Methodologisch-mathematische Aphorismen.

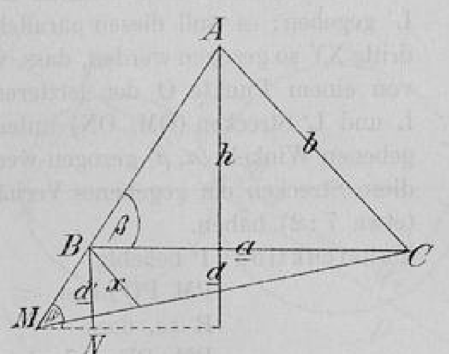
Vorbemerkung: [für die Leser meiner früheren Abhandlung (1887. Progr. No. 188)].

Unter den freundlichen Zuschriften, die mir betreffs jenes Programms zugegangen sind, enthält die von Herrn Kollegen Ernst Schulze (Realgymnasium in Strausberg bei Berlin) zwei beachtenswerte Bemerkungen, durch deren Mitteilung ich einer Pflicht der Dankbarkeit nachkommen möchte:

a. „Heisst in Aufgabe 9 der zweite Endpunkt der gemeinschaftlichen Sehne B, so enthält $\triangle$ BXY bekannte Kongruenzstücke : m, $\sphericalangle$ w und $\sphericalangle$ γ, wonach man auf einen Ähnlichkeitssatz nicht zurückzugehen braucht."

b. „In Aufgabe 13 behalten Figur und Behauptung ihre Richtigkeit, wenn an die Stelle von AC^2 ein beliebiges Parallelogramm tritt und BC eine beliebige Verlängerung einer Seite desselben ist."

*) **1.** Ein Dreieck zu konstruieren, wenn die Grundlinie a, Winkel β und die Differenz d zwischen dessen Gegenseite und der zur Grundlinie gehörigen Höhe gegeben sind.

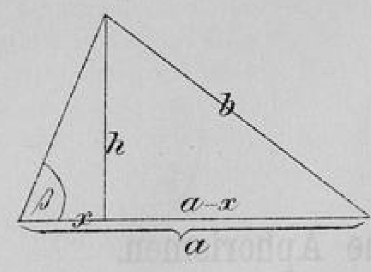


1. Lösung. Analysis: Stelle die gegebene Differenz her ($h + d = b$), etc., und lege $x \parallel b$; dann ist

$d' : \underline{(h + d)} = MB : MA : = x : \underline{b} \mid x = d$, also Datum.

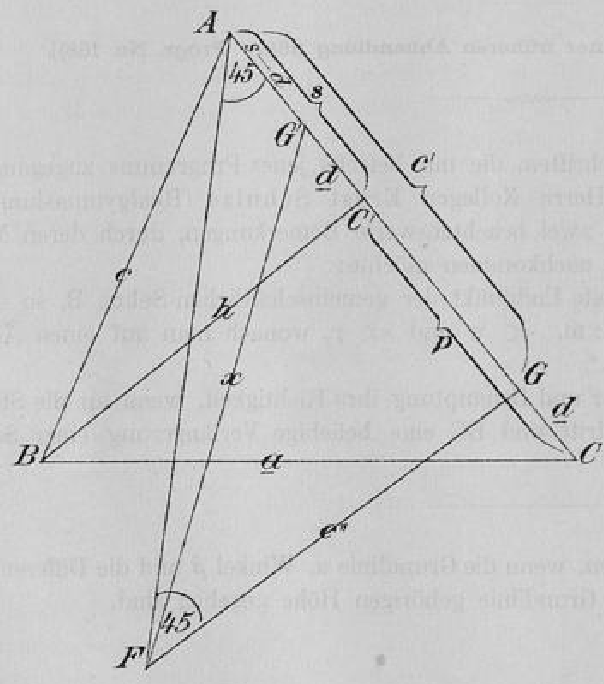
Die Konstruktion beginnt mit $\triangle$ BMN.

*) Eine Einleitung ist nach dem Früheren nicht erforderlich; jedoch sei es mir gestattet, hier und dort noch einzelne Bemerkungen einzustreuen.



2. Lösung (algebraisch):

I. $b - h = d$ II. $h : x = n : m$ (durch $\sphericalangle\ \beta$) III. $b^2 = (a-x)^2 + h^2$	$x^2 - \frac{2am + 2nd}{m} . x = d^2 - a^2;$ x konstruierbar.



2. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben sind: Die Grundlinie a, die Differenz d der beiden anderen Seiten und das der Spitze anliegende Segment s, welches von der grösseren der letzteren durch die zugehörige Höhe abgeschnitten wird.

1. Lösung. Analysis: Führe in der Figur s und d ein: $BC' \perp AC$, $c' = c$, und schneide d von s ab. Nimmt man noch die Senkrechte $c'' = c$ und verbindet, so ist:

$$x^2 = c_{\prime\prime}^2 + p^2 = c_{\prime\prime}^2 + a^2 - h^2 = a^2 + c^2 - h^2$$
$$= a^2 + s^2 \mid x \text{ Datum.}$$

Die Konstruktion beginnt mit $\triangle$ AFG', wonach sich $c_{\prime\prime}$ d. h. c ergibt.

2. Lösung (algebraisch):

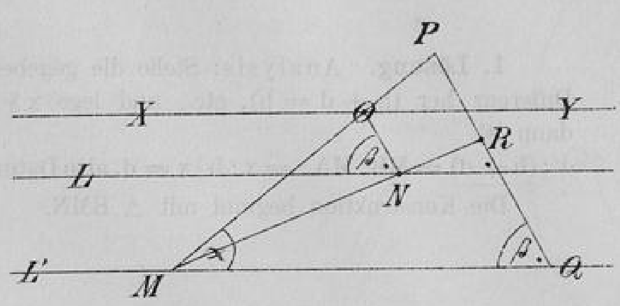
I. $b - c = d$

II. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bs$

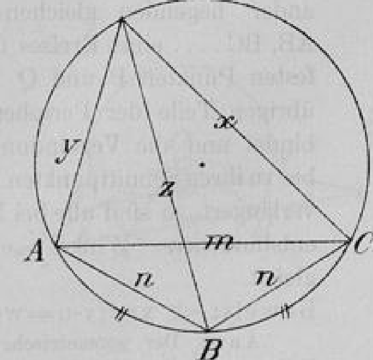
Hieraus findet sich z. B.

$$c^2 - (s-d)\, c = \frac{a^2 - d^2 + 2sd}{2}, \text{wodurch c.}$$

3. Es sind zwei Parallelen L und L' gegeben; es soll diesen parallel eine dritte XY so gezogen werden, dass, wenn von einem Punkte O der letzteren an L und L' Strecken (OM, ON) unter gegebenen Winkeln (α, β) gezogen werden, diese Strecken ein gegebenes Verhältnis (etwa 7 : 2) haben.



