{k+1}, \ldots \Gamma_{g_1-1}$ je einmal, $\Gamma_{g_1-k+1}, \ldots \Gamma_{g_1}$ je zweimal, $\Gamma_{g_1+1}, \ldots \Gamma_n$ je einmal überschritten. Wenden wir nun wieder die Abkürzung $\mathfrak{p}_h$ für $p_h - x\cos\alpha_h - y\sin\alpha_h$ an, so ist

$$\Sigma_k r_h \equiv \Sigma_1^n{}_h\, \varepsilon_h \mathfrak{p}_h; \tag{27}$$

$$\Sigma_{k+n} r_h \equiv \Sigma_1^k{}_h\, \varepsilon_h \mathfrak{p}_h + \Sigma_{g_1-k+1}^{g_1}{}_h\, \varepsilon_h \mathfrak{p}_h - \Sigma_{k+1}^{g_1-k}{}_h\, \varepsilon_h \mathfrak{p}_h - \Sigma_{g_1+1}^{n}{}_h\, \varepsilon_h \mathfrak{p}_h;$$

$$\Sigma_{k+n} r_h \equiv 2\left(\Sigma_1^k{}_h\, \varepsilon_h \mathfrak{p}_h + \Sigma_{g_1-k+1}^{g_1}{}_h\, \varepsilon_h \mathfrak{p}_h\right) - \Sigma_1^n{}_h\, \varepsilon_h \mathfrak{p}_h. \tag{28}$$

Nun liegt V_k zwischen Γ_k und Γ_{k+1}, V_{k+h} zwischen Γ_{g_1-k+1} und Γ_{g_1-k}, beide also zwischen Γ_k und Γ_{g_1-k}, also auch zwischen Γ_{k-1} und $\Gamma_{g_1-k+1}, \ldots \Gamma_2$ und Γ_{g_1-1}, Γ_1 und Γ_{g_1}. Da dies Parallele sind, so sind für alle Punkte sowohl in V_k als in V_{k+n} $\varepsilon_1 \mathfrak{p}_1 + \varepsilon_{g_1} \mathfrak{p}_{g_1}$, $\varepsilon_2 \mathfrak{p}_2 + \varepsilon_{g_1-1} \mathfrak{p}_{g_1-1}, \ldots \varepsilon_k \mathfrak{p}_k + \varepsilon_{g_1-k+1} \mathfrak{p}_{g_1-k+1}$ einzeln konstant, so dafs statt (28) gesetzt werden kann

$$\Sigma_{k+n} r_h \equiv l - \Sigma_1^n{}_h\, \varepsilon_h \mathfrak{p}_h, \tag{29}$$

wo die ε_h dieselben Werte wie in (27) besitzen. Nun läfst sich ebenso wie oben leicht nachweisen, dafs in V_k und V_{k+n} ebenfalls die Örter gegenseitig parallel sind. Da man die Zählung der Geraden auch umgekehrt vornehmen kann, so ist somit der Satz V auch für $k \geqq \frac{g_1}{2}$, also überhaupt bewiesen.

Damit wären die wesentlichsten Eigenschaften der Abstandssumme abgeleitet. Es sei gestattet, noch eine Reihe weiterer ohne Beweis, der in jedem Einzelfalle leicht erbracht werden kann, einfach anzuführen. Dabei wird vorausgesetzt, dafs nicht alle Γ_h einander parallel sind.

1) Nimmt man den Wert $\mathfrak{S}$ der Abstandssumme hinreichend grofs an, so stellt stets der Ort $\Sigma r_h = \mathfrak{S}$ die Umrandung eines Vielecks mit $2n$ Seiten und zwar parallelen Gegenseiten dar.

2) Giebt es nur einen einzigen Minimalpunkt und schneiden sich in ihm m Gerade Γ_h, so stellt $\Sigma r_h = \mathfrak{S}$ bei hinreichend kleinem $\mathfrak{S}$ (d. h., wenn $\mathfrak{S}$ nur wenig gröfser als die Minimalsumme ist) ein $2m$ Eck mit unendlich kleinen Seiten dar.

3) Giebt es eine Minimalstrecke, durch deren beide Endpunkte aufser der Geraden Γ_h, auf der sie liegt, noch im ganzen m weitere Γ_h laufen, so erhält man bei hinreichend kleinem $\mathfrak{S}$ ein $2(m+1)$ Eck mit zwei endlichen, einander und der Minimalstrecke parallelen und aufserdem $2m$ unendlich kleinen Seiten.

4) Giebt es ein Minimalvieleck mit k Ecken, durch die aufser den k Geraden Γ_h, auf denen sie liegen, noch im ganzen m weitere Gerade (natürlich aufserhalb des Vielecks) laufen, so erhält man bei hinreichend kleinem $\mathfrak{S}$ ein $2(k+m)$ Eck mit k endlichen und zwar den benachbarten Seiten des Vielecks parallelen und aufserdem $k+2m$ unendlich kleinen Seiten.

5) Für drei Gerade einer Ebene erhält man (aufser der mittelsten Geraden bei drei parallelen):

a) eine Minimalfläche: wenn sie ein gleichseitiges Dreieck einschliefsen (eben dies Dreieck);

b) eine Minimalstrecke: α) wenn zwei parallele durch eine dritte geschnitten werden (die Strecke auf der letzteren);

β) wenn sie ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Schenkel gröfser als die Grundlinie sind (die Grundlinie);

c) einen Minimalpunkt: α) wenn sie durch ein und denselben Punkt laufen (diesen Punkt);

β) wenn sie ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Schenkel kleiner als die Grundlinie ist (die Spitze);

γ) wenn sie ein ungleichseitiges Dreieck bilden (den Scheitel des gröfsten Dreieckswinkels).

NB. Man kann, sobald ein Dreieck entsteht, kurz sagen: der Eckpunkt mit kleinster Höhe, bez., wenn zwei gleiche Höhen vorhanden sind, die kleiner als die dritte sind, die Seite, von deren Endpunkten sie auslaufen, bez., wenn drei gleiche Höhen vorhanden sind, das ganze Dreieck ist Minimalstelle.

6) Für ein ungleichseitiges Dreieck konstruiert man einen Ort konstanter Abstandssumme im Innern so, dafs man die kleinste Seite von ihren Endpunkten aus auf den gröfseren abträgt und die so erhaltenen Punkte verbindet; die anderen sind parallel zu dieser Strecke. Im gleichschenkligen Dreiecke laufen sie der Grundlinie parallel. — Für ein beliebiges Dreieck konstruiert man einen Ort aufserhalb so, dafs man irgend eine Seite von ihren Endpunkten aus auf den Verlängerungen der anderen abträgt. Nach Satz V erhält man so die Örter in zwei halbbegrenzten Gebieten (in dem einen in der Unendlichkeit zusammenhängenden Dreiecke), also durch Benutzung jeder Seite alle Örter. — Im Falle b) α) erhält man die Örter in den Winkeln, indem man sie so legt, dafs sie auf der Parallelen und der Schneidenden Strecken abschneiden, die sich wie $2:1$ verhalten.

7) Trägt man in jedem Punkte $P = x, y$ der Ebene ε die zugehörige Abstandssumme senkrecht zur Ebene ab, so besteht die Fläche $z = \Sigma r_h$ aus Ebenenstücken, die einander nicht parallel sind und um so steiler ansteigen, je weiter sie von der Minimalstelle entfernt sind. Die Ebenenstücke werden von gebrochenen Linien ohne einspringende Winkel vollständig oder nur teilweise begrenzt. Je nachdem ein Minimalpunkt, eine Minimalstrecke oder eine Minimalfläche vorhanden ist, besitzt die Fläche $z = \Sigma r_h$ nur einen einzigen tiefsten Punkt oder eine tiefste, zu ε parallele Kante oder ein tiefstes, zu ε paralleles, vollständig begrenztes Flächenstück, und umgekehrt.

II. Geometrische Behandlung des allgemeinen Falles.

Es mögen jetzt n Gerade Γ_h ganz beliebig im Raume liegen. Wir fragen zunächst wieder nach Anzahl und Art der ausgezeichneten Punkte. Dabei verfahren wir genau wie bei n Geraden ein und derselben Ebene, indem wir die Änderung der Abstandssumme längs einer beliebigen Geraden des Raumes Γ untersuchen. Dabei dürfen wir wiederum alle zu Γ parallelen Geraden Γ_h, sowie eine etwa auf Γ fallende Γ_h unberücksichtigt lassen, da ja alle Punkte auf Γ von ihnen ein und denselben Abstand besitzen. Daher nehmen wir für die folgende Betrachtung an, dafs jede Γ_h entweder Γ schneidet (in der Endlichkeit) oder sich mit Γ kreuzt. Alsdann sind drei verschiedene Fälle möglich:

A) Alle Geraden Γ_h schneiden Γ.

B) Alle Geraden Γ_h kreuzen sich mit Γ.

C) Es giebt sowohl Gerade Γ_h, die Γ schneiden, als solche, die sich mit Γ kreuzen.

Wir wollen diese Fälle einzeln in Betracht ziehen.

