Studien

über

binomische Gleichungen

von

Friedrich Anschütz,
k. Studienlehrer.

Programm

der

K. Studienanstalt Passau

zum

Schlusse des Schuljahres 1883/84.

Passau 1884.
Druck von J. Bucher.

Einleitung.

Schon seit geraumer Zeit haben mehrere bedeutende Mathematiker, unter ihnen Abel und in neuester Zeit insbesondere Kronecker scharf nachgewiesen, daß die Wurzeln einer algebraischen Gleichung von einem höheren als dem 4. Grade keine algebraischen Funktionen der Coëfficienten dieser Gleichung sein können, wenn diese Coëfficienten als ganz allgemein und vollständig von einander unabhängig vorausgesetzt werden. Ist letzteres nicht der Fall, so kann es allerdings sehr gut möglich sein, ganze Klassen von Gleichungen aufzustellen, von denen man nicht nur weiß, daß ihre Wurzelwerte algebraische Funktionen der Coëfficienten sind, sondern die sich überdies wirklich auflösen lassen.

Ein Beispiel liefert die folgende Gleichung:

$$x^{2n+1} + a\,x^{2n-1} + \frac{1}{2}\cdot(2n-2)^{1|-1}\cdot\frac{a^2}{2n+1}$$

$$\times\, x^{2n-3} + \frac{1}{3}\,\frac{(2n-3)^{2|-1}}{2!}\,\frac{a^3}{(2n+1)^2}\,x^{2n-5}$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{1}{r}\,\frac{(2n-r)^{r-1|-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{a^r}{(2n+1)^{r-1}}\cdot x^{2n-(2r-1)} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{n}\cdot\frac{n^{n-1|-1}}{(n-1)!}\,\frac{a^n}{(2n+1)^{n-1}}\cdot x + b = 0$$

oder kürzer geschrieben:

$$x^{2n+1} + b + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r}\,\frac{(2n-r)^{r-1|-1}\cdot a^r}{(r-1)!\;(2n+1)^{r-1}}\cdot x^{2n-(2r-1)} = 0 \quad (1)$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = y + z$, und berücksichtigt, daß

$$x^{2n+1} = (y+z)^{2n+1} = y^{2n+1} + z^{2n+1}$$

$$+ (2n+1)\sum_{r=1}^{r=n} (-1)^{r-1}\cdot\frac{1}{r}\,\frac{(2n-r)^{r-1|-1}}{(r-1)!}\,y^r z^r (y+z)^{2n-(2r-1)},$$

so ergibt sich, indem man in der Gleichung (1) nach geschehener Substitution die Glieder mit gleich hohen Potenzen von $y + z$ zusammenfaßt:

$$\left(y^{2n+1} + z^{2n+1} + b\right) + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r}\,\frac{(2n-r)^{r-1/-1}}{(r-1)\,!}\,(y+z)^{2n-(2r-1)}$$

$$\times \left[(-1)^{r-1} \cdot (2n+1)\, y^r z^r + \frac{a^r}{(2n+1)^{r-1}} \right] = 0 \quad (2)$$

Setzt man irgend eines der n Glieder, welche in dem Ausdrucke (2) unter Σ zusammengefaßt sind, z. B. das r^{te} Glied, gleich 0, so hat man, da $y + z$ nicht den Wert 0 haben kann,

notwendig: $(-1)^{r-1} \cdot (2n+1)\, y^r z^r + \dfrac{a^r}{(2n+1)^{r-1}} = 0$

oder $y^r z^r = \dfrac{(-1)^r a^r}{(2n+1)^r}$; daraus folgt für jeden Wert von r von $r = 1$ bis $r = n$:

$$yz = -\frac{a}{2n+1} \quad (3)$$

Außerdem folgt noch aus Gleichung (2):

$$y^{2n+1} + z^{2n+1} + b = 0, \text{ daher } y^{2n+1} + z^{2n+1} = -b \quad (4)$$

Ferner ist vermöge Gleichung (3):

$$y^{2n+1} \cdot z^{2n+1} = -\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+1}} \quad (5)$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) ergeben sich sofort die Werte von y^{2n+1} und z^{2n+1}, so daß man schließlich erhält:

$$x = y + z = \sqrt[2n+1]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \left(\frac{a}{2n+1}\right)^{2n+1}}} + \sqrt[2n+1]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \left(\frac{a}{2n+1}\right)^{2n+1}}},$$

welch' letzterer Ausdruck *einen* der $2n + 1$ Wurzelwerte der Gleichung (1) vorstellt. —

Nach dieser kurzen Abschweifung ist zunächst zu bemerken, daß unter den algebraisch auflösbaren Gleichungen von einem höheren als dem vierten Grade insbesondere die sogenannten binomischen Gleichungen von Interesse sind, die sich auf die Form $x^n - 1 = 0$ bringen lassen. Den ersten Schritt in dieser Beziehung that Vandermonde, welcher der „Académie des sciences“ in Paris im Jahre 1771 die Lösung einer Gleichung fünften Grades vorlegte, die sich durch eine einfache Ableitung aus der Gleichung $x^{11} = 1$ ergibt und bis dahin für algebraisch unlösbar galt.

Bahnbrechend waren in dieser Beziehung die scharfsinnigen Entwickelungen von Gauß, die er im Jahre 1801 in seinen „Disquisitiones arithmeticae“ veröffentlichte, und durch welche er nachwies, daß, wenn in der Gleichung $x^n = 1$ n eine Primzahl bedeutet, die Lösung dieser Gleichung von der Lösung so vieler einzelner Gleichungen abhängt, als $n - 1$ Primfaktoren hat, wobei die Grade der einzelnen Gleichungen zugleich eben diese Primfaktoren sind. Lagrange zeigte überdies, wie man mit Zugrundelegung des Gauß'schen Prinzipes die algebraischen Formeln für die Wurzelwerte der binomischen Gleichungen direkt aufstellen kann. Zweck dieser kleinen Abhandlung ist nicht, eine unnötige Wiederholung jener Theorien zu liefern, die ohnedies jedem Mathematiker zugänglich sind, sondern der möglichst selbstständige Nachweis gewisser Eigenschaften, welche einer näher zu beschreibenden Klasse von Gleichungen zukommen, die von den binomischen Gleichungen hergeleitet sind und zu den Abel'schen Gleichungen gehören. Außerdem werde ich nachweisen, daß die Unbestimmtheit der Formeln von Lagrange, die in der Vieldeutigkeit der Wurzeln ihren Grund hat, nicht blos auf dem von Abel angegebenen Wege, sondern in noch ganz anderer Weise, nämlich durch die Lösung eines Systems linearer Gleichungen beseitigt werden kann und daß die von mir aufgestellte Entwickelung, welche allerdings sich auf den Fall $x^{4n+3} = 1$ ($4n + 3$ prim) beschränkt, wenn es sich um die numerische Berechnung der Formeln von Lagrange handelt, den Vorzug größerer Kürze mit Recht in Anspruch nehmen dürfte.

Reduction der Gleichung $x^n = 1$, wo n eine Primzahl sein soll, auf eine Gleichung vom Grade $\frac{n-1}{2}$.

Die Gleichung $x^n - 1 = 0$ nimmt nach Entfernung des Faktors $x - 1$ folgende Form an:

$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots\ldots x + 1 = 0$ oder wenn man $n - 1 = 2\mu$ setzt:

$$x^{2\mu} + x^{2\mu-1} + x^{2\mu-2} + \ldots\ldots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Wird die linke Seite der Gleichung durch x^μ dividiert, so ergiebt sich:

$$V_\mu + V_{\mu-1} + V_{\mu-2} + \ldots. + V_r + \ldots. + V_2 + V_1 + 1 = 0,$$

wo unter V_r $x^r + \frac{1}{x^r}$ zu verstehen ist.

Nun zeigt Serret in seinem Handbuche der höheren Algebra (Band I Seite 195 bis 200), daß wenn $x + \frac{1}{x} = V_1 = z$ gesetzt wird, V_r direkt durch z ausgedrückt werden kann, und zwar findet sich:

$$V_r = z^r - r z^{r-2} + \frac{r(r-3)}{1.2} z^{r-4} - \frac{r(r-4)(r-5)}{1.2.3} z^{r-6} + \ldots..$$

$$+ \frac{(-1)^\nu \cdot r(r-\nu-1)(r-\nu-2) \ldots..(r-2\nu+2)(r-2\nu+1)}{1.2.3\ldots..\nu} z^{r-2\nu} + \ldots..,$$

wobei wenn n gerade ist, der größte Wert von ν $\frac{n}{2}$, wenn aber n ungerade ist, der größte Wert von ν $\frac{n-1}{2}$ ist.

Es wird dort weiter gezeigt, daß

$$V_\mu + V_{\mu-1} + V_{\mu-2} + \ldots. + V_1 + 1$$

$$= z^\mu + z^{\mu-1} - \frac{(\mu-1)}{1} z^{\mu-2} - \frac{(\mu-2)}{1} z^{\mu-3} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)}{1.2} z^{\mu-4}$$

$$+ \frac{(\mu-3)(\mu-4)}{1.2} z^{\mu-5} - \ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^\nu (\mu-\nu) \ldots (\mu-2\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu} z^{\mu-2\nu}$$

$$+ \frac{(-1)^{\nu}(\mu-\nu-1)\ldots\ldots(\mu-2\nu)}{1.2.3\ldots\nu} z^{\mu-2\nu-1} + \ldots\ldots = 0 \qquad (6),$$

wo wenn μ ungerade ist, der größte Wert von ν $\frac{\mu-1}{2}$, und im entgegengesetzten Falle $\frac{\mu}{2}$ ist; das letzte Glied der Gleichung (6) ist stets $= + 1$.

Ueber die Wurzelwerte der Gleichung (6).