Konstruktion: P beliebig;
PM, PQ unter $\sphericalangle\ \alpha, \beta$.
R so, dass
PM : PR = 7 : 2;
MNR; ON ∥ PQ;
XOY ∥ L.

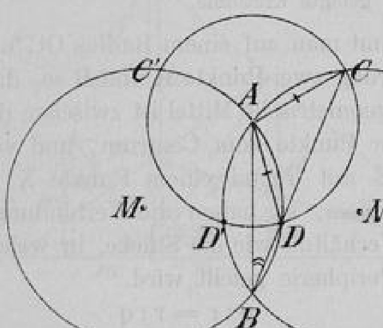


4. Wenn man sowohl die Endpunkte als auch die Mitte eines Kreisbogens ABC mit einem beliebigen Punkte des übrigen Teiles der Peripherie verbindet, so verhält sich die Summe der beiden äusseren Verbindungslinien zur mittleren wie die Sehne des Bogens zur Sehne seiner Hälfte.

Behauptung: $(x + y) : z = m : n$.

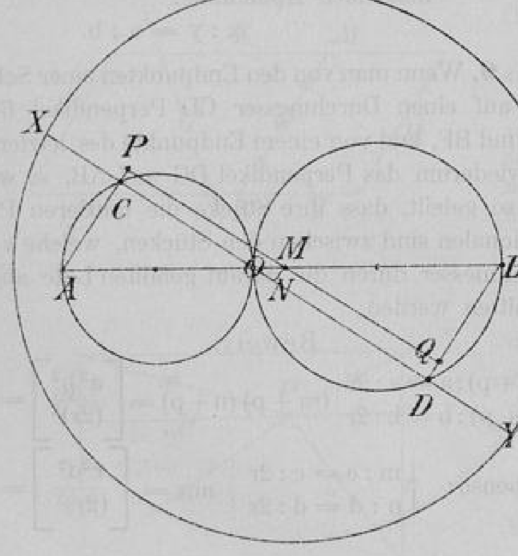
Die Richtigkeit der Proportion ergibt sich sofort aus dem Ptolemäer.

Bemerkung im allgemeinen: Der Ptolemäer gehört wegen seiner grossen Verwendbarkeit in das Lehrpensum und nicht in einen Anhang oder in die einem Lehrbuche etwa angefügte Aufgabensammlung.



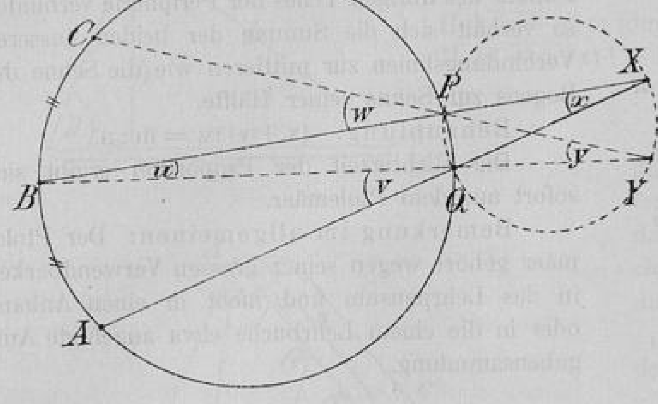
5. Wenn zwei gleiche Kreise einander in A und B scheiden und man beschreibt um A einen beliebigen dritten, jene zwei schneidenden Kreis, so liegen von den vier Schnittpunkten C, D, C' D' je zwei mit B in gerader Linie.

Beweis: Da Sehne AC in N und AD in M als Radien von A gleich sind, ist Peripheriewinkel ABC = ABD, weshalb BC und BD zusammenfallen. Analog BC' und BD'.



6. Wenn man um die Mitte M der Achse AB zweier sich von aussen in O berührenden Kreise mit beliebigem Radius einen dritten Kreis beschreibt und hierin durch O eine beliebige Sehne XY zieht, so sind deren Stücke, welche zwischen den Endpunkten und den Peripherien der beiden ersten Kreise liegen, gleich.

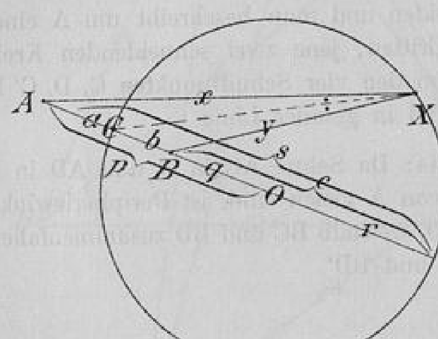
Beweis: AM = BM | PM = QM |
CN = DN; subtr. von
XN = YN
CX = DY.



7. Wenn man die Endpunkte A, B, C .... beliebig vieler an einander liegenden gleichen Bögen AB, BC .... eines Kreises mit zwei festen Punkten P und Q in dem übrigen Teile der Peripherie verbindet und die Verbindungslinien bis zu ihren Schnittpunkten X,Y .... verlängert, so sind alle bei X,Y .... entstandenen Winkel einander gleich.

Beweis: $\sphericalangle$ x = (v-u = w-u) = y.

