Geometrische Untersuchungen über Kurven auf Flächen 3. Ordnung mit vier Knotenpunkten.

Während die allgemeine Fläche 3. Ordnung in verschiedenartigster Hinsicht das Ziel eingehender Forschungen gebildet hat, sind ihre Spezialfälle, soweit diese in dem Hinzutreten einzelner Doppelpunkte bestehen, meist nur in ihrem verwandtschaftlichen Zusammenhang untereinander sowie in ihrer Beziehung zur allgemeinen Fläche betrachtet worden *). Demgegenüber stellt sich vorliegende Abhandlung die Aufgabe, die Flächen 3. Ordnung mit vier Knotenpunkten zum Gegenstande besonderer Untersuchungen zu machen, und die auf ihr möglichen Kurven bts zur 4. Ordnung nach Art und Verlauf zu studieren.

Zur Lösung dieser Aufgabe ist vorzugsweise eine ebene Abbildung der Fläche benützt worden, durch die schließlich alle die genannten Kurven als auf einer Ebene ausgebreitet erscheinen.

§ 1.

Höchstzahl der Doppelpunkte bei einer Fläche 3. Ordnung. Die Geraden auf einer Fläche 3. Ordnung mit vier Knotenpunkten.

Daß eine Fläche 3. Ordnung nicht mehr als vier Doppelpunkte haben kann (wofern sie nicht zerfallen soll), lehrt die Betrachtung des Tangentialkegels, den man von einem Punkte außerhalb an die Fläche legen kann (Salm.-Fiedler Geom. d. Raum. III. Aufl. Teil II S. 371).

Man kann aber auch mit einfacheren Hülfsmitteln zu demselben Schlusse gelangen: Angenommen eine Fläche 3. Ordnung hätte 5 Doppelpunkte, so könnte man durch dieselben doppelt unendlich viele kubische Raumkurven legen, durch jeden Punkt des Raumes eine; denn 6 Punkte bestimmen eindeutig eine kubische Raumkurve. Alle diese Kurven hätten aber mit unserer kubischen Fläche $5.2 = 10$ Punkte gemeinsam, müßten ihr also ganz angehören und unsere Fläche müßte jeden Punkt des Raumes enthalten, was nicht möglich ist.

Daß andrerseits Flächen 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten möglich sind, lehren praktisch die Fälle, in denen man zu Flächen dieser Art gelangt (Sturm, Flächen 3. Ord. S. 381; London, Math. Ann. Bd. 44 S. 410). Sie mögen zur Abkürzung mit F^3_{4D}, ihre Doppelpunkte mit D_1, D_2, D_3, D_4 bezeichnet werden. Da die Verbindungsgeraden zweier Doppelpunkte 4 Punkte mit der Fläche gemeinsam haben, so gehören sie ihr ganz an und wir gelangen damit zunächst zu 6 Geraden der Fläche, den Kanten des Doppelpunktstetraeders $D_1\ D_2\ D_3\ D_4$; sie mögen je nach den Doppelpunkten, welche sie verbinden, bez. d_{14}, d_{24}, d_{34}, d_{12}, d_{13}, d_{23} genannt werden.

*) Vergl. die Abhandlung von Klein, Math. Ann. Bd. 6, S. 551 u. folg., über die gestaltl. Verhältn. der Flächen 3. Ordnung. Ferner London, Math. Ann. Bd. 44 S. 404 § 4: „Die Erzeugnisse dreier trilinearer Ebenenbüschel".

Zur Beantwortung der Frage nach weiteren Geraden unserer Fläche sei an den bekannten Satz*) erinnert, nach welchem durch den Doppelpunkt einer Fläche 3. Ordnung mit nur einem Knotenpunkt 6 Geraden gehen, in deren 15 Verbindungsebenen die 15 übrigen Geraden dieser Fläche liegen; da die 6 Doppelpunktsgeraden im Vergleich zu den Geraden der allgemeinen Fläche doppelt gezählt werden müssen, so bleibt hier die Zahl $27=6.2+15$ gewahrt. Wenn insbesondere noch ein zweiter Doppelpunkt auf der Fläche liegt, so gehen genau 4 Geraden durch nur einen der beiden Doppelpunkte, die Verbindungsgerade nach dem anderen Doppelpunkt zählt also gegen den Fall von vorhin zweifach und verglichen mit den Geraden der allgemeinen Fläche vierfach. Aus diesen Bemerkungen folgt, daß die 6 Doppelpunktsgeraden unserer Fläche F_{4D}^3 gleichbedeutend sind mit $6.4=24$ Geraden der allgemeinen Fläche, und daß es folglich nur noch drei weitere Geraden geben kann.

Durch die 3 (doppelt zählenden) Doppelpunktsgeraden, die von einem Doppelpunkte unserer Fläche nach den drei übrigen Doppelpunkten hingehen, ist die Zahl 6 der Geraden, welche von einem Doppelpunkt einer kubischen Fläche ausstrahlen, erschöpft; die 3 in Rede stehenden Geraden unserer Fläche können also keinen Knotenpunkt enthalten. Aus diesem Grunde sind sie je einer Geraden der allgemeinen Fläche äquivalent; sie mögen daher künftig als u n ä r e G e r a d e n bezeichnet werden.

Da nun die 3 unären Geraden die Dreiseite des Doppelpunktstetraeders (als volle ebene Schnitte) und damit gewisse der Doppelpunktsgeraden treffen müssen, ohne daß sie andrerseits den Ebenen der Dreiseite angehören oder Doppelpunkte enthalten dürfen, so müssen sie sich einzeln auf einander windschief gegenüberliegende Tetraederkanten stützen. Sei x eine solche unäre Gerade, eine Treffgerade von d_{12} und d_{34}; die Ebene (x, d_{12}) erfordert zur Ergänzung zum vollen Schnitt dritter Ordnung noch eine gerade Linie, welche D_1 und D_2, als Doppelpunkte des vollen Schnittes, je einmal treffen muß. Als Ergänzungsgerade ergibt sich also wiederum die Gerade d_{12} selbst. Wir kommen damit zu dem wichtigen Ergebnis, daß die Ebene, welche durch eine unäre Gerade und eine der sie treffenden Doppelpunktsgeraden gelegt ist, unsere Fläche längs dieser Doppelpunktsgeraden berührt; m. a. W.: E i n e F l ä c h e 3. O r d n u n g m i t 4 K n o t e n p u n k t e n h a t l ä n g s d e r P u n k t r e i h e e i n e r D o p p e l p u n k t s g e r a d e n s t e t s e i n e u n d d i e s e l b e B e r ü h r u n g s e b e n e.

Wenn nun, was denkbar wäre, eine Doppelpunktsgerade d_{12} nicht bloß von einer, sondern von zwei unären Geraden x und y getroffen würde, so bekämen wir in (x, d_{12}) und (y, d_{12}) zwei Berührungsebenen unserer Fläche längs d_{12} und d_{12} wäre somit eine Doppelgerade der Fläche, was nicht möglich ist. V o n d e n 3 u n ä r e n G e r a d e n t r i f f t a l s o j e d e e i n a n d e r e s d e r 3 P a a r e w i n d s c h i e f e r K a n t e n d e s D o p p e l p u n k t s t e t r a e d e r s. Hieraus erklärt sich von selbst die Bezeichnung u_{1234}, u_{1324}, u_{1423}, die im Folgenden für die unären Geraden angewandt werden wird.

Um über die Lage der 3 unären Geraden gegen einander Näheres zu erfahren, betrachten wir den vollen ebenen Schnitt d_{12}, d_{12}, u_{1234}, dessen Trägerebene, wie vorhin beobachtet wurde, unsere Fläche längs d_{12} berührt. Die beiden anderen unären Geraden müssen diesen ebenen Schnitt treffen, und da dies, wie soeben bewiesen, auf d_{12} nicht mehr geschehen kann, müssen sie beide u_{1234} treffen. Damit ist gezeigt, daß jede unäre Gerade von den beiden anderen getroffen wird: D i e 3 u n ä r e n G e r a d e n d e r F l ä c h e F_{4D}^3 l i e g e n i n e i n e r E b e n e.

Zu einer unären Geraden unserer Fläche gibt es 4 windschiefe Geraden: die vier von ihr nicht getroffenen Doppelpunktsverbindungsgeraden; zu einer Doppelpunktsgeraden gibt es nur 3 windschiefe Geraden: die ihr gegenüberliegende Tetraederkante und die beiden von ihr nicht getroffenen unären Geraden **).

§ 2.

Abbildung der Fläche auf eine Ebene.

Ehe wir uns der Untersuchung höherer Kurven zuwenden, möge vorerst an der Hand der bisherigen Ergebnisse eine Abbildung unserer Fläche auf eine Ebene vollzogen werden, die

*) Sturm, Flächen 3. Ordnung S. 351.

**) Interessant ist zu sehen, wie die Fläche 9. Ordnung, welche aus einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung die 27 Geraden ausscheidet, in unserem Falle zerfällt in die 4 doppelt zählenden Ebenen des Doppelpunktstetraeders mit $4.2.3=24$ Schnittgeraden und in die einfach zählende Ebene der 3 unären Geraden.

uns künftighin in Stand setzen wird, räumliche Untersuchungen durch entsprechende planimetrische zu ersetzen.

Die Abbildung unserer Fläche 3. Ordnung F^3_{4D} auf eine als Bildebene gewählte Ebene E geschehe mit Hülfe der Zentralprojektion aus einem ihrer 4 Doppelpunkte, der mit D_4 bezeichnet werden möge. Es entsprechen sich also zwei solche Punkte der Fläche und der Bildebene, P bezw. Π, welche mit D_4 auf ein und derselben Geraden liegen.

Da der Strahl D_4 P Π weder die Bildebene noch unsere Fläche in einem weiteren Punkte schneidet, so ist die Abbildung i. A. in beiderlei Sinn eindeutig.

Alle Punkte der Kurve 3. Ordnung, in der unsere Fläche die Bildebene schneidet, fallen mit ihren Bildpunkten zusammen.

Die 3 Doppelpunkte D_1, D_2, D_3 der Fläche bilden sich in 3 Punkte Δ_1, Δ_2, Δ_3 ab; das von ihnen gebildete Dreieck möge als Fundamentaldreieck bezeichnet werden.

Wir bemerken sofort, daß bei dem Punkte D_4, dem Projektionszentrum, die Eindeutigkeit der Abbildung aufhört, insofern als Bild desselben alle Punkte des Kegelschnittes gelten müssen, in denen sein Tangentialkegel 2. Grades die Bildebene schneidet. Dieser Kegelschnitt, das Bild von D_4, Δ_4^2, geht durch die 3 Ecken des Fundamentaldreiecks Δ_1 Δ_2 Δ_3 hindurch.

Auch in den Punkten Δ_1, Δ_2, Δ_3 der Bildebene erleidet die Eindeutigkeit der Abbildung eine Unterbrechung, insofern jeder dieser Punkte Δ_i $(i=1, 2, 3)$ nicht bloß das Bild des Punktes D_i, sondern unzählig vieler Punkte der Fläche ist, j e d e s Punktes der Geraden d_{i4}.

Demgemäß gehört als Bildkurve zu den 3 Doppelpunktsgeraden d_{i4} unserer Fläche der Fundamentalkegelschnitt Δ_4^2, insonderheit der Punkt Δ_i. Die übrigen 3 Doppelpunktsgeraden der Fläche, d_{13}, d_{23}, d_{12} besitzen als Bildkurven bez. die Geraden Δ_1 Δ_3, Δ_2 Δ_3, Δ_1 Δ_2.