Wenn $x^{2\mu+1} = 1$, wo $2\mu + 1$ eine Primzahl sein soll, so ist bekanntlich jeder der $2\mu + 1$ Werte, welche diese Gleichung befriedigen, darstellbar durch die Form: $x_\nu = \cos\frac{2\nu\pi}{2\mu+1} + i \sin\frac{2\nu\pi}{2\mu+1}$, wo man für ν der Reihe nach die Werte von $\nu = 0$ bis $\nu = \mu$ zu setzen hat. — Die durchaus reellen Werte der Gleichung (6) sind von der Form: $z_\nu = x_\nu + \frac{1}{x_\nu} = 2\cos\frac{2\nu\pi}{2\mu+1}$, wobei ν die verschiedenen Werte von $\nu = 1$ bis $\nu = \mu$ annimmt. — Ist $2\mu + 1$ eine Primzahl, so gibt es bekanntlich immer solche Zahlen, welche kleiner als $2\mu + 1$ und so beschaffen sind, daß keine niedrigere Potenz als die $2\mu^{\text{te}}$ einer solchen Zahl durch $2\mu + 1$ dividiert den Rest 1 gibt. Jede solche Zahl heißt eine primitive Wurzel der Primzahl $2\mu + 1$ und besitzt die merkwürdige Eigenschaft, daß die verschiedenen Potenzen derselben von der 1ten bis inclusive der $2\mu^{\text{ten}}$, wenn man sie durch $2\mu + 1$ dividiert, sämmtlich *verschiedene* Reste geben, welche nichts anderes sind als die sämmtlichen Zahlen von 1 bis 2μ. Von diesem Satze hat zuerst Gauß zum Zwecke der algebraischen Auflösung der binomischen Gleichungen Gebrauch gemacht.

Die μ Werte der Gleichung (6) wurden zunächst in der Form:

$$2\cos\frac{2\pi}{2\mu+1},\ 2\cos\frac{4\pi}{2\mu+1},\ 2\cos\frac{6\pi}{2\mu+1},\ \ldots\ldots\ 2\cos\frac{2\mu\pi}{2\mu+1} \qquad (7)$$

aufgestellt. Es läßt sich nun beweisen, daß die Reihe:

$$2\cos\frac{2\pi}{2\mu+1},\ 2\cos\frac{2p\pi}{2\mu+1},\ 2\cos\frac{2p^2\pi}{2\mu+1},\ \ldots\ldots\ 2\cos\frac{2p^{\mu-1}\pi}{2\mu+1} \qquad (8)$$

wo p die kleinste primitive Wurzel von $2\mu + 1$ sein soll, sämmtliche in der Reihe (7) befindlichen Wurzelwerte enthält, nur in anderer Ordnung.

Zunächst lassen die verschiedenen Potenzen von p durch $2\mu + 1$ dividiert lauter verschiedene Reste, wobei wohl zu beachten ist, daß unter diesen Resten sich kein einziges Paar q_1 und q_2 befinden können, so daß $q_1 + q_2 = 2\mu + 1$ wäre.

Denn wäre dies der Fall, so daß etwa $p^{\nu_1} = (2\mu + 1)\, m_1 + q_1$ und $p^{\nu_2} = (2\mu + 1)\, m_2 = q_2$ wäre, so wären die betreffenden Wurzelwerte:

$$2 \cos \frac{2\,[(2\mu + 1)\, m_1 + q_1]\,\pi}{2\mu + 1} \quad \text{und} \quad 2 \cos \frac{2\,[(2\mu + 1)\, m_2 + q_2]\,\pi}{2\mu + 1}$$

oder kürzer: $\displaystyle 2 \cos \frac{2\, q_1\, \pi}{2\mu + 1}$ und $\displaystyle 2 \cos \frac{2\, q_2\, \pi}{2\mu + 1}$.

Da nun $q_1 + q_2 = 2\mu + 1$, also $q_2 = 2\mu + 1 - q_1$ vorausgesetzt ist, so würde folgen:

$$2 \cos \frac{2\, q_2\, \pi}{2\mu + 1} = 2 \cos \frac{2\,(2\mu + 1 - q_1)\,\pi}{2\mu + 1} = 2 \cos \frac{2\, q_1\, \pi}{2\mu + 1},$$

d. h. es wären dann zwei Wurzelwerte der Gleichung **(6)** einander gleich, was unmöglich ist.

Die verschiedenen Reste q können zum Teil kleiner, zum Teil größer als μ sein; letztere lassen sich aber stets durch solche ersetzen, die kleiner sind als μ; denn ist z. B. $q = \mu + \varepsilon$, wobei $\varepsilon \leqq \mu$, so hat man als zugehörigen Wurzelwert der Gleichung **(6)**:

$$2 \cos \frac{2\,(\mu + \varepsilon)\,\pi}{2\mu + 1} = 2 \cos \left[2\pi - \frac{2\,(\mu + \varepsilon)\,\pi}{2\mu + 1} \right]$$

$$= 2 \cos \frac{2\,[2\mu + 1 - \mu - \varepsilon]\,\pi}{2\mu + 1} = 2 \cos \frac{2\,(\mu - \varepsilon + 1)\,\pi}{2\mu + 1}.$$

Da nun im Ganzen μ verschiedene Reste bleiben müssen und ihre Anzahl μ ist, so sind diese Reste mit Rücksicht darauf, daß $\mu + \varepsilon$ durch $\mu - \varepsilon + 1$ ersetzt werden darf, nichts anderes als die Zahlen von 1 bis inclusive μ, nur nicht in ihrer natürlichen Reihenfolge. Damit ist bewiesen, daß die Reihe **(7)** durch die Reihe **(8)** ersetzt werden darf.

Auflösung der Gleichung (6).

Bezeichnet wie bisher p die kleinste primitive Wurzel der Primzahl $2\mu + 1$, so muß bekanntlich aus Gründen der Zahlentheorie p^{μ} durch $2\mu + 1$ dividiert den Rest 2μ geben; es ist also

$p^{\mu} = n\,(2\mu + 1) + 2\mu$ oder $p^{\mu} = (n + 1 (2\mu + 1) - 1$,

demnach $2\,p^{\mu} = 2\,(n + 1)\,(2\mu + 1) - 2$; folglich

$\cos \frac{2\,p^{\mu}\pi}{2\mu + 1} = \cos \frac{2\pi}{2\mu + 1}$; bezeichnet man allgemein den Wurzelwert $2 \cos \frac{2\,p^{\nu}\pi}{2\mu + 1}$ mit $z_{\nu + 1}$, so hat man:

$$z_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{2\mu + 1},\; z_2 = 2 \cos \frac{2\,p\,\pi}{2\mu + 1},\; z_3 = 2 \cos \frac{2\,p^2\pi}{2\mu + 1} \ldots\ldots$$

$$z_{\mu} = 2 \cos \frac{2\,p^{\mu - 1}\pi}{2\mu + 1};$$ ferner:

$$z_{\mu + 1} = 2 \cos \frac{2\,p^{\mu}\pi}{2\mu + 1} = 2 \cos \frac{2\pi}{2\mu + 1} = z_1$$

analog: $z_{\mu + \varkappa} = z_{\varkappa}$. —

Da $z_{\nu + 1} = 2 \cos \frac{2\,p^{\nu}\pi}{2\mu + 1} = 2 \cos p. \frac{2\,p^{\nu - 1}\pi}{2\mu + 1}$ ist, und letzterer Ausdruck, also auch $z_{\nu + 1}$ sich als rationale ganze Funktion von $\cos 2 \frac{p^{\nu - 1}\pi}{2\mu + 1}$ darstellen läßt, so ist mithin $z_{\nu + 1}$ eine rationale ganze Funktion von z_{ν}; da aber $z_{\nu + 2}$ ganz dieselbe Funktion von $z_{\nu + 1}$ ist, wie $z_{\nu + 1}$ von z_{ν}, so ist, wenn man der klareren Bezeichnung halber z_2 gleich einer Funktion $\Theta\,z_1$, $z_3 = \Theta\,z_2 = \Theta(\Theta z_1) = \Theta^2 z_1$, $z^{\nu} = \Theta^{\nu - 1} z_1$, setzt,

$$z_{\mu + 1} = \Theta^{\mu} z_1 = z_1 \text{ und } \Theta^{\mu + \varkappa} z_1 = z_{\mu + \varkappa + 1} = z_{\varkappa + 1} = \Theta^{\varkappa} z_1 .$$

Aus diesen Wahrnehmungen geht hervor, daß die Gleichung (6) zur Klasse der sogenannten Abel'schen Gleichungen gehört, demnach algebraisch auflösbar sein muß.

Setzt man $F(z_1) = \left[z_1 + \alpha\, z_2 + \alpha^2\, z_3 + \ldots + \alpha^{\mu-1}\, z_\mu\right]^\mu$

$= \left[z_1 + \alpha\, \Theta\, z_1 + \alpha^2\, \Theta^2\, z_1 + \ldots + \alpha^{\mu-1}\, \Theta^{\mu-1}\, z_1\right]^\mu$, wobei α irgend eine complexe Wurzel der Gleichung $x^\mu = 1$ vorstellt, so ist

$$F(z_2) = \left[z_2 + \alpha\, \Theta\, z_2 + \alpha^2\, \Theta^2\, z_2 + \ldots\ldots \alpha^{\mu-1}\, \Theta^{\mu-1}\, z_2\right]^\mu$$

$$= \left[\Theta\, z_1 + \alpha\, \Theta^2\, z_1 + \alpha^2\, \Theta^3\, z_1 + \ldots + \alpha^{\mu-1}\, \Theta^{\mu}\, z_1\right]^\mu;$$

bedenkt man ferner, daß $\alpha^\mu = 1$ und $\Theta^\mu z_1 = z_1$ ist, so ergibt sich:

$$F(z_2) = F(z_2)\,.\,\alpha^\mu =$$
$$\left[\alpha\, \Theta\, z_1 + \alpha^2 \Theta^2\, z_1 + \alpha^3 \Theta^3\, z_1 + \ldots, + \alpha^{\mu-1}\, \Theta^{\mu-1}\, z_1 + z_1\right]^\mu,$$

demnach durch Vergleichung mit dem Ausdrucke für $F(z_1)$: $F(z_1) = F(z_2)$; ebenso findet sich $F(z_2) = F(z_3) = F(z_4) \ldots = F(z_\mu)$, wo $z_1, z_2, z_3 \ldots z_\mu$ die Wurzeln der Gleichung (**6**) sind.

