Methodologisch-mathematische Aphorismen.

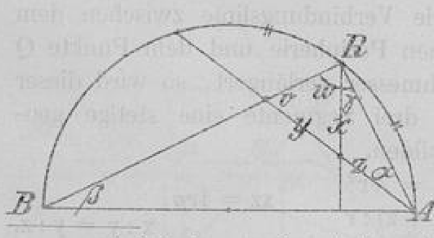
Da durch die fortschreitende Entwickelung, wie aller Wissenschaften, so auch der mathematischen, sich das Material immer mehr häuft, so erscheint es wünschenswert, die bereits vorhandenen Bücher hinsichtlich ihrer Klarheit und Leichtigkeit einer Durchsicht zu unterziehen und auf zweckmässige Änderungen hinzuwirken, damit nicht durch unnötigen Zeitaufwand beim Studium derselben ein schnelles Fortschreiten zu sehr erschwert werde. Darum habe ich mich in Folgendem bemüht, insbesondere zu einer Aufgabensammlung,*) mehrfache, oft sehr wesentliche Vereinfachungen vorzuschlagen, obgleich ich vermute, dass manche, welche nahe genug liegen, in Büchern, die ich nicht einzusehen in der Lage war, schon enthalten sein mögen.

Inbetreff der Auswahl habe ich mich hauptsächlich durch den Gedanken leiten lassen, dass neben den schwierigen Nummern auch einige leichtere aufzunehmen seien, damit auch minder begabte Schüler wenigstens einen Teil der Abhandlung mit Nutzen lesen können.

Jene Vereinfachungen, resp. Verbesserungen, wurden nun erstrebt

1) durch Änderungen in Konstruktionen und Beweisen;
2) durch vielfache Einführung der Analysis statt der Konstruktion, da die Analysis, ohne welche der Schüler nicht selten Kunststücke zu sehen vermeint, zeigen soll, wie man zur Konstruktion gekommen ist, während das entgegengesetzte Verfahren mir wie eine kleine Täuschung erscheinen will, und eine quasi Zurückübersetzung in die Ursprache nicht unangemessen sein mag;
3) durch zweckmässigere Wahl der Buchstaben, übersichtlichere Form der Darstellung, passendere Lage der Figurenteile u. dergl. mehr, da auch solche scheinbar geringe Hilfsmittel nicht verschmäht werden dürfen.

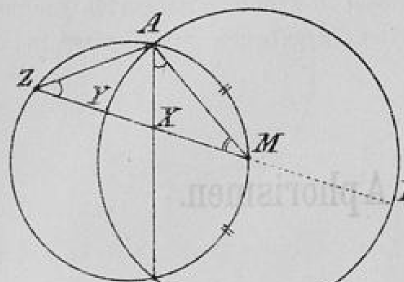
1. Wenn man von dem Halbierungspunkte R eines Kreisbogens die Senkrechte fällt auf den durch einen Endpunkt A des Bogens gezogenen Durchmesser AB, so halbiert diese Senkrechte dasjenige Stück der zum ganzen Bogen gehörigen Sehne, welches zwischen A und der Verbindungslinie BR liegt.



Beweis: $\alpha = (\beta) = \gamma$; | $x = z$ |
also auch die | | $y = z$.
Complemente: $v = w$ | $x = y$ |

*) Bei einer etwaigen Anfrage bin ich gern bereit, das Werkchen zu nennen; die betreffende Angabe schon an dieser Stelle zu machen, möchte ich unterlassen, und hoffe, dass dies allseitige Billigung erfahren werde.

2. Liegt der Mittelpunkt M des einen von zwei sich scheidenden Kreisen im Umfange des anderen, und wird von M aus eine beliebige Gerade gezogen, so schneiden die gemeinschaftliche Sehne und die Umfänge beider Kreise von derselben Stücke ab, die eine stetige geometrische Proportion bilden.



Beweis: $\underline{\triangle\ MAX \sim MAZ}$

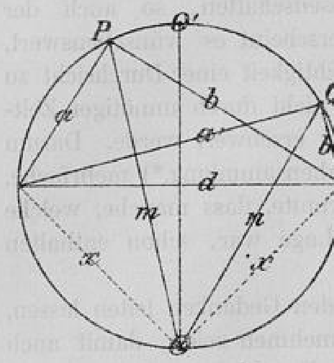
$$MX : MA = MA : MZ$$

oder

$$MX : MY = MY : MZ$$

Anm.: Statt Y kann auch Y' genommen werden.

3. Wenn man die Endpunkte eines Kreisdurchmessers d mit zwei Punkten P und Q derselben Halbperipherie verbindet, so verhält sich die Summe der nach dem einen Punkte gezogenen Linien zur Summe der zwei anderen, wie die Entfernungen der betreffenden Punkte vom entgegengesetzten Endpunkte O desjenigen Durchmessers OO', welcher auf dem vorigen d senkrecht steht.



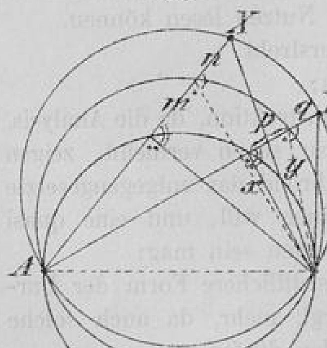
Beweis: $ax + bx = dm$

$$\underline{a'x + b'x = dn}$$

$$\frac{a + b}{a' + b'} = \frac{m}{n}$$

Anm.: Liegen P und Q auf verschiedenen Seiten von d, so findet auch der Punkt O' Verwendung.

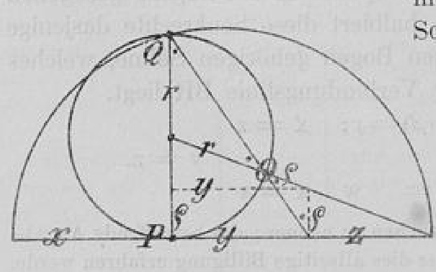
4. Schneiden sich 3 (oder mehr) Kreise in denselben 2 Punkten und zieht man von einem dieser Punkte A aus beliebig viele Linien AX, AY . . ., so haben die zwischen den Peripherien liegenden Stücke derselben einerlei Verhältnis.