Wir haben vorhin (S. 2) gesehen, daß unsere Fläche längs jeder Doppelpunktsgeraden von nur einer Ebene berührt wird, insbesondere gilt dies für die 3 Geraden d_{14}, d_{24}, d_{34}. Die Spurlinien ihrer Berührungsebenen gehen in der Bildebene bez. durch die Punkte Δ_1, Δ_2, Δ_3; sie mögen t_1, t_2, t_3 heißen. Sobald nun eine Kurve unserer Fläche eine der 3 Doppelpunktsgeraden d_{14}, d_{24}, d_{34} übersetzt, hat sie dort mit der Berührungsebene der Fläche 2 Punkte gemeinsam, der zugehörige Teil ihrer Bildkurve muß also bei seinem Durchgange durch Δ_1 bezw. Δ_2, Δ_3 in diesem Punkte die Gerade t_1 bezw. t_2, t_3 berühren.

Geht also z. B. eine Kurve 2 mal über d_{34} hinweg, so hat ihre Bildkurve 2 durch Δ_3 hindurchgehende Zweige mit t_3 als gemeinschaftlicher Tangente.

Anders freilich, wenn eine Kurve eine Doppelpunktsgerade i n e i n e m D o p p e l p u n k t e, zunächst in einem der 3 Punkte D_1, D_2, D_3, übersetzt: An dieser Stelle braucht ihre Tangente nicht in die sonst geltende feste Berührungsebene hineinzufallen, da hier unzählig viele Berührungsebenen vorhanden sind; in diesem Falle geht die Bildkurve zwar auch noch durch das Bild des betreffenden Doppelpunktes, Δ_i $(i=1, 2, 3)$, hat dort aber i. A. t_i nicht mehr als Tangente. Geht die Kurve durch D_4, das Projektionszentrum, so hat von dessen unzählig vielen Bildpunkten auf Δ_4^2 derjenige zu gelten, welcher sich den Bildpunkten benachbarter Kurvenpunkte kontinuierlich einreiht.

Da die Doppelpunktsgerade d_{14} zusammen mit der unären Geraden $u_{14\,23}$ in einer Ebene, einer Berührungsebene unserer Fläche, liegt, die auch das Projektionszentrum D_4 enthält, so erkennt man, daß die vorhin betrachtete Spurlinie t_1 dieser Berührungsebene nichts anderes ist als das Bild der unären Geraden $u_{14\,23}$.

D i e d u r c h d i e F u n d a m e n t a l p u n k t e Δ_1, Δ_2, Δ_3 d e r B i l d e b e n e g e h e n d e n G e r a d e n t_1, t_2, t_3 s i n d d i e B i l d k u r v e n d e r 3 u n ä r e n G e r a d e n, b e z. $u_{14\,23}$, $u_{24\,13}$, $u_{34\,12}$.

§ 3.

Die Kegelschnitte der Fläche. Die ebenen Kurven 3. Ordnung.

Kegelschnitte gibt es auf unserer Fläche in einfach unendlicher Mannigfaltigkeit; sie liegen als Restschnittkurven in den Ebenen durch die 9 Geraden der Fläche. Je nachdem die zu Grunde liegende Gerade eine Doppelpunktsgerade der Fläche oder eine unäre Gerade ist, tritt noch eine Scheidung zwischen den 9 einfach unendlichen Kurvensystemen ein.

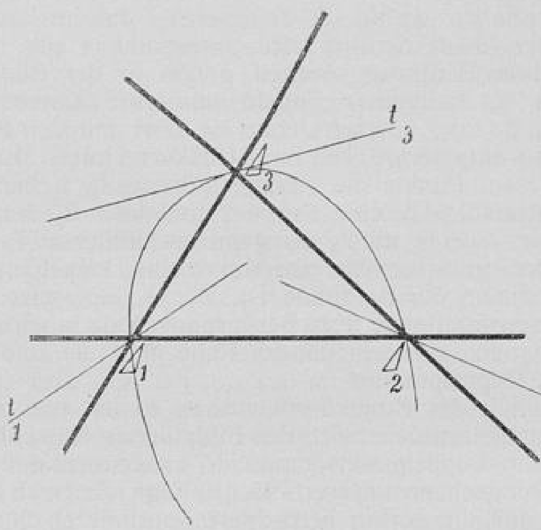
Im ersten Falle gehen alle Kegelschnitte desselben Systemes durch dieselben 2 Doppelpunkte der Fläche, nämlich durch die, welche die Doppelpunktsgerade verbindet; im Falle der unären Geraden hingegen sind die Stützpunkte der Kegelschnitte durchweg verschieden. In jedem der 9 Kegelschnittsysteme tritt ein dreimaliges Zerfallen der Kurven ein; bei dem System d_{12} z. B. sind es die 3 Geradenpaare: $d_{13}\, d_{23}$, $d_{14}\, d_{24}$, $d_{12}\, u_{1234}$; bei u_{1234} sind es die doppelt zu zählenden Geraden d_{12} und d_{34} sowie u_{1324} u_{1423}.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Bildkurven der Kegelschnitte unserer Fläche.

I. Die 3 Systeme von Kurven, welche zu den Doppelpunktsgeraden d_{14}, d_{24} und d_{34} gehören, bilden sich ab in 3 Strahlenbüschel mit bezw. Δ_1, Δ_2, Δ_3 als Scheitelpunkten.

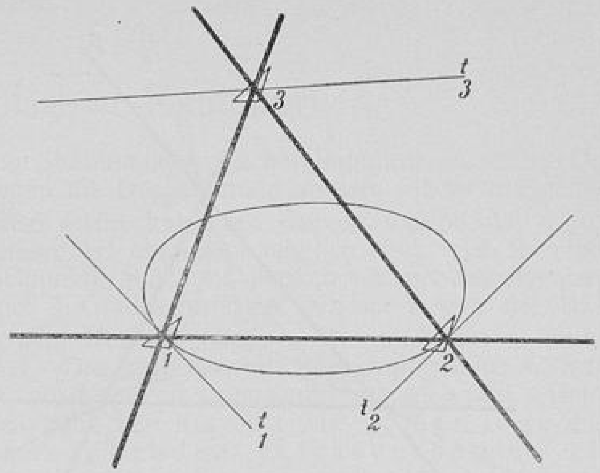
II. Die Kurven aus den 3 weiteren Systemen (d_{12}, d_{23}, d_{13}) gehen durch 2 der 3 Doppelpunkte D_1, D_2, D_3 und treffen außerdem einmal die gegenüberliegende Kante des Doppelpunktstetraeders (bez.: d_{34}, d_{14}, d_{24}); ihre Bildkurven müssen also nach all dem, was wir im vorigen Abschnitt über die Eigenschaften der Abbildung erkannt haben, jeweilig durch 2 der 3 Eckpunkte des Fundamentaldreiecks hindurchgehen und sich in dem dritten, dem Spurpunkt der getroffenen Tetraederkante, berühren. In Form eines Satzes: D i e 3 z u d e n G e r a d e n d_{12}, d_{23}, d_{13} g e h ö r i g e n K e g e l s c h n i t t s y s t e m e u n s e r e r F l ä c h e b i l d e n s i c h a b i n 3 K e g e l s c h n i t t b ü s c h e l, d e r e n K u r v e n d u r c h d i e 3 E c k e n d e s F u n d a m e n t a l d r e i e c k s g e h e n u n d j e w e i l i g i n e i n e m v o n i h n e n e i n e g e m e i n s c h a f t l i c h e T a n g e n t e b e s i t z e n.

Figur 1.
Bildkurve eines Kegelschnittes
aus dem System d_{12}.



III. Ein zu einer unären Geraden gehöriger Kegelschnitt trifft 2 der drei von dem Projektionszentrum D_4 ausgehenden Doppelpunktsgeraden, d_i, d_k, (die dritte wird von seiner unären Stützgeraden getroffen); seine Bildkurve geht also durch 2 Eckpunkte Δ_i, Δ_k des Fundamentaldreiecks und berührt in ihnen die Geraden t_i, t_k. Mit anderen Worten:

D i e z u d e n 3 u n ä r e n G e r a d e n g e h ö r i g e n K e g e l s c h n i t t s y s t e m e b i l d e n s i c h a b i n 3 K e g e l s c h n i t t b ü s c h e l, w e l c h e j e w e i l i g e i n e d e r 3 S e i t e n d e s F u n d a m e n t a l d r e i e c k s a l s g e m e i n s a m e B e r ü h r u n g s s e h n e u n d d i e b e i d e n z u g e h ö r i g e n G e r a d e n t_i, t_k a l s g e m e i n s a m e T a n g e n t e n b e s i t z e n.



Figur 2.
Bildkurve eines Kegelschnittes aus dem System der unären Geraden u_{1234}.

Zusammenfassend erkennen wir, daß sich die 9 einfach unendlichen Systeme von Kegelschnitten unserer Fläche F_{4D}^3 in 3 Strahlenbüschel und 2 mal 3 Kegelschnittbüschel (diese mit spezieller Lage ihrer 4 Grundpunkte) abbilden.

Wir betrachten den in Figur 2 angedeuteten, zur unären Geraden u_{1234} gehörigen Bildkegelschnitt-Büschel, für den Δ_1 Δ_2 gemeinsame Berührungssehne ist. Das Bild der unären Stützgeraden u_{1234} ist t_3. Auf dieser Bildkurve t_3 wird durch die Kegelschnitte des Büschels eine Involution eingeschnitten, die sich rückwärts durch Projektion aus D_4 auch auf die unäre Gerade u_{1234} selbst überträgt; wir kommen also zu dem Ergebnis: Die Stützpunkte der zu einer unären Geraden der Fläche gehörigen Kegelschnitte bilden auf der unären Geraden eine Involution.

Aus der Bildebene heraus kann man nun ohne weiteres die Treffverhältnisse irgend zweier Kegelschnitte der Fläche entscheiden:

I. Zwei Kegelschnitte, welche zu derselben Doppelpunktsgeraden unserer Fläche F_{4D}^3 gehören, d. h. durch dieselben 2 Doppelpunkte derselben hindurchgehen, haben keinen weiteren Punkt der Fläche mehr gemeinsam, ebensowenig wie sich die Strahlen eines Strahlenbüschels oder die Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels außerhalb ihrer gemeinsamen Grundpunkte noch einmal treffen können.

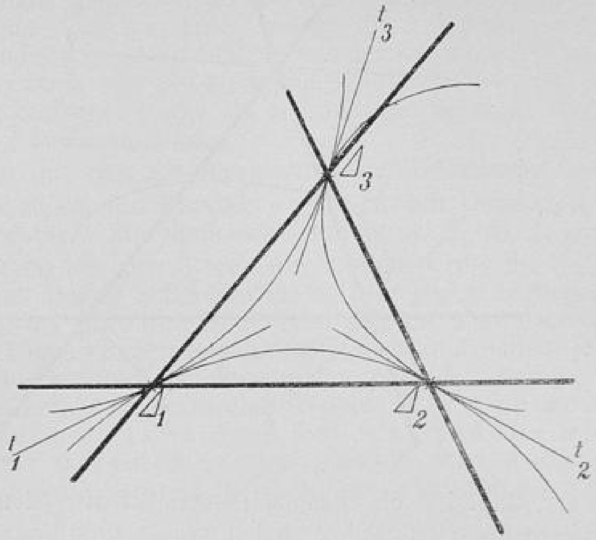
II. Handelt es sich aber um 2 Kegelschnitte, die nicht mehr beide durch dieselben 2 Doppelpunkte unserer Fläche gehen, so denke man sich in der Bildebene die 3 Strahlenbüschel Δ_1, Δ_2, Δ_3 sowie die drei Kegelschnittbüschel nach Art der Figur 1 gezeichnet und irgend zwei Kurven aus zwei dieser 6 Systeme mit einander zum Schnitt gebracht. Bei jeder der 3 möglichen Zusammenstellungen (2 Kegelschnitte, Kegelschnitt-Strahl, 2 Strahlen) ergibt sich ein außerhalb der Fundamentalpunkte liegender Schnittpunkt und es folgt der Satz: Zwei Kegelschnitte von verschiedenen Doppelpunktsgeraden treffen sich 1 mal.