Daraus aber folgt, wenn man die Funktionen F mit dem gemeinsamen Buchstaben v bezeichnet:

$$v = F(z_1) = \frac{1}{\mu}\,.\,F(z_1)\,.\,\mu$$

$$= \frac{1}{\mu}\cdot\left[F(z_1) + F(z_1) + \ldots\ \mu \text{ mal}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu}\cdot\left[F\, z_1) + F(z_2) + F(z_3) + \ldots + F(z_\mu)\right];$$

es ist also v eine rationale und s y m m e t r i s c h e Funktion aller Wurzeln der Gleichung (**6**), kann daher rational durch die Coëfficienten dieser Gleichung ausgedrückt und demgemäß als bekannt angesehen werden.

Da nun $v = \left[z_1 + \alpha\, z_2 + \alpha^2\, z_3 + \ldots + \alpha^{\mu-1} z_\mu\right]^\mu$

so ergibt sich $z_1 + \alpha\, z_2 + \alpha^2\, z_3 + \ldots \alpha^{\mu-1} z_\mu = \sqrt[\mu]{v}$. (**9**), wo $\sqrt[\mu]{v}$ eine bekannte oder vielmehr berechenbare Größe ist.

Da α irgend eine von den c o m p l e x e n Wurzeln der Gleichung $x^\mu = 1$ bezeichnet, also $\mu-1$ verschiedene Werte haben kann, so hat auch der

Ausdruck $z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 + \ldots. + \alpha^{\mu-1} z_\mu$ $\mu-1$ verschiedene Werte; setzt man daher in Gleichung **(9)** statt α der Reihe nach die Werte α_1, $\alpha_2 = \alpha_1{}^2$, $\alpha_3 = \alpha_1{}^3 \ldots\ldots \alpha_{\mu-1} = \alpha_1{}^{\mu-1}$, wobei $\alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{\mu} + i \sin\frac{2\pi}{\mu}$ sein soll, so ergibt sich folgendes System von linearen Gleichungen für die z:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 + \alpha_1 z_2 + \alpha_1{}^2 z_3 + \ldots\ldots + \alpha_1{}^{\mu-1} z_\mu = \sqrt[\mu]{v_1} \\ z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_2{}^2 z_3 + \ldots\ldots + \alpha_2{}^{\mu-1} z_\mu = \sqrt[\mu]{v_2} \\ \vdots \\ z_1 + \alpha_{\mu-1} z_2 + \alpha^2_{\mu-1} z_3 + \ldots. + \alpha^{\mu-1}_{\mu-1} z_\mu = \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} \end{array}\right\} \quad (10)$$

Dazu kommt noch die Gleichung:

$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots. + z_\mu = -1$; denn die Summe der sämtlichen Wurzelwerte der Gleichung (6) muß gleich dem negativ genommenen Coëfficienten des zweiten Gliedes dieser Gleichung sein.

Man hat demnach im Ganzen μ Unbekannte $z_1, z_2 \ldots. z_\mu$ und auch μ Gleichungen, woraus erstere bestimmt werden können.

Multipliziert man beide Seiten der Gleichungen **(10)** der Reihe nach mit $\alpha_1{}^{\mu-m}$, $\alpha_2{}^{\mu-m}$, $\alpha_3{}^{\mu-m} \ldots\ldots \alpha^{\mu-m}_{\mu-1}$, $\alpha^{\mu-m}_{\mu} = \alpha_1{}^{\mu(\mu-m)} = 1$, wo m ganz und kleiner als μ gedacht wird und addiert dann sämmtliche Gleichungen, so ergibt sich, wenn man bedenkt, daß $\alpha_1{}^\nu + \alpha_2{}^\nu + \alpha_3{}^\nu + \ldots. \alpha^\nu_{\mu-1} + 1 = 0$ ist für jeden ganzen Wert von ν, der kein Vielfaches von μ ist,

$$z_{m+1} = \frac{1}{\mu} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -1 + \alpha_1{}^{\mu-m} \sqrt[\mu]{v_1} + \alpha_2{}^{\mu-m} + \\ \sqrt[\mu]{v_2} + \ldots + \alpha^{\mu-m}_{\mu-1} \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} \end{array} \right\} \quad (11)$$

Gibt man m den Wert 0, so erhält man:

$$z_1 = \frac{1}{\mu} \cdot \left\{ -1 + \sqrt[\mu]{v_1} + \sqrt[\mu]{v_2} + \sqrt[\mu]{v_3} + \ldots. + \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} \right\},$$

und alle übrigen Wurzelwerte ergeben sich, wenn für m nach und nach die Zahlen bis $\mu - 1$ gesetzt werden.

Man findet im Wesentlichen dieselbe Entwickelung in den „Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel", woselbst auch gezeigt wird, wie eine dieser Lösung anhaftende Vieldeutigkeit gehoben werden kann. Es hat nämlich, da die μ^{te} Wurzel aus einem Ausdrucke notwendig μ verschiedene Werte hat, der Ausdruck für z_{m+1} in (**11**) im Ganzen $\mu^{\mu-1}$ verschiedene Werte, während man für die verschiedenen z_{m-1} von $m = 0$ bis $m = \mu - 1$ nur μ verschiedene Werte bekommen kann, die die Gleichung (**6**) befriedigen.

Abel zeigt in dem obengenannten Werke (Band I Seite 490 und 491), wie diese μ richtigen Werte gefunden werden können und stellt hiefür eine eigene Formel auf. Ich werde später zeigen, wie man auch auf einem anderen Wege durch Lösung eines Systemes linearer Gleichungen, diese μ Werte erhalten kann und dann die Methode von Abel mit meiner Entwickelung vergleichen. Zuvor aber soll die allgemeine Lösung der Gleichung (**6**) auf den speziellen Fall $x^{11} = 1$ angewendet werden, da die hieraus hervorgehenden Resultate als passendes Beispiel für die Beseitigung der Vieldeutigkeit aus der Formel (**11**) dienen werden.

Algebraische Lösung der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$.

Aus der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ folgt, wenn man den Faktor $x - 1$ absondert und hierauf $x + \frac{1}{x} = z$ setzt:

$z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 3z + 1 = 0$, welche Gleichung zuerst von Vandermonde im Jahre 1771 aufgelöst wurde. Die Wurzelwerte dieser Gleichung sind durch die schon oben unter (8) aufgestellte Form: $z_\nu = 2 \cos \frac{2\, p^{\nu-1} \pi}{2\mu + 1}$ gegeben, wo ν der Reihe nach die Werte von 1 bis μ annimmt und p die kleinste primitive Wurzel von $2\mu + 1$ bedeutet. — In diesem speziellen Falle ist $2\mu + 1 = 5$ und $p = 2$; demnach sind die Wurzelwerte der Gleichung für z:

$z_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{11}$, $z_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{11}$, $z_3 = 2 \cos \frac{8\pi}{11}$, $z_4 = 2 \cos \frac{16\pi}{11}$

$z_5 = 2 \cos \frac{32\pi}{11}$, oder:

$z_1 = 2\cos\frac{2\pi}{11}$; $z_2 = 2\cos\frac{4\pi}{11}$; $z_3 = 2\cos\frac{8\pi}{11}$; $z_4 = 2\cos\frac{6\pi}{11}$

$z_5 = 2\cos\frac{10\pi}{11}$. —

Bezeichnet man $\cos\frac{2\pi}{11} + i\sin\frac{2\pi}{11}$, welches eine von den complexen Wurzeln der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ ist, mit r und beachtet, daß $r^{11} = 1$ sein muß, so ergibt sich:

$$z_1 = 2\cos\frac{2\pi}{11} = \left(\cos\frac{2\pi}{11} + i\sin\frac{2\pi}{11}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{11} - i\sin\frac{2\pi}{11}\right)$$

$$= r + \frac{1}{r} = r + r^{10};$$

$$z_2 = \left(\cos\frac{4\pi}{11} + i\sin\frac{4\pi}{11}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{11} - i\sin\frac{4\pi}{11}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{11} + i\sin\frac{2\pi}{11}\right)^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{11} - i\sin\frac{2\pi}{11}\right)^2$$

$$= r^2 + \frac{1}{r^2} = r^2 + r^9;$$

ebenso findet sich: $z_3 = r^4 + r^7$; $z_4 = r^3 + r^8$; $z_5 = r^5 + r^6$. — Bezeichnet α eine von den complexen Wurzeln der Gleichung $x^5 = 1$, so wird der schon früher aufgestellte Ausdruck:

$$v = \left[z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 + \ldots + \alpha^{\mu-1} z_\mu\right]^\mu$$

folgende Form annehmen:

$$v = \left[z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 + \alpha^3 z_4 + \alpha^4 z_5\right]^5,$$

und diese Potenz muß eine ganze symmetrische Funktion der Größen z sein, die man sich nach aufsteigenden Potenzen von α geordnet denken kann. — Man hat demnach nach der Bezeichnung von Lagrange:

$$v = \lambda_0 + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \alpha^2 + \lambda_3 \alpha^3 + \lambda_4 \alpha^4,$$

wobei die Coëfficienten λ ganze symmetrische Funktionen der z sind, sich also durch die Coëfficienten der Gleichung $z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 3z + 1 = 0$ ausdrücken lassen müssen. Lagrange hat die Werte der λ angegeben, ohne jedoch die Rechnung beizufügen; da dieselbe nicht schwierig, aber sehr umständlich ist, so kann es hier genügen, den Gang dieser Berechnung kurz anzudeuten.