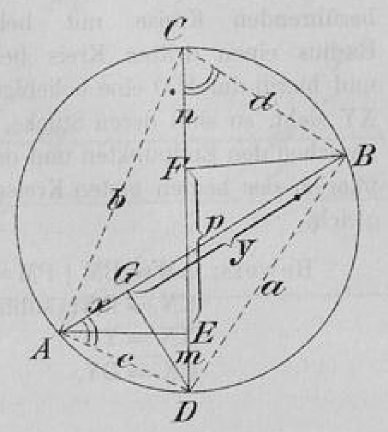
Anm. Der geometrische Ort für X,Y .... ist also eine durch P und Q gelegte Kreislinie.



8. Bestimmt man auf einem Radius OC und dessen Verlängerung zwei Punkte A und B so, dass der Radius das geometrische Mittel ist zwischen den Abständen dieser Punkte vom Centrum, und verbindet A und B mit irgend einem Punkte X im Umfange des Kreises, so haben die Verbindungslinien dasselbe Verhältnis wie die Stücke, in welche AB durch die Peripherie geteilt wird.

Beweis:
$$p : r = r : q$$
$$\underline{(p + r) : (r + q) = (p-r) : (r-q)}$$
$$s : c = a : b,$$

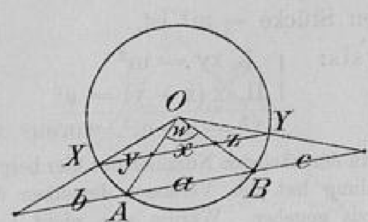
also nach Apollonius:
$$x : y = a : b.$$



9. Wenn man von den Endpunkten einer Sehne AB auf einen Durchmesser CD Perpendikel fällt, AE und BF, und von einem Endpunkte des letzteren, D, wiederum das Perpendikel DG auf AB, so wird AB so geteilt, dass ihre Stücke die mittleren Proportionalen sind zwischen den Stücken, welche vom Durchmesser durch die darauf gefällten Lote abgeschnitten werden.

Beweis:
$$\left\{\begin{array}{l}(m + p) : a = a : 2r \\ (n + p) : b = b : 2r\end{array}\right| \; (m + p)\,(n + p) = \left[\frac{a^2 b^2}{(2r)^2}\right] = y^2.$$

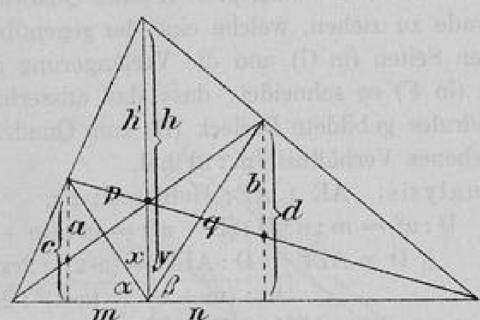
$$\text{Ebenso:} \quad \left\{\begin{array}{l}m : c = c : 2r \\ n : d = d : 2r\end{array}\right| \; mn = \left[\frac{c^2 d^2}{(2r)^2}\right] = x^2.$$



10. In einem Kreise sind zwei Radien, OA und OB, senkrecht auf einander gezogen; es soll diejenige Sehne XY eingetragen werden, welche durch die Radien in drei gleiche Teile geteilt wird.

Konstruktion: Mache $b = c = a$, etc.;
dann ist $x = y = z$.

Anm. Es ist klar, das $\sphericalangle$ w auch ein beliebiger sein kann (nicht = R), ohne dass sich die Lösung ändert.

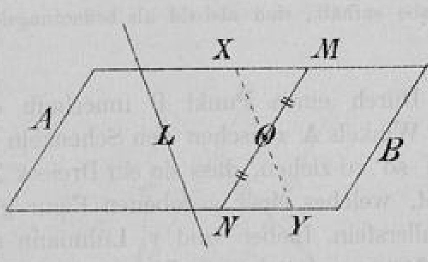


11. Wenn man von den Endpunkten der Grundlinie eines Dreiecks Linien nach den Gegenseiten zieht, welche sich auf der Höhe des Dreiecks schneiden, so bilden die Verbindungslinien der Endpunkte dieser Linien und des Höhenfusspunktes gleiche Winkel mit der Höhe.

Beweis:

$$c : d = \left[\frac{ah}{h'} : \frac{bh}{h'} = a : b = p : q\right] = m : n .$$

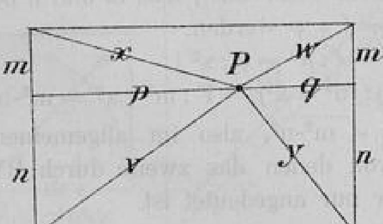
$$\triangle\ cm \backsim dn \mid \alpha = \beta \mid x = y.$$



12. Ein Parallelogramm durch eine zu L parallel gelegte Linie in zwei Teile zu teilen, die ein gegebenes Verhältnis zu einander haben.

Lösung: Teile zunächst AB so, dass sich verhält AMN : BMN = m : n. Dann ziehe durch O die XY ∥ L.

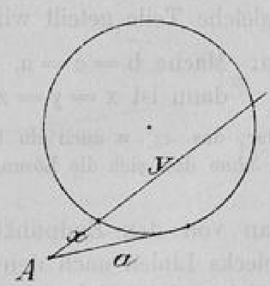
Anm. Es muss hier jedoch auch beachtet werden, dass X oder Y ausserhalb AB fallen können. Dadurch kann die Konstruktion ziemlich langwierig werden, wenn man sie auch immerhin noch als leicht ansehen darf, da die Aufgaben des „Hineinschaffens" und „Umlegens" (cf. Nro. 22 von 1887) zu den Fundamental-Aufgaben zu rechnen sind, was leider nicht immer geschieht.



13. Wenn man einen Punkt P innerhalb eines Rechteckes mit den Winkelspitzen verbindet, so ist die Summe der Quadrate über zwei nach entgegengesetzten Winkelspitzen gezogenen Strecken gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen.

Behauptung: $v^2 + w^2 = x^2 + y^2$.