A) Alle Geraden Γ_h schneiden Γ und zwar Γ_h in A_h.

Wir fällen von einem beliebigen Punkte P der Geraden Γ die Lote PB_h auf die Γ_h. Drehen wir nun Γ_h um Γ so, dafs der Winkel (Γ, Γ_h) ungeändert bleibt, lassen also Γ_h den Mantel eines Rotationskegels mit der Axe Γ beschreiben, so ändert sich auch die Länge des Lotes PB_h nicht $(PB_h = PA_h \cdot \sin(\Gamma, \Gamma_h))$. Durch diese Drehung können wir aber alle Γ_h, ohne dafs die Abstandssumme für irgend einen Punkt auf Γ geändert wird, in ein und dieselbe Ebene bringen, in der natürlich auch Γ liegt. Dann haben wir aber wiederum den Fall ID). Es giebt also auch, wenn alle Γ_h Γ schneiden, auf Γ nur Minimalpunkte und zwar entweder einen einzigen, der dann auf einen von den Punkten A_h fällt, oder unzählig viele, von denen dann die ganze Strecke zwischen zwei auf Γ einander folgenden Punkten A_h und A_{h+1} erfüllt ist.

Die graphische Darstellung (die wir hier in einer Γ enthaltenden Ebene so vornehmen, dafs wir in jedem Punkte P auf Γ ein Lot gleich der Abstandssumme nach ein und derselben Seite von Γ errichten) liefert also ebenso wie in ID) eine gebrochene Linie, die ganz auf der einen Seite von Γ liegt und Γ nur erhabene Winkel zukehrt, so dafs sie entweder einen einzigen zunächst an Γ gelegenen Punkt oder aber eine zunächst an Γ gelegene, Γ parallele Strecke besitzt.

B) Alle Geraden Γ_h kreuzen sich mit Γ.

Fällen wir von einem beliebigen Punkte der Geraden Γ die Lote PB_h auf die Γ_h und konstruieren die gemeinsame Lote von Γ und jeder Γ_h, A_hC_h, so ist

$$PB_h^2 = PA_h^2 \cdot \sin^2(\Gamma, \Gamma_h) + A_hC_h^2,$$

also, wenn wir auf Γ die Strecken von irgend einem Punkte O an messen und $OP = x$, $OA_h = a_h$ und zugleich $A_hC_h = c_h$ setzen,

$$PB_h^2 = (x - a_h)^2 \sin^2(\Gamma, \Gamma_h) + c_h^2. \tag{1}$$

Daher ist für P die Abstandssumme

$$\Sigma r_h = \sum_1^n{}_h \sqrt{(x - a_h)^2 \sin^2(\Gamma, \Gamma_h) + c_h^2}. \tag{2}$$

Da keine Gerade Γ_h von Γ geschnitten wird (d. h., alle $c_h > 0$ sind), so wird kein $r_h = 0$; also bestimmt sich die Strecke x für einen ausgezeichneten Punkt aus der Gleichung

$$\frac{d\Sigma r_h}{dx} = \sum_1^n{}_h \frac{(x - a_h)\sin^2(\Gamma, \Gamma_h)}{r_h}, \tag{3}$$

während das Eintreten eines Minimums abhängt von der Bedingung

$$(4) \qquad \frac{d^2 \Sigma r_h}{dx^2} \equiv \sum_1^n{}_h \frac{c_h{}^2 \sin^2 (\Gamma, \Gamma_h)}{r_h{}^3} > 0.$$

Letztere Bedingung ist für alle Punkte auf Γ erfüllt, da ja auch keine Gerade Γ_h zu Γ parallel läuft, also kein $\sin(\Gamma, \Gamma_h)$ null wird. Daher kann auf Γ nur ein Minimum eintreten. Da zugleich für sehr große negative x $\frac{d\Sigma r_h}{dx} < 0$, für sehr große positive x aber > 0 ist und sich dieser Ausdruck mit x stetig ändert (ein Verschwinden der Nenner ist ja ausgeschlossen), so muß es stets einen Wert x geben, der die Gleichung (3) löst. Zugleich kann es nicht mehr als einen geben, da auf Γ nur Minima vorkommen und sich auch die Abstandssumme selbst mit x stetig ändert. Es giebt also auf Γ stets einen und nur einen ausgezeichneten und zwar einen Minimalpunkt.

Fällt man nun $PD_h \perp$ Ebene (A_h, Γ_h) und $D_h E_h \perp \Gamma$, so ist auch $B_h E_h \perp A_h P$, also einmal $PE_h = PB_h \cos B_h \hat{P} E_h$ und andererseits $PE_h = PD_h \sin P\hat{D}_h E_h = PA_h \sin^2 P\hat{A}_h D_h$, also $PB_h \cos B_h \hat{P} E_h = PA_h \sin^2 P\hat{A}_h D_h$, d. h. $r_h \cos (r_h, \Gamma) = (x - a_h) \sin^2 (\Gamma, \Gamma_h)$. Daher können wir statt (3), indem wir noch einen konstanten Faktor k hinzusetzen, schreiben

$$\sum_1^n{}_h k \cos (r_h, \Gamma) = 0.$$

Das läßt aber wiederum eine mechanische Deutung zu, die wir aussprechen in dem

Satz VI: „Kreuzen sich alle Geraden Γ_h mit Γ, so giebt es auf Γ stets einen und nur einen ausgezeichneten und zwar einen Minimalpunkt; er liegt so, daß gleiche Kräfte, an ihm in der Richtung der r_h angreifend, keine Verschiebung längs Γ bewirken können, sich also das Gleichgewicht halten, wenn Γ eine starre Gerade ist."

Stellen wir wiederum in einer durch Γ gelegten Ebene die Abstandssumme längs Γ graphisch dar, so ergiebt sich eine Kurve, die nach (2) ganz auf der einen Seite von Γ liegt und Γ nicht trifft, nach (4) Γ ihre konvexe Seite zukehrt; sie fällt also von $x = -\infty$, von unendlich großen Ordinaten herabsteigend, bis zur Ordinate des Minimalpunktes, um dann wieder bis $x = +\infty$ zu unendlich großen Ordinaten anzusteigen.

[Ist nur eine einzige Gerade Γ_h vorhanden, so stellt nach (2) die Kurve einen Hyperbelzweig dar, der gegen das Lot im Minimalpunkte symmetrisch liegt. Bei n Geraden können wir schreiben

$$\Sigma r_h \equiv |x| \cdot \sum_1^n{}_h \sqrt{\left(1 - \frac{a_h}{x}\right)^2 \sin^2 \left(\Gamma, \Gamma_h\right) + \left(\frac{c_h}{x}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi \equiv \pm \sum_1^n{}_h \frac{\left(1 - \frac{a_h}{x}\right) \sin^2 \left(\Gamma, \Gamma_h\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{a_h}{x}\right)^2 \sin^2 \left(\Gamma, \Gamma_h\right) + \left(\frac{c_h}{x}\right)^2}},$$

wobei wir mit φ den Winkel der Kurventangente mit der $+x$ Axe bezeichnen und vor das Summenzeichen $\pm$ zu setzen haben, je nachdem $x \gtrless 0$ ist; also verläuft auch diese Kurve nach $\pm \infty$ hin symmetrisch.]

C) Es giebt sowohl Gerade Γ_h, die Γ schneiden, als solche, die sich mit Γ kreuzen.

Sind $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_m$ die Geraden, die Γ schneiden, und $\Gamma_{m+1}, \cdots \Gamma_n$ diejenigen, die sich mit Γ kreuzen, so können wir die Abstandssumme in zwei Teile zerlegen, von denen der erste, $\sum_1^m{}_h r_h$, nur die Abstände von den schneidenden, der andere, $\sum_{m+1}^n{}_h r_h$, nur die von den kreuzenden Geraden enthält. Nach II A) liefert die graphische Darstellung der ersten Summe eine gegen Γ konvexe, ganz auf ein und derselben Seite von Γ gelegene gebrochene Linie. Die graphische Darstellung der zweiten

Summe liefert nach IIB) eine Kurve, die ebenfalls gegen Γ konvex ist und mit der gebrochenen Linie ganz auf derselben Seite von Γ liegt. Das Bild der Gesamtsumme gewinnen wir dann, indem wir für jeden Punkt auf Γ die Ordinaten beider Kurven addieren, also durch sogenannte Superposition der gebrochenen Linie und der Kurve.

Nun liefert die Superposition zweier nach unten konvexer Kurven K_1 und K_2 stets wieder eine nach unten konvexe Kurve K_3. Denn wenn wir die Ordinaten der einzelnen Kurven, die zu derselben Abscisse gehören, mit y_1, y_2, y_3 bezeichnen, so ist $y_1 + y_2 = y_3$, also auch nach zweimaliger Differentiation $y_1'' + y_2'' = y_3''$. Ist also $y_1'' > 0$ über die ganze Kurve K_1 und $y_2'' > 0$ über die ganze Kurve K_2, so ist auch $y_3'' > 0$ über die ganze Kurve K_3, d. h., auch K_3 nach unten konvex. Oder anschaulich ausgedrückt: weil bei den Kurven K_1 und K_2 der nachfolgende Punkt stets über der Tangente des vorhergehenden liegt, mufs dies Verhältnis bei der durch Superposition entstehenden Kurve K_3 erst recht bestehen. Zugleich erkennt man hieran, dafs der Satz auch richtig bleibt, wenn etwa an Stelle der einen Kurve eine gebrochene Linie tritt, die durchaus nach unten erhabene Winkel kehrt.

