EIN BEITRAG

zur

Theorie der höheren arithmetischen Reihen.

Auf den nachfolgenden Blättern beabsichtige ich, einen Beitrag zur Theorie der höheren arithmetischen Reihen zu geben.

Um nicht genöthigt zu sein, die beabsichtigten Entwickelungen durch Hülfssätze zu unterbrechen, schicke ich letztere voraus.

§. 1.

Bedeutet **n** eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl, **m** dagegen eine positive ganze Zahl, so soll der m^te^ Binomial-Coëfficient für den Exponenten n d. h. der Ausdruck

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}$$

durch n_m bezeichnet werden, so dass also

$$n_m = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,m}$$

ist. *)

§. 2.

Weil

$$\begin{aligned} n_{m+1} &= \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-m+1)\,(n-m)}{1\,.\,2\,\ldots\,m\,.\,(m+1)} \\ &= \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,m}\,.\,\frac{n-m}{m+1} \\ &= n_m\,.\,\frac{n-m}{m+1} \end{aligned}$$

ist, so ist auch

$$n_m = n_{m+1}\,.\,\frac{m+1}{n-m}$$

---

*) Obschon die in Rede stehenden Hülfssätze aus der viel allgemeineren Form

$$\overset{k}{n}_m = \frac{n\,(n \dagger k)\,(n \dagger 2k)\,\ldots\,(n \dagger (m-1)k)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m},$$

wo n eine positive oder negative, ganze oder gebrochene, k dagegen eine positive oder negative ganze, m endlich eine positive ganze Zahl bedeutet, hergeleitet werden könnten, wie ich dies bei einer anderen Gelegenheit nachgewiesen habe; so wird für mein gegenwärtiges Vorhaben die Betrachtung der minder allgemeinen Form n_m vollständig ausreichen.

Für m = o ist also

$$n_o = n_1 \cdot \frac{1}{n} = n.\frac{1}{n} = 1,$$

Für m = — 1 ist

$$n_{-1} = n_o \cdot \frac{o}{n-1} = 1.\frac{o}{n-1} = o.$$

Es versteht sich von selbst, dass auch

$$n_{-1} = n_{-2} = \ldots = n_{-r} = o$$

sein müsse.

Ist n eine positive ganze Zahl, so ist

$$n_n = \frac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n} = 1$$

$$\text{also } n_{n+1} = \frac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,2\,.\,1\,.\,0}{1\,.\,2\,.\,\,.\,(n+1)} = o$$

Es ist demnach auch

$$n_{n+2} = n_{n+3} = \ldots = n_{n+2} = o.$$

§. 3.

$$\text{Weil } (n-1)_{m-1} = \frac{(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-1-(m-1)+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\qquad m-1}$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-(m-1))}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-1)} \text{ und}$$

$$(n-1)_m = \frac{(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-1-m+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,m} \text{ ist; so ist auch}$$

$$(n-1)_{m-1} + (n-1)_m = \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots(n-(m-1))}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-1} + \frac{(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,(n-(m-1))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(m-1)} \cdot \frac{n-m}{m}$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-(m-1))}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-1)} \cdot \left\{1 + \frac{m-n}{m}\right\}$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-(m-1))}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(m-1)} \cdot \left\{\frac{m+n-m}{m}\right\}$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(m-1)} \cdot \frac{n}{m}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-1)\,m}$$

$$(n-1)_{m-1} + (n-1)_m = n_m.$$

§. 4.

Sind n, m, r positive ganze Zahlen und ist $m+r=n$; so ist

$$n_m = n_r = n_{n-m}.$$

Denn es ist $n_m = \dfrac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}$

und $n_r = \dfrac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,r}$

da aber $m + r = n$; so ist auch $n - m = r$; $n - r = m$, folglich auch

$$n_m = \frac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,(r+2)\;(r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\;\;m}$$

und

$$n_r + \frac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,(m+2)\;(m+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\;\;r}$$

Nun ist aber

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,r \times (r+1)\,(r+2)\,.\,.\,.\,(n-1)\,n = 1\,.\,2\,.\,.\,.\,m = (m+1)\,(m+2)\,.\,.\,(n-1)\,n$$

also auch

$$\frac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,(r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\;m} = \frac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,(m+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\;r}$$

d. h. $n_m = n_r = n_{n-m}$.

§. 5.

Durch fortgesetzte Zerlegung der Glieder nach der in §. 3 angegebenen Art erhält man

$$(n+1)_{m+1} = n_m + n_{m+1}$$

$$n_m + (n-1)_m + (n-1)_{m+1}$$

$$= n_m + (n-1)_m + (n-2)_m + (n-2)_{m+1}$$

$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$

$$= n_m + (n-1)_m + (n-2)_m + \,.\,.\, + 3_m + 2_m + 1_m + o_m + o_{m+1}$$

da aber für jedes m der Ausdruck $o_{m+1} = o$ sein muss, so ist

$$(n+1)_{m+1} = n_m + (n-1)_m + \,.\,.\, + 2_m + 1_m + o_m.$$

Für $m = o$ lautet dieser Ausdruck

$$(n+1)_1 = n_o + (n-1)_o + \,.\,.\, + 2_o + 1_o + o_o;$$

für $m = 1$ dagegen

$$(n+1)_2 = n_1 + (n-1)_1 + \ldots + 2_1 + 1_1$$

für $m = 2$

$$(n+1)_3 = n_2 + (n-1)_2 + \ldots + 3_2 + 2_2$$

. . . .

für $m = m$

$$(n+1)_{m+1} = n_m + (n-1)_m + \ldots + (m+1)_m + m_m$$
$$= m_m + (m+1)_m + \ldots + (n-1)_m + n_m$$

§. 6.