Der Beweis ist in der Figur hinlänglich angedeutet.

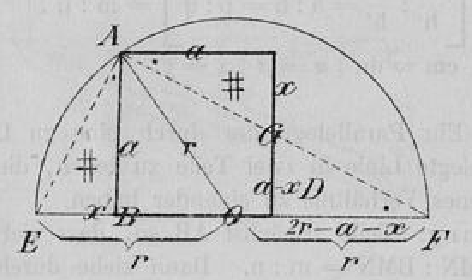


14. Von einem gegebenen Punkte A ausserhalb eines Kreises in diesen eine Sekante so zu ziehen, dass das Rechteck aus ihrem äusseren und ihrem inneren Stücke $= m^2$ ist.

Analysis: $\begin{cases} \text{I. } xy = m^2 \\ \text{II. } x(x+y) = a^2 \end{cases}$

$$x^2 = a^2 - m^2, \text{ woraus } x.$$

Anm. In der nächsten Nummer der hier besprochenen Aufgabensammlung hat der Verfasser derselben die algebraische Analysis gegeben. Warum also nicht auch oben und anderwärts?



15. Aus einer Winkelspitze A eines Quadrates eine Gerade zu ziehen, welche eine der gegenüberstehenden Seiten (in G) und die Verlängerung der anderen (in F) so schneidet, dass das ausserhalb des Quadrates gebildete Dreieck (D) zum Quadrate ein gegebenes Verhältnis (m : n) hat.

Analysis: $AE \perp AF$; Halbkreis; ? r.

$$D : a^2 = m : n \;\Big|\; D : (D + a^2) = m : (m + n)$$

$$\triangle D \sim AEF \;\Big|\; D : AEF = (a-x)^2 : 2rx$$

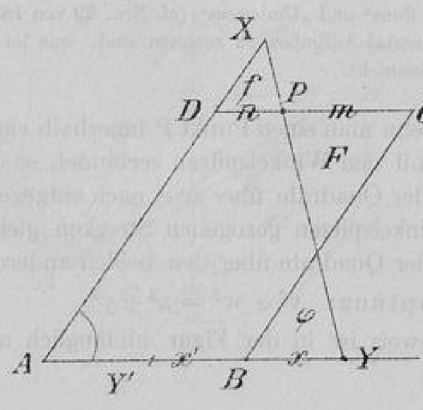
$$m : (m+n) = (a-x)^2 : 2rx.$$

Dazu, weil $\triangle$ AEB $\sim$ D ist,

$$a : x = (2r-a-x) : (a-x).$$

x eliminiert, gibt $r : a = (m + n) : m$, woraus r.

Anm. Die leichten Versehen, welche das Buch bei dieser Aufgabe enthält, sind alsbald als bedeutungslos zu erkennen.



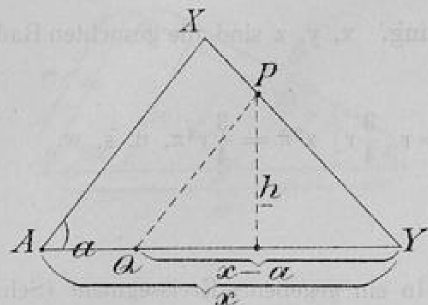
16. Durch einen Punkt P innerhalb eines gegebenen Winkels A zwischen den Schenkeln eine Gerade XY so zu ziehen, dass sie ein Dreieck XAY abschneidet, welches einer gegebenen Figur gleich ist (cf. Hallerstein, Lieber und v. Lühmann etc.).

1. Lösung. Analysis: Die gegebene Figur verwandelt gedacht in das Parallelogramm ABCD (Höhe gegeben, von P aus), also m und n bekannt. Es muss $F = f + \varphi$ werden.

$$F : m^2 = f : n^2 = \varphi : x^2 \;|$$

$$\underline{(f+\varphi)} : (n^2 + x^2) = \underline{F} : m^2 \;|\; x^2 = m^2 - n^2.$$

$x = \pm\sqrt{m^2 - n^2}$, also im allgemeinen zwei Resultate, von denen das zweite durch $BY' = x'$ in der Figur nur angedeutet ist.



2. Lösung. Analysis: h ist bekannt, die Parallele PQ ergiebt das Datum a und die gegebene Figur kann in ein Quadrat q^2 verwandelt gedacht werden.

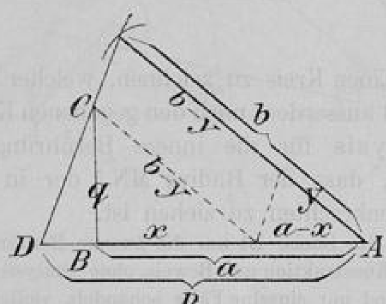
$$q^2 : (x\text{-}a) \cdot \frac{h}{2} = x^2 : (x\text{-}a)^2.$$

$$x = \frac{q^2 \pm \sqrt{q^2\,(q^2\text{-}2ah)}}{h}\text{, also auch zwei}$$

Resultate.

Anm. Liegt P ausserhalb des Winkels A, so erhält man auf ebenso leichte Weise analog:

$$x = \frac{q^2 \pm \sqrt{q^2\,(q^2+2ah)}}{h}.$$

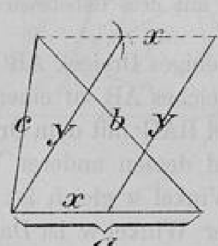


17. Von zwei begrenzten Geraden a, b zwei Stücke x, y so abzuschneiden, dass der Rest a-x zu y das gegebene Verhältnis m : n hat, und die Differenz der Quadrate über b-y und x einem gegebenem Quadrate q^2 gleich ist.

Analysis: a und b seien die Schenkel des noch unbekannten Winkels A. Zu erfüllende Bedingungen:

$[(a\text{-}x) : y] = m : n = p : b$, woraus $\underline{p}$.
$(b\text{-}y)^2\text{-}x^2 = q^2$; also:

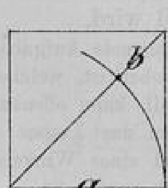
Konstruktion: a, q ⊥ a, p; DC verlängert, Bogen mit b um A, etc.