III. Aus Figur 3, (S. folg. S.) in der wir der Vollständigkeit halber alle drei Bildkegelschnittbüschel der unären Geraden angedeutet sehen, lesen wir den Satz:

Zwei Kegelschnitte der Fläche 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten treffen sich, wenn sie zu derselben unären Geraden gehören, gar nicht, wenn sie aber zu zwei verschiedenen unären Geraden gehören, 2 mal.

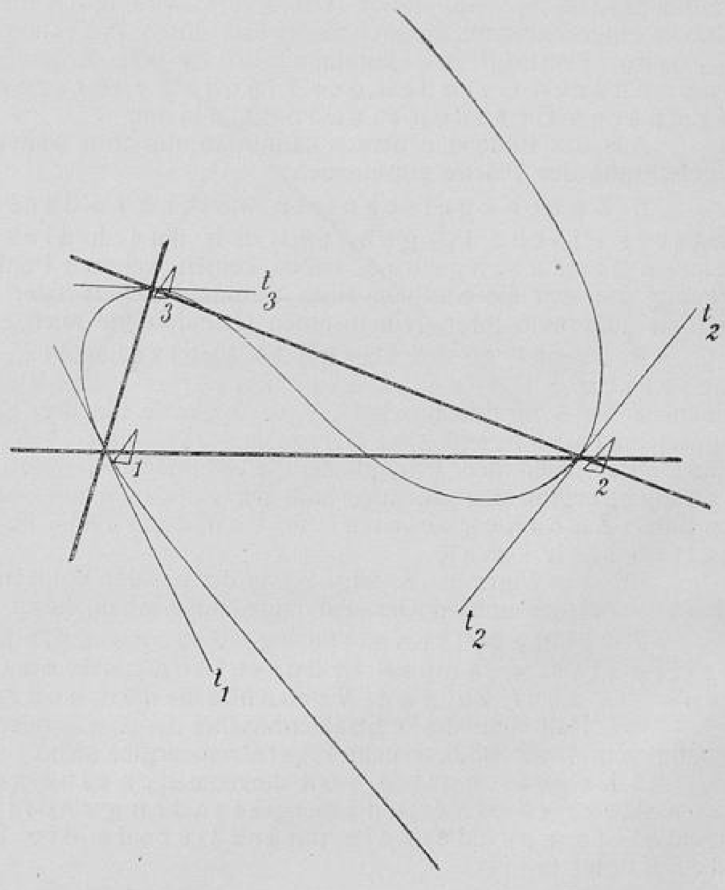
IV. Hält man die 3 Strahlenbüschel Δ_1, Δ_2, Δ_3 oder die Bildkurven nach Art der Figur 1 zusammen mit der Bildkurve in Figur 2, so ergibt sich:

2 Kegelschnitte, von denen der eine zu einer Doppelpunktsgeraden der andere zu einer unären Geraden gehört, treffen sich zweimal oder einmal, je nachdem die unäre Gerade die Doppelpunktsgerade trifft oder nicht trifft.



Figur 3.

Die ebenen Kurven 3. Ordnung unserer Fläche treffen als volle ebene Schnitte jede der 6 Doppelpunktsgeraden, insbesondere die vom Projektionszentrum ausgehenden Geraden d_{14}, d_{24}, d_{34}. *Ihre Bildkurven sind* also *ebene Kurven 3. Ordnung, die durch die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks hindurchgehen und in ihnen die Geraden* t_1, *bezw.* t_2, t_3 *berühren*, ersichtlich wiederum ein dreifach unendliches Kurvensystem (Figur 4).



Figur 4.
Bild einer ebenen Schnittkurve.

§ 4.

Die kubischen Raumkurven.

Indem wir weiter fortschreiten zum Studium der kubischen Raumkurven, soll zur Orientierung über dieselben wieder ihr Verhalten gegen die Doppelpunkte unserer Fläche maßgebend sein.

I. Zunächst beschäftigen uns also solche kubischen Kurven, welche alle 4 Doppelpunkte der Fläche enthalten, wofern Kurven dieser Art überhaupt möglich sind. Sei R^3 eine kubische Raumkurve, welche durch alle 4 Doppelpunkte geht, und denken wir uns dieselbe aus einem der Doppelpunkte, etwa D_4, durch den Kegel 2. Grades projiziert. Dieser Kegel, der D_4 als Spitze hat, schneidet unsere Fläche F^3_{4D} in einem Kurvengebilde 6. Ordnung, das D_4 zum 4fachen Punkt, D_1, D_2, D_3 zu Doppelpunkten hat. Das noch fehlende Restschnittgebilde 3. Ordnung kann ersichtlich nur das Tripel der 3 von D_4 ausgehenden Doppelpunktsgeraden sein. Damit ist dann aber die Existenz der in Rede stehenden kubischen Kurven erwiesen: *Man lege durch die 3 von einem Doppelpunkt ausgehenden Tetraederkanten einen beliebigen Kegel 2. Grades; er schneidet eine durch alle 4 Doppelpunkte der Fläche gehende kubische Raumkurve aus.* Die Zahl dieser Kurven ist ebenso wie die Zahl der erzeugenden Kegel doppelt unendlich. Sie mögen künftighin als „*die Kurven* R^3_{4D}" bezeichnet werden.

Jede Kurve R^3_{4D} kann auf 4 Weisen durch einen Kegel 2. Grades aus unserer Fläche ausgeschnitten werden, je nachdem man seine Spitze in den einen oder anderen Doppelpunkt der Fläche legt.

Noch auf andere Weise erhält man die kubischen Kurven R^3_{4D}, wenn man *durch 2 windschiefe Doppelpunktsgeraden und die sie treffende unäre Gerade* — z. B. d_{14} d_{23} u_{1423} — *eine Fläche 2. Ordnung* legt. Daß man damit aber wieder nur zu den bereits betrachteten Kurven R^3_{4D} kommt, folgt aus der Tatsache, daß jede kubische Kurve unserer Fläche, welche alle 4 Doppelpunkte enthält, als der Restschnitt eines Kegels 2. Grades mit unserer Fläche in der vorhin ausgeführten Weise betrachtet werden kann*).

Wir untersuchen nun, wie oft sich 2 durch die 4 Doppelpunkte der Fläche gehende kubische Raumkurven R^3_{4D} und $R^{3\prime}_{4D}$ schneiden. Sei K^2 der Kegel, welcher R^3_{4D} ausschneidet; $R^{3\prime}_{4D}$ trifft ihn $2.3=6$ mal. 2 mal geschieht dies in seiner Spitze und 3 mal in den 3 anderen Doppelpunkten der Fläche; die Doppelpunktsgeraden können außerhalb der 4 Doppelpunkte nicht mehr geschnitten werden, der 6. Schnittpunkt muß also auf R^4_{3D} zu liegen kommen und wir haben den Satz:

2 Kurven R^3_{4D} *und* $R^{3\prime}_{4D}$ *haben außerhalb der Doppelpunkte nur noch einen Punkt gemeinsam, im ganzen fünf.*

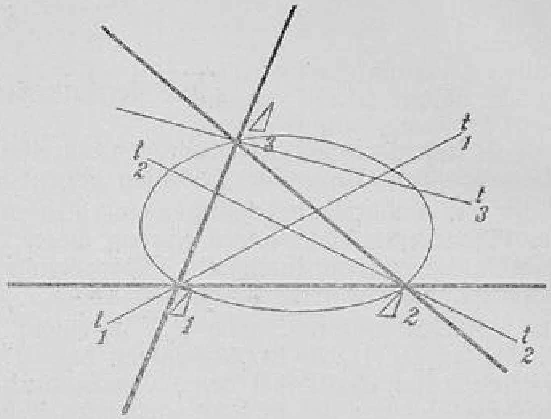
Wegen dieser 5 gemeinsamen Punkte kann man durch 2 Kurven unserer Schar eine und nur eine Fläche 2. Ordnung legen, deren vollen Schnitt mit unserer Fläche diese beiden Kurven bilden.

Uebersichtlicher gestaltet sich die Untersuchung der Lagebeziehungen wiederum durch den Uebergang in die Bildebene. *Die kubischen Kurven* R^3_{4D}, *doppelt unendlich an Zahl, bilden sich ab in das doppelt unendliche System von Kegelschnitten, welche alle die 3 Eckpunkte* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *des Fundamentaldreiecks gemeinsam haben.* Da zwei Kegelschnitte dieses Netzes sich nur noch in *einem* Punkte der Bildebene treffen können, können auch zwei unserer Kurven R^3_{4D} nur *einen* Punkt außerhalb der Doppelpunkte der Fläche gemeinsam haben.

Ebenso wie das Kegelschnittnetz ist auch unsere Schar kubischer Kurven ein lineares System: 2 Punkte unserer Fläche F^3_{4D} bestimmen eindeutig eine kubische Raumkurve.

*) Legt man durch 3 zu einander windschiefe Geraden der Fläche, z. B. d_{12}, d_{31}, u_{1423} die Fläche 2. Ordnung, so ist auch hier der Restschnitt von der 3. Ordnung und enthält alle 4 Doppelpunkte der Fläche, kann aber trotzdem keine Kurve der Art R^3_{4D} sein, schon deswegen nicht, weil das Grundgebilde hier nicht als kubische Raumkurve gilt. Wie im Falle der allgemeinen Fläche 3. Ordnung ergeben sich auch hier wiederum 3 windschiefe Geraden, Treffgeraden der Ausgangsgeraden: d_{14}, u_{1234}, d_{23} oder d_{13}, u_{1224}, d_{24}.

Fernerhin lehrt die Betrachtung der Bildebene (Figur 5), *daß die kubischen Kurven R^3_{4D} die unären Geraden der Fläche sämtlich einmal treffen.*



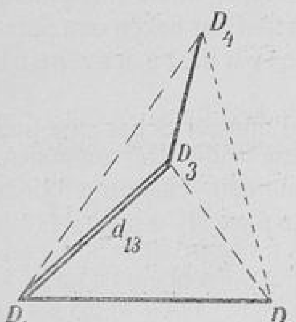
Figur 5.
Bild einer Kurve R^3_{4D}.