Schreibt man in der Gleichung

$$(n+1)_{m+1} = m_m + (m+1)_m + \ldots + n_m$$

für m nach und nach die Werthe 1, 2, 3. 4 . . . so ist

für $m = 1$

$$1_1 + 2_1 + 3_1 + \ldots + (n-1)_1 + n_1 = (n+1)_2$$

d. h. $$\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \ldots + \frac{n-1}{1} + \frac{n}{1} = \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}$$

für $m = 2$

$$2_2 + 3_2 + 4_2 + \ldots + n_2 + (n+1)_2 = (n+2)_3$$

d. h. $$\frac{1\,.\,2}{1\,.\,2} + \frac{2\,.\,3}{1\,.\,2} + \frac{3\,.\,4}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{(n-1)\,n}{1\,.\,2} + \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

für $m = 3$

$$3_3 + 4_3 + 5_3 + \ldots + (n+1)_3 + (n+2)_3 = (n+3)_4$$

d. h. $$\frac{1\,.\,2\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{2\,.\,3\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{(n-1)\,n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{n(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{n(n+1)\,(n+2)\,n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

. . . .

§. 7.

Wir gehen nun von der arithmetischen Reihe

$$a;\ a + d;\ a + 2\,d;\ \ldots\ldots\ a + (x-1)\,d$$

wo a, d beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene, x dagegen eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, als Grundreihe aus und wollen aus derselben

durch Summirung der Glieder eine höhere Reihe in der Art bilden, dass zum
1ten Gliede der höheren Reihe das 1te Glied der Grundreihe; zum
2ten - - - - die Summe der beiden ersten Gl. der Grundr.; zum
3ten - - - - - - - drei - - - - ; zum
. . . .
xten - - - - - - - x - - - -
genommen wird.

Aus der auf diese Weise erhaltenen höheren Reihe (Reihe der 2ten Ordnung, des 2ten Ranges), wird eine neue höhere Reihe in der Art gebildet werden, dass zum
1ten Gliede derselben das 1te Glied der Reihe der 2ten Ord.; zum
2ten - - die Summe der 2 ersten Glieder der Reihe . . . . . ; zum
3ten - - - - - 3 - - - - ;
. . . .
xten - - - - - x - - - -
genommen wird.

Aus der Reihe der 3ten Ordnung, welche man auf die angedeutete Weise erhält, soll eine Reihe der 4ten Ordnung in derselben Art durch Summirung der Glieder; aus der Reihe der 4ten Ordnung nach demselben Princip eine Reihe der 5ten Ordnung; . . . . ; aus einerReihe der (n—1)ten Ordnung endlich eine Reihe der nten Ordnung gebildet werden.

§. 8.

Bezeichnet demnach ${}^xT_n$ das allgemeine Glied einer arithmethischen Reihe der n^{ten} Ordnung, während ${}^xS_n$ die Summe der x ersten Glieder eine Reihe der n^{ten} Ordnung (das summatorische Glied) ausdrückt; so wird sein:

$${}^1T_2 = a = {}^1S_v$$

$${}^2T_2 = a + a+d = {}^2S_1$$

$${}^3T_2 = a + a+d + a+2d = {}^3S_1$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$${}^xT_2 = a + a+d + a+2d + \ldots + a+(x-1)d = {}^xS_1$$

und ebenso

$$^{1}T_{3} = {}^{1}S_{2}$$

$$^{2}T_{3} = {}^{2}S_{2}$$

$$^{3}T_{3} = {}^{3}S_{2}$$

$$^{x}T_{3} = {}^{x}S_{2}$$

und allgemein

$$^{1}T_{n} = {}^{1}S_{n-1}$$

$$^{2}T_{n} = {}^{2}S_{n-1}$$

$$^{3}T_{n} = {}^{3}S_{n-1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$^{x}T_{n} = {}^{x}S_{n-1}$$

Es geht aus diesem Bildungsprinzip hervor, dass das allgemeine Glied einer Reihe der nten Ordnung gleich sein müsse der Summe der x ersten Glieder einer Reihe der (n—1)ten Ordnung.

§. 9.

Es ist

$$^{1}T_{1} = a$$

$$^{2}T_{1} = a + 1 \, . \, d$$

$$^{3}T_{1} = a + 2d$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$^{x}T_{1} = a + (x-1)d$$

also ist

$$^{x}S_{1} = ax + \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \ldots + \frac{(x-1)}{1}\right)d =$$

$$= ax + \frac{x(x-1)}{1 \, . \, 2} \, d$$

$$= ax_{1} + x_{2} \, d$$

§. 9.