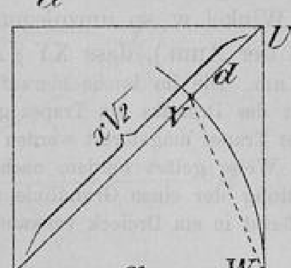
18. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln, welches mit ihm gleichen Inhalt und Umfang hat.

Lösung: Nimm $x = \frac{a}{2}$ und $y = \frac{b+c}{2}$;

dann ist $2x + 2y = a + b + c$.



beliebiges Quadrat.



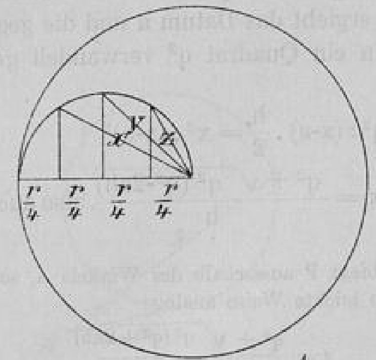
19. Ein Quadrat zu zeichnen, wenn die Differenz d zwischen Diagonale und Seite gegeben ist.

1. Lösung mit Hilfe eines beliebigen Quadrates:

$x : d = a : b$, woraus x.

2. Lösung: $x\sqrt{2}\text{-}x = d$; etc.

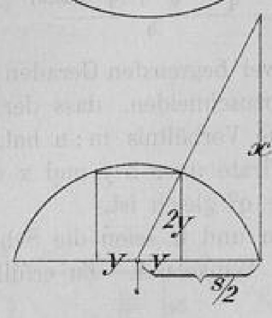
3. Lösung, mit Hilfe des Dreiecks UVW durch d und die Winkel.



20. Einen gegebenen Kreis durch konzentrische Kreislinien in eine beliebige Anzahl (etwa 4) gleicher Teile zu teilen.

Lösung. x, y, z sind die gesuchten Radien; denn:

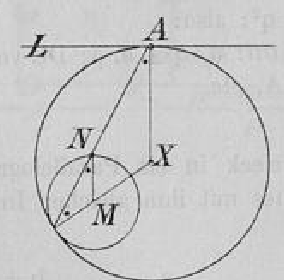
$$x^2 = r \cdot \frac{3}{4} r \;\Big|\; x^2\pi = \frac{3}{4} r^2\pi, \text{ u. s. w.}$$



21. In ein gegebenes Kreissegment (Sehne s) ein Quadrat zu zeichnen.

Analysis: $x : \frac{s}{2} = 2y : y$

$x = s.$



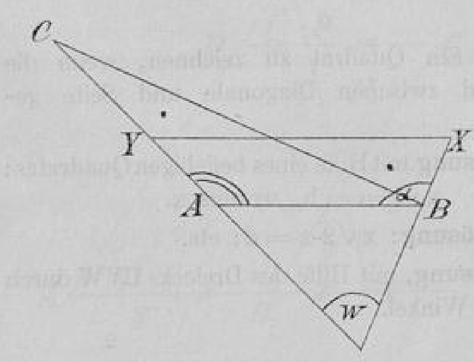
22. Einen Kreis zu zeichnen, welcher L in A berührt und ausserdem noch den gegebenen Kreis M.

Analysis für die innere Berührung: Die Figur zeigt, dass der Radius MN ∥ der in A errichteten Senkrechten zu ziehen ist.

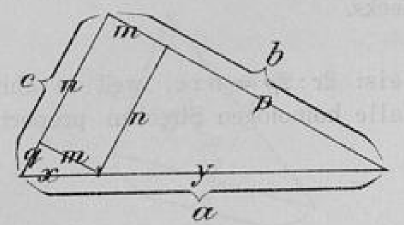
Anm. Im Buche ist nur die äussere Berührung berücksichtigt (Konstruktion und Beweis, ohne Analysis). Auch anderwärts sind nur einzelne Fälle behandelt, vielleicht absichtlich; wenn aber auch dem Schüler das Übrige überlassen werden kann, so dürfte doch wohl die Andeutung nicht schaden, dass mit dem Gebotenen die Lösung noch nicht erschöpft sei.

23. Ein beliebiges Dreieck ABC in ein Trapez zu verwandeln, welches AB zu einer der parallelen Seiten, den Winkel BAC mit dem Dreiecke gemeinschaftlich hat und dessen anderer Winkel an AB dem gegebenen Winkel α gleich ist.

Lösung: Der Winkel w ist Datum. Seite BC ist im Winkel w so umzulegen (cf. No. 12, den Schluss der Anm.), dass XY ∥ AB wird.

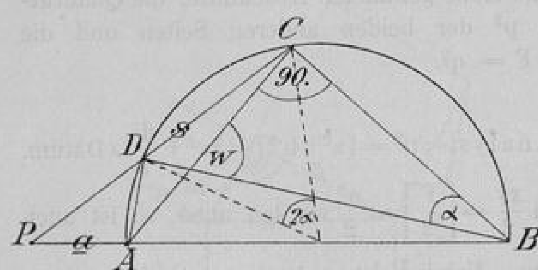


Anm. Die im Buche hierauf folgende Aufgabe, in der statt des Dreiecks ein Trapez gegeben ist, welches in ein neues Trapez umgeformt werden soll, kann offenbar in gleicher Weise gelöst werden, nachdem das Trapez, mit Beibehaltung der einen Grundlinie und eines Winkels an ihr, zunächst in ein Dreieck verwandelt worden ist.



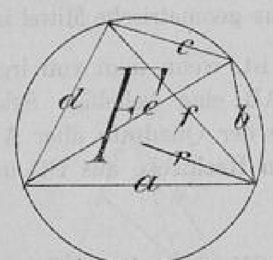
24. Wenn in ein rechtwinkliges Dreieck ein Rechteck so gezeichnet ist, dass beide den rechten Winkel gemein haben, so ist das Rechteck aus den Segmenten der Hypotenuse gleich der Summe der Rechtecke aus den Segmenten je einer Kathete.