Zunächst soll $(z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 + \alpha^3 z_4 + \alpha^4 z_5)^2$ entwickelt und nach den Potenzen von α geordnet werden. Dann erhält man statt dieses Quadrates, wenn berücksichtigt wird, daß $\alpha^5 = 1$ ist:

$$(z_1^2 + 2 z_2 z_5 + 2 z_3 z_4) + (z_4^2 + 2 z_1 z_2 + 2 z_3 z_5)\alpha$$
$$+ (z_2^2 + 2 z_1 z_3 + 2 z_4 z_5)\alpha^2 + (z_5^2 + 2 z_1 z_4 + 2 z_2 z_3)\alpha^3$$
$$+ (z_3^2 + 2 z_1 z_5 + 2 z_2 z_4)\alpha^4. —$$

Die Coëfficienten von α können jedoch als lineare Funktionen der z dargestellt werden, denn:

$$z_1^2 = (r + r^{10})^2 = r^2 + r^9 + 2 = z_2 + 2;$$

ebenso $z_2^2 = z_3 + 2$; $z_3^2 = z_4 + 2$; $z_4^2 = z_5 + 2$; $z_5^2 = z_1 + 2$;

ferner $z_1 z_2 = (r + r^{10})(r^2 + r^9) = r^3 + r^{19} + r^{12} + r^{10}$
$= r^3 + r^8 + r + r^{10} = z_4 + z_1$;

ebenso findet sich leicht:

$$z_1 z_3 = z_5 + z_4;\ z_1 z_4 = z_3 + z_2;\ z_1 z_5 = z_5 + z_3;\ z_2 z_3 = z_5 + z_2;\ z_2 z_4 = z_5 + z_1;\ z_2 z_5 = z_3 + z_4;\ z_3 z_4 = z_3 + z_1;\ z_3 z_5 = z_2 + z_1;\ z_4 z_5 = z_4 + z_2. — \quad \textbf{(12)}$$

Die Substitution in das obige nach α geordnete Aggregat liefert daher, wenn man zugleich berücksichtigt, daß $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = -1$ ist: $(z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 + \alpha^3 z_4 + \alpha^4 z_5)^2 =$

$$(2 z_3 - z_2 - 2 z_5) + (2 z_1 - z_5 - 2 z_3)\alpha + (2 z_4 - z_3 - 2 z_1)\alpha^2$$
$$+ (2 z_2 - z_1 - 2 z_4)\alpha^3 + (2 z_5 - z_4 - 2 z_2)\alpha^4 .—$$

Es ist nun zunächst die vierte Potenz von $z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 + \alpha^3 z_4 + \alpha^4 z_5$ zu entwickeln, d. h. die zweite Potenz des soeben gefundenen Aggregates; ordnet man nach geschehener Entwickelung nach den Potenzen von α, so enthalten die Coëfficienten des neu entstandenen Aggregates wieder die Quadrate von den z und die Produkte je zweier derselben; ersetzt man dieselben neuerdings durch ihre unter **(12)** angegebenen Werte, so stellen sich die Coëfficienten wieder als lineare Funktionen der Größen z dar.

Multiplizirt man endlich dieses reducierte Aggregat mit $z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 + \alpha^3 z_4 + \alpha^4 z_5$, so erhält man die gewünschte 5^{te} Potenz des letzteren Ausdrucks. Werden die erwähnten Reduktionen auch hier durchgeführt, so findet sich, daß alle Coëfficienten von α in der letzten Entwickelung ganze Funktionen von $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$ sind und da letzterer Ausdruck wegen der Gleichung $z^5 + z^4 - 4 z^3 - 3 z^2 + 3 z + 1 = 0$ notwendig gleich $- 1$ ist, so sind die Coëfficienten bestimmte ganze Zahlen. Auf diese Weise findet man $\lambda_0 = - 196$, $\lambda_1 = - 130$, $\lambda_2 = + 255$, $\lambda_3 = - 20$, $\lambda_4 = + 90$;

daher $(z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 + \alpha^3 z_4 + \alpha^4 z_5)^5 =$

$v = - 196 - 130 \alpha + 255 \alpha^2 - 20 \alpha^3 + 90 \alpha^4$;

folglich $\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{- 196 - 130 \alpha + 255 \alpha^2 - 20 \alpha^3 + 90 \alpha^4}$.

Setzt man für α (welches durch $\alpha^5 = 1$ bestimmt ist, der Reihe nach die verschiedenen imaginären Werte ein, so ergeben sich daraus $\sqrt[5]{v_1}$, $\sqrt[5]{v_2}$, $\sqrt[5]{v_3}$, $\sqrt[5]{v_4}$, und da α algebraisch darstellbar ist, so ist in Folge dessen auch der Wert

$$z_1 = \frac{- 1 + \sqrt[5]{v_1} + \sqrt[5]{v_2} + \sqrt[5]{v_3} + \sqrt[5]{v_4}}{5}$$

und daher auch die anderen Werte von z in algebraischer Form dargestellt.

Die imaginären Werte von α sind:

$$\alpha_1 = \cos\frac{2 \pi}{5} + i \sin\frac{2 \pi}{5} = \frac{1}{4}\cdot\left[-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right]$$

$$\alpha_2 = \alpha_1^2 = \cos\frac{4 \pi}{5} + i \sin\frac{4 \pi}{5} =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left[- 1 - \sqrt{5} + \sqrt{- 10 + 2 \sqrt{5}}\right]$$

$$\alpha_3 = \alpha_1^3 = \cos\frac{4 \pi}{5} - i \sin\frac{4 \pi}{5} =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left[- 1 - \sqrt{5} - \sqrt{- 10 + 2 \sqrt{5}}\right]$$

$$\alpha_4 = \alpha_1^4 = \cos\frac{2 \pi}{5} - i \sin\frac{2 \pi}{5} =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left[- 1 + \sqrt{5} - \sqrt{- 10 - 2 \sqrt{5}}\right]. -$$

Durch Substitution dieser Werte für α erhält man $\sqrt[5]{v_1}, \sqrt[5]{v_2}, \sqrt[5]{v_3}, \sqrt[5]{v_4}$ in derjenigen Form, in welcher sie zuerst von Vandermonde aufgestellt wurden. Es findet sich z. B.

$$\sqrt[5]{v_1} = -\sqrt[5]{\frac{11}{4}\cdot\left(89+25\sqrt{5}-5\sqrt{-5-2\sqrt{5}}+45\sqrt{-5+2\sqrt{5}}\right)}$$

und von derselben Form, nur die Vorzeichen der Wurzeln verschieden, sind die übrigen Ausdrücke für $\sqrt[5]{v_2}$, $\sqrt[5]{v_3}$ und $\sqrt[5]{v_4}$.

Da jede von diesen 4 fünften Wurzeln 5 verschiedene Werte haben kann, so ergeben sich für z $5^4 = 625$ verschiedene Werte, von denen jedoch nur 5 die Gleichung für z wirklich befriedigen. Abel zeigt in sehr eleganter Weise, wie in jedem Falle die passenden Wurzelwerte gefunden werden können; ich werde später nachweisen, daß wenigstens für die Gleichung $x^{4\mu+3} - 1 = 0$, wo $4\mu + 3$ eine Primzahl bedeuten soll, durch eine ganz andere Entwickelung die Vieldeutigkeit der Formel für die z beseitigt werden kann. Zuvor aber sollen zwei Eigenschaften der Formeln für z nachgewiesen werden, die zwar schon längst bekannt sind, die ich jedoch selbständig ohne Zuhilfenahme der Entwickelungen von Gauß u. a. gefunden habe.

$\sqrt[\mu]{v_\varkappa}$ und $\sqrt[\mu]{v_{\mu-\varkappa}}$ sind conjugiert.

Es ist, wie bei **(10)** gezeigt wurde,

$$\sqrt[\mu]{v_\varkappa} = z_1 + \alpha_\varkappa z_2 + \alpha^2_\varkappa z_3 + \ldots + \alpha_\varkappa^{\mu-1} z_\mu, \text{ wo}$$

$$\alpha_\varkappa = \alpha_1^{\varkappa} \text{ und } \alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{\mu} + i\sin\frac{2\pi}{\mu} \text{ ist.}$$

Es ist demnach auch $\alpha_\varkappa = \alpha_1^{\varkappa} = \cos\frac{2\varkappa\pi}{\mu} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{\mu}$, daher $\alpha_\varkappa^r = \cos\frac{2\varkappa r\pi}{\mu} + i\sin\frac{2\varkappa r\pi}{\mu}$, wo für r der Reihe nach 0, 1, 2 ..... $\mu-1$ zu setzen ist.

Man hat daher:

$$\sqrt[\mu]{v_\varkappa} = \sum_{r=0}^{r=\mu-1} \cos\frac{2\varkappa r\pi}{\mu}.\ z_{r+1} + i\sum_{r=0}^{r=\mu-1} \sin\frac{2\varkappa r\pi}{\mu} z_{r+1}$$

folglich $\sqrt[\mu]{v_{\mu-\varkappa}} = \sum\limits_{r=0}^{r=\mu-1} \cos \frac{2(\mu-\varkappa) r \pi}{\mu} . z_{r+1} +$

$i \sum\limits_{r=0}^{r=\mu-1} \sin \frac{2(\mu-\varkappa) r \pi}{\mu} z_{r+1};$

da aber, wie man sich leicht überzeugt,

$\cos \frac{2(\mu-\varkappa) r \pi}{\mu} = \cos \frac{2 \varkappa r \pi}{\mu}$ und $\sin \frac{2(\mu-\varkappa) r \pi}{\mu} = - \sin \frac{2 \varkappa r \pi}{\mu}$ ist,

so folgt:

$$\sqrt[\mu]{v_{\mu-\varkappa}} = \sum_{r=0}^{r=\mu-1} \cos \frac{2 \varkappa \pi}{\pi} z_{r+1} - i \sum_{r=0}^{r=\mu-1} \sin \frac{2 \varkappa r \pi}{\mu} z_{r+1};$$

demnach sind die Ausdrücke $\sqrt[\mu]{v_\varkappa}$ und $\sqrt[\mu]{v_{\mu-\varkappa}}$ conjugiert, wie zu beweisen war.

Stellt man also $\sqrt[\mu]{v_\varkappa}$ in der Form:
$h_\varkappa (\cos \varphi_\varkappa + i \sin \varphi_\varkappa)$ dar, so ist:
$\sqrt[\mu]{v_{\mu-\varkappa}} = h_\varkappa (\cos \varphi_\varkappa - i \sin \varphi_\varkappa)$.