Beweis: $m : x = p : y \;\big|\; m : n = p : q.$

$ n : x = q : y \;\big|$

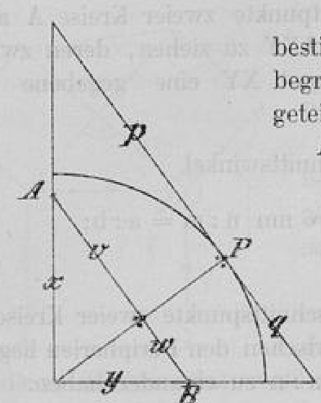
5. Wenn man in irgend einem Punkte P eines Halbkreisdurchmessers das Loth PQ bis zur Peripherie errichtet, über PQ als Durchmesser den Kreis beschreibt, dessen Centrum mit dem entfernteren Endpunkte des Halbkreisdurchmessers verbindet und die Verbindungslinie zwischen dem Schnittpunkte O der kleinen Peripherie und dem Punkte Q bis zum Halbkreisdurchmesser verlängert, so wird dieser so geteilt, dass seine drei Segmente eine stetige geometrische Proportion bilden.



Beweis: 1) $x\,(y + z) = 4r^2$ $\;\big|\; xz = 4r\rho \;\big|$

2) $z : \rho = (y + z) : r$ $\;\big|\;\;\big|\; x : y = y : z.$

3) $y^2 = (r + \rho)^2 - (r - \rho)^2.$ $\;\big|\; y^2 = 4r\rho \;\big|$



6. In dem Bogen eines Kreisquadranten den Punkt P so zu bestimmen, dass die in P gelegte und von den verlängerten Radien begrenzte Tangente durch P in dem gegebenen Verhältnisse m : n geteilt wird.

Analysis: $(p:q) = v:w = m:n$

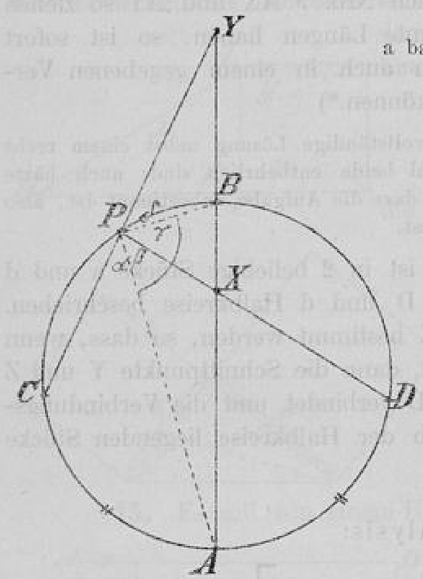
$$\frac{x^{2*)}}{v+w} : \frac{y_2}{v+w} = m:n$$

oder:

$x^2 : y^2 = mr : nr$, worin die Strecke r beliebig sein kann.

Durch x und y ist die Hilfslinie AB gefunden.

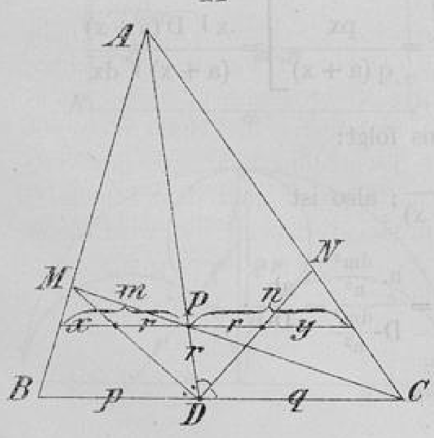
*) Wenn $a:b = c:d$, so ist auch $a = \frac{bc}{d}$; man kann daher statt a bald den Bruch setzen.



7. Wenn man von dem einen Endpunkte A eines Kreisdurchmessers aus beiderseits gleiche Bogen abträgt und deren Endpunkte mit einem beliebigen Punkte P der Peripherie verbindet, so bilden die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien X und Y mit den Endpunkten des Durchmessers A und B vier harmonische Punkte.

Beweis: Da $\alpha = \beta$ ist und wegen des rechten Winkels bei P auch $\gamma = \delta$, so verhält sich

$$AX : BX = AY : BY.$$



8. Innerhalb eines Dreiecks ist ein Punkt P zu bestimmen; die durch denselben zur Grundlinie gezogene Parallele soll in P so geteilt werden, dass die Überschüsse ihrer Segmente über den Abstand der beiden Parallelen sich verhalten wie die Quadrate über den ganzen Segmenten.*)

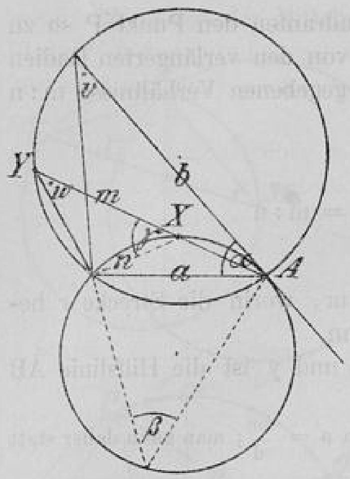
Konstruktion: Die beiden Nebenwinkel bei D werden halbiert; CM liefert P (BN würde dasselbe leisten).

Beweis: $m:n\ (= p:q) = x:r$; daher (Differenzen):

$$\frac{r:y \quad = \quad x:r}{x:y = \frac{m}{n} : \frac{r}{x} = \frac{m}{n} : \frac{n}{m} = m^2 : n^2.}$$

*) Die Untersuchung lehrt, dass P auf der Höhe des Dreiecks, also auf einer Ecktransversale liegt, und es lässt sich vermuten, dass auch alle übrigen Ecktransversalen, nach der Grundlinie gezogen, je einen solchen Punkt enthalten mögen.

