Einleitung.

Schon seit geraumer Zeit haben mehrere bedeutende Mathematiker, unter ihnen Abel und in neuester Zeit insbesondere Kronecker scharf nachgewiesen, daß die Wurzeln einer algebraischen Gleichung von einem höheren als dem 4. Grade keine algebraischen Funktionen der Coëfficienten dieser Gleichung sein können, wenn diese Coëfficienten als ganz allgemein und vollständig von einander unabhängig vorausgesetzt werden. Ist letzteres nicht der Fall, so kann es allerdings sehr gut möglich sein, ganze Klassen von Gleichungen aufzustellen, von denen man nicht nur weiß, daß ihre Wurzelwerte algebraische Funktionen der Coëfficienten sind, sondern die sich überdies wirklich auflösen lassen.

Ein Beispiel liefert die folgende Gleichung:

$$x^{2n+1} + a x^{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2n-2)^{1|-1} \cdot \frac{a^2}{2n+1}$$

$$\times x^{2n-3} + \frac{1}{3} \frac{(2n-3)^{2|-1}}{2!} \frac{a^3}{(2n+1)^2} x^{2n-5}$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{1}{r} \frac{(2n-r)^{r-1|-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{a^r}{(2n+1)^{r-1}} \cdot x^{2n-(2r-1)} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{n} \cdot \frac{n^{n-1|-1}}{(n-1)!} \frac{a^n}{(2n+1)^{n-1}} \cdot x + b = 0$$

oder kürzer geschrieben:

$$x^{2n+1} + b + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r} \frac{(2n-r)^{r-1|-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{a^r}{(2n+1)^{r-1}} \cdot x^{2n-(2r-1)} = 0 \quad (1)$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = y + z$, und berücksichtigt, daß

$$x^{2n+1} = (y+z)^{2n+1} = y^{2n+1} + z^{2n+1}$$

$$+ (2n+1) \sum_{r=1}^{r=n} (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{r} \frac{(2n-r)^{r-1|-1}}{(r-1)!} y^r z^r (y+z)^{2n-(2r-1)},$$

so ergibt sich, indem man in der Gleichung (1) nach geschehener Substitution die Glieder mit gleich hohen Potenzen von $y + z$ zusammenfaßt:

$$\left(y^{2n+1} + z^{2n+1} + b\right) + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r} \frac{(2n-r)^{r-1|-1}}{(r-1)!} (y+z)^{2n-(2r-1)}$$

$$\times \left[(-1)^{r-1} . (2n+1)\, y^r z^r + \frac{a^r}{(2n+1)^{r-1}}\right] = 0 \quad (2)$$

Setzt man irgend eines der n Glieder, welche in dem Ausdrucke (2) unter Σ zusammengefaßt sind, z. B. das r^{te} Glied, gleich 0, so hat man, da $y + z$ nicht den Wert 0 haben kann,

notwendig: $(-1)^{r-1} . (2n+1)\, y^r z^r + \dfrac{a^r}{(2n+1)^{r-1}} = 0$

oder $y^r z^r = \dfrac{(-1)^r a^r}{(2n+1)^r}$; daraus folgt für jeden Wert von r von $r = 1$ bis $r = n$:

$$yz = -\frac{a}{2n+1} \quad (3)$$

Außerdem folgt noch aus Gleichung (2):

$$y^{2n+1} + z^{2n+1} + b = 0, \text{ daher } y^{2n+1} + z^{2n+1} = -b \quad (4)$$

Ferner ist vermöge Gleichung (3):

$$y^{2n+1} . z^{2n+1} = -\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+1}} \quad (5)$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) ergeben sich sofort die Werte von y^{2n+1} und z^{2n+1}, so daß man schließlich erhält:

$$x = y + z = \sqrt[2n+1]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \left(\frac{a}{2n+1}\right)^{2n+1}}} +$$

$$\sqrt[2n+1]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \left(\frac{a}{2n+1}\right)^{2n+1}}},$$

welch' letzterer Ausdruck einen der $2n + 1$ Wurzelwerte der Gleichung (1) vorstellt. —

Nach dieser kurzen Abschweifung ist zunächst zu bemerken, daß unter den algebraisch auflösbaren Gleichungen von einem höheren als dem vierten Grade insbesondere die sogenannten binomischen Gleichungen von Interesse sind, die sich auf die Form $x^n - 1 = 0$ bringen lassen. Den ersten Schritt in dieser Beziehung that Vandermonde, welcher der „Académie des sciences" in Paris im Jahre 1771 die Lösung einer Gleichung fünften Grades vorlegte, die sich durch eine einfache Ableitung aus der Gleichung $x^{11} = 1$ ergibt und bis dahin für algebraisch unlösbar galt.

Bahnbrechend waren in dieser Beziehung die scharfsinnigen Entwickelungen von Gauß, die er im Jahre 1801 in seinen „Disquisitiones arithmeticae" veröffentlichte, und durch welche er nachwies, daß, wenn in der Gleichung $x^n = 1$ n eine Primzahl bedeutet, die Lösung dieser Gleichung von der Lösung so vieler einzelner Gleichungen abhängt, als $n - 1$ Primfaktoren hat, wobei die Grade der einzelnen Gleichungen zugleich eben diese Primfaktoren sind. Lagrange zeigte überdies, wie man mit Zugrundelegung des Gauß'schen Prinzipes die algebraischen Formeln für die Wurzelwerte der binomischen Gleichungen direkt aufstellen kann. Zweck dieser kleinen Abhandlung ist nicht, eine unnötige Wiederholung jener Theorien zu liefern, die ohnedies jedem Mathematiker zugänglich sind, sondern der möglichst selbstständige Nachweis gewisser Eigenschaften, welche einer näher zu beschreibenden Klasse von Gleichungen zukommen, die von den binomischen Gleichungen hergeleitet sind und zu den Abel'schen Gleichungen gehören. Außerdem werde ich nachweisen, daß die Unbestimmtheit der Formeln von Lagrange, die in der Vieldeutigkeit der Wurzeln ihren Grund hat, nicht blos auf dem von Abel angegebenen Wege, sondern in noch ganz anderer Weise, nämlich durch die Lösung eines Systems linearer Gleichungen beseitigt werden kann und daß die von mir aufgestellte Entwickelung, welche allerdings sich auf den Fall $x^{4n+3} = 1$ ($4n + 3$ prim) beschränkt, wenn es sich um die numerische Berechnung der Formeln von Lagrange handelt, den Vorzug größerer Kürze mit Recht in Anspruch nehmen dürfte.