II. Wir fragen weiter, ob es auf unserer Fläche kubische Raumkurven gibt, die nur durch 3 Doppelpunkte gehen.

Sei R^3_{3D} eine Kurve der gedachten Art und seien D_1, D_2, D_3 die von ihr getroffenen Doppelpunkte. Dann denke man sich R^3_{3D} von einem der Punkte, etwa D_1, aus durch den Kegel 2. Grades projiziert, auf dessen Mantelfläche auch die Geraden d_{12} und d_{13} liegen müssen; der Kegel heiße K^2. Die Schnittkurve von K^2 und F^3_{4D} besteht bis jetzt aus R^3_{3D}, d_{12}, d_{13}; es fehlt also zur Ergänzung zum vollen Schnitt 6. Ordnung noch eine gerade Linie. Andrerseits muß D_1 als Doppelpunkt beider Flächen für den Gesamtschnitt ein 4 facher Punkt sein; die fehlende Gerade muß also als vierter Kurvenzweig durch D_1 hindurchgehen; es kann nur die Gerade d_{14} sein. Mit d_{14} aber kommt jetzt auch noch Punkt D_4 auf die Gesamtschnittkurve 6. Ordnung zu liegen, für die er Doppelpunkt sein muß; mithin muß noch ein anderer Teil des vollen Schnittes durch ihn gehen; es kann nur unsere kubische Kurve R^3_{3D} sein. Die 3 Doppelpunkte D_1, D_2, D_3 ziehen also von selbst den 4. Doppelpunkt nach sich*): *Es gibt auf einer Fläche 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten keine kubische Raumkurve, welche genau drei Doppelpunkte enthielte.*

III. Infolgedessen erhebt sich jetzt die Frage nach kubischen Raumkurven, die nur 2 Doppelpunkte der Fläche enthalten.

Sei R^3_{2D} eine solche Kurve, D_2 und D_4 die von ihr getroffenen Doppelpunkte. Dann denken wir uns durch R^3_{2D} und die noch fehlenden Doppelpunkte D_1 und D_3 die Fläche 2. Ordnung gelegt. Ihre Restschnittkurve ist nach einem bekannten Satze (Sturm, l. cit. S. 188) wiederum eine kubische Raumkurve; sie besitzt in unserem Falle D_1 und D_3 zu Doppelpunkten und zerfällt demgemäß in zwei windschiefe Geraden und eine ihnen gemeinsame Treffgerade. Diese gemeinsame Treffgerade kann in unserem Falle nur $D_1 D_3 \equiv d_{13}$ sein; die beiden anderen (windschiefen) Geraden aber sind *entweder* d_{14}, d_{32} *oder* d_{12}, d_{34}.



Figur 6.

Umgekehrt können wir also zu allen kubischen Kurven, die durch 2 Doppelpunkte, D_2 und D_4, unserer Fläche gehen, gelangen, *wenn wir durch die 3 Doppelpunktsgeraden d_{14} d_{23} d_{13} oder d_{34} d_{12} d_{13} die Flächen 2. Ordnung legen.*

Je nachdem wir die eine oder die andere Konfiguration von Geraden benützen, werden wir zu 2 Systemen von Kurven, R^3_{2D} und $R^{3'}_{2D}$, geführt; wir untersuchen nun, ob beide Systeme etwa identisch sind und gehen zu diesem Zweck auf ihre Bildkurven über:

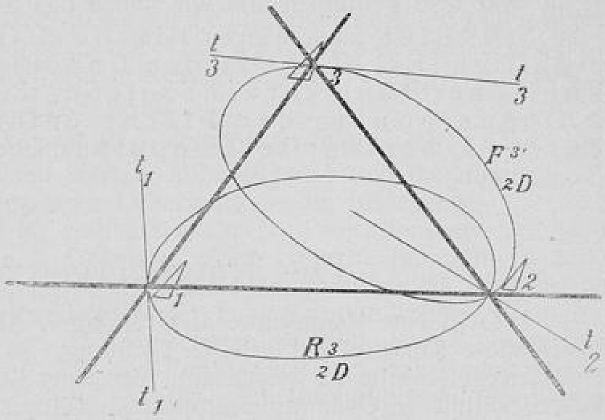
Eine Kurve R^3_{2D} schneidet ihre zerfallene kubische Ergänzungskurve d_{14} d_{23} d_{13} nach einem bekannten Satze in 5 Punkten, was dann in der Weise geschieht, daß die beiden windschiefen Geraden, hier d_{14} und d_{23} je 2 mal, die gemeinsame Transversale, hier d_{13}, 1 mal getroffen werden. Die beiden Treffpunkte von R^3_{2D} auf d_{14} sind D_4 sowie noch ein weiterer Punkt; dieser bewirkt, daß die zu den Kurven R^3_{2D} gehörigen Bildkurven den Punkt Δ_1 zum Berührungspunkt und t_1 zur Tangente haben. d_{24} trifft die Kurven der Schar bereits in D_2 und D_4, also weiterhin nicht mehr; wegen

*) Vergl. London, Math. Annal. Bd. 44. S. 410.

D_2 wird Δ_2 gemeinsamer Punkt der Bildkurven. d_{34} trifft die Kurven R^3_{2D} außer in D_4 nicht mehr, Δ_3 gehört also den Bildkurven nicht an. Wir haben somit als Ergebnis:

Die Bildkurven der kubischen Raumkurven R^3_{2D} (D_2, D_4) bilden ein doppelt unendliches System von Kegelschnitten, welche im Punkte Δ_1 des Fundamentaldreiecks die Gerade t_1 berühren und noch durch den anderen Eckpunkt Δ_2 hindurchgehen; ersichtlich ein Kegelschnittnetz von besonders spezieller Art.

Um von den Kurven R^3_{2D} zu den Kurven $R^{3'}_{2D}$ zu kommen, haben wir, wie die 3 zu Grunde liegenden Doppelpunktsgeraden lehren, nur die Indices 1 und 3 mit einander zu vertauschen. Dann folgt: Die Bildkurven der Kurven $R^{3'}_{2D}$ berühren sämtlich die Gerade t_3 im Punkte Δ_3 und gehen außerdem noch durch Δ_2. (S. Figur 7).



Figur 7.
Bildkurven zweier Kurven R^3_{2D} (D_2, D_4) aus verschiedenen Systemen.

Aus der Verschiedenheit der beiden Kegelschnittnetze wird die Verschiedenheit unserer 2 kubischen Kurvensysteme evident.

Weiterhin lehrt die Betrachtung der Bildebene:

Zwei kubische Raumkurven welche durch dieselben 2 Doppelpunkte einer Fläche 3. Ordnung mit vier Knotenpunkten gehen, schneiden sich, wenn sie demselben Kurvensystem angehören, noch in einem, wenn sie aber verschiedenen Systemen angehören, noch in 3 weiteren Punkten.

Legt man durch eine kubische Kurve R^3_{2D} des einen Systemes eine Fläche 2. Ordnung, so ist ihr Restschnitt wiederum eine kubische Kurve, die durch dieselben 2 Doppelpunkte geht und der Ausgangskurve noch 3 mal (im ganzen 5 mal) begegnet; es ist also eine Kurve $R^{3'}_{2D}$ des anderen Systemes; m. a. W.:

Die doppelt unendlich vielen Flächen 2. Ordnung, welche man durch eine kubische Raumkurve R^3_{2D} des einen Systemes legen kann, schneiden die Kurven $R^{3'}_{2D}$ des anderen Systemes aus.

Auffallend ist hierbei die Analogie zu einem bei dem einschaligen Hyperboloïd gültigen Satze, nach welchem die einfach unendlich vielen Ebenen durch eine Gerade der einen Schar die Geraden der anderen Schar ausschneiden.

Kubische Raumkurven, welche 2 Doppelpunkte unserer Fläche enthalten, ergeben sich auch noch in anderer als der vorhin (S. 10) angegebenen Weise als Restschnitte von Flächen 2. Ordnung, welche durch 2 unäre Geraden und durch eine — die eine oder die andere von ihnen treffende — Doppelpunktsgerade gehen. Bei D_2 und D_4 als Doppelpunkten sind es für die Kurven R^3_{2D} von vorhin die Geraden u_{1234} u_{1324} d_{24}, für die Kurven $R^{3'}_{2D}$ aber die Geraden u_{1423} u_{1324} d_{24}.

Eine dritte Erzeugungsweise kubischer Kurven mit 2 Doppelpunkten stützt sich auf 2 sich schneidende Doppelpunktsgeraden und die zur einen von ihnen gehörige unäre Gerade; hiernach ergeben sich die Kurven R^3_{2D}, $R^{3'}_{2D}$ (D_2, D_4) bezw. durch d_{12} d_{14} u_{1234}; d_{12} d_{14} u_{1423}.

IV. Schließlich wenden wir uns noch zur Beantwortung der Frage nach kubischen Kurven, welche nur einen oder keinen Doppelpunkt der Fläche enthalten.

Sei R^3_{01D} eine solche Kurve und denken wir uns durch diese sowie 2 der nicht getroffenen Doppelpunkte unserer Fläche eine Fläche 2. Ordnung gelegt. Ihr räumlicher Restschnitt 3. Ordnung, wiederum eine kubische Raumkurve, zerfällt wegen der beiden Doppelpunkte in 2 windschiefe Doppelpunktsgeraden und deren Treffgerade, mit den 2 Doppelpunkten als Treffpunkten, also in eine Konfiguration dreier Doppelpunktsgeraden, wie wir sie bereits im Vorhergehenden als Ausgangssystem für Kurven mit 2 Doppelpunkten erkannt haben; die Annahme einer Kurve R^3_{01D} war also irrtümlich und wir haben das Schlußergebnis:

Es gibt auf einer Fläche 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten hinsichtlich ihrer Lage zu den Doppelpunkten nur 2 verschiedene Arten kubischer Raumkurven; solche, welche alle 4 und solche, welche nur 2 Doppelpunkte der Fläche enthalten; die Gesamtheit der Kurven durch 2 bestimmte Doppelpunkte der Fläche spaltet sich in zwei Scharen.

§ 5.

Die Raumkurven 4. Ordnung I. Art.

Liegt eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art auf einer Fläche 3. Ordnung und legt man durch diese Kurve eine Fläche 2. Ordnung, so gelangt man nach einem bekannten Satze zu einem Kegelschnitte als Restschnitt, der jener Kurve 4 mal begegnet und mit ihr zusammen den vollen Schnitt 6. Ordnung ausmacht*). Daraus folgt zunächst, daß auf einer Fläche 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten Raumkurven 4. Ordnung I. Art, welche durch 3 oder 4 Knotenpunkte der Fläche einfach hindurchgehen, nicht möglich sind. Denn der ergänzende Kegelschnitt müsste ebenfalls durch jene 3 bezw. 4 Knotenpunkte hindurchgehen, was dem früher gefundenen (§ 3) widerspricht,

Unter Beherzigung des eingangs angeführten Satzes wollen wir uns bei der Aufsuchung der einzelnen Raumkurven 4. Ordnung I. Art auf die verschiedenen Kegelschnitte der Fläche stützen, ähnlich wie wir im Früheren bei Aufsuchung der Kegelschnitte von den Geraden der Fläche ausgegangen sind.

I.

Jeder Kegelschnitt K^2, welcher durch 2 Doppelpunkte der Fläche geht, führt mit Hülfe einer durch ihn gelegten Fläche 2. Ordnung zu einer Raumkurve 4. Ordnung I. Art, welche dieselben 2 Doppelpunkte enthält.

Da durch einen Kegelschnitt ∞^4 Flächen 2. Ordnung gehen, andrerseits aber die übrigen Kegelschnitte, welche dieselben Doppelpunkte wie K^2 besitzen, wieder nur zu denselben Kurven R^4_I führen, so bekommen wir eine vierfach unendliche Schar von Raumkurven 4. Ordnung I. Art, welche 2 feste Doppelpunkte der Fläche enthalten. Im ganzen gibt es 6 solcher Scharen; wir bezeichnen ihre Kurven als „Kurven R^4_{I2D}".