Wir wollen daher diese interessante Aufgabe verallgemeinern, statt der Höhe des Dreiecks eine beliebige von A aus gezogene Ecktransversale einführen und deren unteres Stück r statt des gedachten (senkrechten) Abstandes (also des unteren Teiles der Höhe).



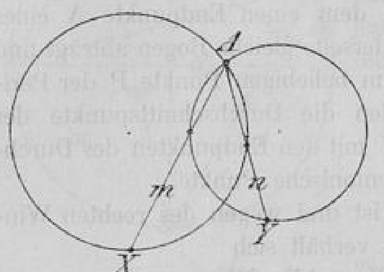
9. Von einem der Schnittpunkte zweier Kreise A aus in einem derselben diejenige Sehne AXY zu ziehen, deren zwischen den Peripherien liegendes Segment XY eine gegebene Länge m hat.

Analysis: Es ist der Abschnittswinkel

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha = (\beta) = \gamma; & & \\ v \;=\; w & \triangle\ ab \sim mn & n : m = a : b; \end{array}$$

daher die Strecke n bestimmt.

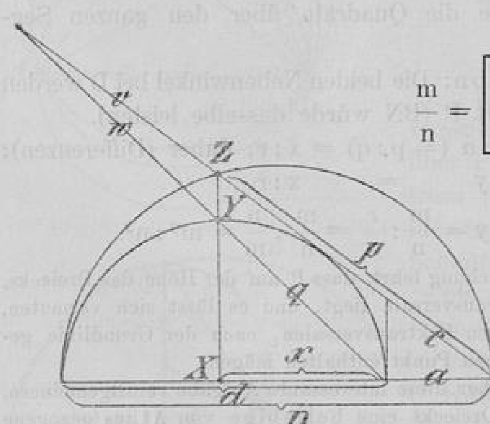
10. Von einem der Durchschnittspunkte zweier Kreise zwei Linien so zu ziehen, dass ihre zwischen den Peripherien liegenden Stücke das gegebene Verhältnis m : n zu einander haben.



Reduktion: Da man nach Nro. 9 AX und AY so ziehen kann, dass m und n bestimmte Längen haben, so ist sofort ersichtlich, dass m und n auch in einem gegebenen Verhältnisse erhalten werden können.*)

*) Verfasser gibt eine vollständige Lösung nebst einem recht ausführlichen Beweise, obwohl beide entbehrlich sind; auch hätte hervorgehoben werden sollen, dass die Aufgabe unbestimmt ist, also unendlich viele Resultate zulässt.

11. Eine Strecke D ist in 2 beliebige Stücke a und d geteilt und es sind über D und d Halbkreise beschrieben. Es soll auf d der Punkt X bestimmt werden, so dass, wenn man in X das Lot XYZ bis zu den Kreisumfängen errichtet, dann die Schnittpunkte Y und Z mit den Endpunkten der zugehörigen Durchmesser d und D verbindet und die Verbindungslinien verlängert, bis sie einander schneiden, die ausserhalb der Halbkreise liegenden Stücke derselben das gegebene Verhältnis m : n zu einander haben.



Analysis:

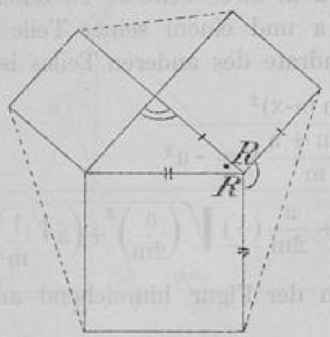
$$\frac{m}{n} = \left[\frac{v}{w} = \frac{p-c}{q} = \frac{p-\frac{ap^{*)}}{a+x}}{q} = \frac{px}{q\,(a+x)}\right] = \frac{x\sqrt{D\,(a+x)}}{(a+x)\sqrt{dx}}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{Dx}{d\,(a+x)};\ \text{also ist}$$

$$x = \frac{adm^2}{Dn^2-dm^2} = \frac{a.\frac{dm^2}{n^2}}{D-\frac{dm^2}{n^2}} = \frac{ab}{D-b}.$$

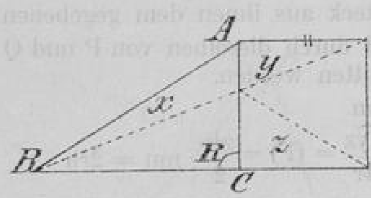
*) cfr. die Anm. zu Nro. 6.



12. Wenn man über den 3 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Quadrate errichtet und die aufeinanderfolgenden Winkelspitzen verbindet, so ist jedes der 3 dadurch entstandenen äusseren Dreiecke dem Urdreiecke gleich.

Bemerkung: Der Satz ist sofort einleuchtend, sobald man bedenkt, dass 2 Dreiecke nicht nur gleich sind, wenn 2 bezüglich gleiche Seiten gleiche Winkel einschliessen, sondern auch, wenn sie supplementare Winkel bilden.

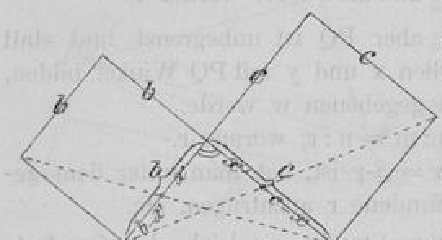
13. Wenn man über den Katheten AC und BC Quadrate errichtet und von den Ecken der spitzen Winkel Linien nach den gegenüberliegenden Ecken der Quadrate zieht, so schneidet jede dieser Linien vom rechtwinkligen Dreiecke ein stumpfwinkliges ab, welches gleich ist dem Dreiecke, das von dem betreffenden Quadrate abgeschnitten wird durch die Linie, die den Schnittpunkt auf der Kathete mit der noch nicht damit verbundenen Winkelspitze des Quadrates verbindet.



Beweis: $x + y = \frac{1}{2}$ Quadrat $= y + z \mid x = z$.

Das andere Katheten-Quadrat ist zum Beweise entbehrlich.