Nach dem zu Grunde gelegten Princip ist

$$ {}^{1}T_2 = a \,.\, 1_1 + 1_2\, d = a \,.\, 1_1 $$

$$ {}^{2}T_2 = a \,.\, 2_1 + 2_2\, d = a \,.\, 2_1 + 2_2\, d $$

$$ {}^{3}T_2 = a \,.\, 3_1 + 3_2\, d = a \,.\, 3_1 + 3_2\, d $$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . $$

$$ {}^{4}T_2 = a\, 4_1 + 4_2\, d = a \,.\, 4_1 + 4_2\, d $$

$$ {}^{x}T_2 = a\, x_1 + x_2\, d = a\, x_1 + x_2\, d $$

Die Summe der x ersten Glieder der 2ten Ordnung ist nun

$$ {}^{x}S_2 = 1_1 \,.\, a + 2_1 \,.\, a + 3_1\, a + \,.\,.\, + x_1\, a + 2_2\, d + 3_2\, d + 4_2\, d + \,.\,.\, + x_2 d $$

$$ = (1_1 + 2_1 + 3_1 + \ldots + x_1)\, a + (2_2 + 3_2 + 4_2 + \,.\,.\, + x_2) d $$

$$ = (x+1)_2\, a + (x+1)_3\, d $$

§. 10.

Die einzelnen Glieder der Reihe der 3ten Ordnung sind

$$ {}^{1}T_3 = 2_2\, a + 2_3\, d = 2_2\, a $$

$$ {}^{2}T_3 = 3_2\, a + 3_3\, d = 3_2\, a + 3_3\, d $$

$$ {}^{x}T_3 = 4_2\, a + 4_3\, d = 4_2\, a + 4_3\, d $$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . $$

$$ {}^{x}T_3 = (x+1)_2\, a + (x+1)_3\, d = (x+1)_2\, a + (x+1)_3\, d $$

Die Summe der x ersten Glieder der Reihe der 3ten Ordnung wird demnach sein:

$$ {}^{x}S_3 = 2_2\, a + 3_2\, a + 4_2\, a + \,.\,.\, + (x+1)_2\, a + 3_3\, d + 4_3\, d + \,.\,.\, (x+1)_3\, d $$

$$ = (2_2 + 3_2 + 4_2 + \,.\,.\, + (x+1)_2)\, a + (3_3 + 4_3 + \,.\,.\, + x_3 + (x+1)_3)\, d $$

$$ = (x+2)_3\, a + (x+2)_4\, d $$

§. 11.

Wie man auf diese Weise weiter gehen kann, liegt vor Augen. Es ist also:

$$^{x}T_1 = (x-1)_0\ a + (x-1)_1\ d \quad \text{und} \quad ^{x}S_1 = x_1\ a + x_2\ d$$

$$^{x}T_2 = x_1\ a + x_2\ d \qquad ^{x}S_2 = (x+1)_2\ a + (x+1)_3\ d$$

$$^{x}T_3 = (x+1)_2\ a + (x+1)_3\ d \qquad ^{x}S_3 = (x+2)_3\ a + (x+2)_4\ d$$

$$^{x}T_4 = (x+2)_3\ a + (x+2)_4\ d \qquad ^{x}S_4 = (x+3)_4\ a + (x+3)_5\ d$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$^{x}T_n = (x+n-2)_{n-1}\ a + (x+n-2)_n\ d \qquad ^{x}S_n = (x+n-1)_n\ a + (x+n-1)_{n+1}\ d$$

§. 12.

Setzt man in den Gleichungen

$$^{x}T_n = (x+n-2)_{n-1}\ a + (x+n-2)_n\ d; \quad ^{x}S_n = (x+n-1)_n\ a + (x+n-1)_{n+1}\ d$$

$a = d = 1$; so erhält man das allgemeine und summatorische Glied der figurirten Zahlen der $n$ten Ordnung. Es wird demnach sein

$$^{x}T_n = (x+n-2)_{n-1} + (x+n-2)_n; \quad ^{x}S_n = (x+n-1)_n + (x+n-1)_{n+1}$$

oder $^{x}T_n = (x+n-1)_n$ oder $^{x}S_n = (x+n)_{n+1}$

d. h. $^{x}T_1 = x_1$ $\quad ^{x}S_1 = (x+1)_2$ (natürliche Zahlen)

$^{x}T_2 = (x+1)_2$ $\quad ^{x}S_2 = (x+2)_3$ (Trigonal-Zahlen)

$^{x}T_3 = (x+2)_3$ $\quad ^{x}S_3 = (x+3)_4$ (Pyramidal-Zahlen)

. . . .

$^{x}T_n = (x+n-1)_n$ $\quad ^{x}S_n = (x+n)_{n+1}$ (figurirte Zahlen der $n$ten Ordnung.)

§. 13.