Beweis: $$xy = \frac{ma}{b} \cdot \frac{na}{c} = \frac{mna^2}{bc} = \\ = \frac{mnb^2}{bc} + \frac{mnc^2}{bc} \\ = mp + nq$$



25. In einen Halbkreis ein Viereck zu zeichnen, welches den Durchmesser zu einer Seite hat, wenn ausser diesem gegeben sind dessen Verlängerung (a) bis zur verlängerten Gegenseite und der von den Diagonalen des Vierecks eingeschlossene Winkel w.

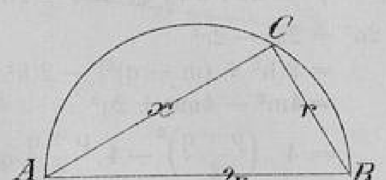
Analysis. Durch w sind auch α und 2α bekannt. Daher ist die Konstruktion leicht; denn von einem Punkte P aus lässt sich bekanntlich eine Sekante ziehen, deren inneres Stück (s) zu einem gegebenen Centriwinkel gehört.



26. In jedem Sehnenvierecke verhalten sich die beiden Diagonalen wie die Summen der Rechtecke aus den in ihren Endpunkten zusammenstossenden Seiten.

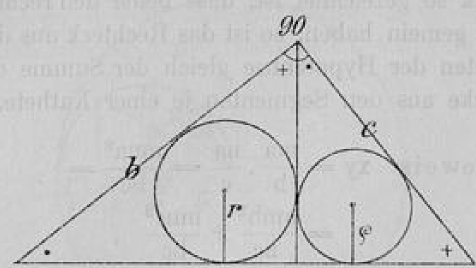
Beweis: $$F = \frac{abe}{4r} + \frac{cde}{4r} \text{ und auch} = \frac{adf}{4r} + \frac{bcf}{4r} \;\Big|\; \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Anm. Dieser gewiss schon längst bekannte Beweis kann aber auch, wenn man den dabei erforderlichen Flächenwert für das Dreieck ABC $\left(\frac{abc}{4r}\right)$ nicht verwenden will, sehr leicht durch trigonometrische Ableitung ersetzt werden; jedenfalls erscheint die mühevolle Entwickelung des Originals etwas sonderbar.



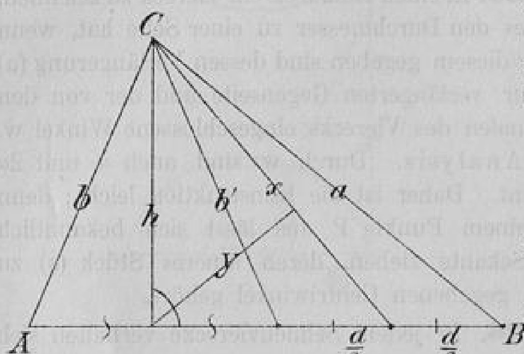
27. Wenn über dem Durchmesser AB eines Halbkreises ein Dreieck ABC eingeschrieben ist, worin BC = dem Radius ist, so ist AC die mittlere Proportionale zwischen BC und der Summe BC + AB.

Beweis: $x^2 = 4r^2 - r^2 \mid r : x = x : (r + 2r)$.



28. Legt man in die beiden durch die Höhe auf die Hypotenuse gebildeten Dreiecke Kreise, so verhalten sich deren Durchmesser wie die Katheten des Urdreiecks.

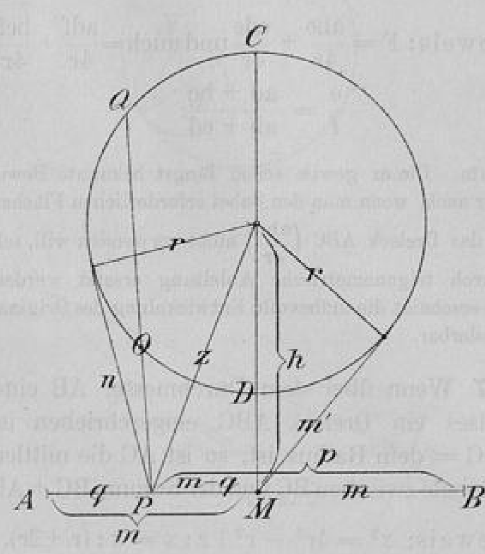
Beweis: $2r : 2\rho = b : c$, weil in ähnlichen Dreiecken alle homologen Strecken proportioniert sind.



29. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, wenn gegeben sind die Differenz d der auf der Grundlinie durch die Höhe gebildeten Abschnitte, die Quadratsumme p^2 der beiden anderen Seiten und die Fläche $F = q^2$.

Analysis: $p^2 = [a^2 + b'^2] = 2x^2 + \frac{d^2}{2} \Big|$ x Datum.

Da nun $\frac{xy}{2} = \left[\frac{F}{2}\right] = \frac{q^2}{2}$ werden muss, so ist auch y Datum. Folglich ist $\triangle$ hx konstruierbar; etc.



30. Wenn die Strecke AB durch den verlängerten senkrechten Durchmesser CD in M halbiert wird und $\frac{AB}{2}$ das geometrische Mittel ist zwischen CM und DM, so ist, wenn man von irgend einem Punkte P der AB eine beliebige Sekante POQ zieht, die Summe der Quadrate über AP und BP = dem doppelten Rechtecke aus PO und PQ.

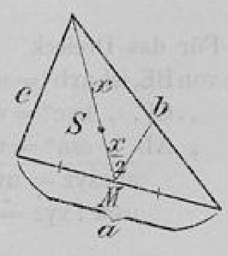
Vor. $m^2 = CM \cdot DM$, also $= m'^2$.

Beh. $p^2 + p^2 = 2 \cdot PO \cdot PQ$, also $= 2n^2$.