14. Wenn man über den Katheten Quadrate errichtet und die Scheitel der spitzen Winkel mit den gegenüberliegenden Winkelspitzen der Quadrate verbindet, so ist jedes der am rechten Winkel anliegenden Kathetensegmente das geometrische Mittel zwischen den 2 anderen Segmenten.

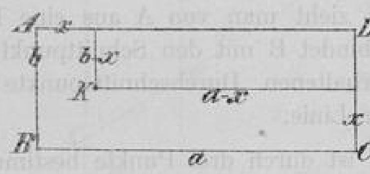


Beweis: $\left.\begin{aligned} x : b &= c : (c + b) \\ x' : c &= b : (b + c) \end{aligned}\right| x = x';$

daher (Differenzen):

$$\left.\begin{aligned} x : c &= (b\text{-}x) : b \\ x' : b &= (c\text{-}x') : c \end{aligned}\right| x^2 = (b\text{-}x)(c\text{-}x).$$

15. Es soll von einem Rechteck AC durch zwei Gerade, die zwei anstossenden Seiten parallel sind, ein Stück AKC abgeschnitten werden, welches überall dieselbe Breite hat und dessen Inhalt zum Inhalte des Rechtecks das Verhältnis 1 : n hat.

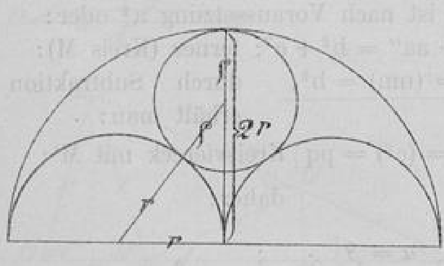


Analysis: AKC : ABCD = 1 : n, oder:

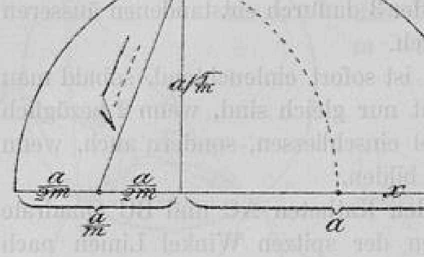
$$[ab\text{-}(a\text{-}x)(b\text{-}x)] : ab = 1 : n, \text{ woraus}$$

$$x^2 \text{-} (a + b)\,x = \text{-}\frac{ab}{n}, \text{ also } x \text{ konstruierbar.}$$

16. Wenn man über den 2 Radien eines Halbkreises nach innen wieder Halbkreise beschreibt und in die von den drei Peripherien eingeschlossene Fläche den Vollkreis, so verhält sich der Radius des letzteren zu dem der gleichen Halbkreise wie 2 : 3.



Beweis: $\dfrac{(r + \rho)^2 = (2r\text{-}\rho)^2 + r^2}{\rho : r = 2 : 3.}$



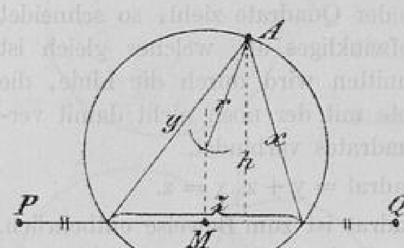
17. Eine Strecke a in zwei Teile so zu teilen, dass das Rechteck aus a und einem seiner Teile x gleich dem mfachen Quadrate des anderen Teiles ist.

Analysis: $ax = m\,(a\text{-}x)^2$

$$x^2 - \frac{2am + a}{m}\,x = -\,a^2$$

$$x = a + \frac{a}{2m}\,\underline{(+)}\sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)^2 + \left(a\sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2}$$

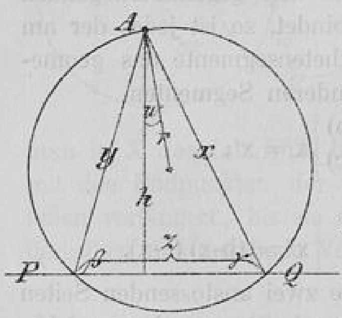
Konstruktion: In der Figur hinreichend angedeutet.



18. Von einem Punkte A ausserhalb einer ihrer Lage nach gegebenen Strecke PQ an letztere zwei Linien so zu ziehen, dass das Rechteck aus ihnen dem gegebenen Rechtecke mn gleich ist und durch dieselben von P und Q aus gleiche Stücke abgeschnitten werden.

Analysis: $r = \frac{xyz}{4F} \,\Big|\, \frac{\overbrace{xy}^{mn}z}{4r} = (F) = \frac{zh}{2} \,\Big|\, mn = 2rh$

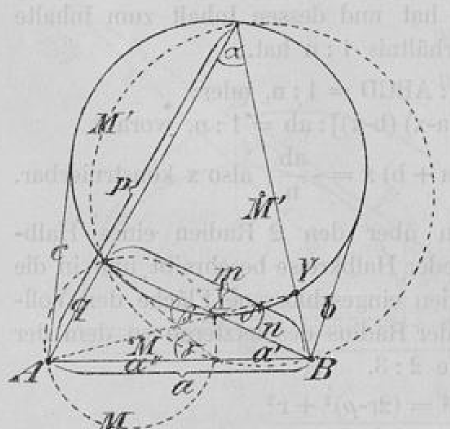
oder: $2h : m = n : r$, woraus r.



19. Die vorige Aufgabe; aber PQ ist unbegrenzt und statt gleiche Stücke abzuschneiden, sollen x und y mit PQ Winkel bilden, deren Differenz $(\beta\text{-}\gamma)$ gleich dem gegebenen w werde.

Analysis, wie vorher: $2h : m = n : r$, woraus r.

Da nun (bekanntlich) $\sphericalangle\, hr = \beta\text{-}\gamma$ ist, hat man unter dem gegebenen Winkel w an h das gefundene r anzutragen, etc.



20. Ist das Quadrat einer Strecke a gleich der Quadratsumme der von ihren Endpunkten A und B aus an einen Kreis gelegten Tangenten b und c, und zieht man von A aus eine beliebige Sekante und verbindet B mit den Schnittpunkten, so liegen die zuletzt erhaltenen Durchschnittspunkte X und Y mit A in gerader Linie.