Da die Summe der x ersten Glieder einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung, deren erstes Glied $= 1$; deren Differenz oder Name $d = n-2$ ist, die xte neckige Zahl genannt wird; so wird der allgemeine Ausdruck für die xte neckige Zahl sein

$$^{x}T\ \text{nek.} = x_1 + x_2\, d$$

$$= x + \frac{x\ (x-1)}{1\ .\ 2}\ (n-2)$$

$$= \frac{(n-2)\ x^2\ (n-4)\ x}{2}$$

Für n = 3, 4, 5 . . . erhält man beziehungsweise die Triangular-, Quadrat-, Pentagonal . . . Zahlen. Es ist also

$$^{x}T\ 3\text{ek.} = \frac{x^2 + x}{2} = \frac{x\ (x+1)}{2}$$

$$^{x}T\ 4\text{ek.} = \frac{2\ x^2}{2} = x^2$$

$$^{x}T\ 5\text{ek.} = \frac{3\ x^2 - x}{2} = \frac{x\ (3x-1)}{2}$$

. . . . .

$$^{x}T\ n\text{ek.} = \frac{(n-2)\ x^2 - (n-4)\ x}{2}$$

Die Summe der x ersten Trigonal-, Quadrat-, Pentagonal- . . . . Zahlen ist sonach (§. 11)

$$^{x}S_{3\,\text{ek.}} = \frac{(x+1)\ .\ x}{1\ .\ 2} + \frac{(x-1)\, x\, (x+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ .\ 1 = \frac{(x+1)x}{1\ .\ 2}\left\{1 + \frac{x-1}{3}\right\} = \frac{(x+2)\ (x-1)x}{1\ .\ 2\ .\ 3} = (x+2)_3$$

$$^{x}S_{4\,\text{ek.}} = \frac{(x+1)\ .\ x}{1\ .\ 2} + \left\{1 + \frac{x-1}{3}\ .\ 2\right\} = \frac{(x+1)\ \ x\ \ (2\ x+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$

$$^{x}S_{5\,\text{ek.}} = \frac{(x+1)\ x}{1\ .\ 2}\left\{1 + \frac{x-1}{3}\ .\ 3\right\} = \frac{(x+1)\ x^2}{1\ .\ 2}$$

. . . .

$$^{x}S_{n\,\text{ek.}} = \frac{(x+1)\ x}{1\ .\ 2}\left\{1 + \frac{x-1}{3}\ .\ (n-2)\right\} = \frac{(x+1)\ x\ \left(3+(x-1)\ (n-2)\right)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$

§. 14.

Hat man Reihen des nten, (n+m)ten, (n+p)ten, . . . Grades und nimmt

1tens	die	Summe	aller	ersten	Glieder	zum	1ten	Gliede	einer	neuen	Reihe		
2tens	-	-	-	zweiten	-	-	3ten	-	-	-	-		
3tens	-	-	-	dritten	-	-	3ten	-	s	-	-		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
xtens	-	-	-	xten	-	-	xten	-	-	-	-	-	-

und bezeichnet die Summe **der x**ten **Glieder** der gegebenen Reihen oder das allgemeine Glied der neuen Reihe durch

$$ {}^{x}\mathbf{T}_{(s)}\,; $$

die Summe aller Glieder der neuen Reihe oder das summatorische Glied der neuen Reihe durch

$$ {}^{x}\mathbf{S}_{(s)}\,; $$

so ist, wenn zugleich $n+p > n+m > n$ ist,

1. $$ {}^{x}\mathbf{T}_{(s)} = (x+n-2)_{n-1}\, a + (x+n-2)_{n}\, d $$
$$ + (x+n+m-2)_{n+m-1}\, a + (x+n+m-2)_{n+m}\, d $$
$$ + (x+n+p-2)_{n+p-1}\, a + (x+n+p-2)_{n+p} \,.\, d $$
$$ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot $$
$$ = a\left((x+n-2)_{n-1} + (x+n+m-2)_{n+m-1} + (x+n+p-2)_{n+p-1} + \cdots\right) $$
$$ + d\left((x+n-2)_{n} + (x+n+m-2)_{n+m} + (x+n+p-2)_{n+p} + \cdots\right) $$

Nun ist aber

$$ (x+n-2)_{n-1} = \frac{(x+n-2\;(x+n-3)\;\ldots\;(x+n-2-n+1+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,(n-1)} $$
$$ = \frac{(x+n-2)\,(x+n-3)\;\ldots\;(x+1)x}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,(n-1)} $$
$$ = \frac{x(x+1)\;\ldots\;(x+n-2)}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)} $$

und ebenso

$$ (x+n+m-2)_{n+m-1} = \frac{x(x+1)\ldots(x+n-2)(x+n-1)\ldots(x+n+m-2(}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,n+m-1} $$
$$ (x+n+p-2)_{n+p-1} = \frac{x(x+1)\ldots\ldots(x+n+m-2)(x+n+m-1)\ldots(x+n+p-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n+m-1\,\ldots\ldots\,(n+p-1)} $$