$h_\varkappa$ ist für alle Werte von $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = \mu - 1$ gleich $\sqrt{2_{\mu+1}}$.

Da $v_\varkappa = \left(z_1 + \alpha_\varkappa z_2 + \alpha^2_\varkappa z_3 + \ldots \alpha^{\mu-1}_\varkappa z_\mu\right)^\mu$
und $v_{\mu-\varkappa} = \left(z_1 + \alpha_{\mu-\varkappa} z_2 + \alpha^2_{\mu-\varkappa} z_3 + \ldots + \alpha^{\mu-1}_{\mu-\varkappa} z_\mu\right)^\mu$
wobei $\alpha_1 = \cos \frac{2\pi}{\mu} + i \sin \frac{2\pi}{\mu}$ und $\alpha_\varkappa = \alpha_1{}^\varkappa$ ist, so muß, nachnachdem $v_\varkappa$ und $v_{\mu-\varkappa}$ einzeln symmetrische Funktionen der z sind, auch $v_\varkappa . v_{\mu-\varkappa}$ eine solche sein.

Bedenkt man, daß

$$\alpha^{r-1}_{\mu-\varkappa} . \alpha^r_\varkappa = \alpha^{r-1}_{\mu-\varkappa} . \alpha^{r-1}_\varkappa . \alpha_\varkappa = (\alpha_{\mu-\varkappa} . \alpha_\varkappa)^{r-1} . \alpha_\varkappa$$

$$= (\alpha_1{}^{\mu-\varkappa} . \alpha_1{}^\varkappa)^{r-1} \alpha_\varkappa = (\alpha_1{}^\mu)^{r-1} \alpha_\varkappa = 1^{r-1} \alpha_\varkappa = \alpha_\varkappa,$$

ferner vermöge derselben Ableitung $\alpha^{r-2}_{\mu-\varkappa} \cdot \alpha^{r}_{\varkappa} = \alpha^{2}_{\varkappa}$, $\alpha^{r-3}_{\mu-\varkappa} \cdot \alpha^{r}_{\varkappa} = \alpha^{3}_{\varkappa}$ u. s. w.

so folgt: $v_\varkappa \cdot v_{\mu-\varkappa} =$

$$\left\{ \begin{aligned} &\Big((z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + z^2_\mu\Big) + \\ &(z_1 z_2 + z_2 z_3 + \ldots + z_{\mu-1} z_\mu + z_\mu z_1)\alpha_\varkappa \\ &+ \Big(z_1 z_3 + z_2 z_4 + \ldots + z_{\mu-2} z_\mu + z^{\mu-1} z_1 + z_\mu z_2\Big)\alpha^2_\varkappa + \ldots \\ &+ \Big(z_1 z_\mu + z_2 z_1 + z_3 z_2 + \ldots \\ &+ z_{\mu-1} \cdot z_{\mu-2} + z_\mu z_{\mu-1}\Big)\alpha^{\mu-1}_\varkappa \end{aligned} \right\}^\mu$$

Nun ist $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_\mu^2 = 1 + 2(\mu-1) = 2\mu - 1$ wegen der Gleichung (**6**) für z;

Der Coëfficient $z_1 z_2 + z_2 z_3 + \ldots z_\mu z_1$ ist eine symmetrische Funktion der Größen z und besteht aus μ Produkten von der Form $z_r \cdot z_{r+1}$. Da dieses Produkt, wie aus der Beschaffenheit der Größen z leicht hervorgeht, gleich der Summe von zweien dieser Größen sein muß, so darf man für $z_r \cdot z_{r+1}$ setzen $z_\sigma + z_\tau$, wobei nicht gleichzeitig $\sigma = r$ und $\tau = r + 1$ ist, weil das Produkt zweier z nicht gleich der Summe der n ä m l i c h e n z sein kann. Ein Beispiel für das Gesagte liefert die bereits oben geschehene Entwickelung bei (**12**). Es ist demnach der Coëfficient $z_1 z_2 + z_2 z_3 + \ldots + z_\mu z_1$ gleich der Summe von 2μ Summanden, welche sämmtlich Wurzelwerte der Gleichung (**6**) für z vorstellen. Weil aber der Coëfficient $z_1 z_2 + z_2 z_3 + \ldots + z_\mu z_1$ eine s y m m e t r i s c h e Funktion der z ist, so muß er, indem die Anzahl der verschiedenen z μ beträgt, gleich der d o p p e l t e n Summe der Wurzeln der Gleichung (**6**), mithin gleich -2 sein. Ganz dieselbe Betrachtung gilt für alle übrigen Coëfficienten der Potenzen von $\alpha_\varkappa$, so daß sie demnach sämmtlich den Wert -2 haben.

Hieraus folgt nun:

$$v_\varkappa \cdot v_{\mu-\varkappa} = \left\{ 2\mu - 1 - 2\left(\alpha_\varkappa + \alpha^2_\varkappa + \ldots + \alpha^{\mu-1}_\varkappa\right)\right\}^\mu;$$

Da aber $\alpha_{\varkappa}^{\mu-1} + \alpha_{\varkappa}^{\mu-2} + \ldots . \alpha_{\varkappa}^{2} + \alpha_{\varkappa} + 1 = 0$, wie aus der Gleichung $\alpha_{\varkappa}^{\mu} - 1 = 0$ hervorgeht, so ist $v_{\varkappa} \cdot v_{\mu-\varkappa} = \left\{2\,\mu - 1 + 2\right\}^{\mu}$ $= (2\,\mu + 1)^{\mu}$;

demnach $\sqrt[\mu]{v_{\varkappa}} \cdot \sqrt[\mu]{v_{\mu-\varkappa}} = 2\,\mu + 1$; und berücksichtigt man, daß weiter oben $\sqrt[\mu]{v_{\varkappa}} = h_{\varkappa}\,(\cos\,\varphi_{\varkappa} + i \sin\,\varphi_{\varkappa})$ und $\sqrt[\mu]{v_{\mu-\varkappa}} = h_{\varkappa}\,(\cos\,\varphi_{\varkappa} - i \sin\,\varphi_{\varkappa})$ gesetzt wurde, so ergibt sich:

$$\sqrt[\mu]{v_{\varkappa}} \cdot \sqrt[\mu]{v_{\mu-\varkappa}} = h_{\varkappa}^{2} = 2\,\mu + 1; \text{ also } h_{\varkappa} = \sqrt{2\,\mu + 1} \quad (13)$$

was zu beweisen war.

Über die Beseitigung der Vieldeutigkeit in der Formel (11), welche die Wurzelwerte der Gleichung (6) für z liefert.

Diese Vieldeutigkeit, welche Abel, wie bereits kurz erwähnt, auf elegante Weise beseitigt hat, und worauf ich später nach Darlegung meines Verfahrens zurückkommen werde, läßt sich auch durch Lösung eines Systems von linearen Gleichungen heben. Freilich betrachte ich bei Behandlung der Gleichung $x^n = 1$, wo n eine Primzahl bedeuten soll, hier nur den Fall, in welchem n die Form $4\,\mu + 3$ hat, so daß für den Fall $n = 4\,\mu + 1$ eine besondere Untersuchung notwendig würde, für welche jedoch ein ganz analoges Verfahren anwendbar ist.

Geht man nun von der Gleichung $x^{4\mu+3} - 1 = 0$ aus, so erhält man durch Entfernung des Faktors $x - 1$ eine Gleichung vom $4\,\mu + 2$ten Grade, und, wenn in dieser $x + \frac{1}{x} = z$ gesetzt wird, eine Gleichung für z vom Grade $2\,\mu + 1$, deren Wurzeln, wie bei (8) gezeigt wurde, folgende Form haben:

$$z_1 = 2 \cos \frac{2\,\pi}{4\mu + 3},\ z_2 = 2 \cos \frac{2\,p\,\pi}{4\mu + 3},\ z_3 = 2 \cos \frac{2\,p^2\,\pi}{4\mu + 3} \ldots .$$

$z_{2\mu+1} = 2 \cos \frac{2\,p^{2\mu}\,\pi}{4\mu + 3}$, wobei p die kleinste primitive Wurzel von $4\,\mu + 3$ sein soll.

Es ist nun analog mit Formel (**11**):

$$z_{m+1} = \frac{1}{2\mu+1} \cdot \left\{ -1 + \alpha_1^{2\mu+1-m} \sqrt[2\mu+1]{v_1} + \alpha_2^{2\mu+1-m} \times \sqrt[2\mu+1]{v_2} + \ldots\ldots + \alpha_{2\mu}^{2\mu+1-m} \sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}} \right\}$$

Betrachtet man irgend ein Glied der eingeklammerten Reihe, zum Beispiel $\alpha_r^{2\mu+1-m} \sqrt[2\mu+1]{v_r}$, so läßt sich der Coëfficient $\alpha_r^{2\mu+1-m}$ in folgender Weise umformen:

$$\alpha_r^{2\mu+1-m} = \alpha^{r(2\mu+1-m)} = \alpha^{r(2\mu+1)-mr} = \alpha^{r(2\mu+1)} . \alpha^{-mr}$$
$$= (\alpha^{2\mu+1})^r . \alpha^{-mr} = 1^r . \alpha^{-mr} = 1^m . \alpha^{-mr} = (\alpha^{2\mu+1})^m . \alpha^{-mr}$$
$$= \alpha^{m(2\mu+1)-mr} = \alpha^{m(2\mu+1-r)} = \alpha_m^{2\mu+1-r}.$$