Daraus erkennen wir, dafs bei der Zusammensetzung der gebrochenen Linie und der Kurve, die ja beide gegen Γ nur erhaben sind, wieder eine nach Γ erhabene Kurve entstehen mufs, die zugleich von $x = -\infty$, von unendlich hohen Ordinaten herabsteigend, bis zu einem gewissen Punkte sinkt, um dann wieder bis $x = +\infty$ zu unendlich hohen Ordinaten aufzusteigen. [Da bei der Superposition nach einmaliger Differentiation $y_1' + y_2' = y_3'$ ist und sich in unserem Falle y_2' stetig ändert, y_1' aber konstant ist und nur an einzelnen diskreten Stellen seinen Wert sprungweise ändert, so wird sich auch y_3' im allgemeinen stetig ändern und nur an den Stellen springen, wo auch y_1' springt, d. h. K_3 ist im allgemeinen stetig gekrümmt, besitzt aber einzelne ausspringende Spitzen.]

Daraus folgt, dafs K_3 keinen Punkt besitzt, in welchem es vom Steigen zum Fallen übergeht, und einen und nur einen, in dem es vom Fallen zum Steigen übergeht, d. h., auf Γ giebt es nur einen ausgezeichneten und zwar einen Minimalpunkt.

Fassen wir nun die Resultate von I) und II) zusammen und bedenken noch, dafs wir ohne Änderung der Form der Kurve K_3 beliebig viele zu Γ parallele Gerade Γ_h und schliefslich auch eine in Γ fallende Gerade Γ_h hinzufügen dürfen, so gewinnen wir den

Satz VII: „Sind n Gerade Γ_h im Raume beliebig gegeben und nimmt man noch eine Gerade Γ im Raume beliebig an (die auch auf eine der Γ_h fallen kann), so besitzt die Abstandssumme Σr_h auf Γ stets einen und nur einen ausgezeichneten und zwar einen Minimalwert. — Kreuzt sich Γ mit einzelnen oder allen Γ_h, so giebt es auf Γ nur einen einzelnen Punkt, in dem die Abstandssumme den Minimalwert besitzt. Schneidet dagegen Γ alle Γ_h in endlicher oder unendlicher Entfernung, so kann es auf Γ auch eine ganze Strecke geben, für deren Punkte der Minimalwert eintritt. In letzterem Falle liegt die Minimalstrecke stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schnittpunkten von Γ mit dem Γ_h, wie denn auch dann, wenn auf Γ nur ein Minimalpunkt vorkommt und schneidende Gerade vorhanden sind, dieser Punkt stets in einen der Schnittpunkte fallen mufs."

Vergleichen wir nun wiederum die Abstandssummen aller Punkte des Raumes untereinander, so geht aus Satz VII, genau wie in dem Falle, wo alle Γ_h in ein und derselben Ebene liegen, hervor, dafs es nur eine einzige Minimalstelle im Raume geben kann. (Dafs es eine solche geben mufs, wurde in der Einleitung gezeigt.)

Giebt es nun keine Gerade Γ, von der alle Γ_h (in endlicher oder unendlicher Entfernung) geschnitten werden, so kann es auf jeder Geraden im Raume nur einen einzigen Minimalpunkt geben, d. h., es giebt überhaupt nur einen Minimalpunkt im Raume. — Geht ferner durch jeden Raumpunkt höchstens eine Gerade, von der alle Γ_h geschnitten werden, so kann man auf einen Minimalpunkt oder eine Minimalstrecke kommen. — Lassen sich endlich durch irgend einen Raumpunkt P zwei Gerade Γ und Γ' legen, von denen alle Γ_h geschnitten werden, so liegen alle Γ_h in der Ebene (Γ, Γ'), so daſs nicht nur durch P, sondern überhaupt durch alle Punkte dieser Ebene unzählig viele Gerade gehen, die alle Γ_h schneiden. Dann kann man aber (nach ID) einen Minimalpunkt, eine Minimalstrecke oder ein Minimalvieleck mit lauter ausspringenden Winkeln erhalten. — Dagegen ist es unmöglich, daſs die Minimalstelle drei Dimensionen besitzt. Denn sollte dies der Fall sein, so müſsten durch jeden Punkt im Innern Gerade in jeder beliebigen Richtung laufen, die alle Γ_h schneiden. Das ist aber unmöglich, da durch jeden Punkt unzählig viele Gerade gelegt werden können, die sich mit einer bestimmten von den Geraden Γ_h kreuzen.

So gewinnen wir als Endresultat der allgemeinen Betrachtungen den

Satz VIII: „Bei n beliebigen Geraden im Raume kann die Stelle der kleinsten Abstandssumme ein Punkt, eine Strecke (Gerade) oder ein ebenes Vieleck mit lauter ausspringenden Winkeln (gerader Parallelstreifen) sein; auf alle Fälle giebt es eine und nur eine Stelle. Ein Vieleck (Parallelstreifen) ist nur dann möglich, wenn alle Geraden in ein und derselben Ebene liegen, eine Strecke (Gerade) nur, wenn es wenigstens eine Gerade giebt, die alle jene Geraden in endlicher oder unendlicher Entfernung schneidet."

III. Analytische Behandlung des Falles von n einander kreuzenden Geraden.

In II) ist Anzahl und Art der ausgezeichneten Werte der Abstandssumme im allgemeinen bestimmt worden. Es erübrigt noch, die Lage der Minimalpunkte bei gegebenen Geraden näher zu bestimmen. Diese Untersuchung wollen wir zunächst nur für h einander kreuzende Gerade Γ_h durchführen, von denen wir noch weiter annehmen, daſs sie einander nicht unendlich nahe kommen. Die Ergebnisse lassen sich vielfach auch auf den allgemeinsten Fall von n Geraden übertragen, vor allem, was die Entwicklung der später zu untersuchenden Differenz Δ betrifft.

Wir beziehen die Geraden Γ_h auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch:

$$x = a_h + \varrho_h \cos\alpha_h,\quad y = b_h + \varrho_h \cos\beta_h,\quad z = c_h + \varrho_h \cos\gamma_h,\quad h = 1, 2, \cdots n. \tag{1}$$

Hierin sind $\cos\alpha_h$, $\cos\beta_h$, $\cos\gamma_h$ die Richtungscosinusse von Γ_h[1]), für die bekanntlich die Identität

$$\cos^2\alpha_h + \cos^2\beta_h + \cos^2\gamma_h \equiv 1 \tag{2}$$

besteht. — Der Abstand r_h irgend eines Raumpunktes $P = x, y, z$ von Γ_h bestimmt sich durch

$$r_h^2 = \xi_h^2 + \eta_h^2 + \zeta_h^2, \tag{3}$$

wo zur Abkürzung eingeführt ist

$$\begin{cases} \xi_h \equiv x - a_h - \varrho_h \cos\alpha_h,\quad \eta_h \equiv y - b_h - \varrho_h \cos\beta_h,\quad \zeta_h \equiv z - c_h - \varrho_h \cos\gamma_h, \\ \varrho_h \equiv (x - a_h)\cos\alpha_h + (y - b_h)\cos\beta_h + (z - c_h)\cos\gamma_h. \end{cases} \tag{4}$$

Zugleich ist

$$\frac{d r_h}{dx} \equiv \frac{\xi_h}{r_h} \equiv -\cos(r_h, x),\quad \frac{d r_h}{dy} \equiv \frac{\eta_h}{r_h} \equiv -\cos(r_h, y),\quad \frac{d r_h}{dz} \equiv \frac{\zeta_h}{r_h} \equiv -\cos(r_h, z). \tag{5}$$

---

[1]) Wir messen für jede Richtung die hohlen Winkel, die sie mit den Richtungen der positiven Koordinatenaxen bildet; bei den Geraden Γ_h und den später einzuführenden Geraden G_h giebt es zweierlei Tripel von Richtungswinkeln, die sich paarweise zu 180° ergänzen; wir nehmen an, daſs stets ein und dasselbe Tripel benutzt wird. Zugleich sei ein für allemal bemerkt, daſs alle vorkommenden Sinusse positiv sind.