also ist auch

$$ {}^{x}\mathbf{T}_{(s)} = a\left\{\frac{x(x+1)\ldots(x+n-2)}{1\,.\,2\ldots(n-1} + \frac{x(x+1)\;\ldots\;(x+n-2)\,(x+n-1)\;\ldots\;(x+n+m-2)}{1\;2\,\ldots\,(n-1)\,n\;\ldots\;n+m-1}\right. $$
$$ \left. + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-2)(x+n-1)\ldots(x+n+m-2)\ldots(x+n+p-2)}{1\,.\,2\ldots(n-1)\,n\ldots(n+m-1)\ldots(n+p-1)} + \ldots\right\} $$
$$ + d\left(\frac{(x-1)\,x\,(x+1)\ldots(x+n-2)}{1\,.\,2\ldots\ldots\,n} + \frac{(x-1)\ldots(x+n+m-2)}{1\,.\,2\ldots\ldots(n+m)} + \frac{(x-1)\,(x-2)\ldots(x+n+p-2)}{1\,.\,2\ldots\ldots\,(n+p)} + \ldots\right) $$

$$= a\,\frac{x(x+1)\,..\,(x+n-2)}{1\,.\,2\,..\,(-1)}\left(1+\frac{(x+n-1)\,..\,(x+n+m-2)}{n(n+1)\,..\,(n+m-1)}+\frac{(x+n-1)\,..\,(x+n+m-2)\,(x+n+m-1)\,..\,(x+n+p-2)}{n(n+m1)\,..\,(n+m-1)\,(n+m)\,..\,(n+p-1)}+\ldots\right)$$

$$+\,d\cdot\frac{(x-1)\,x\,(x+1)\,..\,(x+n-2)}{1\,.\,2\,..\,n}\left(1+\frac{(x+n-1)\,..\,(x+n+m-2)}{(n+1)\,..\,(n+m)}+\frac{(n+m-1)\,..\,(n+n+m-2)\,..\,(x+n+p-2)}{(n+1)\,..\,(n+m)\,\ldots\,(n+p)}+\ldots\right)$$

Ausdrücke, welche auch folgendermaassen geschrieben werden können:

$${}^{x}T_{(s)}=a\,.\,(x+n\;2)_{n-1}\left(1+\frac{(x+n-1)(x+n)\,..\,(x+n+m-1)}{n(n+1)\,..\,(n+m-1)}+\frac{(x+n-1)\,..\,(x+n+m-1)\,..\,(x+m+p-1)}{n(n+1)\,..\,(n+m-1)\,(n+m)\,..\,(n+p-1)}+\ldots\right)$$

$$+\,d\,.\,(x+n-2)_{n}\left(1+\frac{(x+n-1)(x+n)\,..\,(x+n+m-1)}{(n+1)\,(n+2)\,\ldots\,(n+m)}+\frac{(x+n-1)\,..\,(x+n+m-1)\,..\,(x+n+p-1)}{(n+1)\,(n+2)\,..\,(n+m)\,..\,(n+p)}+\ldots\right)$$

Desgleichen ist, weil die Stellung der Addenden in der Summe den Werth der letzteren nicht ändert:

2. $${}^{x}S_{(s)}={}^{1}T_{(s)}+{}^{2}T_{(s)}+\ldots+{}^{x}T_{(s)}$$

$$={}^{x}S_{n}+{}^{x}S_{n+m}+{}^{x}S_{n+p}+\ldots$$

$$=a\left((x+n-1)_{n}+(x+n+m-1)_{n+m}+(x+n+p-1)_{n+p}+\ldots\right)$$

$$+\,d\left((x+n-1)_{n+1}+(x+n+m-1)_{n+m+1}+(xn+p-1)_{n+p+1}+\ldots\right)$$

$$=a\left(\frac{x(x+1)\,..\,(x+n-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,n}+\frac{x(x+1)\,..\,(x+n-1)(x+n)\,..\,(x+n+m-1)}{1\,.\,2\,..\,n\,(n+1)\,.\,.\,(n+m)}\right.$$

$$\left.+\frac{x(x+1)\,..\,(x+n-1)(x+n)\,..\,(x+n+p-1)}{1\,.\,2\,..\,n\,(n+1)\,..\,(n+m)\,..\,(n+p)}+\ldots\right)$$

$$+\,d\left(\frac{x(x-1)\,..\,(x+n-1)}{1\,.\,2\ldots(n+1)}+\frac{(x-1)\,x\,..\,(x+n-1)(x+n)\,..\,(x+n+m-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,(n+1)\,(n+2)\,..\,(n+m+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{(x-1)\,x\,..\,(x+n-1)(x+n)\,..\,(x+n+m-1)\,..\,(x+n+p-1)}{1.2\ldots(n+1)(n+2)(n+m+1)\,..\,(n+p+1)}+\ldots\right)$$

$$=a\,.\,\frac{x(x+1)\,..\,(x+n-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\left(1+\frac{(x+n)\,..\,(x+n+m-1)}{(+1)\,..\,(n+m)}+\frac{(x+n)\,..\,(x+n+m-1)\,..\,(x+n+p-1)}{1.2\,..\,(n+m)\,..\,(n+p)}+\ldots\right)$$

$$+\,d\,.\,\frac{(x-1)\,x\,..\,(x+n-1)}{1.2\ldots n+1}\left(1+\frac{(x+n)\,..\,(x+n+m-1)}{(n+2)\,.\,(n+m+1)}+\frac{(x+n)\,..\,(x+n+m-1)\,..\,(x+n+p-1)}{(n+2)\,..\,(n+m+1)\,..\,(n+p+1)}+\ldots\right)$$