Beweis: Kreis M ist durch drei Punkte bestimmt. Nun ist nach Voraussetzung a^2 oder:

$aa' + aa'' = b^2 + c^2$; ferner (Kreis M):

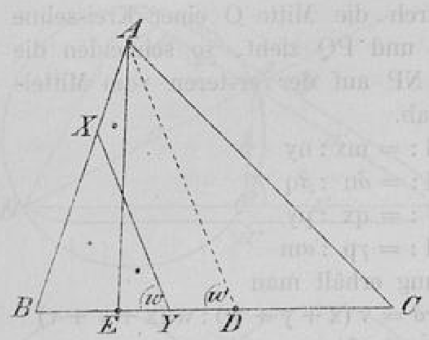
$\underline{aa' = (mn) = b^2;}$ durch Subtraktion erhält man:

$aa'' = (c^2) = pq \,|\,$ Kreisviereck mit M′;

daher:

$$\alpha = \gamma$$

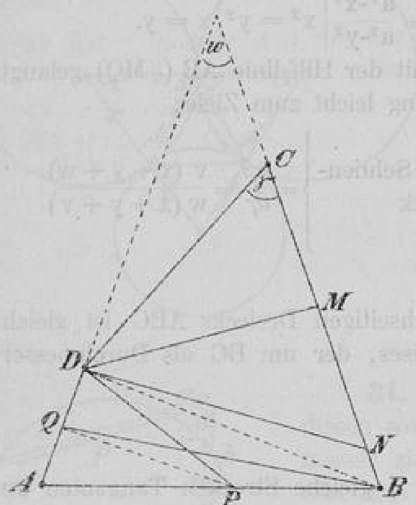
$$\text{dazu: } \beta = \gamma \,\Big|\, \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \alpha = \delta \end{matrix} \,\Big|\, \beta = \delta.$$



21. Das Dreieck ABC soll durch eine Gerade XY, welche mit der Dreiecksseite BC den gegebenen ∢ w bildet, in dem Verhältnisse m : n geteilt werden.

Bemerkung: Man lasse die unter w geneigte Richtungslinie AD von einer Ecke aus durch das Dreieck hindurchgehen (nicht ausserhalb), was immer möglich ist. Teilt nun etwa AE das Dreieck im Verhältnis von m : n, so erhält man (auf der einen oder der anderen Seite von AD) durch Umlegen der AE auf die bekannte Weise auch die gesuchte XY.*)

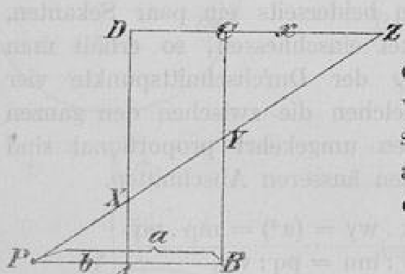
*) Bei einem anderen Verfahren kann es leicht vorkommen, dass die zuletzt erhaltene Teilungslinie XY nicht vollständig in das gegebene Dreieck hineinfällt, wodurch die Konstruktion etwas umständlich wird. Auch bei der folgenden Aufgabe halte ich die durch Umlegen gewonnene Teilung für die einfachste.



22. Ein Trapez durch gerade Linien, welche den Grundlinien parallel sind, in (etwa 4) gleiche Teile zu teilen.

Bemerkung: Diese Aufgabe wird erledigt sein, wenn ein beliebiges Viereck ABCD so geteilt werden kann, dass alle Teilungslinien zu einer Seite (AB) parallel gezogen sind.

Nachdem (Fundamental-Aufgabe) von D aus durch DM, DN, DP geteilt und DP auf die in der Figur angedeutete Weise zwischen die Schenkel von w (als BQ) gebracht ist, wird umgelegt, DM im Winkel γ, DN und BQ im Winkel w.

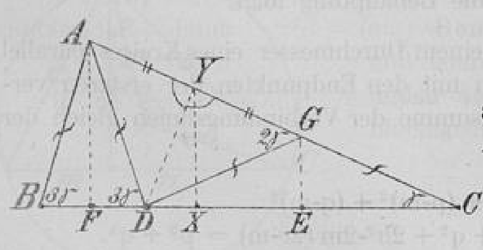


23. Auf der Verlängerung einer Seite (AB) eines Rechtecks ist der Punkt P gegeben; es soll von ihm aus durch die beiden anstossenden Seiten AD und BC bis zur verlängerten Gegenseite DC der erstgenannten die Gerade PXYZ so gezogen werden, dass das an AB liegende Trapez zu dem an der Verlängerung der Gegenseite liegenden Dreiecke CYZ das gegebene Verhältnis m : n hat.

Analysis: $\triangle PBY : PAX = a^2 : b^2$; also (Differenzen):

$$\begin{cases} ABYX : PBY = (a^2 - b^2) : a^2. \quad \text{Ferner} \\ PBY : CYZ = a^2 : x^2; \text{ zusammengesetzt:} \end{cases}$$

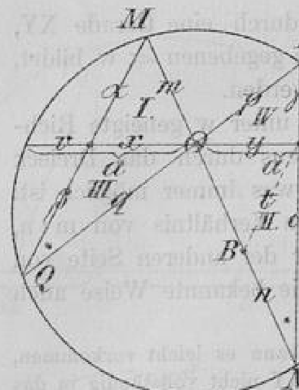
$$m : n = [ABYX : CYZ] = (a^2 - b^2) : x^2, \text{ woraus } x.$$



24. Ein Dreieck aus den Projektionen von b und c auf a so zu konstruieren, dass $\beta = 3\gamma$ wird.

Analysis: Es liegen fest die Punkte B, F, C; ausserdem auch D (AD = AB), E (DG = GC) und endlich X (AY = GY | FX = EX).

Also ist Dreieck DCY konstruierbar.