Bew. $2n^2 = 2z^2 - 2r^2$

$$= 2[h^2 + (m - q)^2] - 2(h^2 - m^2)$$
$$= 4m^2 - 4mq + 2q^2$$
$$= 4 \cdot \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{p+q}{2} \cdot q + 2q^2$$
$$= p^2 + q^2.$$

31. Die Summe der Quadrate über den Abständen des Schwerpunktes eines Dreiecks von den Winkelspitzen ist gleich dem dritten Teile von der Summe der Quadrate über den drei Seiten.



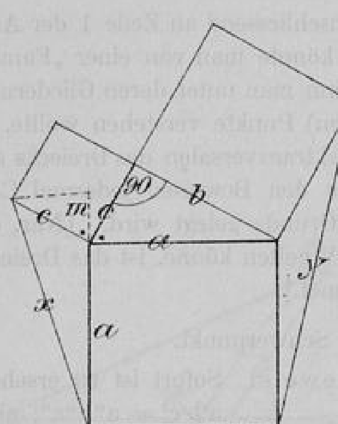
Beweis: $b^2 + c^2 = 2\left(x + \frac{x}{2}\right)^2 + 2 . \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$9x^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2;$$

analog: $$9y^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2;$$

$$9z^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$



32. Zu beweisen, dass $x^2 + y^2 = 5a^2$ ist.

Beweis: $$x^2 = a^2 + c^2 + 2am$$

$$= a^2 + c^2 + 2a . \frac{c^2}{a}$$

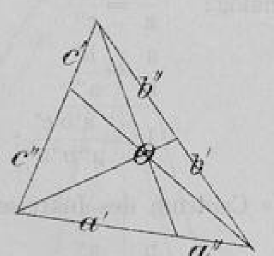
$$= a^2 + 3c^2$$

analog: $$y^2 = a^2 + 3b^2$$

$$x^2 + y^2 = 2a^2 + 3a^2 = 5a^2.$$

33. Drei beliebige Ecktransversalen gehen durch irgend einen Punkt O innerhalb des Dreiecks; zu beweisen, dass sich verhält:

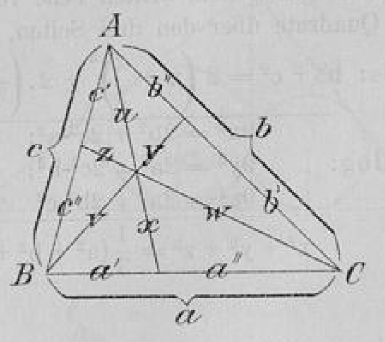
$$a' : a'' = b''c'' : b'c'$$



Beweis: $$a'b'c' = a''b''c'' \text{ (Ceva)};$$

$$a' : a'' = b''c'' : b'c'.$$

Anm. Ceva samt Umkehrung (und wohl auch Menelaos) gehört sicherlich in das Unterrichtspensum aller höheren Lehranstalten (cf. Nro. 35). Vielleicht (?) gelingt einmal die Einigung über die Lehrsätze und Aufgaben, welche für die einzelnen Arten von Schulen als fundamental gelten sollen. Den Verfassern von mathematischen Büchern bliebe dann immer noch ein hinlänglich grosser Spielraum für ihre Eigenart nach allen denkbaren Richtungen hin; nur den (durch besonderen Druck hervorgehobenen) sogen. eisernen Bestand möchte ich gewahrt wissen. Eine möglichst scharfe Abgrenzung der Klassenpensen (wenn auch nicht für immer, so doch auf längere Zeit,) innerhalb dieses Bestandes würde der Allgemeinheit wegen wohl auch annehmbar sein; Freiheit der Bewegung, je nach den Umständen, hat der Lehrer immerhin noch vollauf.



34. Unter der vorigen Voraussetzung soll bewiesen werden, dass sich verhält:

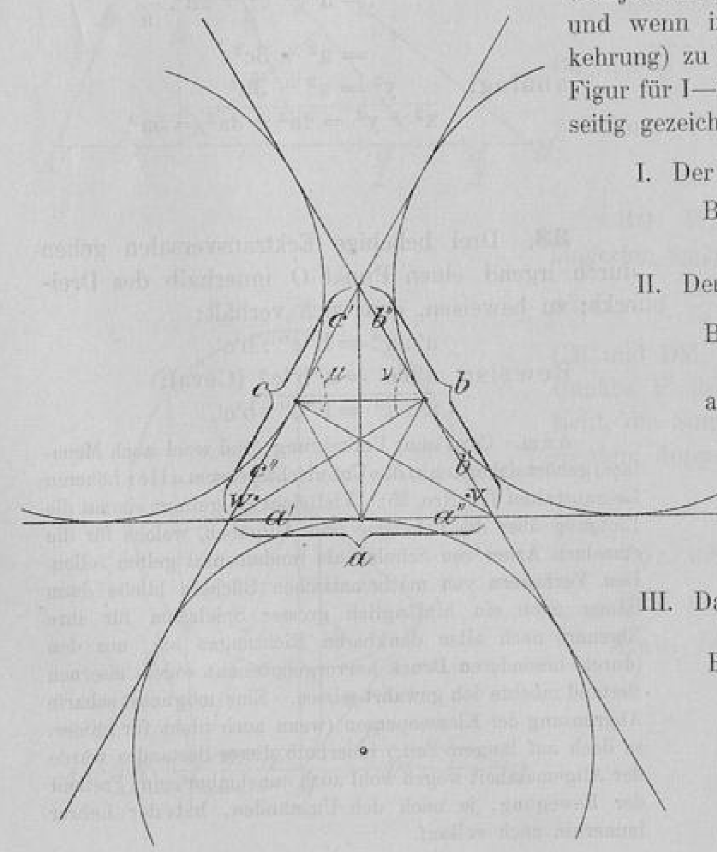
$$uvw : xyz = abc : a'b'c' \text{ (oder } a''b''c''\text{)}.$$

Beweis: Für das Dreieck

ACD, geschnitten von BE, ist $axb'' = ua'b'$ (Menelaos);
BAE, „ „ CF, „ $byc'' = vb'c'$
CBF, „ „ AD, „ $cza'' = wc'a'$.

$$abcxyz = uvwa'b'c', \text{ oder:}$$
$$uvw : xyz = abc : a'b'c'.$$

35. Anschliessend an Zeile 1 der Anmerkung von Nro. 33 könnte man von einer „Familie Ceva" sprechen, wenn man unter deren Gliedern alle jene (merkwürdigen) Punkte verstehen wollte, in denen sich je drei Ecktransversalen des Dreiecks schneiden, und wenn in den Beweisen jedesmal Ceva (Umkehrung) zu Grunde gelegt wird. [Nur, damit die Figur für I—V gelten könne, ist das Dreieck gleichseitig gezeichnet.]