Hierin ist r_h positiv und in der Richtung von P nach Γ_h zu genommen; zugleich gilt wieder die Identität

$$\cos^2(r_h, x) + \cos^2(r_h, y) + \mathrm{co}^2(r_h, z) \equiv 1. \tag{6}$$

r_h kann nur dann null werden, wenn P auf Γ_h rückt, d. h., wenn ξ_h, η_h, ζ_h einzeln null werden. Dann werden nach (5) die partiellen ersten Differentialquotienten von r_h nach x, y, z unbestimmt, was sich mit der geometrischen Anschauung deckt, die uns lehrt, dafs in jedem Punkte von Γ_h unzählig viele Lote errichtet werden können. Zugleich aber zeigt (5), dafs in diesem Falle die Werte der Differentialquotienten zwar unbestimmt, aber nicht unendlich werden können, sondern zwischen -1 und $+1$ liegen. Sonst sind die Differentialquotienten stets bestimmt und endlich. Nehmen wir also an, der Minimalpunkt liege aufserhalb aller Γ_h (Minimum erster Art)[1], so dürfen wir die Taylorsche Entwicklung benutzen. Liegt er aber auf einer Γ_h (Minimum zweiter Art)[1], so bedarf es einer besonderen Betrachtung.

Es sei also zunächst $P_\mu = x_\mu, y_\mu, z_\mu$ ein aufserhalb aller Γ_h liegender Punkt, für den die Abstandssumme

$$\Sigma r_{h\mu} \equiv \sum_1^n {}_h \sqrt{\xi_{h\mu}^2 + \eta_{h\mu}^2 + \zeta_{h\mu}^2} \tag{7}$$

ihren kleinsten Wert erreicht. ($\sqrt{}$ deutet an, dafs der absolute Wert der Quadratwurzel zu nehmen ist.) Wenn dann $P' = x', y', z'$ ein benachbarter Punkt, also

$$r^2 = (x' - x_\mu)^2 + (y' - y_\mu)^2 + (z' - z_\mu)^2 \tag{8}$$

hinreichend klein und r_h' sein Abstand von Γ_h ist, so mufs

$$\Delta \equiv \Sigma r_h' - \Sigma r_{h\mu} \tag{9}$$

gröfser als null oder mindestens gleich null sein (da es in unserem Falle, wie IIB) lehrt, auch eine Minimalstrecke geben kann). Wenn wir nun r in der Richtung von P_μ nach P', sowie $r_{h\mu}$ in der Richtung von P_μ nach Γ_h nehmen und noch n neue Gerade $G_{h\mu}$ einführen, die auf den Ebenen $(r_{h\mu}, \Gamma_h)$ oder, was dasselbe ist, (P_μ, Γ_h) senkrecht stehen, so giebt die Entwicklung der Differenz (9)

$$\Delta \equiv -r \sum_1^n {}_h \cos(r, r_{h\mu}) + \frac{r^2}{2} \sum_1^n {}_h \frac{\cos^2(r, G_{h\mu})}{r_{h\mu}} + \frac{r^3}{2} \sum_1^n {}_h \frac{\cos(r, \mathfrak{r}_{h\mu}) \cos^2(r, \mathfrak{G}_{h\mu})}{\mathfrak{r}_{h\mu}^2}. \tag{10}$$

Denn es wird das erste Glied der Entwicklung

$$V_1 \equiv -\sum_1^n {}_h \left((x' - x_\mu)\cos(r_{h\mu}, x) + (y' - y_\mu)\cos(r_{h\mu}, y) + (z' - z_\mu)\cos(r_{h\mu}, z)\right),$$

woraus zufolge der Eigenschaften der Richtungscosinusse[2] das erste Glied von (10) folgt. — Ferner wird

$$V_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_1^h {}_h \frac{1}{r_{h\mu}} \left[(x' - x_\mu)^2 (1 - \cos^2\alpha_h - \cos^2(r_{h\mu}, x)) - 2(x' - x_\mu)(y' - y_\mu)(\cos\alpha_h \cos\beta_h \right.$$
$$\left. + \cos(r_{h\mu}, x)\cos(r_{h\mu}, y)) \cdots \right],$$

wo der Kürze wegen in der eckigen Klammer eine Reihe von Gliedern weggelassen ist, die man erhält, indem man in den angeführten Gliedern alle x, y, α, β mit y, z, β, γ bez. z, x, γ, α vertauscht; obige Formel giebt

$$V_2 \equiv \frac{r^2}{2} \sum_1^n {}_h \frac{1}{r_{h\mu}} \left[1 - \cos^2(r, \Gamma_h) - \cos^2(r, r_{h\mu})\right],$$

---

[1]) Benennung nach Simon, l. c., Seite 3.

[2]) Sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungscosinusse von r und $\cos\alpha_h$, $\cos\beta_h$, $\cos\gamma_h$ die von r_h, so gilt bekanntlich

$$\cos\alpha\cos\alpha_h + \cos\beta\cos\beta_h + \cos\gamma\cos\gamma_h \equiv \cos(r, r_h).$$

also, da Γ_h, $r_{h\mu}$, $G_{h\mu}$ drei aufeinander senkrechte Gerade sind, das zweite Glied in (10). — Endlich wäre das dritte Glied der Entwicklung von $\varDelta$

$$\begin{aligned}V_3 \equiv \frac{1}{2} \sum_1^n{}_h \frac{1}{r_{h\mu}^2} \big[&(x' - x_\mu)^3 (\cos(r_{h\mu}, x) - \cos^2 \alpha_h \cos(r_{h\mu}, x) - \cos^3(r_{h\mu}, x)) \\ &+ (x' - x_\mu)^2 (y' - y_\mu) (\cos(r_{h\mu}, y) - \cos^2 \alpha_h \cos(r_{h\mu}, y) - 2 \cos \alpha_h \cos \beta_h \cos(r_{h\mu}, x) \\ &\qquad - 3 \cos^2(r_{h\mu}, x) \cos(r_{h\mu}, y)) \\ &+ (x' - x_\mu)(y' - y_\mu)^2 (\cos(r_{h\mu}, x) - \cos^2 \beta_h \cos(r_{h\mu}, x) - 2 \cos \alpha_h \cos \beta_h \cos(r_{h\mu}, y) \\ &\qquad - 3 \cos(r_{h\mu}, x) \cos^2(r_{h\mu}, y)) \\ &- 2 (x' - x_\mu)(y' - y_\mu)(z' - z_\mu)(\cos \beta_h \cos \gamma_h + \cos(r_{h\mu}, y) \cos(r_{h\mu}, z)) \cos(r_{h\mu}, x) \cdots \big],\end{aligned}$$

wo die fehlenden Glieder wiederum durch cyklische Vertauschung von x, y, z, bez. α, β, γ gefunden werden können. V_3 giebt zusammengezogen

$$V_3 \equiv \frac{r^3}{2} \sum_1^n{}_h \frac{\cos(r, r_{h\mu})}{r_{h\mu}^2} [1 - \cos^2(r, \Gamma_h) - \cos^2(r, r_{h\mu})];$$

$$V_3 \equiv \frac{r^3}{2} \sum_1^n{}_h \frac{\cos(r, r_{h\mu}) \cos^2(r, G_{h\mu})}{r_{h\mu}^2}.$$

Hieraus läfst sich das Restglied der Taylorschen Reihe ableiten.[1]) Ist nämlich $P'' = x'', y'', z''$ ein gewisser Punkt zwischen P und P', gelten also für seine Koordinaten die Gleichungen

$$x'' = (1 - \vartheta) x_\mu + \vartheta x', \quad y'' = (1 - \vartheta) y_\mu + \vartheta y', \quad z'' = (1 - \vartheta) z_\mu + \vartheta z', \quad 0 < \vartheta < 1,$$

und bedeuten $\mathfrak{r}_{h\mu}$ seinen Abstand von Γ_h und weiter $\mathfrak{G}_{h\mu}$ eine auf der Ebene $(\mathfrak{r}_{h\mu}, \Gamma_h)$, d. h., auf der Ebene (P'', Γ_h) senkrechte Gerade, so müssen wir zur Bildung des Restgliedes jeden $\cos(r_{h\mu}, x)$, $\cos(r_{h\mu}, y)$, $\cos(r_{h\mu}, z)$, $\cos(r, r_{h\mu})$, $\cos(r, G_{h\mu})$, $r_{h\mu}$ vertauschen mit $\cos(\mathfrak{r}_{h\mu}, x)$, $\cos(\mathfrak{r}_{h\mu}, y)$, $\cos(\mathfrak{r}_{h\mu}, z)$, $\cos(r, \mathfrak{r}_{h\mu})$, $\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu})$, $\mathfrak{r}_{h\mu}$, während das übrige ungeändert bleibt. Das sagt aber nichts anderes, als dafs wir jedes $r_{h\mu}$ mit $\mathfrak{r}_{h\mu}$ und jedes $G_{h\mu}$ mit $\mathfrak{G}_{h\mu}$ vertauschen müssen, während r bleibt. Also folgt aus dem letzten Wert von V_3 der Wert des Restgliedes in (10).

Nach bekannter Schlufsweise kann man aus (10) folgern, dafs $\varDelta$ nur dann sein Zeichen behalten kann, sobald die Identität

$$\sum_1^n{}_h \cos(r, r_{h\mu}) \equiv 0 \tag{11}$$

besteht, in welche Richtung von P_μ aus auch r gelegt wird, da mit Umlegung der Richtung von r das Zeichen von $\cos(r, r_{h\mu})$ wechselt. Denken wir uns links den konstanten Faktor k hinzugesetzt, so erhalten wir wiederum eine, übrigens bekannte[2]), mechanische Deutung.