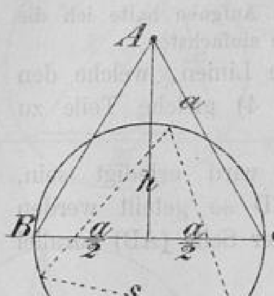


25. Wenn man durch die Mitte O einer Kreissehne zwei beliebige andere MN und PQ zieht, so schneiden die Verbindungslinien MQ und NP auf der ersteren vom Mittelpunkte aus gleiche Stücke ab.

1. Lösung:
$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{I} : \mathrm{II} := mx : ny \\ \mathrm{II} : \mathrm{III} := \delta n : \beta q \\ \mathrm{III} : \mathrm{IV} := qx : py \\ \mathrm{IV} : \mathrm{I} := \gamma p : \alpha m \end{array}\right.$$

Durch Zusammensetzung erhält man
$$\gamma\delta x^2 = \alpha\beta y^2 \,\Big|\, x^2 : y^2 = \alpha\beta : \gamma\delta = v\,(x+y+w) : w\,(x+y+v)$$
$$= \frac{(a-x)\,(a+x)}{(a-y)\,(a+y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2} \,\Big|\, x^2 = y^2 \,\Big|\, x = y.$$

2. Lösung: Auch mit der Hilfslinie AB (// MQ) gelangt man bei zweckmässiger Anordnung leicht zum Ziele:

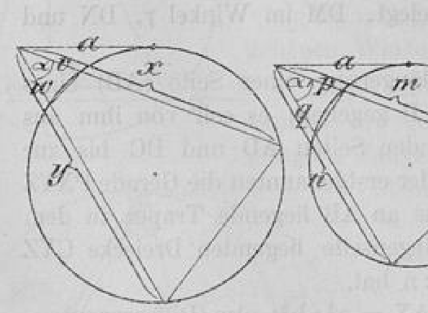


$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{\alpha}{t} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{\beta}{s} \end{array}\right| \frac{x^2}{y^2} = \frac{\alpha\beta}{st} \,\Bigg|\, \gamma\delta st \text{ ist ein Sehnenviereck} \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} = \frac{\alpha\beta}{\delta\gamma} = \frac{v\,(x+y+w)}{w\,(x+y+v)}$$

Schluss wie vorher.

26. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ABC ist gleich der Dreiecksseite desjenigen Kreises, der um BC als Durchmesser geschlagen wird.

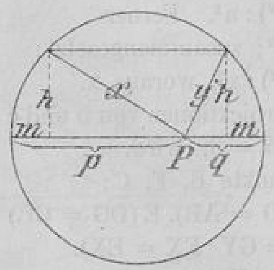
Beweis: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = s_3$.



27. Sind 2 gleiche Strecken Tangenten an 2 beliebigen Kreisen und zieht man von den Endpunkten derselben beiderseits ein paar Sekanten, die gleiche Winkel einschliessen, so erhält man durch Verbindung der Durchschnittspunkte vier Dreiecke, von welchen die zwischen den ganzen Sekanten liegenden umgekehrt proportional sind denen zwischen den äusseren Abschnitten.

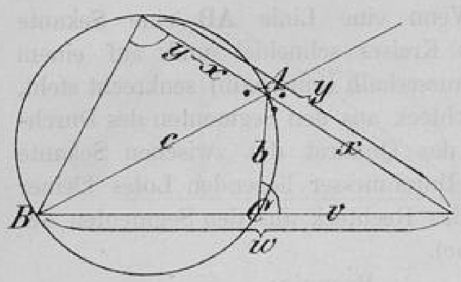
Beweis: $\dfrac{vx \,.\, wy = (a^4) = mp \,.\, nq}{xy : mn = pq : vw},$

woraus, da $\alpha = \alpha'$ ist, sofort die Behauptung folgt.



28. Wenn eine Sehne einem Durchmesser eines Kreises parallel und ein Punkt P des letzteren mit den Endpunkten der ersteren verbunden ist, so ist die Quadratsumme der Verbindungslinien gleich der der Durchmessersegmente.

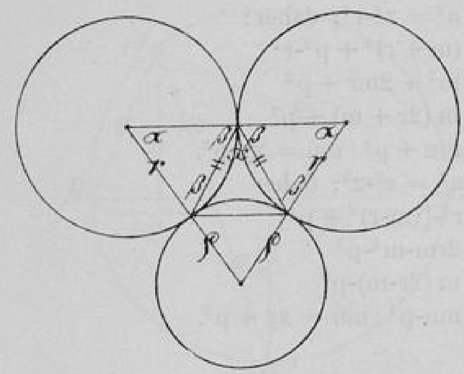
Beweis: $x^2 + y^2 = 2h^2 + (p-m)^2 + (q-m)^2$
$$= p^2 + q^2 + 2h^2 - 2m\,(2r-m) = p^2 + q^2.$$



29. Das Quadrat der Halbierungslinie eines Aussenwinkels des Dreiecks ist gleich der Differenz der Rechtecke aus den Segmenten der Gegenseite und aus den beiden anderen Seiten.

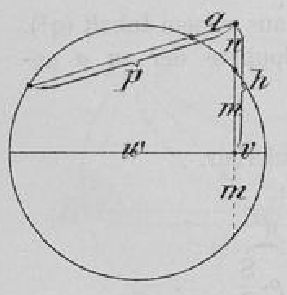
Beweis: $$\frac{b : x = (y\text{-}x) : c}{bc = xy\text{-}x^2 \mid x^2 = vw\text{-}bc.}$$

Anm.: Gegen das bekannte Analogon für die Halbierungslinie des inneren Dreieckswinkels erscheinen hier also Minuend und Subtrahend vertauscht.