oder auch

$${}^{x}S_{(s)}=a\,.\,(x+n-1)_{n}\left\{1+\frac{(x+n)(x+n+1)\,..\,(x+n+m-1)}{(n+1)(n+2)(n+m)}+\frac{(x+n)(x+n+1)\,..\,(x+n+p-1)}{(n+1)(n+2)\,..\,(n+p)}+\ldots\right)$$

$$+\,d\,.\,(x+n-1)_{n+1}\left\{1+\frac{(x+n)(x+n+1)\,..\,(x+n+m-1)}{(n+2)(n+3)\,..\,(n+m+1)}+\frac{(x+n)(x+n+1)\,..\,(x+n+p-1)}{(n+2)(n+3)\,..\,(n+p+1)}+\ldots\right)$$

§. 16.

Wollen wir diese Ausdrücke auf die figurirten Zahlen anwenden, so muss $a = d = 1$ gesetzt werden. Daraus ergiebt sich

$$ {}^{x}T_{(s)} = (x+n-1)_{n} + (x+n+m-1)_{n+m} + (x+n+p-1)_{n+p} + \ldots $$

$$ = (x+n-1)_{n} \left(1 + \frac{(x+n)(x+n+1)\ldots(x+n+m-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)} + \frac{(x+n)\ldots(x+n+m-1)\ldots(x+n+p-1)}{(n+1)\ldots(n+m)\ldots(n+p)} + \ldots \right) $$

und

$$ {}^{x}S_{(s)} = {}^{x}S_{n} + {}^{x}S_{n+m} + {}^{x}S_{n+p} + \ldots $$

$$ = (x+n)_{n+1} + (x+n+m)_{n+m+1} + (x+n+p)_{n+p+1} + \ldots $$

$$ = (x+n)_{n+1} \left\{ 1 + \frac{(x+n+1)\ldots(x+n+m)}{(n+2)\ldots(n+m+1)} + \frac{(x+n+1)\ldots(x+n+m)\ldots(x+n+p)}{(n+2)\ldots(n+m+1)\ldots(n+p+1)} + \ldots \right\} $$

Nehmen wir die figurirten Zahlen der der 1ten, 3ten und 5ten Ordnung, so ist $n=1$; $m=2$; $p=4$ und

$$ {}^{1}T_{(s)} = {}^{1}1 \left(1 + \frac{2 \,.\, 3}{2 \,.\, 3} + \frac{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \right) = 1 \left(1 + 1 + 1 \right) $$

$$ {}^{2}T_{(s)} = {}^{2}1 \left(1 + \frac{3 \,.\, 4}{2 \,.\, 3} + \frac{3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \right) = 2 \left(1 + 2 + 3 \right) $$

$$ {}^{3}T_{(s)} = {}^{3}1 \left(1 + \frac{4 \,.\, 5}{2 \,.\, 3} + \frac{4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \right) = 3 \left(1 + \frac{10}{3} + 7 \right), \text{ folglich} $$

$$ {}^{1}S_{(s)} = {}^{4}2 \left(1 + \frac{5 \,.\, 6}{3 \,.\, 4} + \frac{5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8}{3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} \right) = 6 \left(1 + \frac{15}{6} + \frac{14}{3} \right) $$

$$ = 6 + 15 + 28 $$

$$ = 49 $$

§. 17.

Sind A, B, C, D, E, F, . . . aufeinanderfolgende Glieder einer Reihe der nten Ordnung und leitet man aus dieser Reihe als Hauptreihe die **erste** Differenzenreihe

$$ A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1,\ \ldots $$

in der Art ab, dass $A_1 = B - A$; $B_1 = C - B$; $C_1 = D - C$, . . . ist; wenn ferner aus dieser ersten Differenzenreihe eine 2te Differenzenreihe

$$ A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2,\ E_2,\ F_2,\ \ldots $$

in der Weise eingeleitet wird, dass $A_2 = B_1 - A_1$; $B_2 = C_1 - B_1$ . . . gesetzt wird, und fährt in der Bildung neuer Differenzenreihen fort, so dass die (n—2)te Differenzenreihe

$$A_{n-2},\ B_{n-2},\ C_{n-2},\ D_{n-2},\ \ldots; \text{ die } (n-1)\text{te dagegen}$$

$$A_{n-1},\ B_{n-1};\ C_{n-1},\ D_{n-1},\ \ldots;$$

so wird bekanntlich die nte Differenzenreihe aus lauter gleichen Gliedern bestehen. Diese Glieder wollen wir durch A_n bezeichnen, wo $A_n = B_{n-1} - A_{n-1} = C_{n-1} - B_{n-1} = D_{n-1} - C_{n-1} = \ldots$ sein muss.

Die Anfangsglieder der nten; (n—1)ten, (n—2)ten, . . . 2ten 1ten Differenzenreihen sind demnach

$$A_n,\ A_{n-1},\ A_{n-2},\ \ldots A_2,\ A_1.$$

§. 18.