Mit Benützung dieser Umformung erhält man folgende Werte für die z:

$$z_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{4\mu+3} =$$
$$\frac{1}{2\mu+1} \cdot \left\{ -1 + \sqrt[2\mu+1]{v_1} + \sqrt[2\mu+1]{v_2} + \ldots\ldots + \sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}} \right\}$$

$$z_2 = 2 \cos \frac{2p\pi}{4\mu+3}$$
$$= \frac{1}{2\mu+1} \cdot \left\{ -1 + \alpha_1^{2\mu} \sqrt[2\mu+1]{v_1} + \alpha_1^{2\mu-1} \sqrt[2\mu+1]{v_2} + \ldots + \alpha_1 \sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}} \right\}$$

$$z_3 = 2 \cos \frac{2p^2\pi}{4\mu+3} =$$
$$\frac{1}{2\mu+1} \cdot \left\{ -1 + \alpha_2^{2\mu} \sqrt[2\mu+1]{v_1} + \alpha_2^{2\mu-1} \sqrt[2\mu+1]{v_2} + \ldots\ldots + \alpha_2 \sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}} \right\}$$

$$\vdots$$

$$z_r = 2 \cos 2 \frac{p^{r-1}\pi}{4\mu+3} =$$

$$\frac{1}{2\mu+1} \cdot \left\{ -1 + \alpha_{r-1}^{2\mu} \sqrt[2\mu+1]{v_1} + \alpha_{r-1}^{2\mu-1} \sqrt[2\mu+1]{v_2} + \ldots \alpha_{r-1} \sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}} \right\}$$

$$\vdots$$

$$z_{2\mu+1} = 2 \cos \frac{2\, p^{2\mu}\pi}{4\mu+3}$$

$$= \frac{1}{2\mu+1} \cdot \left\{ -1 + \alpha_{2\mu}^{2\mu} \sqrt[2\mu+1]{v_1} + \alpha_{2\mu}^{2\mu-1} \sqrt[2\mu+1]{v_2} + \ldots + \alpha_{2\mu} \sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}} \right\}$$

Setzt man $(2\mu+1)\, z_r + 1 = \eta_r$, so ergibt sich:

$$\eta_r = \alpha_{r-1}^{2\mu} \sqrt[2\mu+1]{v_1} + \alpha_{r-1}^{2\mu-1} \sqrt[2\mu+1]{v_2} + \ldots + \alpha_{r-1} \sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}}. \text{ —}$$

Nun darf man aber für $\sqrt[2\mu+1]{v_1}$ die Form $\varrho\,(\cos\psi_1 + i \sin\psi_1)$ wählen; dann ist, weil nach dem Früheren $\sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}}$ zu $\sqrt[2\mu+1]{v_1}$ conjugiert ist, $\sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}} = \varrho\,(\cos\psi_1 - i \sin\psi_1)$; also allgemein $\sqrt[2\mu+1]{v_\nu} = \varrho\,(\cos\psi_\nu + i \sin\psi_\nu)$, und $\sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu+1-\nu}} = \varrho\,(\cos\psi_\nu - i\sin\psi_\nu)$.

Versteht man in dem Ausdrucke für η_r unter s_ν die Summe: $\alpha_{r-1}^{2\mu+1-\nu} \sqrt[2\mu+1]{v_\nu} + \alpha_{r-1}^{\nu} \sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu+1-\nu}}$, wobei ν nur die Werte von $\nu = 1$ bis $\nu = \mu$ annehmen darf, so ist $s_\nu = \alpha_{r-1}^{2\mu+1-\nu} \varrho\,(\cos\psi_\nu + i\sin\psi_\nu) + \alpha_{r-1}^{\nu} \cdot \varrho\,(\cos\psi_\nu - i \sin\psi_\nu) =$

$$\varrho \cdot \left\{ \cos\psi_\nu \left(\alpha_{r-1}^{2\mu+1-\nu} + \alpha_{r-1}^{\nu} \right) + i \sin\psi_\nu \left(\alpha_{r-1}^{2\mu+1-\nu} - \alpha_{r-1}^{\nu} \right) \right\}$$

Bedenkt man ferner, daß $\alpha_{r-1}^{2\mu+1-\nu} = \alpha_{r-1}^{2\mu+1} \cdot \alpha_{r-1}^{-\nu} = \alpha_{r-1}^{-\nu}$ und

$$\alpha^{\nu}_{r-1} = \alpha^{(r-1)\nu} = \cos \frac{2\pi(r-1)\nu}{2\mu+1} + i \sin \frac{2\pi(r-1)\nu}{2\mu+1};$$

daher $\alpha^{-\nu}_{r-1} = \cos \frac{2\pi(r-1)\nu}{2\mu+1} - i \sin \frac{2\pi(r-1)\nu}{2\mu+1}$,

mithin $\alpha^{2\mu+1-\nu}_{r-1} + \alpha^{\nu}_{r-1} = 2 \cos \frac{2\pi(r-1)\nu}{2\mu+1}$

und $\alpha^{2\mu+1-\nu}_{r-1} - \alpha^{\nu}_{r-1} = -2 i \sin \frac{2\pi(r-1)\nu}{2\mu+1}$

so wird endlich:

$$s_{\nu} = 2\varrho \cdot \left\{\cos \psi_{\nu} \cdot \cos \frac{2\pi(r-1)\nu}{2\mu+1} + \sin \psi_{\nu} \cdot \sin \frac{2\pi(r-1)\nu}{2\mu+1}\right\}$$

oder kürzer $s_{\nu} = 2\varrho \cos\left(\psi_{\nu} - \frac{2\pi(r-1)\nu}{2\mu+1}\right)$;

demgemäß hat man:

$$\eta_r = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots + s_{\mu} =$$
$$2\varrho \cos\left(\psi_1 - \frac{2\pi(r-1)}{2\mu+1}\right) + \cos\left(\psi_2 - \frac{2\pi . 2(r-1)}{2\mu+1}\right) + \ldots\ldots$$
$$+ \cos\left(\psi_{\mu} - \frac{2\pi\mu(r-1)}{2\mu+1}\right) = \frac{\eta_r}{2\varrho} = a_r$$

Nun ist aber, wie schon früher angegeben

$$\eta_r = (2\mu+1)\, z_r + 1 = (2\mu+1)\; 2 \cos \frac{2 p^{r-1}\pi}{4\mu+3} + 1$$

und $\varrho = + \sqrt{4\mu+3}$;

daher auch

$a_r = \frac{1}{2\sqrt{4\mu+3}} \cdot \left\{1 + (2\mu+1) \cdot 2 \cos \frac{2\, p^{r-1}\pi}{4\mu+3}\right\}$, was für die Folge wohl zu beachten ist.

Nach obiger Entwickelung läßt sich also folgende Reihe von Gleichungen aufstellen, wobei ich mich der Raumersparnis halber des Summenzeichens bedienen will:

$$\sum_{n=1}^{n=\mu} \cos \psi_n = a_1;$$

$$\sum_{n=1}^{n=\mu} \cos\left(\psi_n - \frac{2\pi n}{2\mu+1}\right) = a_2$$

$$\sum_{n=1}^{n=\mu} \cos\left(\psi_n - \frac{2\pi n.2}{2\mu+1}\right) = a_3$$

$$\sum_{n=1}^{n=\mu} \cos\left(\psi_n - \frac{2\pi n.3}{2\mu+1}\right) = a_4$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=1}^{n=\mu} \cos\left(\psi_n - \frac{2\pi n.2\mu}{2\mu+1}\right) = a_{2\mu+1}$$

Diese Gleichungen könnten allerdings zur Bestimmung der Bögen ψ benützt werden, bedürfen aber wegen ihrer ungeeigneten Form noch einer weiteren Transformation.

Zu diesem Zwecke bemerke ich, daß nach dem vor Kurzem aufgestellten Ausdrucke für a_r

$$a_r + a_{2\mu+3-r}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\mu+3}} \cdot \left\{1 + (2\mu+1) \cdot \left[\cos\frac{2\,p^{r-1}}{4\mu+3}\pi + \cos\frac{2\,p^{2\mu+2-r}}{4\mu+3}\pi\right]\right\};$$

andererseits aber ist $a_r + a_{2\mu+3-r} =$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\left\{\cos\left(\psi_\nu - \frac{2\pi\nu(r-1)}{2\mu+1}\right) + \cos\left(\psi_\nu - \frac{2\pi\nu(2\mu+2-r)}{2\mu+1}\right)\right\}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} 2\cos\left[\psi_\nu - \nu\pi\right] . \cos\left[\nu\pi - \frac{2(r-1)\nu\pi}{2\mu+1}\right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} 2\cos\psi_\nu \cos\frac{2(r-1)\nu\pi}{2\mu+1}$$

Es ist also

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} 2\cos\psi_\nu . \cos\frac{2(r-1)\nu\pi}{2\mu+1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\mu+3}} \cdot \left\{ 1 + (2\mu+1) \cdot \left[\cos\frac{2\,p^{r-1}\pi}{4\mu+3} + \cos\frac{2\,p^{2\mu+2-r}\pi}{4\mu+3} \right] \right\}$$

$= 2\,b_r$. —

Gibt man dem r der Reihe nach alle Werte von $r = 2$ bis $r = \mu + 1$, so erhält man folgende Reihe von Gleichungen:

$$\cos\frac{2\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_1 + \cos\frac{4\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_2 + \ldots + \cos\frac{2\,\mu\,\pi}{2\mu+1} \cos\psi_\mu = b_2$$

$$\cos\frac{4\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_1 + \cos\frac{8\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_2 + \ldots + \cos\frac{4\,\mu\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_\mu = b_3$$

$$\cos\frac{6\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_1 + \cos\frac{12\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_2 + \ldots + \cos\frac{6\,\mu\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_\mu = b_4$$

$$\vdots$$

$$\cos\frac{(\mu-1)\,2\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_1 + \cos\frac{(\mu-1)\,4\,\pi}{2\mu+1} \cos\psi_2 + \ldots$$

$$+ \cos\frac{(\mu-1)\,2\,\mu\,\pi}{2\mu+1} \cdot \cos\psi_\mu = b_\mu$$

$$\cos\frac{\mu\,.\,2\,\pi}{2\mu+1} \cos\psi_1 + \cos\frac{\mu\,.\,4\,\pi}{2\mu+1} \cos\psi_2 + \ldots$$

$$+ \cos\frac{\mu\,.\,2\,\mu\,\pi}{2\mu+1} \cos\psi_\mu = b_{\mu+1}$$

Außerdem existirt noch die Gleichung:

$\cos\psi_1 + \cos\psi_2 + \cos\psi_3 + \ldots. + \cos\psi_\mu = a_1$. —

Im Ganzen bestehen also zwischen den als unbekannt anzusehenden Größen $\cos\psi_1$, $\cos\psi_2$, $\cos\psi_3 \ldots.\ \cos\psi_\mu$ $\mu + 1$ lineare Gleichungen, mithin eine mehr als nötig; es kann somit eine von ihnen, z. B. die Gleichung

$\cos\psi_1 + \cos\psi_2 + \cos\psi_3 + \ldots. + \cos\psi_\mu = a_1$ zur Verification der übrigen dienen. —

Nun war früher gefunden worden:

$$z_r = 2\cos\frac{2\,p^{r-1}\,\pi}{4\mu+3} = \frac{1}{2\mu+1} \cdot \Big\{ -1 + \alpha_{r-1}^{2\mu} \sqrt[2\mu+1]{v_1} + \alpha_{r-1}^{2\mu-1} \sqrt[2\mu+1]{v_2}$$

$$+ \ldots. + \alpha_{r-1} \sqrt[2\mu+1]{v_{2\mu}} \Big\};$$

wobei $\alpha_{r-1} = \alpha_1^{r-1} = \left(\cos \frac{2\pi}{2\mu+1} + i \sin \frac{2\pi}{2\mu+1}\right)^{r-1}$

$= \cos \frac{2(r-1)\pi}{2\mu+1} + i \sin \frac{2(r-1)\pi}{2\mu+1}$ ist.

$\sqrt[2\mu+1]{v_\nu}$ kann, wie früher gezeigt wurde, die Form $\varrho(\cos \psi_\nu + i \sin \psi_\nu)$ annehmen, jedoch muß entsprechend der Vieldeutigkeit dieser Wurzel der Bogen ψ_ν im Allgemeinen $2\mu + 1$ verschiedene Werte haben.

Frühere Entwicklungen hatten außerdem geliefert:

$v_\nu = (z_1 + \alpha_\nu z_2 + \alpha^2_\nu z_3 + \ldots + \alpha_\nu^{\mu-1} z_\mu)^{2\mu+1}$ als rationale und symmetrische Funktion der Größen z, welche, wenn nach geschehener Entwickelung nach Potenzen von α_ν geordnet wird, die Form annimmt:

$$v_\nu = \lambda_0 + \lambda_1 \alpha_\nu + \lambda_2 \alpha_\nu^2 + \ldots + \lambda_{2\mu} \alpha_\nu^{2\mu};$$

Da dieses Aggregat die Form $h(\cos \varphi_\nu + i \sin \varphi_\nu)$ annehmen kann, so ist $\sqrt[2\mu+1]{v_\nu} =$

$\sqrt[2\mu+1]{h(\cos \varphi_\nu + i \sin \varphi_\nu)}$; weil aber $\cos \varphi_\nu = \cos(\varphi_\nu + 2 n_\nu \pi)$ und $\sin \varphi_\nu = \sin(\varphi_\nu + 2 n_\nu \pi)$ ist, wo n_ν eine beliebige ganze Zahl vorstellt, so lautet der Ausdruck in seiner allgemeineren Gestalt:

$\sqrt[2\mu+1]{v_\nu} = \sqrt[2\mu+1]{h\left[\cos(\varphi_\nu + 2 n_\nu \pi) + i \sin(\varphi_\nu + 2 n_\nu \pi)\right]}$ oder nach Anwendung der Moivre'schen Formel:

$$\sqrt[2\mu+1]{v_\nu} = \sqrt[2\mu+1]{h} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi_\nu + 2 n_\nu \pi}{2\mu+1}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_\nu + 2 n_\nu \pi}{2\mu+1}\right)\right],$$

wobei, wenn man für n_ν der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2 .... 2μ setzt, sich, wie es auch sein muß, $2\mu + 1$ verschiedene Werte für $\sqrt[2\mu+1]{v_\nu}$ ergeben.

Während demnach der Ausdruck:

$$\sqrt[2\mu+1]{h.}\left[\cos\left(\frac{\varphi_\nu + 2\,n_\nu\,\pi}{2\mu+1}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_\nu + 2\,n_\nu\,\pi}{2\mu+1}\right)\right]$$

$2\,\mu + 1$ verschiedene Werte hat, kömmt dem Ausdrucke ϱ (cos ψ_ν + i sin ψ_ν) nur ein einziger Wert zu, den man findet, indem man das obige System linearer Gleichungen für die cos ψ auflöst.

Die Vergleichung der beiden Ausdrucke liefert:

$$\sqrt{4\mu+3} = \varrho = \sqrt[2\mu+1]{h}; \text{ ferner } \psi_\nu = \frac{\varphi_\nu + 2\,n_\nu\,\pi}{2\mu+1}. —$$

Hat man nun, nachdem v_ν algebraisch berechnet worden ist, für $\sqrt[2\mu+1]{v_\nu}$ den Bogen φ_ν bestimmt, so ergibt sich der Zuwachs, welchen man dem Bogen φ_ν geben muß, damit der einzig passende unter den $2\,\mu + 1$ Werten dieser Wurzel erscheint, durch die Relation:

$\psi_\nu = \dfrac{\varphi_\nu}{2\mu+1} + \dfrac{2\,n_\nu\,\pi}{2\mu+1}$; daraus aber findet sich:

$$n_\nu = \frac{(2\,\mu + 1)\,\psi_\nu - \varphi_\nu}{2\,\pi}.$$

Es läßt sich demnach folgende Behauptung aufstellen:

Man kann für jeden Wert von ν in dem Ausdrucke $\sqrt[2\mu+1]{v_\nu}$ jenes Vielfache von $2\,\pi$ durch Vergleichung mit dem Bogen ψ_ν (gefunden aus dem obigen System linearer Gleichungen) ermitteln, welches man dem Bogen φ_ν als Zuwachs geben muß, um den passenden Wert der betreffenden Wurzel zu erhalten. —

Anwendung der Entwickelungen des vorhergehenden Abschnittes auf die Gleichung $x^{11} - 1 = 0$.

In diesem Falle ist $4\ \mu + 3 = 11$, demnach $\mu = 2$ und $2\ \mu + 1 = 5$; nach dem ferner früher gefunden worden war:

$$\sqrt[5]{v_1} = \sqrt[5]{-\ 196 - 130\alpha_1 + 255\alpha_1^2 - 20\alpha_1^3 + 90\alpha_1^4}$$

und $\alpha_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ ist, ergibt sich durch Substitution dieses complexen Ausdruckes für α_1 in der Radikand obiger Wurzel mit Anwendung der Tafeln:

$$\sqrt[5]{v_1} = \sqrt[5]{-\ 398{,}479641 - i\ .\ 47{,}591485}$$

Substituirt man ebenso statt des complexen Ausdruckes für α_1 der Reihe nach diejenigen, welche den Werten $\alpha_2 = \alpha_1^2$, $\alpha_3 = \alpha_1^3$, $\alpha_4 = \alpha_1^4$ entsprechen, so ergibt sich:

$$\sqrt[5]{v_2} = \sqrt[5]{-\ 91{,}0203263 - i\,.\,390{,}8533024}$$

$$\sqrt[5]{v_3} = \sqrt[5]{-\ 91{,}0203263 + i\,.\,390{,}8533024}$$

$$\sqrt[5]{v_4} = \sqrt[5]{-\ 398{,}479641 - i\,.\,47{,}591485}$$

Setzt man nun $\sqrt[5]{v_1} = \sqrt[5]{h\ (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}$,

daher $\sqrt[5]{v_4} = \sqrt[5]{h\ (\cos \varphi_1 - i\,.\sin \varphi_1)}$,

so ergibt sich $h \cos \varphi_1 = -\ 398{,}479641$;

$h \sin \varphi_1 = -\ 47{,}591485$; mithin:

$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{47{,}591485}{398{,}479641}$, und mit Benützung der 7 stelligen Logarithmentafeln:

$\varphi_1 = 186^0\ 48'\ 38{,}62''$.

Auf ganz demselben Wege findet sich, nach dem

$\sqrt[5]{v_2} = \sqrt[5]{h\,(\cos\varphi_2 + i\,.\sin\varphi_2)}$ gesetzt worden ist:

$\varphi_2 = 256^0\ 53'\ 27{,}00''$. —

Die beiden Bogen φ_1 und φ_2 liegen richtig zwischen 180^0 und 270^0, weil bei jedem von ihnen cosinus und sinus gleichzeitig negativ sind. — Außerdem ist noch zu beachten,

daß $\sqrt[5]{h} = \varrho = \sqrt{4\mu+3} = \sqrt{11}$ ist.