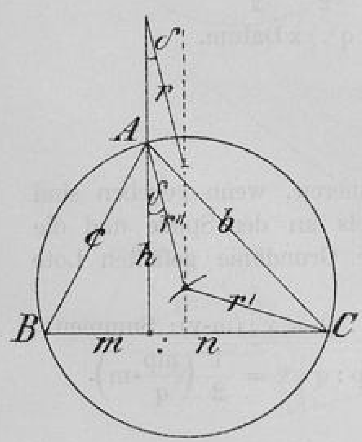
30. Wenn drei Kreise, von denen zwei einander gleich sind, sich gegenseitig von aussen berühren, so bilden die drei Centralen, sowie die drei Berührungssehnen je ein gleichschenkeliges Dreieck; der Winkel an der Spitze des zweiten ist gleich dem Basiswinkel des ersten.

Beweis: $$\frac{\alpha + 2\beta = (2R) = x + 2\beta}{x = \alpha.}$$



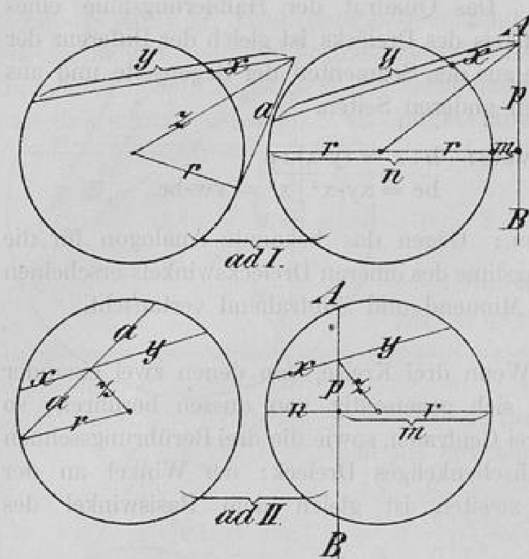
31. Wenn man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises in diesen sowohl eine Sekante als auch die Senkrechte auf einen Durchmesser zieht, so ist das Quadrat der Senkrechten gleich dem Rechtecke aus den Teilen des Durchmessers plus dem Rechtecke aus der ganzen Sekante und ihrem äusseren Abschnitte.

Beweis: $$\begin{aligned} h^2 &= (m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 \\ &= vw + n\,(2m + n) = vw + pq. \end{aligned}$$



32. Zur Konstruktion eines Dreiecks sind gegeben $\beta\text{-}\gamma = \delta$, das Verhältnis $m : n$ der auf a durch die Höhe gebildeten Abschnitte und $b + c = \underline{s}$.

Bemerkung: Wie man aus $m : n$ und δ das zugehörige r und somit ein dem gesuchten Dreiecke ähnliches Hilfsdreieck finden kann, zeigt die Figur. Die Strecke s ist dann leicht hineingebracht.



33. Wenn eine Linie AB eine Sekante (Sehne) eines Kreises schneidet und auf einem Durchmesser ausserhalb (innerhalb) senkrecht steht, so ist das Rechteck aus den Segmenten des Durchmessers um das Quadrat des zwischen Sekante (Sehne) und Durchmesser liegenden Lotes kleiner (grösser) als das Rechteck aus den Segmenten der Sekante (Sehne).

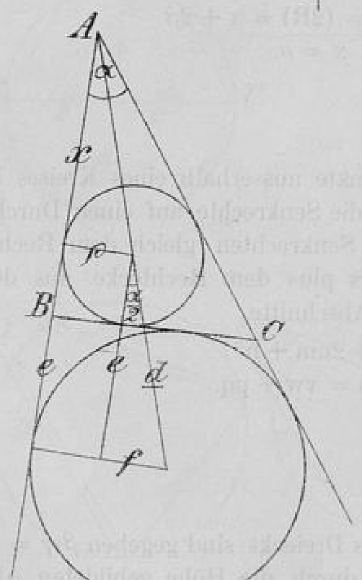
Beweis:

I. $xy = a^2 = z^2 - r^2$; daher:

$$\begin{aligned} xy &= (m+r)^2 + p^2 - r^2 \\ &= m^2 + 2mr + p^2 \\ &= m(2r+m) + p^2 \\ &= mn + p^2 \mid mn = xy - p^2. \end{aligned}$$

II. $xy = a^2 = r^2 - z^2$; daher

$$\begin{aligned} xy &= r^2 - [(m-r)^2 + p^2] \\ &= 2rm - m^2 - p^2 \\ &= m(2r-m) - p^2 \\ &= mn - p^2 \mid mn = xy + p^2. \end{aligned}$$



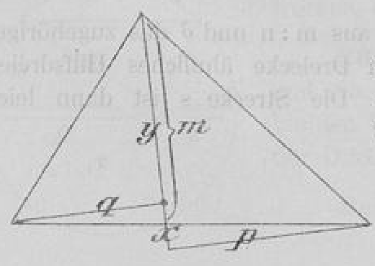
34. Ein Dreieck zu konstruieren aus seinem Inhalt (q^2), aus α und der Entfernung d der Mittelpunkte der zu α gehörigen zwei Berührungskreise.

Analysis: Dreieck def ist konstruierbar.

Ferner verhält sich

$$e : f = [x : \rho] = x.\frac{S}{2} : \overbrace{\rho.\frac{S}{2}}^{q^2}$$

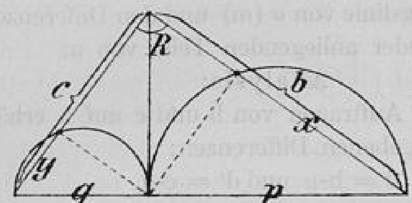
$$= x(x+e) : q^2. \mid x \text{ Datum.}$$



35. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind die Halbierungslinie m des Winkels an der Spitze und die darauf von den Endpunkten der Grundlinie gefällten Lote p und q.