Satz IX: „In jedem Minimalpunkte P_μ, der aufserhalb aller Geraden Γ_h liegt, besitzen die von diesem Punkte auf die Γ_h gefällten Lote solche Richtungen, dafs sich gleiche Kräfte, in diesen Richtungen an P_μ angreifend, das Gleichgewicht halten."

(11) liefert nun zugleich drei Gleichungen zur Bestimmung der Koordinaten von P_μ. Denn ausführlicher geschrieben giebt es (unter Weglassung des Index μ)

---

[1]) Nach Analogie der Lagrangeschen Restformel für zwei Variable; siehe Harnack, Elemente der Diff.- und Int.-Rechnung, S. 104.

[2]) Siehe Peano, Die Grundzüge der geometrischen Calculs, deutsch von Schepp, Seite 36. — Entsprechende Sätze gelten für einen Minimalpunkt der Summe der Abstände von n Punkten (Simon, l. c., Seite 32), sowie, wie leicht nachzuweisen ist, von m Punkten und n Geraden, vorausgesetzt, dafs der Minimalpunkt aufserhalb aller Punkte und Geraden liegt. Für n Gerade gelten zugleich Sätze, die denen von Simon, l. c., Seite 32 u. s. w. entsprechen, deren Anführung wegen Raummangels hier unterbleiben mufs.

$$\sum_1^n h \,(\cos(r,x)\cos(r_h,x)+\cos(r,y)\cos(r_h,y)+\cos(r,z)\cos(r_h,z))=0,$$

zerfällt also in die drei Gleichungen

(12) $$\sum_1^n h \cos(r_h,x)=0,\quad \sum_1^n h \cos(r_h,y)=0,\quad \sum_1^n h \cos(r_h,z)=0.$$

Diese Gleichungen genügen zur Bestimmung der Koordinaten des Minimalpunktes, haben aber nicht notwendig ein System Lösungen, für das alle $r_h > 0$ werden. Tritt dieser Fall ein, so besteht eben kein Minimum erster Art.

Es fragt sich nun: ist jeder Punkt P_μ, dessen Koordinaten für $r_h > 0$ (11) oder (12) genügen, ein Minimalpunkt? Für solche Punkte P_μ nimmt nach (10) $\varDelta$ folgende Form an:

(13) $$\varDelta \equiv \frac{r^2}{2}\cdot\sum_1^n h \frac{\cos^2(r,G_{h\mu})}{r_{h\mu}} + \frac{r^3}{2}\cdot\sum_1^n h \frac{\cos(r,\mathfrak{r}_{h\mu})\cos^2(r,\mathfrak{G}_{h\mu})}{\mathfrak{r}_{h\mu}^2},$$

oder, wie wir einfacher schreiben wollen, es gilt

(14) $$2\varDelta \equiv r^2\cdot F_2 + r^3\cdot F_3.$$

Nun enthält F_2 lauter positive Glieder. Soll es also verschwinden, so müssen alle Glieder einzeln null werden, d. h., es muſs irgend eine Richtung r' von r geben, für welche gilt

(15) $$\cos(r',G_{h\mu})=0,\quad h=1,2,\ldots n.$$[1]

Nun sind die $G_{h\mu}$ nach ihrer Erklärung Lote der Ebenen (P_μ, Γ_h), müssen aber nach (15) auch zu r' senkrecht stehen. Da nun r' von P_μ ausläuft, so kann $G_{h\mu}$ nur dann auf r' senkrecht stehen, wenn r' in die Ebene (P_μ, Γ_h) fällt, auf der $G_{h\mu}$ senkrecht steht. Damit also die Gleichungen (15) gleichzeitig bestehen können, ist es notwendig, daſs durch P_μ eine Gerade läuft, die in allen Ebenen (P_μ, Γ_h) liegt, d. h. also, die alle Γ_h in endlicher oder unendlicher Entfernung schneidet.[2] Wir kommen also auch bei der analytischen Behandlung unserer Aufgabe auf den Sonderfall, der sich bei der geometrischen Betrachtung herausstellte.

Sind nun die Gleichungen (15) erfüllt, so liegen P_μ, Γ_h, $r_{h\mu}$, r', also auch noch P', P'', $\mathfrak{r}_{h\mu}$ in ein und derselben Ebene. Da nun $\mathfrak{G}_{h\mu}$ senkrecht steht auf der Ebene (P'', $\mathfrak{r}_{h\mu}$), d. h., auf der Ebene (P_μ, Γ_h), so steht es auch senkrecht auf r', so daſs auch alle $\cos(r',\mathfrak{G}_{h\mu})\equiv 0$ werden. Das heiſst aber, daſs mit F_2 auch stets F_3 und damit $\varDelta$ identisch verschwindet, oder, was dasselbe ist, daſs die Abstandssumme in der Umgebung von P_μ konstant ist. Das giebt den wichtigen

Satz X: „Verschwindet in dem Punkte P_μ, für dessen Koordinaten bei $r_{h\mu} > 0$ das erste Glied in $\varDelta$ null wird, auch das zweite Glied, so verschwindet $\varDelta$ überhaupt. Dieser Fall tritt dann und nur dann ein, wenn sich durch P_μ eine Gerade[3] so legen läſst, daſs sie alle Γ_h schneidet[4]. Auf dieser Geraden ist dann die Abstandssumme über eine ganze Strecke, die P_μ in sich enthält, konstant."

Wir unterscheiden also weiterhin zwei Fälle: Durch P_μ kann gar keine und kann eine einzige Gerade laufen, die alle Γ_h schneidet.

---

[1] Anstatt der n Gleichungen (15) kann man auch die eine $\sum_1^n h \cos^2(r',G_{h\mu})=0$ setzen.

[2] Die bisherigen Betrachtungen gelten ganz allgemein für jeden Fall, wo bei n Geraden der Minimalpunkt auſserhalb aller Γ_h liegt. Setzen wir nicht lauter einander kreuzende Gerade voraus, so kann es durch P_μ auch mehr als eine Gerade geben, die alle Γ_h schneidet; dann liegen die Γ_h in ein und derselben Ebene, wie schon in II) bemerkt wurde.

[3] „wenigstens eine Gerade" im allgemeinen Falle; in unserem Falle, da sich die Γ_h kreuzen, nur eine.

[4] „in endlicher oder unendlicher Entfernung", was nicht immer wiederholt werden soll.

A. Durch $P_\mu = x_\mu, y_\mu, z_\mu$ $(r_{h\mu} > 0)$ läfst sich keine Gerade legen, von der alle Γ_h geschnitten werden.

Dann ist F_2 für jede Richtung von r gröfser als null. Wir nehmen nun zunächst an, P_μ liege in endlicher Entfernung[1]) von allen Γ_h, d. h., um P_μ als Mittelpunkt lasse sich eine Kugel mit endlichem Halbmesser R so legen, dafs sie sich keiner Γ_h bis auf unendlich kleinen Abstand nähert, sie also auch weder berührt noch schneidet. Dann sind für alle Punkte im Innern oder auf der Oberfläche dieser Kugel die r_h endlich. Ferner nehmen wir an, dafs auch F_2 endliche Gröfse besitze, d. h., dafs für alle Richtungen von r die Summe der Quadrate der $\cos(r, G_{h\mu})$ endlich sei.

Wir legen nun irgend eine Richtung r' von r fest und suchen, indem wir mit P'' in dieser Richtung von P_μ bis an die Oberfläche der Kugel R gehen, den gröfsten absoluten Wert von $\cos(r', \mathfrak{r}_h)\cos^2(r', \mathfrak{G}_h) : \mathfrak{r}_h^3$ auf, der nach unseren Festsetzungen keinesfalls unendlich grofs ist. Den so erhaltenen Wert setzen wir für jedes h in F_3 ein und erhalten so in F_3' einen oberen Grenzwert, den der absolute Wert von F_3 im äufsersten Falle erreichen kann (nicht mufs), keinesfalls aber überschreitet. Da nun zugleich für die betreffende Richtung r' F_2 einen konstanten endlichen Wert F_2' besitzt, so ist, so lange sich P' innerhalb der Kugel R befindet:

$$\Delta \geqq r^2 \cdot (F_2' - r \cdot F_3'). \tag{16}$$

Wir erreichen also sicher, dafs $\Delta > 0$ wird, sobald wir r so bestimmen, dafs es weniger als der kleinere von den Werten R und $\frac{F_2'}{F_3'}$ beträgt. Das aber sind nach unseren Festsetzungen beides endliche Werte. Es giebt also in diesem Falle stets eine Kugel mit endlichem Radius um den Mittelpunkt P_μ, innerhalb deren Δ durchaus gröfser als null ist, und zwar nimmt, wie (14) zeigt, Δ immer mehr und mehr ab, je mehr sich r bei gegebener Richtung r' von der oben bestimmten Grenze dem Wert null nähert. Das genügt aber, um P_μ als Minimalpunkt zu charakterisieren, da ja Δ rings um P_μ nach allen Seiten zunimmt und zwar nicht blos in unendlicher Nähe von P_μ, sondern auch noch in endlicher Entfernung.[2])