Fassen wir eine der Scharen ins Auge mit D_2 und D_4 als gemeinschaftlichen Doppelpunkten. 4 Punkte unserer Fläche bestimmen eindeutig eine der zur Erzeugung benützten Flächen 2. Ordnung und damit eine Kurve der Schar. Andrerseits überzeugt man sich leicht, daß sich 2 Raumkurven derselben Schar außerhalb ihrer beiden Doppelpunkte noch in 4 Punkten treffen. Es gehen hier also, wie wir sehen, zwei Kurven durch 4 Punkte der Fläche. Der Widerspruch löst sich folgendermaßen:

Die beiden Flächen 2. Ordnung F und F', welche R^4 bezw. $R^{4\prime}$ ausschneiden, haben den durch D_2 und D_4 gehenden Kegelschnitt K^2 gemeinsam und schneiden sich daher außerdem in noch einem weiteren Kegelschnitt K^*, der als Bestandteil der Schnittkurve zweier Flächen 2. Ordnung K^2 2 mal begegnet. Bis jetzt trifft also K^* unsere Fläche F^3_{4D} in 2 auf K^2 liegenden Punkten, er muß sie also in noch 4 Punkten $P_1, \ldots P_4$ treffen; diese 4 Punkte sind allen drei Flächen, F^3_{4D}, F und F' gemeinsam, sie sind also nichts anderes als die 4 Schnittpunkte

*) Sturm l. cit. S. 69.

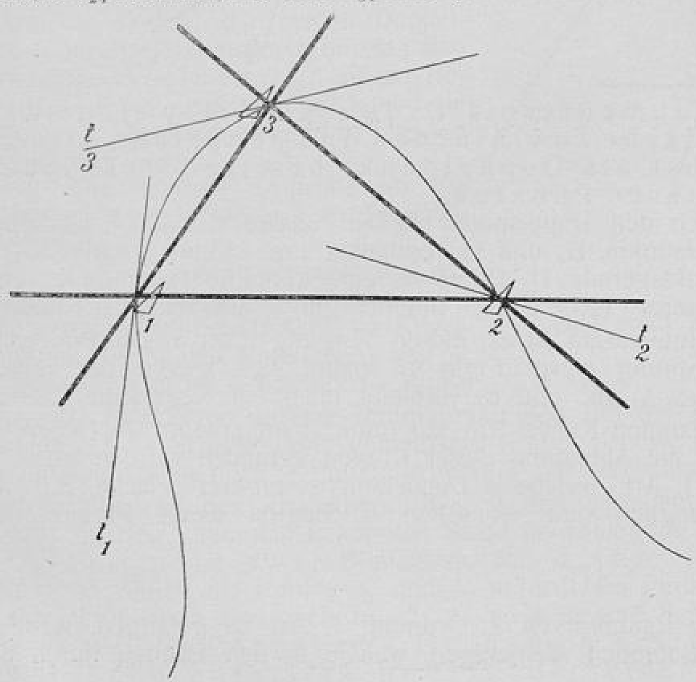
der Kurven R^4 und $R^{4\prime}$, und durch diese 4 Punkte $P_1, \ldots P_4$ gehen sogar unzählig viele Kurven unserer Schar hindurch, alle die, deren erzeugende Flächen 2. Ordnung dem Büschel mit der Grundkurve (K^2 K^*) angehören; die 4 Punkte sind von einander abhängig und reichen zur eindeutigen Bestimmung einer Kurve R^4_{12D} nicht aus.

Zwei durch dieselben 2 Doppelpunkte unserer Fläche F^3_{4D} hindurchgehende Raumkurven 4. Ordnung I. Art schneiden sich außerhalb derselben noch in 4, in einer Ebene liegenden Punkten. Bringt man diese Ebene mit irgend einem Kegelschnitte, der dieselben 2 Doppelpunkte wie die Raumkurven enthält, zum Schnitt, so liegen die sich ergebenden 6 Punkte auf einem Kegelschnitt.

Entsprechend den 6 Scharen von Raumkurven $R^4_{I\,2D}$ kann man in sechsfacher Weise zu 3 vorgegebenen Punkten unserer Fläche einen vierten, abhängigen Punkt dazufinden.

Tiefer gestaltet sich der Einblick wieder beim Uebergang in die Bildebene:

Die Kurven der Schar mögen D_2 und D_4 enthalten. Da D_4 Projektionszentrum ist, ergeben sich als Bildkurven gewöhnliche Kurven 3. Ordnung. Eine einfache Betrachtung der die Raumkurven ausschneidenden Flächen 2. Ordnung lehrt, daß die Raumkurven die Doppelpunktsgerade d_{24} keinmal, d_{14} und d_{34} aber je einmal außerhalb der Doppelpunkte treffen. Demgemäß besitzen die Bildkurven 3. Ordnung den Punkt Δ_2 des Fundamentaldreiecks als gemeinschaftlichen Schnittpunkt, während sie sich in Δ_1 und Δ_3 berühren; zugehörige Tangenten sind t_1 und t_3. (Figur 8.)



Figur 8.
Bild einer Kurve $R^4_{I\,2D}$ (D_2, D_4).

Für die Bestimmung der Bildkurven haben die drei Fundamentalpunkte die Bedeutung von $2.2+1=5$ Punkten, und da es in einer Ebene ∞^9 Kurven 3. Ordnung gibt, so haben wir also bereits das 4 fach unendliche System von Bildkurven vor uns.

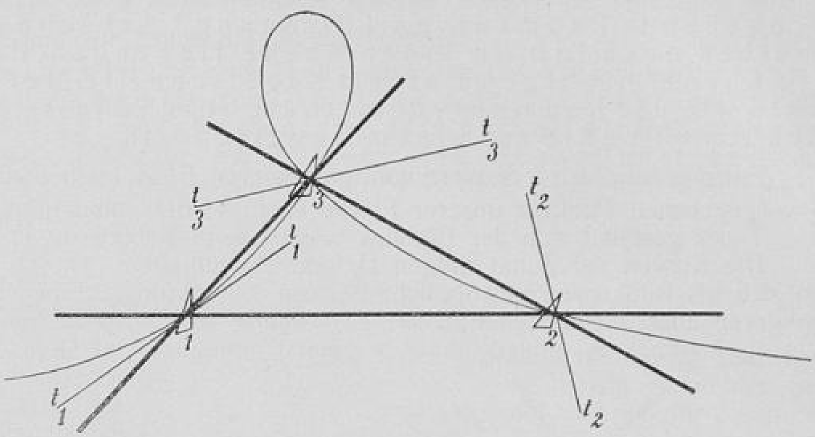
Irgend 4 Punkte der Bildebene bestimmen eine Bildkurve: 4 Punkte der Fläche bestimmen eine Raumkurve $R^4_{I\,2D}$.

Andrerseits schneiden sich zwei Bildkurven noch in $3.3-5=4$ Punkten, $\Pi_1, \ldots \Pi_4$, die zusammen mit den Punkten bei Δ_1, Δ_2, Δ_3 9 assoziierte Punkte bilden und zur eindeutigen Bestimmung nicht geeignet sind: Es ergibt sich auf eine zweite Weise, warum auf unserer Fläche 4 Punkte $P_1, \ldots P_4$ unter Umständen nicht ausreichend sind für die Festlegung einer Kurve von der Art $R^4_{I\,2D}$.

II.

Wir kehren zurück zu einem Kegelschnitt K^2, welcher 2 Doppelpunkte unserer Fläche, D_2, D_4 enthält und greifen aus den durch ihn gehenden Flächen 2. Ordnung nur diejenigen heraus, welche auch noch einen dritten Doppelpunkt, D_3, enthalten. Ihre Restschnittkurven, Raumkurven 4. Ordnung I. Art von dreifach unendlicher Mannigfaltigkeit, gehen durch 2 Doppelpunkte unserer Fläche einfach, während sie noch einen dritten Doppelpunkt der Fläche selbst als Doppelpunkt besitzen.

Sie können in dem gedachten Falle als Kurven $R^4_{1\,D_2,\,D_4,\,2.\,D_3}$ bezeichnet werden. Deren Bildkurven sind kubische Kurven, die den einen Eckpunkt des Fundamentaldreiecks, Δ_3, als gemeinsamen Doppelpunkt, Δ_1 als gemeinsamen Berührungspunkt und Δ_2 als gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. (Figur 9.)



Figur 9.
Bild einer Kurve
$R^4_{1\,D_2,\,D_4,\,2.\,D_3}$

Die Abbildung lehrt: Zwei Raumkurven 4. Ordnung I. Art, welche dieselben 2 Doppelpunkte der Fläche zu einfachen und denselben dritten Doppelpunkt der Fläche selbst als Doppelpunkt besitzen, schneiden sich noch in 9—2.2—2—1=2 weiteren Punkten.

Wollten wir neben D_3 auch noch den Doppelpunkt D_1 auf unsere Kurven 4. Ordnung bringen, so würden diese jetzt 2 Doppelpunkte, D_3 und D_1, enthalten und mithin zerfallen. Die Bestandteile könnten nur die Doppelpunktsgerade $D_3\,D_1$, sowie eine kubische Raumkurve sein, die dann durch alle 4 Doppelpunkte unserer Fläche einfach hindurchginge, also nach der früheren Bezeichnung eine Kurve der Art R^3_{4D}. Interessant ist es, diesen Vorgang noch in der Bildebene zu verfolgen: Von der Bildkurve 3. Ordnung (vergl. Figur 9) spaltet sich wegen der beiden Doppelpunkte in Δ_1 und Δ_3 die Gerade $\Delta_1\,\Delta_3$ ab, und es verbleibt noch ein Kegelschnitt durch Δ_1, Δ_2, Δ_3, der das Bild der soeben genannten Kurve R^3_{4D} sein muß; man erkennt die Uebereinstimmung mit dem, was in § 4, I über die Abbildung dieser Kurven gefunden worden ist.

Daß Raumkurven 4. Ordnung I. Art, welche 3 Doppelpunkte unserer Fläche nur als einfache Punkte enthalten, nicht möglich sind, ist schon zu Beginn dieses Paragraphen gesagt worden.

III.

Um zu einer neuen Gruppe von Raumkurven 4. Ordnung I. Art zu gelangen, wenden wir uns zu der anderen Art von Kegelschnitten, denjenigen, welche in den Ebenen durch die unären Geraden der Fläche liegen.

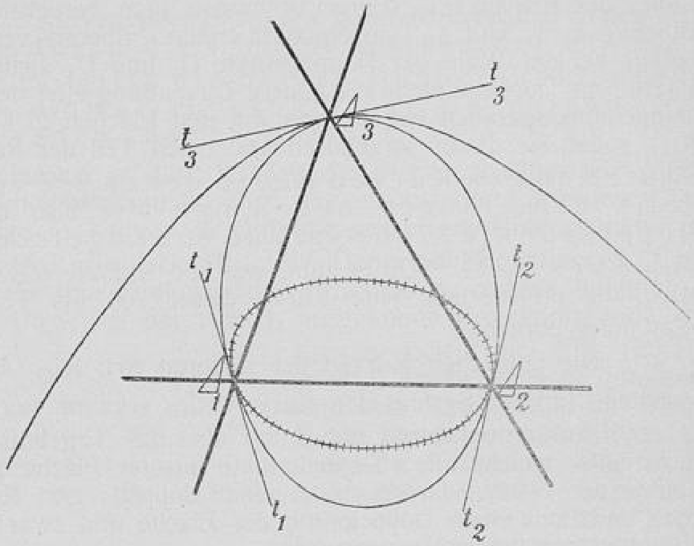
Die vierfach unendlich vielen Flächen 2. Ordnung, die man durch einen solchen Kegelschnitt legen kann, führen zu ∞^4 Raumkurven 4. Ordnung I. Art, welche im allgemeinen keinen Doppelpunkt der Fläche enthalten. Den 3 unären Geraden entsprechend gibt es 3 solcher Systeme von Kurven; sie mögen kurz als die Kurven R^4_{I0D} bezeichnet werden*).