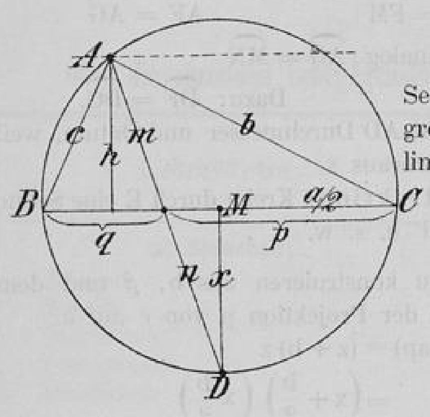
Analysis: $\underline{(x+m) : y = (p : q) = x : (m-y)}$; Summen:

$$(2x+m) : m = p : q \;\Big|\; x = \frac{1}{2}\left(\frac{mp}{q} - m\right).$$



36. Wenn man über den durch die Höhe gebildeten Abschnitten der Hypotenuse nach innen Halbkreise beschreibt, so schneiden diese von den Katheten Stücke ab, welche sich verhalten wie die Kuben der ganzen Katheten.

Beweis: $$\frac{x}{y} = \frac{\frac{p^2}{b}}{\frac{q^2}{c}} = \frac{c}{b}\left(\frac{b^2}{p+q}\right)^2\left(\frac{p+q}{c^2}\right)^2 = \frac{b^3}{c^3}.$$

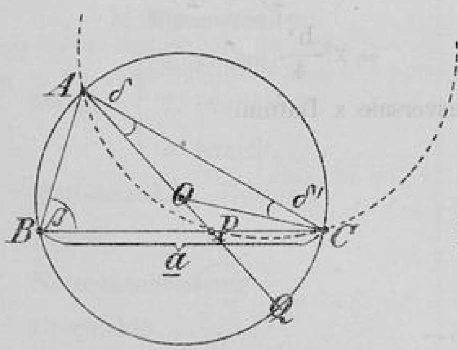


37. Zur Konstruktion eines Dreiecks ist gegeben die Seite a, die Höhe h, und es soll das Rechteck bc doppelt so gross sein, als das Rechteck aus den durch die Halbierungslinie des Winkels α auf a gebildeten Abschnitten.

Analysis: Bekanntlich ist

$$m^2 + pq = bc \text{ und nach Bedingung}$$
$$2pq = bc \mid m^2 = pq = mn \mid m = n \mid x = h.$$

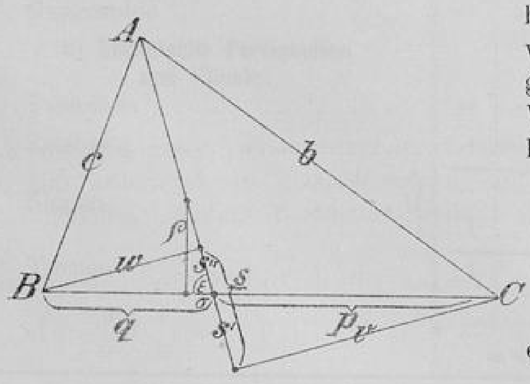
Konstruktion: Kreis durch B, C, D; u. s. w.



38. Ein Dreieck ABC zu zeichnen aus a, β und dem Punkte P auf a, durch welchen der von A aus gezogene Durchmesser des umgeschriebenen Kreises geht.

Analysis: Datum ist $\delta = R - \beta$.

Die Konstruktion ist angedeutet; dass AOPQ von selbst Durchmesser werden müsse, folgt aus der Analysis, liesse sich daher auch leicht erweisen.



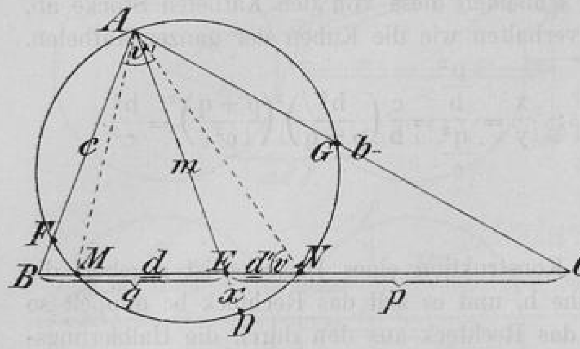
39. Ein Dreieck ABC zu zeichnen aus $b : c = m : n$, aus dem Segmente s, welches die von B und C aus auf die Halbierungslinie von α gefällten Lote von ihr abschneiden, und aus dem Verhältnisse von ρ zu dem Stücke σ der Grundlinie, welches zwischen ρ und s liegt.

Analysis: $s' : s'' = [p : q = b : c] = m : n$, also Datum.

Ebenso ist ε durch das Verhältnis $\rho : \sigma$ ein Datum.

Konstruktion: s; s' und s''; ε; v und w; endlich A durch Apollonius.

40. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Halbierungslinie von α (m) und den Differenzen zwischen den anstossenden Seiten b und c und dem an jeder anliegenden Teile von a.



Analysis:

Durch Auftragen von b und c auf a erhält man die gegebenen Differenzen:

$$d = b\text{-}p \text{ und } d' = c\text{-}q.$$

Dann ist ($v = v'$) Bogen

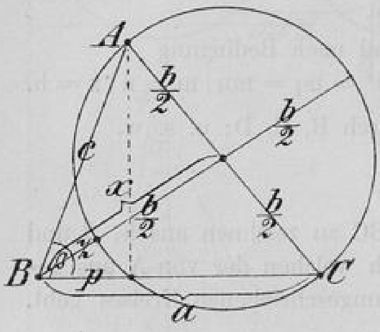
$$\left.\begin{array}{l}\overparen{AM} = \overparen{FN} \\ \overparen{FM} = \overparen{FM}\end{array}\right| \overparen{AF} = \overparen{MN} \left| \overparen{AF} = \overparen{AG}\right.$$

und analog : $\overparen{AG} = \overparen{MN}$

Dazu: $\overparen{DF} = \overparen{DG}$.

Also ist AD Durchmesser und Datum, weil $dd' = mx$, woraus x.

Konstruktion: Kreis; durch E eine Sehne $MN = d + d'$ u. s. w.



41. Ein Dreieck zu konstruieren aus b, β und dem Rechtecke mn aus a und der Projektion p von c auf a.

Analysis: $mn = (ap) = (z + b)\, z$

$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)\left(x - \frac{b}{2}\right)$$

$$= x^2 - \frac{b^2}{4}.$$

Also ist die Transversale x Datum.