Giebt es nun eine Richtung r' von r, für welche F_2 unendlich klein wird, so müssen entweder alle $\cos(r, G_{h\mu})$ unendlich klein oder nur ein Teil von ihnen unendlich klein, der andere null werden. Nun wird für jeden $\cos(r, G_{h\mu})$, der verschwindet, auch der zugehörige $\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu})$ null; das hatten wir oben gezeigt, doch folgt es auch aus der Gleichung zwischen diesen Kosinussen. Es gilt ja

$$\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu}) \equiv \cos(r, \Gamma_h)\cos(\mathfrak{G}_{h\mu}, \Gamma_h) + \cos(r, r_{h\mu})\cos(\mathfrak{G}_{h\mu}, r_{h\mu}) + \cos(r, G_{h\mu})\cos(\mathfrak{G}_{h\mu}, G_{h\mu});$$

das giebt, da $\cos(G_{h\mu}, \Gamma_h) \equiv 0$ ist und da Ebene $(G_{h\mu}, r_{h\mu})$ ebenso wie Ebene $(\mathfrak{G}_{h\mu}, \mathfrak{r}_{h\mu})$ auf Γ_h senkrecht steht,

$$\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu}) \equiv \frac{\cos(r, G_{h\mu})}{\mathfrak{r}_{h\mu}}\left[r\cos(r, r_{h\mu}) + \sqrt{\mathfrak{r}_{h\mu}^2 - r^2\cos^2(r, G_{h\mu})}\right]. \tag{17}$$

Hiernach wird aber mit $\cos(r, G_{h\mu})$ der zugehörige $\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu})$ nicht nur gleichzeitig null, sondern auch gleichzeitig unendlich klein und zwar, da alle $r_{h\mu}$ endlich sind, von derselben Ordnung. Ist also für irgend eine Richtung r' F_2' unendlich klein, so gilt dies auch von F_3', und zwar wird es unendlich klein von derselben Ordnung. Daher ist in diesem Falle $F_2' : F_3'$ ebenfalls endlich und

---

[1]) D. h. die Entfernung ist weder null noch unendlich klein; denselben Sinn soll das Wort „endlich" auch weiterhin haben.

[2]) Siehe Scheeffer, Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Variablen, Mathem. Annalen XXXV, Seite 544, wo entsprechendes für ein Minimum bei zwei Variablen festgesetzt wird; es tritt nur dort an Stelle der Kugel, innerhalb deren die Funktion nach allen Richtungen zunehmen mufs, ein Kreis.

zugleich von null verschieden, da F_2' keinesfalls null ist. Es giebt also auch in diesem Falle einen endlichen Bereich, innerhalb dessen Δ von P_μ an stetig wächst, wenn auch in der Richtung r' und in der gerade entgegengesetzten nur unendlich langsam. Also ist auch in diesem Falle P_μ Minimalpunkt.

Liegt endlich P_μ irgend einer Geraden Γ_h, etwa Γ_1, unendlich nahe, ist also r_1 unendlich klein, genügen aber trotzdem die Koordinaten von P_μ den Gleichungen (12) für $r_h > 0$, so bilden wir die Differenz Δ in zwei Teilen:

$$\Delta \equiv (r_1' - r_{1\mu}) + \sum_2^n{}_h (r_h' - r_{h\mu}). \tag{18}$$

Da sich die Γ_h nicht unendlich nahe kommen, so sind sicher alle $r_{h\mu}$ für $h = 2, 3, \ldots n$ endlich, sobald $r_{1\mu}$ unendlich klein ist. Wir können also das zweite Glied rechts wie früher entwickeln, während wir das erste für sich behandeln müssen. Nun ist, sobald $P_\mu P' = r$ gesetzt wird,

$$r_1' = \left|\sqrt{r_{1\mu}^2 - 2r_{1\mu} r \cos(r, r_{1\mu}) + r^2 \sin^2(r, \Gamma_1)}\right|,$$

wie sich leicht beweisen läſst, wenn man r_1' auf die Ebene (P_μ, Γ_1), in der auch $r_{1\mu}$ liegt, und r auf $r_{1\mu}$ projiziert.

Gehen wir nun zunächst von P_μ aus auf einem Strahle, der in der Ebene (P_μ, Γ_1) liegt, so ist $\sin^2(r, \Gamma_1) \equiv \cos^2(r, r_{1\mu})$, also $r_1' = |r_{1\mu} - r \cos(r, r_{1\mu})|$. Befinden wir uns also auf derjenigen Seite von Γ_1, wo P_μ liegt, so folgt unter Benutzung der früheren Entwicklung, da $r_1' = r_{1\mu} - r_1 \cos(r, r_{1\mu})$ ist,

$$\Delta \equiv -r \cos(r, r_{1\mu}) - r \sum_2^n{}_h \cos(r, r_{h\mu}) + \frac{r}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3,$$

also zufolge der Identität (11), der ja die Koordinaten von P_μ genügen,

$$\Delta \equiv \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Da nun die Gerade, in der r liegt, Γ_1 schneidet, kann sie nicht alle übrigen Geraden Γ_h schneiden; also ist in dieser Richtung Δ bis an Γ_1 nach dem früheren positiv.

Überschreiten wir Γ_1, so folgt $r_1' = r \cos(r, r_{1\mu}) - r_{1\mu}$, also

$$\Delta \equiv -2r_{1\mu} + r \cos(r, r_{1\mu}) - r \sum_2^n{}_h \cos(r, r_{h\mu}) + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3,$$

also wegen (11)

$$\Delta \equiv 2r_1' + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Hierin ist das erste Glied gröſser als null, und nach dem früheren auch die Summe der anderen Glieder, also sicher $\Delta > 0$. Solange wir also innerhalb der Ebene (P_μ, Γ_1) bleiben, ist Δ rings um P_μ überall positiv und zwar innerhalb eines endlichen Bereiches.

Verlassen wir nun die Ebene (P_μ, Γ_1), so wird $\sin^2(r, \Gamma_1) \equiv \cos^2(r, r_{1\mu}) + \cos^2(r, G_{1\mu})$, also $\sin^2(r, \Gamma_1) > \cos^2(r, r_{1\mu})$, da dann r nicht mehr senkrecht zu $G_{1\mu}$ stehen kann. Daher gilt

$$r_1' > \left|\sqrt{r_{1\mu}^2 - 2r_{1\mu} r \cos(r, r_{1\mu}) + r^2 \cos^2(r, r_{1\mu})}\right|,$$

d. h.

$$r_1' > |r_{1\mu} - r \cos(r_{1\mu})|.$$

Ganz entsprechend wie oben läſst sich also zeigen, da an Stelle des Identitätszeichens überall das Zeichen $>$ tritt, daſs Δ innerhalb eines endlichen Bereiches überall positiv ist. Also folgt der

Satz XI: „Jeder Punkt P_μ, dessen Koordinaten für $r_h > 0$ den Gleichungen (12) genügen, ist Minimalpunkt der Abstandssumme, sobald sich durch ihn keine Gerade legen läſst, die alle Γ_h schneidet."

Da nun in der Umgebung von P_μ keine Punkte mit ebenso großer Abstandssumme liegen, sondern Δ überall in der Umgebung von P_μ größer als null ist, so ist nach den Ergebnissen von II) P_μ einziger Minimalpunkt im ganzen Raume, so daß auf den Γ_h keine weiteren Minimalpunkte liegen können. Man braucht also in diesem Falle die Punkte auf den Γ_h nicht besonders zu untersuchen.

B) Durch P_μ geht eine Gerade Γ, von der alle Γ_h geschnitten werden.

Wir haben oben gesehen, daß in diesem Falle Δ für Nachbarpunkte von P_μ, die auf Γ liegen, verschwindet, daß also die Abstandssumme für eine ganze Reihe von Punkten konstant ist. Wie in II) gezeigt wurde, reicht dann die Strecke konstanter Abstandssumme bis an diejenigen Schnittpunkte von Γ mit den Γ_h, die beiderseits am nächsten an P_μ liegen.