Wir wollen nun die summatorischen und allgemeinen Glieder einer jeden dieser Differenzreihen bestimmen.

Zunächst ist jedes Glied der nten Differenzreihe $= A_n$; also

${}^{x}T_n = A_n$; folglich ${}^{x}S_n = x.\ A_n$

Weiter ist

$${}^{1}T_{n-1} = A_{n-1}$$

$${}^{2}T_{n-1} = A_{n-1} + A_n = 1.\ A_n + A_{n-1}$$

$${}^{3}T_{n-1} = {}^{2}T_{n-1} + A_n = 2.\ A_n + A_{n-1}$$

$${}^{4}T_{n-1} = {}^{3}T_{n-1} + A_n = 3.\ A_n + A_{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$${}^{x}T_{n-1} = {}^{x-1}T_{n-1} + A_n = (x-1).\ A_n + A_{n-1}$$

deshalb ist auch

$$
\begin{aligned}
{}^{x}S_{n-1} = {} & A_{n-1} \\
& + 1.\, A_n + A_{n-1} \\
& + 2.\, A_n + A_{n-1} \\
& + \dots\dots\dots \\
& + (x-1).\, A_n + A_{n-1} \\
= {} & x_2\, A_n + x_1\, A_{n-1}
\end{aligned}
$$

Ferner ist

$$
\begin{aligned}
{}^{1}T_{n-2} &= A_{n-2} & &= A_{n-2} \\
{}^{2}T_{n-2} &= {}^{1}T_{n-2} + {}^{1}T_{n-1} & &= A_{n-1} + A_{n-2} \\
{}^{3}T_{n-2} &= {}^{2}T_{n-2} + {}^{2}T_{n-1} & &= A_n + 2\, A_{n-1} + A_{n-2} \\
{}^{4}T_{n-2} &= {}^{3}T_{n-2} + {}^{3}T_{n-1} & &= 3\, A_n + 3\, A_{n-1} + A_{n-2} \\
{}^{5}T_{n-2} &= {}^{4}T_{n-2} + {}^{4}T_{n-1} & &= 6\, A_n + 4\, A_{n-1} + A_{n-2} \\
& \dots\dots\dots \\
{}^{x}T_{n-1} &= {}^{x-1}T_{n-2} + {}^{x-1}T_{n-1} & &= \frac{(x-1)\,(x-2)}{1\,.\,2}\, A_n + \frac{(x-1)}{1}\, A_{n-1} + A_{n-2} \\
& & &= (x-1)_2\, A_n + (x-1)_1\, A_{n-1} + A_{n-2}
\end{aligned}
$$

Deshalb muss sein

$$
\begin{aligned}
{}^{x}S_{n-2} = {} & A_{n-2} \\
& + 1.\, A_{n-1} + A_{n-2} \\
& + A_n + 2\, A_{n-1} + A_{n-2} \\
& + 3\, A_n + 3\, A_{n-1} + A_{n-2} \\
& + 6\, A_n + 4\, A_{n-1} + A_{n-2} \\
& + \dots\dots\dots \\
& + \frac{(x-1)\,(x-2)}{1\,.\,2}\, A_n + \frac{(x-1)}{1}\, A_{n-1} + A_{n-2}
\end{aligned}
$$

Das Fortschreitungsgesetz liegt klar vor Augen. Es ist also

$${}^xT_n = A_n \qquad\qquad {}^xS_n = x_1\, A_n$$

$${}^xT_{n-1} = (x-1)_1\, A_n + A_{n-1} \qquad {}^xS_{n-1} = x_2\, A_n + x_1\, A_{n-1}$$

$${}^xT_{n-2} = (x-1)_2\, A_n + (x-1)_1\, A_{n-1} + A_{n-2} \quad {}^xS_{n-2} = x_3\, A_n + x_2\, A_{n-1} + x_1\, A_{n-2}$$

$${}^xT_{n-3} = (x-1)_3 A_n + (x-1)_2 A_{n-1} + (x-1)_1 A_{n-2} + A_{n-3} \quad {}^xS_{n-3} = {}^x{}_4\, A_n + {}^x{}_3\, A_{n-1} + {}^x{}_2\, A_{n-2} + {}^x{}_1\, A_{n-3}$$

$${}^xT_{n-4} = (x-1)_4 A_n + (x-1)_3 A_{n-1} + (x-1)_2 A_{n-2} + (x-1)_1 A_{n-3} + A_{n-4};\ {}^xS_{n-4} = x_5 A_n + x_4 A_{n-1} + x_3 A_{n-2} + x_2 A_{n-3} + X_1 A_{n-4}$$

$$\vdots$$

$${}^xT_{n-(n-1)} = {}^xT_1 = (x-1)_{n-1}\, A_n + (x-1)_{n-2}\, A_{n-1} + \dots (x-1)_1\, A_2 + A_1 \quad xS_1 = x_n\, A_n + x_{n-1}\, A_{n-1} + \dots + x_2\, A_2 + xA_1$$

$$xT_{n-n} = xT = (x-1)_n\, A_n + (x-1)_{n-1}\, A_{p-1} + \dots + (x-1)_1\, A_1 + A \,.\ xS = x_{n+1}\, A_n + x_n\, A_{n-1} + \dots + x_2\, A_1 + x_1\, A$$