Benützt man die im vorigen Abschnitte aufgestellten Gleichungen für die cosinusse der Bogen ψ_1, ψ_2 .... und berücksichtigt, daß die dort aufgestellte Gleichung $x^{4\mu+3} - 1 = 0$ in $x^{11} = 1$ übergeht, wenn $\mu = 2$ gesetzt wird, so hat man:

$$\cos\frac{2\pi}{5}\,.\,\cos\psi_1 + \cos\frac{4\pi}{5}\,.\,\cos\psi_2 = b_2$$

$$\cos\frac{4\pi}{5}\,.\,\cos\psi_1 + \cos\frac{8\pi}{5}\,.\,\cos\psi_2 = b_3$$

außerdem $\cos\psi_1 + \cos\psi_2 = a_1$. —

Ersetzt man $\cos\frac{8\pi}{5}$ durch $\cos\frac{2\pi}{5}$ und berücksichtigt, daß im vorigen Abschnitte $b_r =$

$$\frac{1}{2\sqrt{4\mu+3}}\,.\left\{1 + (2\mu+1)\left[\cos\frac{2p^{r-1}\pi}{4\mu+3} + \cos\frac{2\,p^{2\mu+2-r}\pi}{4\mu+3}\right]\right\}$$

und $a_r =$

$$\frac{1}{2\sqrt{4\mu+3}}\,.\left\{1 + (2\mu+1)\,.\,2\cos\frac{2p^{r-1}\pi}{4\mu+3}\right\}$$ gefunden worden war,

so ergibt sich, weil in diesem speziellen Falle p als die kleinste primitive Wurzel der Primzahl $4\mu+3 = 11$ den Wert 2 hat, r als Index von b die Werte 2 und 3 und als solcher von a den Wert 1 annimmt:

1) $$\cos\frac{2\pi}{5}.\cos\psi_1 + \cos\frac{4\pi}{5}.\cos\psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{11}}\cdot\left\{1+5\left(\cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{10\pi}{11}\right)\right\}$$

2) $\cos\frac{4\pi}{5} \cdot \cos\psi_1 + \cos\frac{2\pi}{5} \cdot \cos\psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{11}} \cdot \left\{1 + 5\left(\cos\frac{8\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11}\right)\right\}$

3) $\cos\psi_1 + \cos\psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{11}} \cdot \left\{1 + 10\cos\frac{2\pi}{11}\right\}$

Subtrahirt man 2) von 1), so ergibt sich:

$$\cos\psi_1 - \cos\psi_2 = \frac{5}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\cos\frac{4\pi}{11} \cdot \left(\cos\frac{8\pi}{11} - \cos\frac{10\pi}{11}\right)}{\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{4\pi}{5}} . —$$

Diese Gleichung liefert in Verbindung mit Gleichung 3) ohne weitere Schwierigkeit die Werte für $\cos\psi_1$ und $\cos\psi_2$.

Aus den Tafeln findet man:

$$\cos\psi_1 = 0{,}7948158 \text{ und } \cos\psi_2 = 0{,}6241773$$

mithin $\psi_1 = 37^0\ 21'\ 43{,}69''$ und wegen der Formel $n_1 = \frac{5\psi_1 - \varphi_1}{360^0}$ im vorigen Abschnitte nach gehöriger Substitution:

$$n_1 = \frac{186^0\ 48'\ 38{,}45'' - 186^0\ 48'\ 38{,}62''}{360^0}$$

was so nahe an 0 liegt, daß der Fehler nur von der 7ten Stelle der Tafeln herrühren kann.

Ebenso findet sich:

$$n_2 = \frac{5\psi_2 - \varphi_2}{360^0} = \frac{256^0\ 53'\ 27{,}20'' - 256^0\ 53'\ 27{,}00''}{360^0}$$

also ebenfalls mit aller hier möglichen Genauigkeit $n_2 = 0$.

Die Berechnung von n_1 und n_2 mit Hilfe der Formel von Abel, auf welche ich am Schlusse dieser kleinen Abhandlung noch kurz zurückkommen werde, liefert genau dieselben Werte; **es zeigt sich demnach das überraschende Resultat, daß man bei der numerischen Berechnung von $\sqrt[5]{v_1}$, $\sqrt[5]{v_2}$, $\sqrt[5]{v_3}$, $\sqrt[5]{v_4}$ den Bögen φ_1 und φ_2 gar keinen Zuwachs zu geben braucht.** Ich habe noch für ein paar andere Fälle, nämlich für $x^7 = 1$ und $x^{19} = 1$ dieselbe Untersuchung gemacht und das gleiche Resultat gefunden. Zu beachten ist dabei wohl, daß man bei Berechnung der $2\mu + 1$ten Wurzeln aus den verschiedenen v **niemals**

2) $\cos \frac{4\pi}{5} . \cos \psi_1 +$ … $-\cos \frac{6\pi}{11})\}$

3) $\cos \psi_1 + \cos \psi_2$ …

Subtrahirt man …

$\cos \psi_1 - \cos \psi_2 =$ … $)$. —

Diese Gleichung … 3) ohne
weitere Schwierigkeit d…

Aus den Tafeln …

$\cos \psi_1 =$ …

mithin $\psi_1 = 37^0\ 21'$ … $\frac{5\psi_1 - \varphi_1}{360^0}$

im vorigen Abschnitte …

$n_1 = \underline{18}$ …

was so nahe an 0 li… Stelle der
Tafeln herrühren kann…

Ebenso findet sic…

$n_2 = \frac{5\psi_2 - \varphi_2}{360^0}$ … $\underline{,00''}$

also ebenfalls mit alle…

Die Berechnung … von Abel,
auf welche ich am Sch… rz zurück=
kommen werde, liefert … **nach das**
überraschende Resul… **rechnung**
von $\sqrt[5]{v_1}$, $\sqrt[5]{v_2}$, $\sqrt[5]{v_3}$ … **inen Zu-**
wachs zu geben brau… ere Fälle,
nämlich für $x^7 = 1$ … nacht und
das gleiche Resultat … daß man
bei Berechnung der 2… **niemals**

ein negatives Zeichen vor die Wurzel bringen darf, wie es auch bei dem so eben behandelten Beispiele $x^{11} = 1$ geschehen ist.

Für die vorhin genannten Fälle ist demnach die Berechnung des Zuwachses unnötig und es liegt die Vermutung nahe, daß dieses sogar im Allgemeinen stattfindet; jedoch hat es mir nicht gelingen wollen, allgemein nachzuweisen, daß n in dem Zuwachse $2n\pi$, den man den Bögen φ zu geben hat, in jedem Falle den Wert 0 habe, wodurch die Vieldeutigkeit der Formeln und damit auch die Benützung meines Systems linearer Gleichungen für die $\cos \psi$ oder der Abel'schen Formel von selbst wegfallen würde. Auffallend bleibt es immerhin, daß Lagrange, dessen Arbeiten sich durch größte Klarheit und Genauigkeit auszeichnen, bei seiner ausführlichen Betrachtung der Gleichung $x^{11} = 1$ und auch sonst im Allgemeinen diese Vieldeutigkeit in keiner Weise erwähnt.

Zum Schlusse will ich noch ganz kurz zeigen, daß die Fixierung der richtigen Werte für die Wurzeln nach der von Abel angegebenen Methode einen größeren Rechnungsaufwand verursacht, als die Lösung der mehrmals erwähnten linearen Gleichungen für die $\cos \psi$.

Kurze Betrachtung der Abel'schen Formel.

Bei Lösung der Gleichung (6)

$$z^{\mu} + z^{\mu-1} - (\mu-1)\, z^{\mu-2} - (\mu-2)\, z^{\mu-3} + \ldots\ldots = 0$$

wurde unter (10) eine Reihe von Gleichungen aufgestellt, welche sämmtlich folgende Form haben:

$\sqrt[\mu]{v_\varkappa} = z_1 + \alpha_\varkappa z_2 + \alpha_\varkappa^2 z_3 + \ldots + \alpha_\varkappa^{\mu-1} z_\mu$, wo $\varkappa$ die Zahlen von 1 bis $\mu-1$ bedeutet und

$\alpha_\varkappa = \alpha_1{}^\varkappa = \left(\cos \frac{2\pi}{\mu} + i \sin \frac{2\pi}{\mu}\right)^\varkappa = \cos \frac{2\varkappa\pi}{\mu} + i \sin \frac{2\varkappa\pi}{\mu}$ ist.

Es ist nun:

$$\sqrt[\mu]{v_\varkappa} \cdot \left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^{\mu-\varkappa}$$

$$(z_1 + \alpha_\varkappa z_2 + \alpha_\varkappa^2 z_3 + \ldots + \alpha_\varkappa^{\mu-1} z_\mu)$$

$$\times\, (z_1 + \alpha_1 z_2 + \alpha_1^2 z_3 + \ldots + \alpha_1^{\mu-1} z_\mu)^{\mu-\varkappa}$$

Dieses Produkt ist nun, wie mit leichter Mühe nachgewiesen werden kann, eine rationale und symmetrische Funktion von den Wurzeln der Gleichung für z und kann daher durch bekannte Größen ausgedrückt werden, nämlich durch die Coëfficienten der Gleichung für z.

Abel bezeichnet dieses Produkt mit $a_\varkappa$, so daß demnach die Gleichung existiert:

$\sqrt[\mu]{v_\varkappa} \cdot \left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^{\mu-\varkappa} = a_\varkappa$, wo $a_\varkappa$ bekannt ist.

Daraus folgt: $\sqrt[\mu]{v_\varkappa} = \dfrac{a_\varkappa}{\left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^{\mu-\varkappa}} = \dfrac{a_\varkappa}{v_1} \cdot \left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^\varkappa$.

Führt man diesen Wert in die Formel für

$z = \dfrac{1}{\mu} \cdot \left\{ -1 + \sqrt[\mu]{v_1} + \sqrt[\mu]{v_2} + \ldots + \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} \right\}$ ein, so ergiebt sich:

$$z = \frac{1}{\mu} \cdot \left\{ -1 + \sqrt[\mu]{v_1} + \frac{a_2}{v_1} \left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^2 + \frac{a_3}{v_1}\left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^3 + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_{\mu-1}}{v_1} \left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^{\mu-1} \right\}.$$

Dieser elegante Ausdruck für z hat wirklich nur μ verschiedene Werte, welche sich ergeben, indem man statt $\sqrt[\mu]{v_1}$ der Reihe nach $\sqrt[\mu]{v_1}$, $\alpha_1\sqrt[\mu]{v_1}$, $\alpha_1^2\sqrt[\mu]{v_1}$ ..... $\alpha_1^{\mu-1}\sqrt[\mu]{v_1}$ substituiert, wo $\alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{\mu} + i \sin\frac{2\pi}{\mu}$ zu setzen ist, wodurch man die μ verschiedenen Werte von $\sqrt[\mu]{v_1}$ in Rechnung bringt. Nun ist aber sofort einleuchtend, daß die Berechnung der verschiedenen Größen a_2, a_3 .... $a_{\mu-1}$ wegen des unangenehmen Potenzierens und Multiplizierens höchst mühsam ist, während die Beseitigung der Vieldeutigkeit in der Formel für z durch das mehrerwähnte System linearer Gleichungen viel einfacher ist, wenn man die numerischen Worte der einzelnen z wirklich bestimmen will.