I. Der Schwerpunkt.

Beweis: Sofort ist zu ersehen, dass $a'b'c' = a''b''c''$; also!

II. Der Höhenschnittpunkt ($v = w$, $\mu = \nu$):

Beweis: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{c'}{b''}$

analog: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{a'}{c''}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{b'}{a''}$

$$1 = \frac{a'b'c'}{a''b''c''}; \text{ also!}$$

III. Das Centrum des Inkreises.

Beweis: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{a''}{a'}$

$\dfrac{c}{a} = \dfrac{b''}{b'}$ $\quad\Big|\quad 1 = \dfrac{a''b''c''}{a'b'c'}$; also!

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c''}{c'}$

IV. Das Centrum des Umkreises.

Beweis (kurz): Die drei Mittelsenkrechten sind Höhen des Mitteldreiecks, daher ebenfalls Ecktransversalen (cf. II); also!

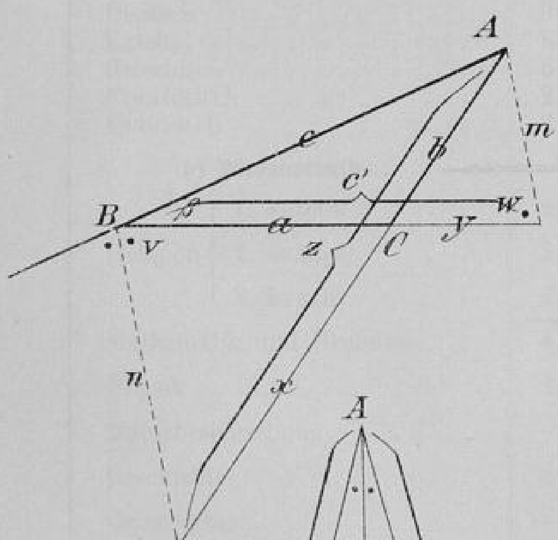
Anm. Einen anderen (längeren) Beweis, worin dieses Centrum auch als Schnittpunkt von Transversalen des Urdreiecks erscheint, teile ich vielleicht bei späterer Gelegenheit mit.

V. Der Schnittpunkt der nach den Berührungspunkten der Ankreise gezogenen Ecktransversalen. (cf. Spieker.)

Beweis: Wird a + b + c = s gesetzt, so ist:

$$\left.\begin{aligned} a' &= \left(\frac{s}{2}-c\right) = b'' \\ b' &= \left(\frac{s}{2}-a\right) = c'' \\ c' &= \left(\frac{s}{2}-b\right) = a'' \end{aligned}\right| \quad a'b'c' = a''b''c''; \text{ also!}$$

VI. VII. VIII. Die Centra O′, O″, O‴ der drei Ankreise.



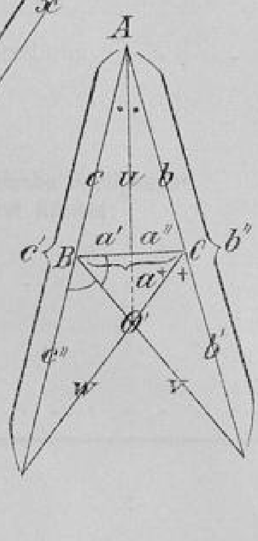
Einleitung: Auch die Halbierungslinie irgends eines Aussenwinkels (n) teilt die Gegenseite (b, äusserlich) im Verhältnis der beiden anderen.

Beweis: Wird c′ = c genommen, so ist

$$v = \left(R-\frac{\beta}{2}\right) = w \;\middle|\; m \parallel n \;\middle|$$

$$x : b = a : y \mid x : (b + x) = a : (a + y),$$

$$\text{d. i. } x : z = (a : c') = a : c.$$

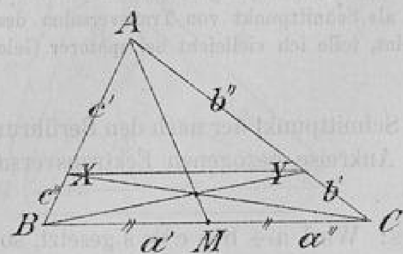


Ausführung: (Beweis für Punkt O′):

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{c} &= \frac{a''}{a'} \\ \frac{c}{a} &= \frac{b''}{a'} \\ \frac{a}{b} &= \frac{c''}{c'} \end{aligned}\right| \quad 1 = \frac{a''b''c''}{a'b'c'}; \text{ also!}$$

(cf. Spieker § 214).

Anm. Auch wenn v und w oben einschneiden sollten, bliebe doch der Beweis derselbe.



Schlussbemerkung: Als neunter (merkwürdiger) Punkt ist wohl zunächst das Centrum des Feuerbach'schen Kreises zu empfehlen, in welchem sich auch drei Ecktransversalen schneiden, nämlich die, welche nach den Gegenpunkten des Centrums des Umkreises in Bezug auf die drei Dreiecksseiten gezogen werden. Und will man (als Nro. 10) den geometrischen Ort eines solchen merkwürdigen Punktes haben, so darf eine spezielle Transversale (AM) dafür gelten.

Beweis: Ist BM = CM und die beliebige XY ∥ BC, so verhält sich

$$c' : b'' = c'' : b' \mid b'c' = b''c''$$

dazu $\quad a' = a''$

$$\overline{a'b'c' = a''b''c''}; \text{ also!}$$