Für die Biquadrate der natürlichen Zahlen ist

$A_n = 24$; $A_{n-1} = 60$; $A_{n-2} = 50$; $A_{n-3} = 15$; $A_{n-1} = 1$. Es ist deshalb

$${}^5T_{(x^4)} = 4_4 \,.\, 24 + 4_3 \,.\, 60 + 4_2 \,.\, 50 + 4_1 \,.\, 15 + 1$$
$$= 24 + 240 + 300 + 60 + 9$$
$$= 625 = 5^4$$

$${}^5S_{(x^4)} = 5_5 \,.\, 24 = 24 = 979 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4$$
$$+ 5_4 \,.\, 60 + 300$$
$$+ 5_3 \,.\, 50 + 500$$
$$+ 5_2 \,.\, 15 + 150$$
$$+ 5_1 \,.\, 1 + 5$$

Für die Cuben der natürlichen Zahlen ist

$A_n = 6$; $A_{n-1} = 12$; $A_{n-2} = 7$; $A_{n-3} = A = 1$

$${}^5T_{(x^3)} = 4_3 \,.\, 6 + 4_2 \,.\, 12 + 4_1 \,.\, 7 + 1$$
$$= 24 + 72 + 28 + 1$$
$$= 125 = 5^3$$

$$\begin{aligned} {}^{5}S_{(x^3)} &= 5_4 \,.\, 6 + 5_3 \,.\, 12 + 5_2 \,.\, 7 + 5_1 \,.\, 1 \\ &= 30 + 120 + 70 + 5 \\ &= 225 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \text{ *)} \end{aligned}$$

---

*) In diesem Ausdruck ist gleichzeitig angedeutet, dass die Summe der Kuben der x ersten natürlichen Zahlen dem Quadrate der xten Trigonalzahl gleich sei; ein Satz, der sich in folgender Art allgemein beweisen lässt.

Betrachtet man die Glieder der Reihe $1, d, 2d, 3d, \ldots (x-1)d$ als Differenzen einer höheren Reihe mit dem Anfangsglied 1, so wird diese höhere Reihe die Form haben

A. $\quad 1,\ 1+d,\ 1+3d,\ 1+6d,\ 1+10d,\ \ldots\ 1+x_2 d$

Wenn von Neuem die Glieder der vorstehenden Reihe als Differenzen einer höheren Reihe mit dem Anfangsglied 1 betrachtet werden, so wird diese höhere Reihe die Form haben

B. $\quad 1,\ 1+(1+d),\ 1+(2+4d),\ 1+(3+10d),\ 1+(4+20d),\ \ldots\ 1+(x-1+(x+1)_3 d$

Werden endlich auch die Glieder dieser Reihe als Differenzen einer höheren Reihe mit dem Anfangsglied 1 angenommen, so muss diese Reihe die Form haben

C. $\quad 1,\ 3_2 + 4_1 d,\ 4_2 + 5_4 d,\ 5_2 + 6_4 d,\ \ldots\ (x+1)_2 + (x+1)_2 + (x+2)_4 d.$

Nun ist offenbar für $d=6$ in der Reihe B,

$$\overset{x}{T} = 1 + (x-1+(x+1)6_3 = x + \frac{(x+1)\,x\,(x-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,6 = x + (x+1)(x-1)\,x = x^3$$

d. h. die Glieder der Reihe B, sind die Kuben der natürlichen Zahlen. Nach dem Bildungs-Gesetz der vorstehenden Reihen sind aber die Glieder der Reihe C, die Summe der Kuben der natürlichen Zahlen, wenn, wie hier überall geschehen muss, $d=6$ gesetzt wird. Das allgemeine Glied der Reihe C) für $d=6$ ist aber

$$\overset{x}{T} = (x+1)_2 + (x+1)_4 \,.\, 6 = \frac{(x+1)x}{1\,.\,2}\left(1 + \frac{(x+2)\ \ (x-1)}{2}\right) = \frac{(x+1)x}{2}\,.\,\frac{(x+1)x}{2} = \left((x+1)_2\right)^2$$

Es ist also die Summe der Kuben der x ersten natürlichen Zahlen gleich dem Quadrate der xten Trigonalzahl.

Wollte man die Summe der Quadrate der x ersten Trigonalzahlen finden, so würde man aus der Reihe C, eine Reihe D, nach dem angegebenen Bildungsgesetz herstellen müssen. Die Glieder dieser Reihe würden sein

$$1,\ 3_2 + 4_4 d,\ 4_2 + 5_4 d,\ 5_2 + 6_4 d,\ \ldots\ (x+1)_2 + (x+2)_4 d$$

woraus sich $\overset{x}{S} = (x+2)_3 + (x+3)_5 d$ ergeben würde.

Für $d=6$ wäre alsdann

$$\overset{x}{S} = (x+2)_3 \left(\frac{1+3x\,(x+2)}{10}\right)$$

die Summe der Quadrate der x ersten Trigonalzahlen.