Sei K_{12} der zu Grunde liegende Kegelschnitt, u_{1234} seine Stützgerade. Wie die Betrachtung des vollen ebenen Schnittes ($K_{12}\;u_{1234}$) lehrt, wird K_{12} von den durch D_4 gehenden Doppelpunkts-

*) Von einer ganz neuen Seite erscheint diese Erzeugungsweise der Kurven R^4_{I0D}, wenn als zur unären Geraden gehöriger Kegelschnitt im Falle u_{1234} die doppelt zu zählende Gerade d_{12} oder d_{34} gewählt wird (vergl. S. 6 Abs. 1). Erzeugende Flächen sind dann die 4fach unendlich vielen Kegel 2. Grades, welche ihre Spitze auf einer Doppelpunktsgeraden der Fläche (hier d_{12} oder d_{34}) haben und die längs dieser Geraden mit unserer Fläche die eine Berührungsebene gemeinsam haben.

geraden d_{14} und d_{24} einmal, von d_{34} gar nicht getroffen; mithin werden die zu K_{12} gehörigen Restschnittkurven 4. Ordnung von d_{14} und d_{24} einmal, von d_{34} 2 mal getroffen. Daraus folgt, daß *die Bildkurven der betrachteten Raumkurven* R^4_{10D}, *ebene Kurven 4. Ordnung, sich in den Punkten* Δ_1 *und* Δ_2 *des Fundamentaldreiecks berühren* (*mit* t_1 *bezw.* t_2 *als gemeinsamen Tangenten*), *während sie in* Δ_3 *einen Berührungsknoten**) *haben* (*mit* t_3 *als zugehöriger Tangente*). (Figur 10.) Lassen wir den Berührungsknoten auch noch in die beiden anderen Ecken des Fundamentaldreiecks fallen, so bekommen wir die Bildkurven für alle 3 Systeme.

Nach einem allgemein gültigen Satze über die Projektion von Raumkurven 4. Ordnung I. Art muß jede unserer Bildkurven 2 Doppelpunkte besitzen; andrerseits wissen wir, daß der vom Projektionszentrum D_4 ausgehende Strahl d_{34} die Raumkurven 2 mal trifft, sein Spurpunkt in der Bildebene also Doppelpunkt der Projektionskurven ist. Wegen der Konstanz der Berührungsebene längs d_{34} ist dieser Strahl aber *zweimal* als Doppelsekante zu zählen; die beiden Doppelpunkte der Projektionskurve müssen also tatsächlich in *einen*, Δ_3, einen Berührungsknoten, zusammenrücken; die Bildkurven besitzen weiterhin keinen Doppelpunkt mehr.



Figur 10.
Bild einer Kurve R^4_{10D} aus dem System der unären Geraden u_{1234}.

Eine weitere Kontrolle für die Richtigkeit der Abbildung liefert folgende Betrachtung:

Die zur unären Geraden u_{1234} gehörigen Kegelschnitte bilden sich nach Seite 7 Figur 2 ab in ein Büschel von Kegelschnitten, die in den Punkten Δ_1 und Δ_2 die Geraden t_1 bezw. t_2 berühren. Mithin haben die Bildkurven unserer Raumkurven R^4_{10D} mit der Bildkurve von K_{12} in den Fundamentalpunkten 2.2=4 Schnittpunkte gemeinsam (Figur 10), sie begegnen sich also außerhalb der Fundamentalpunkte in noch 4 Punkten, woraus wir schließen, daß auf unserer Fläche K_{12} seinen Restschnittkurven, den Raumkurven R^4_{10D}, 4 mal begegnet, ein Ergebnis, das mit dem anfangs (S. 12) zitierten allgemein bekannten Satze im Einklange steht.

Bringen wir *zwei* Bildkurven der in Figur 10 gezeichneten Art mit einander zum Schnitt, so zählen die Punkte Δ_1 und Δ_2 je für 2, der Punkt Δ_3 aber für 2.2.2=8 gemeinschaftliche Punkte; es bleiben also noch 16—2—2—8=4 weitere Schnittpunkte übrig und wir erhalten den Satz: *Zwei Raumkurven 4. Ordnung I. Art, welche keinen Doppelpunkt der Fläche enthalten und zu derselben unären Geraden gehören, schneiden sich in 4 Punkten.*

Betrachten wir hingegen die Bildkurven zweier Raumkurven aus *verschiedenen* Systemen, so ergeben sich die Fundamentalpunkte wegen der Verschiedenheit der beiden Berührungsknoten als gleichbedeutend mit 4+4+2=10 gemeinsamen Punkten und wir bekommen den Satz: *Zwei Raumkurven 4. Ordnung I. Art, welche keinen Doppelpunkt der Fläche enthalten und zu verschiedenen unären Geraden gehören, schneiden sich in 6 Punkten.*

IV.

Speziell diejenigen Flächen 2. Ordnung durch den mehrfach betrachteten Kegelschnitt K_{12}, welche wenigstens *einen* Doppelpunkt der Fläche enthalten, führen zu Kurven R^4_I, die diesen

*) Vergl. Seite 5 Absatz 10.

Doppelpunkt gleichfalls und zwar auch als Doppelpunkt enthalten. Ein zweiter Doppelpunkt aber würde, ähnlich wie vorhin (II), die Kurven R_1^4 zum Zerfallen bringen. Ob hierbei nun ein Paar sich doppelt begegnender Kegelschnitte oder eine kubische Raumkurve mit Doppelsekante entsteht, kommt auf die Wahl der beiden Doppelpunkte an: Betrachten wir wieder die (in Figur 10 abgebildeten) Kurven aus dem System u_{1234}, Restschnittkurven der Flächen 2. Ordnung durch K_{12}. Ziehen wir hier D_1 und D_2 als Doppelpunkte heran, so hat die Gerade d_{12} immer erst 2 Punkte mit den Flächen gemein und gehört ihnen also nicht an. Es entstehen daher zwei Kegelschnitte durch D_1 und D_2. Ihre Bildkurven (vergl. Figur 1) bilden zusammengenommen eine Abart des Bildes der Kurven R_{10D}^4 (Figur 10), wenn man berücksichtigt, daß jetzt an die Stelle der Berührung in Δ_1 und Δ_2 Doppelpunkte treten. Ebenso verhält es sich bezüglich der Art des Zerfallens bei der Wahl der Doppelpunkte D_3 und D_4. Hingegen tritt bei Wahl eines der 4 anderen Paare von Doppelpunkten die andere Zerspaltung ein; denn die 4 dabei in Betracht kommenden Doppelpunktsgeraden haben dann mit den Flächen 2. Ordnung drei Punkte gemein (einen auf K_{12}), sodaß sie diesen angehören und einen Teil der Restschnittkurve ausmachen. Bei den 3 Systemen von Kurven R_{10D}^4, zu denen die verschiedenen unären Geraden der Fläche führen, bekommen wir also durch Zerfall infolge zweier Doppelpunkte 3.2=6 Systeme von Kegelschnittpaaren und 3.4=12 Systeme von Kurven R_{2D}^3. Da es nun, was die Kurven R_{2D}^3 betrifft, nur 12 Systeme gibt, so ist jetzt also, wie erforderlich, jede Kurve dieser Art als Teil-Bestandteil in einem der drei Systeme R_{10D}^4 untergebracht.

Die kubischen Kurven der anderen Art, R_{4D}^3, sind bereits früher (§ 5, II) als Teil-Bestandteile in dem System der Kurven R_{12D}^4 erkannt worden.

Zusammenfassend haben wir also das Ergebnis, daß es keine Raumkurve 4. Ordnung I. Art gibt, welche alle 4 Doppelpunkte unserer Fläche enthielte. ∞^3 Kurven enthalten 3 Doppelpunkte der Fläche, darunter aber einen doppelt; ∞^4 Kurven enthalten 2 Doppelpunkte einfach, ∞^3 enthalten einen Doppelpunkt der Fläche und zwar als Doppelpunkt; ∞^4 Kurven wiederum enthalten gar keinen Doppelpunkt.

Durch 4 beliebige Punkte der Fläche gehen 9 Raumkurven 4. Ordnung I. Art: 6, welche 2 Doppelpunkte der Fläche enthalten, 3, welche keinen Doppelpunkt enthalten.

§ 6.

Die Raumkurven 4. Ordnung II. Art.

Die Raumkurven 4. Ordnung II. Art ergeben sich, wie bekannt*), mit Hülfe von Flächen 2. Ordnung, welche durch ein Paar windschiefer Geraden der Fläche hindurchgehen, und zwar begegnen die Kurven diesen beiden Geraden je 3 mal.

Nun lassen sich Paare windschiefer Geraden auf unserer Fläche in doppelter Weise herstellen: Die eine Art besteht aus den 3 Paaren windschiefer Doppelpunktsgeraden, die andere Art aus einer der 3 unären und einer der 4 sie nicht treffenden Doppelpunktsgeraden. Die erste Art enthält also 3, die zweite Art 12 Dupel windschiefer Geraden.

I.

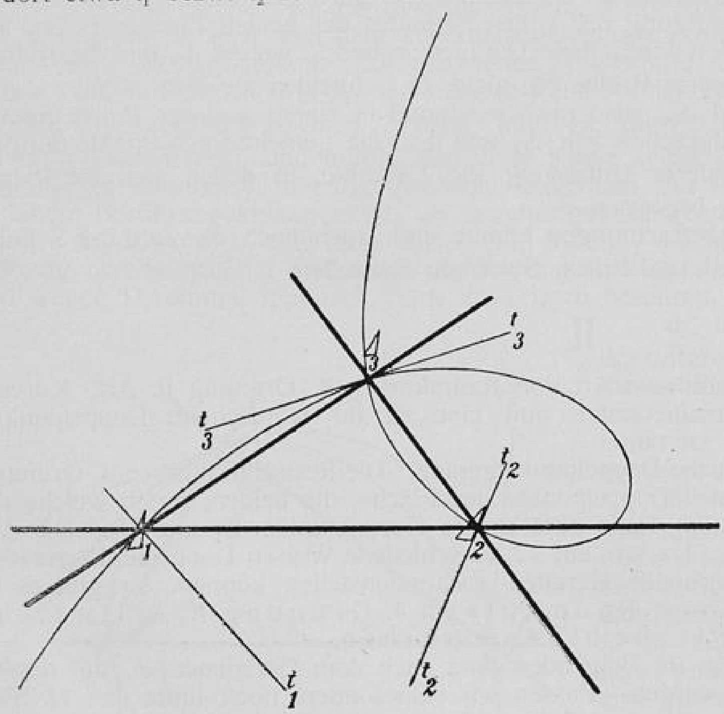
Wir betrachten zunächst ein Dupel der ersten Art, d_{12} d_{34}, und legen durch seine beiden Geraden eine Fläche 2. Ordnung. Die Restschnittkurve ist eine Raumkurve 4. Ordnung II. Art, die durch alle 4 Doppelpunkte der Fläche hindurchgeht. Solcher Kurven gibt es ∞^3; sie mögen schlechthin als Kurven R_{II4D}^4, im Hinblick auf ihre Entstehung aus der Geraden d_{12} aber auch als „die Kurven $R_{12\,II}^4$" bezeichnet werden. Da die Kurven auch der beiden noch fehlenden Systeme ein gleiches Verhalten gegenüber den Doppelpunkten der Fläche zeigen, liegt die Frage

*) Sturm l. cit. S. 67.

nahe, ob wir es nicht ähnlich wie bei den kubischen Kurven R^3_{4D} mit nur einem einzigen System zu tun haben. Die Antwort ergibt sich alsbald: Da durch eine Raumkurve 4. Ordnung II. Art nur eine einzige Fläche 2. Ordnung geht, so kann man durch eine Kurve R^4_{12II} keine Fläche mehr nach dem Geradendupel d_{13} d_{24} hinüberlegen; d. h. R^4_{12II} kann nicht mit Hülfe von d_{13} d_{24} zu Stande kommen, oder: Jedes der 3 Dupel von Doppelpunktsgeraden der Fläche führt zu seinem eigenen 3fach unendlichen System von Raumkurven 4. Ordnung R^4_{II4D}.