Für die weiteren Untersuchungen verlegen wir der Einfachheit wegen die x-Axe nach Γ und den Koordinatenanfang nach P_μ. Wir benennen die Schnittpunkte wieder mit $A_1, A_2, \ldots A_n$ und ihre Abscissen mit $a_1, a_2, \ldots a_n$, wobei wir annehmen, daß

(19) $$a_1 < a_2 < \ldots < a_k < 0 < a_{k+1} < \ldots < a_n$$

ist. Dann können wir setzen (indem wir zunächst noch annehmen, daß alle A_h in der Endlichkeit liegen)

(20) $$\begin{cases} \Sigma r_h \equiv \sum\limits_1^n{}_h \sqrt{(x - a_h - \varrho_h \cos\alpha_h)^2 + (y - \varrho_h \cos\beta_h)^2 + (z - \varrho_h \cos\gamma_h)^2}, \\ \varrho_h \equiv (x - a_h)\cos\alpha_h + y\cos\beta_h + z\cos\gamma_h, \end{cases}$$

also wegen (19)

(21) $$\Sigma_\mu r_h \equiv -\sum_1^k{}_h a_h \sin\alpha_h + \sum_{k+1}^n{}_h a_h \sin\alpha_h.$$

Die Gleichungen, aus denen sich ein Minimalpunkt bestimmt, lauten

(22) $$\sum_1^n{}_h \frac{x - a_h - \varrho_h\cos\alpha_h}{r_h} = 0, \quad \sum_1^n{}_h \frac{y - \varrho_h\cos\beta_h}{r_h} = 0, \quad \sum_1^n{}_h \frac{z - \varrho_h\cos\gamma_h}{r_h} = 0.$$

Soll also $P_\mu = 0{,}0{,}0$ ihnen genügen, so müssen die Γ_h folgende Identitäten erfüllen:

(23) $$\begin{cases} \sum\limits_1^k{}_h \sin\alpha_h - \sum\limits_{k+1}^n{}_h \sin\alpha_h \equiv 0; \; -\sum\limits_1^k{}_h \cot\alpha_h\cos\beta_h + \sum\limits_{k+1}^n{}_h \cot\alpha_h\cos\beta_h \equiv 0; \\ -\sum\limits_1^k{}_h \cot\alpha_h\cos\gamma_h + \sum\limits_{k+1}^n{}_h \cot\alpha_h\cos\gamma_h \equiv 0. \end{cases}$$

Wir nehmen also an, daß diesen Identitäten durch die Γ_h genügt wird.

Ist nun P_ν ein beliebiger Punkt zwischen A_k und A_{k+1}, also $a_k < x_\nu < a_{k+1}$, $y_\nu = 0$, $z_\nu = 0$, so folgt

$$\Sigma_\nu r_h \equiv \sum_1^k{}_h (x_\nu - a_h)\sin\alpha_h + \sum_{k+1}^n{}_h (a_h - x_\nu)\sin\alpha_h \equiv x_\nu\left(\sum_1^k{}_h \sin\alpha_h - \sum_{k+1}^n{}_h \sin\alpha_h\right) + \Sigma_\mu r_h,$$

also wegen der ersten Identität (23)

$$\Sigma_\nu r_h \equiv \Sigma_\mu r_h.$$

Dasselbe gilt auch noch, wenn P_ν auf A_k oder A_{k+1} rückt, wie leicht zu beweisen ist. Rückt aber P_ν auf Γ über A_k hinaus, so daß etwa $a_l < x_\nu < a_{l+1} \leq a_k$ ist, so folgt

$$\begin{aligned} \Sigma_\nu r_h \equiv \sum_1^l{}_h (x_\nu - a_h)\sin\alpha_h + \sum_{l+1}^n{}_h (a_h - x_\nu)\sin\alpha_h \equiv x_\nu\left(\sum_1^k{}_h \sin\alpha_h - \sum_{k+1}^n{}_h \sin\alpha_h\right) \\ - \sum_1^k{}_h a_h \sin\alpha_h + \sum_{k+1}^n{}_h a_h \sin\alpha_h + 2\sum_{l+1}^k{}_h (a_h - x_\nu)\sin\alpha_h, \end{aligned}$$

also in Rücksicht auf die erste Identität (23) und auf (21)

(24) $$\Sigma_\nu r_h \equiv \Sigma_\mu r_h + 2\sum_{l+1}^k{}_h (a_h - x_\nu)\sin\alpha_h > \Sigma_\mu r_h,$$

da $x_\nu < a_h$ ist für alle Indices h, die größer als l sind. Entsprechendes gilt, sobald wir auf Γ über A_{k+1} hinausgehen. Zugleich ist unmöglich, da alle $\sin\alpha_h > 0$ sind, daß P_μ auf einen der beiden Halbstrahlen auf Γ rückt. (Alles dies ist in II) schon besprochen, mag aber hier im analytischen Teile nochmals erwähnt werden.)

Wir untersuchen nun zunächst Punkte P' in der Umgebung von A_k. Solche Punkte sind bestimmt durch $x' = a_k + r\cos\alpha$, $y' = r\cos\beta$, $z' = r\cos\gamma$; also wird für sie $r_k' = r\sin(r, \Gamma_k)$. Daher ist

$$\Delta \equiv r\sin(r, \Gamma_k) + \sum_1^n{}' (r_h' - r_{h\mu}), \tag{25}$$

wo der Accent beim Summenzeichen andeuten soll, daß der Index k bei der Summierung zu überspringen ist. Die Summe in (25) enthält nur endliche (d. h., nicht unendlich kleine) Abstände, da ja keine Gerade Γ_h unendlich nahe an Γ_k herankommt, so daß wir sie wie früher entwickeln dürfen. Also folgt

$$\Delta \equiv r\left(\sin(r, \Gamma_k) - \sum_1^n{}' \cos(r, r_{h\mu})\right) + \frac{r^2}{2}\sum_1^n{}' \frac{\cos^2(r, G_{h\mu})}{r_{h\mu}} + \frac{r^3}{2}\sum_1^n{}' \frac{\cos(r, \mathfrak{r}_{h\mu})\cos^2(r, \mathfrak{G}_{h\mu})}{\mathfrak{r}_{h\mu}^2}, \tag{26}$$

Nun ist nach (5)

$$\cos(r_{h\mu}, x) \equiv -\frac{(a_k - a_h)\sin\alpha_h}{|a_k - a_h|}, \quad \cos(r_{h\mu}, y) \equiv \frac{(a_k - a_h)\cot\alpha_h\cos\beta_h}{|a_k - a_h|},$$

$$\cos(r_{h\mu}, z) \equiv \frac{(a_k - a_h)\cot\alpha_h\cos\gamma_h}{|a_k - a_h|};$$

also wegen (19)

$$\cos(r, r_{h\mu}) \equiv \begin{cases} -\cos\alpha\sin\alpha_h + \cos\beta\cot\alpha_h\cos\beta_h + \cos\gamma\cot\alpha_h\cos\gamma_h, & h < k; \\ \cos\alpha\sin\alpha_h - \cos\beta\cot\alpha_h\cos\beta_h - \cos\gamma\cot\alpha_h\cos\gamma_h, & h > k. \end{cases}$$

Das giebt infolge der Identitäten (23)

$$\sum_1^n{}' \cos(r, r_{h\mu}) \equiv \cos\alpha\sin\alpha_k - \cos\beta\cot\alpha_k\cos\beta_k - \cos\gamma\cot\alpha_k\cos\gamma_k. \tag{27}$$

Fällen wir nun von irgend einem Punkte der Strecke $A_k A_{k+1}$, etwa vom Koordinatenanfange, das Lot auf Γ_k und nennen es r_{k0}, so ist

$$\cos(r_{k0}, x) \equiv -\sin\alpha_k, \quad \cos(r_{k0}, y) \equiv \cot\alpha_k\cos\beta_k, \quad \cos(r_{k0}, z) \equiv \cot\alpha_k\cos\gamma_k,$$

also nach (27)

$$\cos(r, r_{k0}) \equiv -\cos\alpha\sin\alpha_k + \cos\beta\cot\alpha_k\cos\beta_k + \cos\gamma\cot\alpha_k\cos\gamma_k \equiv -\sum_1^n{}' \cos(r, r_{h\mu}).$$

Setzen wir dies in (26) ein und nennen wiederum die Koëffizienten von $\frac{r^2}{2}$ und $\frac{r^3}{2}$ F_2 und F_3, so folgt

$$\Delta \equiv r\left(\sin(r, \Gamma_k) + \cos(r, r_{k0})\right) + \frac{r^2}{2}\cdot F_2 + \frac{r^3}{2}\cdot F_3. \tag{28}$$

Wir legen zunächst r in die Ebene (Γ_k, r_{k0}), d. h., in die Ebene (Γ, Γ_k). Dann wird $\sin^2(r, \Gamma_k) \equiv \cos^2(r, r_{k0})$, also $\cos(r, r_{k0}) \equiv \pm\sin(r, \Gamma_k)$. Nun laufen von A_k aus 4 feste Strahlen: die zwei auf Γ und die zwei auf Γ_k; von jenen nennen wir den, auf dem $A_k A_{k+1}$ liegt, Γ', den anderen Γ'', während wir diese beliebig mit Γ_k' und Γ_k'' bezeichnen. Liegt P' auf Γ', so ist $\Delta \equiv 0$, wie schon oben bewiesen; liegt es aber auf Γ'', so ist $\Delta > 0$ und wächst, wie (24) zeigt, um so mehr, je weiter P'' nach $-\infty$ zu läuft. Legen wir weiter r auf Γ_k' oder Γ_k'', so wird $\sin(r, \Gamma_k) \equiv \cos(r, r_{ko}) \equiv 0$, also

$$\Delta \equiv \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Da nun Γ_k keine von den anderen Geraden schneidet, so ist F_2 größer als null und endlich (nicht unendlich klein) und F_3 keinesfalls unendlich groß; also wächst Δ in der Nähe von A_k, wie schon früher bewiesen, innerhalb eines endlichen Bereiches auf Γ_k, ist also zugleich Minimalpunkt auf Γ_k.