Die Verschiedenartigkeit der 3 Kurvensysteme tritt erst in ihrem Verhalten zu den Geraden der Fläche zu Tage; es gilt: Jede durch die 4 Doppelpunkte der Fläche hindurchgehende Raumkurve R^4_{II} trifft die beiden Doppelpunktsgeraden, zu denen sie gehört, noch einmal außerhalb der Doppelpunkte, die übrigen 4 Doppelpunktsgeraden aber nicht mehr.

Aus der Lage unserer Raumkurven zu den Geraden der Fläche erhalten wir Aufschluß über ihre Bildkurven: Da das Projektionszentrum D_4 allen Kurven angehört, projizieren sie sich sämtlich nach einem bekannten Satze in Kurven 3. Ordnung mit einem Knotenpunkt. Sei im besonderen R^4_{12II} die zu untersuchende Kurve. Da R^4_{12II} die Doppelpunktsgeraden d_{14} und d_{24} des weiteren nicht mehr trifft, so geht ihre Bildkurve durch Δ_1 und Δ_2 einfach hindurch, ohne dort etwa t_1 bezw. t_2 zu berühren. Da ferner der von D_4 ausgehende Projektionsstrahl d_{34} die Kurven noch 2 mal trifft (in D_3 und in noch einem weiteren Punkte P), so wird sein Spurpunkt in der Bildebene, Δ_3, der bereits vorhin erwähnte Doppelpunkt der Bildkurve; dabei muß derjenige der beiden Zweige der Bildkurve, der dem durch P gehenden Kurvenzweige entspricht, die Gerade t_3 als Tangente besitzen (Figur 11).



Figur 11.
Bild einer Kurve R^4_{II4D} aus dem System d_{12} d_{34}.

Zusammenfassend erkennen wir: Die Raumkurven 4. Ordnung II. Art, welche durch alle 4 Doppelpunkte einer Fläche 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten gehen, zerfallen in 3 dreifach unendliche Systeme; sie lassen sich abbilden in 3 ebensolche Systeme ebener kubischer Kurven, welche alle Eckpunkte des Fundamentaldreiecks enthalten, darunter den einen Δ_i $(i=1, 2, 3)$ als gemeinschaftlichen Doppelpunkt mit seiner zugehörigen Geraden t_i als gemeinsamer Tangente des einen der beiden Zweige.

Bei zwei Bildkurven desselben Systemes zählt der gemeinsame Doppelpunkt Δ_i für 5 Schnittpunkte, Δ_k und Δ_l zählen einfach; im ganzen haben die beiden Kurven bis jetzt 7 Punkte gemeinsam, mithin noch 2 Punkte außerhalb.

Bei zwei Bildkurven verschiedener Systeme hingegen zählt Δ_i nur für 2 Schnittpunkte, ebenso Δ_k, der Doppelpunkt der anderen Kurve, während Δ_l einfach zählt; das ergibt jetzt 5 Schnittpunkte in den Ecken des Fundamentaldreiecks, also noch 4 Punkte außerhalb.

Hieraus folgt durch den Uebergang zur Fläche: Zwei die 4 Doppelpunkte der Fläche enthaltende Raumkurven 4. Ordnung II. Art schneiden sich, wenn sie demselben System angehören, noch in 2, wenn sie aber zwei verschiedenen der drei Systeme angehören, noch in 4 weiteren Punkten.

Die Betrachtung der Bildebene lehrt fernerhin, daß jede Kurve $R^4_{II\,4D}$ 2 bestimmte der drei unären Geraden 2 mal, die dritte keinmal trifft.

Wir können nun (ähnlich dem Vorgange bei den Kurven R^3_{4D}) hier zwei Kurven R^4_{II} und $R^{4'}_{II}$ aus verschiedenen Systemen herausgreifen und durch Flächen 3. Ordnung verbinden; wegen der 8 Begegnungspunkte der in Rede stehenden Kurven gibt es einfach unendlich viele solcher Flächen; diese schneiden zur Ergänzung zum vollen Schnitt 9. Ordnung unsere Fläche aber immer nur in ein und derselben Geraden, der unären Geraden, die für beide Kurven R^4_{II} und $R^{4'}_{II}$ Doppelsekante ist; m. a. W.: Zwei Kurven $R^4_{II\,4D}$ aus verschiedenen Systemen und ihre gemeinsame unäre Doppelsekante bilden die Grundkurve eines Flächenbüschels 3. Ordnung, dem auch unsere Fläche F^3_{4D} angehört.

Auch durch rein räumliche Betrachtungen lassen sich die beiden Treffpunkte zweier demselben Kurvensystem angehörenden Raumkurven, R^4_{II} und $R^{4^*}_{II}$, erkennen: Seien F^2 und F^{2*} die beiden ausschneidenden Flächen 2. Ordnung, d_{ik} und d_{lm} die ihnen gemeinsamen windschiefen Doppelpunktsgeraden; zur Vervollständigung des vollen Schnittes der beiden Flächen F^2 und F^{2*} gehören zwei ebenfalls gegen einander windschiefe Geraden, r und s, welche d_{ik} und d_{lm} treffen. Diese Geraden, r und s, gehören unserer Fläche F^3_{4D} nicht an, schneiden sie also 3 mal. 2 mal geschieht dies bei beiden auf d_{ik} und d_{lm}, also noch je einmal in einem weiteren Punkt unserer Fläche; diese beiden Punkte sind (abgesehen von d_{ik} und d_{lm}) die gemeinsamen Punkte der drei Flächen F^2, F^{2*} und F^3_{4D}, oder, in anderer Auffassung, die 2 Punkte, in denen sich die Raumkurven $R^4_{II} = F^2\,F^3_{4D}$ und $R^{4^*}_{II} = F^{2*}\,F^3_{4D}$ begegnen.

Durch ganz ähnliche Flächenbetrachtungen könnte man auch noch die Zahl der Schnittpunkte bei Kurven $R^4_{II\,4D}$ aus verschiedenen Systemen feststellen.

II.

Wir kommen nun zu der anderen Art von Raumkurven 4. Ordnung II. Art, Kurven, welche man erhält, wenn man durch eine unäre und eine zu ihr windschiefe Doppelpunktsgerade eine Fläche 2. Ordnung legt.

Sei u_{1423} die unäre Gerade, d_{12} die Doppelpunktsgerade. Die Restschnittkurven 4. Ordnung II. Art, welche so entstehen, enthalten 2 Doppelpunkte der Fläche, die beiden, durch welche die Doppelpunktsgerade geht. Im gedachten Falle sind es die Doppelpunkte D_1 und D_2. Die Anzahl der Kurven ist 3fach unendlich. Da wir auf 12 verschiedene Weisen Doppelpunktsgeraden mit unären Geraden zu Dupeln windschiefer Geraden zusammenstellen können, so gibt es 12 3fach unendliche Systeme von Raumkurven 4. Ordnung II. Art, welche durch 2 Doppelpunkte der Fläche hindurchgehen.

Jedes dieser 12 Systeme möge im Folgenden kurz nach dem Geradendupel, mit dessen Hülfe es zu Stande kommt, benannt werden. Fassen wir insbesondere noch unter den 12 Systemen 2 solche, deren Kurven durch dieselben 2 Doppelpunkte der Fläche hindurchgehen, als „verwandte Systeme" in einer Gruppe zusammen, so bekommen wir das Schema:

I. Gruppe	$d_{12}\ u_{1423}$ $d_{12}\ u_{1324}$	$d_{34}\ u_{1423}$ $d_{34}\ u_{1324}$	IV. Gruppe.
II. Gruppe	$d_{23}\ u_{1234}$ $d_{23}\ u_{1224}$	$d_{14}\ u_{1234}$ $d_{14}\ u_{1324}$	V. Gruppe.
III. Gruppe	$d_{13}\ u_{1234}$ $d_{13}\ u_{1423}$	$d_{24}\ u_{1234}$ $d_{24}\ u_{1423}$	VI. Gruppe.

Bemerkenswert sind ferner z w e i S y s t e m e, w e l c h e i n k e i n e m i h r e r D o p p e l p u n k t e ü b e r e i n s t i m m e n, Systeme dieser Art sind in dem Tableau in nebeneinanderstehenden Karrees eingetragen; sie mögen als einander fremd bezeichnet werden. Von dieser Art sind z. B. die Systeme $d_{12}\ u_{14\,23}$ und $d_{34}\ u_{1423}$ oder $d_{12}\ u_{1423}$ und $d_{34}\ u_{13\,24}$. Zwei einander fremde Systeme können also, obwohl in den Doppelpunktsgeraden notwendig verschieden, immerhin noch in den unären Geraden übereinstimmen.

Schließlich könnte man auch noch zwei solche Kurven betrachten, welche wenigstens in e i n e m Doppelpunkt der Fläche übereinstimmen.

Wir fragen, wie oft zwei Kurven eines und desselben Systemes einander schneiden:

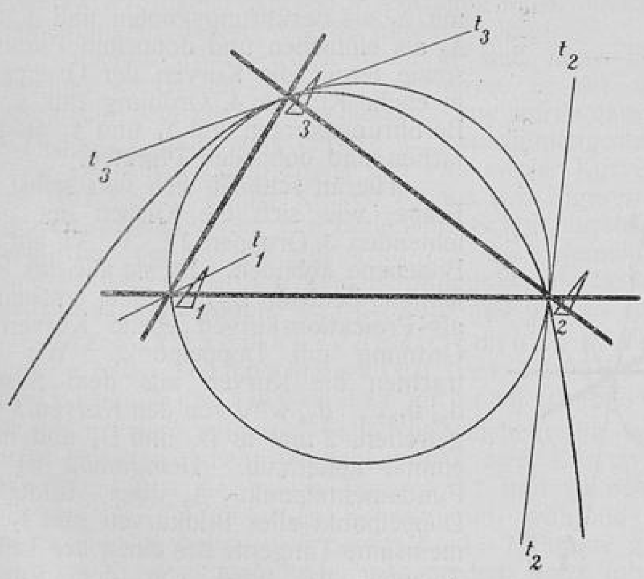
Seien R^4_{2D} und $R^{4'}_{2D}$ die beiden Kurven und d_{12}, $u_{14\,23}$ die Stützgeraden ihres Systemes; da jede der Kurven die erzeugende Fläche der anderen 8 mal trifft und dies 2.3=6 mal auf den gemeinsamen Geraden d_{12} und $u_{14\,23}$ geschieht, so bleiben noch 2 Schnittpunkte übrig, welche auf den Ergänzungsschnitt d. i. die andere Raumkurve zu liegen kommen. Wir haben also den Satz: Z w e i d u r c h d i e s e l b e n 2 D o p p e l p u n k t e u n s e r e r F l ä c h e h i n d u r c h g e h e n d e R a u m k u r v e n 4. O r d n u n g II. A r t s c h n e i d e n s i c h, w e n n s i e e i n u n d d e m s e l b e n S y s t e m a n g e h ö r e n, a u ß e r h a l b d e r D o p p e l p u n k t e n o c h i n 2 w e i t e r e n P u n k t e n.