Legen wir nun r in einen der beiden Winkel auf der Ebene (Γ, Γ_k), die Γ'' als Schenkel enthalten, so wird $\cos(r, r_{ko}) \equiv + \sin(r, \Gamma_k)$,[1] also

$$\Delta \equiv 2r \sin(r, \Gamma_k) + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Es läßt sich hier genau wie früher zeigen, daß Δ innerhalb eines endlichen Bereiches um A_k positiv ist, zumal mit $\sin(r, \Gamma_k)$ alle $\cos(r, G_{h\mu})$ und $\cos(r, \mathfrak{G}_{h\mu})$ unendlich klein von derselben Ordnung werden und alle $r_{h\mu} > 0$ und endlich sind.

Legen wir endlich r in einen der beiden Winkel auf der Ebene (Γ, Γ_k), von denen Γ' (also $A_k A_{k+1}$) Schenkel ist, so wird $\cos(r, r_{ko}) \equiv - \sin(r, \Gamma_k)$[1], also

$$\Delta \equiv \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^3}{2} \cdot F_3.$$

Diese Differenz ist null auf $A_k A_{k+1}$, im übrigen aber, da mit F_2 auch F_3 stets unendlich klein von derselben Ordnung wird und F_2 positiv ist, innerhalb eines endlichen Bereiches um A_k größer als null, wenn auch in der Nähe von $A_k A_{k+1}$ nur um unendlich wenig.

Verläßt endlich r die Ebene (Γ, Γ_k), so wird $\sin^2(r, \Gamma_k) > \cos^2(r, r_{ko})$ (wäre G_{ko} noch eine dritte, auf Γ_k und r_{ko} senkrechte Gerade, so wäre $\sin^2(r, \Gamma_k) \equiv \cos^2(r, r_{ko}) + \cos^2(r, G_{ko})$, woraus obige Ungleichung folgt, da für Strahlen, die von A_k aus die Ebene (Γ, Γ_k) verlassen, Winkel $(r, G_{ko}) \lesseqgtr 90^\circ$) ist. Also wird

$$\Delta > 2r \mid \cos(r, r_{ko}) \mid + \frac{r^2}{2} \cdot F_2 + \frac{r^2}{2} \cdot F_3.$$

Nun ist für alle Strahlen r, die nicht in der Ebene (Γ, Γ_k) liegen, Winkel $(r, r_{ko}) \gtrless 90^\circ$, also das erste Glied entschieden größer als null. Da auch das zweite größer als null ist und sich unschwer zeigen läßt, daß mit unendlich abnehmendem $| \cos(r, r_{ho}) |$ auch F_2 und F_3 unendlich klein von derselben Ordnung werden, so ist wiederum Δ in einem endlichen Bereiche um A_k durchaus größer als null.

Wie wir uns also auch von A_k aus bewegen, die Differenz Δ bleibt innerhalb eines endlichen Bereiches entweder größer als null oder sinkt höchstens bis null herab. Entsprechendes können wir auch von der Umgebung des Punktes A_{k+1}, wie von der Umgebung jedes Punktes zwischen A_k und A_{k+1} nachweisen. Also sind alle diese Punkte nach unserer erweiterten Erklärung Minimalpunkte. Es folgt daher als Ergänzung des Satzes XI

Satz XII: „Auch wenn durch einen Punkt P_μ, dessen Koordinaten für $r_h > 0$ den Gleichungen (12) genügen, eine Gerade Γ läuft, die alle Γ_h schneidet, ist P_μ Minimalpunkt. Doch giebt es in diesem Falle eine Minimalstrecke, die von P_μ bis an die beiderseits zunächst liegenden Schnittpunkte von Γ mit den Γ_h reicht."

---

[1]) Man muß beachten, daß r und r_{k0} beide von Γ weg gerichtet sind.

Wir hatten zwar oben angenommen, daſs keine von den Geraden Γ_h zu Γ parallel läuft. Ist dies aber doch der Fall, also etwa Γ_1 parallel zu Γ, so ändert sich an der Schluſsweise nichts, indem sich die Entwicklung der Summe nur für r_1 unwesentlich umgestaltet. Auch in diesem Falle ist also der Satz XII richtig.

Damit wäre die Frage nach einem Minimum erster Art, wo es also auſserhalb der Γ_h Minimalpunkte giebt, vollständig erledigt. Die Voraussetzung dazu ist, daſs die Gleichungen (12) ein Lösungssystem besitzen, für das alle $r_h > 0$ werden. Da das nicht notwendig der Fall ist, so müssen wir weiter fragen: was tritt ein, sobald die Gleichungen (12) kein Lösungssystem für $r_h > 0$ besitzen?

Da jedenfalls ein Minimalpunkt vorhanden sein muſs, so tritt dann bestimmt ein Minimum zweiter Art ein. Wir brauchen also nur auf jeder Γ_h den Minimalpunkt nach II B) zu suchen und die n Abstandssummen untereinander zu vergleichen, um den Punkt mit der kleinsten Abstandssumme als Minimalpunkt im Raume ansprechen zu können. (Da auſserhalb der Γ_h keine Minimalpunkte liegen sollen und alle Γ_h einander kreuzen, so giebt es nach II B) nur einen einzigen Minimalpunkt.) Stellen wir wieder die Differenz Δ zwischen der Abstandssumme des betreffenden Punktes P_μ, der auf Γ_1 liegen möge, und der Abstandssumme eines benachbarten Punktes her, so ergeben sich durch Entwicklungen, die denen in III B) sehr ähnlich sind, die Bedingungen für den Minimalpunkt:

(29) $$\sum_2^n{}_h \cos(r_{h\mu}, \Gamma_1) \equiv 0;$$

(30) $$\left(\sum_2^n{}_h \cos(r_{h\mu}, r_1)\right)^2 + \left(\sum_2^n{}_h \cos(r_{h\mu}, G_1)\right)^2 \leq 1.$$

Hierin sind r_1 und G_1 zwei auf einander und auf Γ_1 senkrechte, im übrigen beliebige Gerade. (29) liefert wieder den Satz VI; aus beiden Bedingungen aber gewinnt man den

Satz XIII: „Ist ein Punkt P_μ auf Γ_1 alleiniger Minimalpunkt und greifen an ihm in der Richtung der $r_{h\mu}$ $n-1$ gleiche Kräfte k an, so setzen sich diese zusammen zu einer Resultante, die senkrecht auf Γ_1 steht und höchstens die Gröſse k besitzt."

Sehr einfach können wir endlich ableiten den

Satz XIV: „Ist in (30) die linke Seite identisch null, so ist P_μ zugleich Minimalpunkt der $n-1$ Geraden $\Gamma_2, \cdots \Gamma_n$ allein; ist sie aber gröſser als null, so verliert P_μ seine Minimaleigenschaft, sobald Γ_1 weggelassen wird."

Mit diesen Sätzen finde die Untersuchung der einander kreuzenden Geraden ihren Abschluſs. Vielleicht bietet sich Gelegenheit, später einmal auf den allgemeinen Fall zurückzukommen.

Wir hatten zwar ob… …eraden Γ_h zu Γ parallel läuft. Ist
dies aber doch der Fall, als… …an der Schlufsweise nichts, indem
sich die Entwicklung der Su… …et. Auch in diesem Falle ist also
der Satz XII richtig.

Damit wäre die Fr… …wo es also aufserhalb der Γ_h
Minimalpunkte giebt, vollstä… …ist, dafs die Gleichungen (12) ein
Lösungssystem besitzen, für … …notwendig der Fall ist, so müssen
wir weiter fragen: was tritt e… …ösungssystem für $r_h > 0$ besitzen?

Da jedenfalls ein M… …ritt dann bestimmt ein Minimum
zweiter Art ein. Wir bra… …alpunkt nach II B) zu suchen und
die n Abstandssummen unter… …mit der kleinsten Abstandssumme
als Minimalpunkt im Raum… …halb der Γ_h keine Minimalpunkte
liegen sollen und alle Γ_h ei… …nur einen einzigen Minimalpunkt.)
Stellen wir wieder die Diffe… …des betreffenden Punktes P_μ, der
auf Γ_1 liegen möge, und de… …unktes her, so ergeben sich durch
Entwicklungen, die denen in … …gen für den Minimalpunkt:

(29)

(30) (… 1.

Hierin sind r_1 und … …echte, im übrigen beliebige Gerade.
(29) liefert wieder den Satz … …innt man den

Satz XIII: „Ist ei… …unkt und greifen an ihm in der
Richtung der $r_{h\mu}$ $n-1$ glei… …zusammen zu einer Resultante, die
senkrecht auf Γ_1 steht und …

Sehr einfach können …

Satz XIV: „Ist in … …ist P_μ zugleich Minimalpunkt der
$n-1$ Geraden $\Gamma_2, \cdots \Gamma_n$ … …o verliert P_μ seine Minimaleigen-
schaft, sobald Γ_1 weggelasse…

Mit diesen Sätzen fi… …nzenden Geraden ihren Abschlufs.
Vielleicht bietet sich Gelege… …n Fall zurückzukommen.