Zur Bestätigung dieses Satzes sowie zur Vereinfachung der noch folgenden Untersuchungen möge wiederum der Uebergang in die Bildebene vollzogen werden.

Wir fassen die Kurven des Systemes $d_{12}\ u_{1423}$ ins Auge. Als Raumkurven 4. Ordnung II. Art projizieren sie sich von dem außerhalb gelegenen Projektionszentrum D_4 in Kurven 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten. Zur genaueren Feststellung ihres Verlaufes müssen wir ihr Verhalten zu den Geraden d_{14}, d_{24}, d_{34} unserer Fläche untersuchen.

Da d_{34} weder d_{12} noch u_{1423} trifft, muß sie die Fläche 2. Ordnung, welche unsere Kurve $R^4_{II\,2\,D}$ ausschneidet, und mithin also diese Kurve selbst 2 mal treffen. Dieses zweimalige Treffen unserer Raumkurve mit d_{34} geschieht außerhalb der Doppelpunkte D_3, D_4 und macht Δ_3 zu einem Berührungsknoten mit t_3 als zugehöriger Tangente.

Da d_{14} sowohl d_{12} wie auch u_{1423} trifft, trifft d_{14} die die Kurve ausschneidende Fläche 2. Ordnung bereits zweimal und somit die Kurve selbst gar nicht. Durch Δ_1 gehen also die Kurven wegen D_1 einmal hindurch, ohne etwa t_1 zu berühren.



Figur 12. Bild einer Kurve $R^4_{II\,2\,D}$ ($D_1\ D_2$) aus dem System $d_{12}\ u_{1423}$.

d_{24} trifft nur d_{12}, nicht u_{1423}, also trifft d_{24} unsere Kurven $R^4_{II\,2\,D}$ einmal. Wegen dieses Begegnungspunktes und wegen D_2 wird Δ_2 in der Abbildungsebene ein Knotenpunkt der Bildkurve, in welchem t_2 die eine gemeinschaftliche Tangente ist.

Zusammenfassend erkennen wir: Die Raumkurven 4. Ordnung II. Art, $R^4_{II\,2\,D}$, des einen unserer 12 Systeme, $d_{12}\ u_{1423}$, bilden sich ab in ebene Kurven 4. Ordnung, welche den Punkt Δ_3 als Berührungsknoten und t_3 als zugehörige gemeinsame Tangente, den Punkt Δ_2 als Knotenpunkt und t_2 als eine gemeinsame Tangente, den Punkt Δ_1 als einfachen Punkt ohne eine gemeinsame Tangente besitzen.

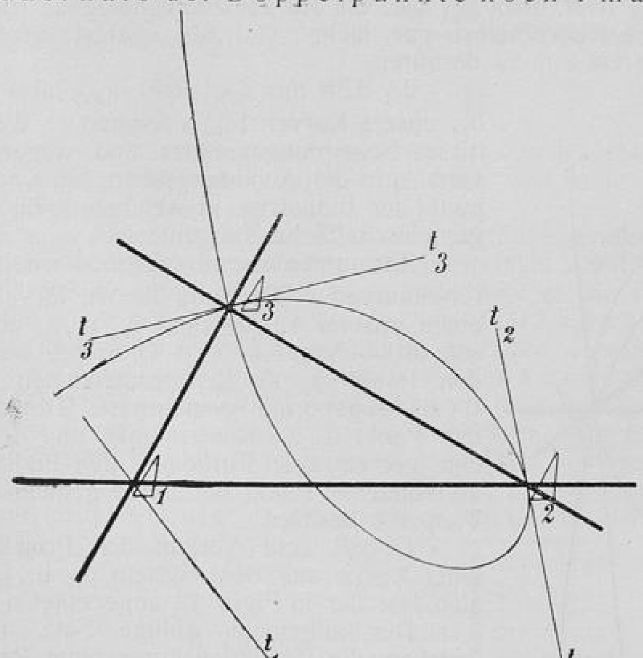
Gestalt und Verlauf der Projektion einer Kurve aus dem System $d_{12}\ u_{1423}$ ist also von der in Figur 12 angedeuteten Art.

Der allgemein gültige Satz, nach welchem die Projektionskurve einer Raumkurve 4. Ordnung II. Art 3 Doppelpunkte aufweist, hat sich in unserem Falle (bei D_4 als Projektionszentrum) dahin abgeändert, daß 2 der 3 Doppelpunkte zu einem Berührungsknoten zusammengerückt sind. Dieses Ergebnis stellt sich zwei anderen bekannten speziellen Projektionsarten an die Seite, nach welchen eine Raumkurve 4. Ordnung II. Art von einem Punkte ihrer Tangentenfläche in eine Kurve 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten und einem Rückkehrpunkt, von einem Punkte der einzigen sie enthaltenden Fläche 2. Ordnung aus in eine Kurve 4. Ordnung mit einem dreifachen Punkt (äquivalent 3 Doppelpunkten) projiziert wird.

Denken wir uns zwei Bildkurven von der in Figur 12 dargestellten Art, zugehörig zu zwei Kurven eines und desselben Systemes: Von den $4.4 = 16$ Schnittpunkten absorbiert der gemeinsame Berührungsknoten, wie von früher her bekannt ist, 8, der gemeinsame Doppelpunkt Δ_2 (wegen der gemeinsamen Tangente t_2) 5, der Punkt Δ_1 einen; im ganzen entfallen also bereits 14 Schnittpunkte, sodaß die beiden Bildkurven sich außerhalb noch in 2 Punkten schneiden müssen, was zu dem bereits oben (S. 19) angegebenen Satz über die Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven aus demselben System zurückführt.

Gehen wir von den Kurven $R^4_{II\,2\,D}$ des betrachteten Systemes $d_{12}\ u_{1423}$ über zu den Kurven $R^4_{II\,2\,D}$ des verwandten Systems $d_{12}\ u_{1324}$, so vertauschen d_{14} und d_{24} sowie d_{23} und d_{13} mit dem Wechsel der unären Geraden ihre Rolle, ohne daß in dem Verhalten der Kurven zur Geraden d_{34} eine Aenderung eintritt. Die ganze Abänderung, die durch den Uebergang zwischen den beiden Systemen herbeigeführt wird, läuft also lediglich auf eine Vertauschung der Indices $_1$ und $_2$ hinaus. Demgemäß bleibt für die Schar der neuen Bildkurven Punkt Δ_3 Berührungsknoten, während jetzt Δ_1 als Doppelpunkt und Δ_2 als einfacher Punkt erscheint.

Damit erhalten wir Aufschluss über die Zahl der Schnittpunkte zweier Raumkurven aus verwandten Systemen: Von den 16 Schnittpunkten ihrer Bildkurven absorbiert Δ_3 8, Δ_1 und Δ_2 je 2; im ganzen entfallen also 12 Schnittpunkte, sodaß noch 4 Punkte außerhalb der Fundamentalpunkte liegen müssen, denen rückwärts 4 beliebig gelegene Punkte unserer Fläche entsprechen. Wir erhalten also den Satz: Zwei Raumkurven 4. Ordnung II. Art, welche durch dieselben 2 Doppelpunkte unserer Fläche und nur durch diese hindurchgehen, ohne demselben System anzugehören, schneiden sich außerhalb der Doppelpunkte noch 4 mal.



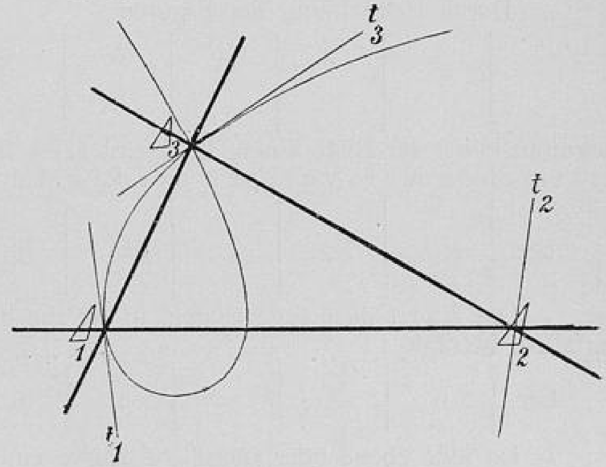
Figur 13. Bild einer Kurve $R^4_{II\,2D}$ ($D_3\ D_4$) aus dem System $d_{34}\ u_{1423}$

Aehnlich wie die Kurven der Gruppe I (vergl. das auf Seite 18 aufgestellte Tableau) projizieren sich die Kurven der Gruppe II in ebene Kurven 4. Ordnung mit Δ_1 als Berührungsknoten und Δ_2 und Δ_3 als einfachen und doppelten Punkten, sowie ferner die Kurven der Gruppe III in ebene Kurven 4. Ordnung mit Δ_2 als Berührungsknoten und Δ_1 und Δ_3 als einfachen und doppelten Punkten.

Hieran schließt sich von selbst die Frage, wie sich die Kurven der noch fehlenden 3 Gruppen IV, V, VI auf die Bildebene abbilden. Da sie alle das Projektions-Zentrum D_4 enthalten, erscheinen als Projektionskurven ebene Kurven 3. Ordnung mit Doppelpunkt. Wir betrachten die Kurven aus dem System $d_{34}\ u_{1423}$. d_{34} wird von den Kurven 3 mal getroffen, 2 mal in D_3 und D_4 und noch einmal außerhalb. Demgemäß ist der Fundamentalpunkt Δ_3 der Bildebene Doppelpunkt aller Bildkurven und t_3 gemeinsame Tangente des einen der beiden Zweige. d_{24} wird von den Kurven außerhalb D_4 nur noch einmal getroffen, d_{14} aber gar nicht. Den Punkt Δ_2 haben also alle Bildkurven zum gemeinschaftlichen Berührungspunkt mit t_2 als gemeinschaftlicher Tangente, während Δ_1 ihnen garnicht angehört. Die Bildkurven des Systems $d_{34}\ u_{1423}$ haben also den in Figur 13 gekennzeichneten Verlauf. Es ergibt sich, wie erforderlich, ein 3fach unendliches System ebener Kurven 3. Ordnung.

Zunächst führt diese Kurvenschar zur Bestätigung eines früheren Satzes: 2 Bildkurven C^3 und $C^{3\prime}$ haben in Δ_3 wegen der gemeinschaftlichen Tangente 5 Punkte gemeinsam, in Δ_2 2 Punkte, im ganzen also bereits 7 Punkte; es fehlen mithin noch 9—7=2 Schnittpunkte, welche außerhalb der Fundamentalpunkte liegen müssen; sie sind die Bildpunkte derjenigen 2 Flächenpunkte, in denen sich, wie bereits früher gefunden, zwei Raumkurven 4. Ordnung $R^4_{II\,2D}$ eines und desselben Systems außerhalb der Doppelpunkte unserer Fläche noch schneiden.

Aehnlich wie bei Gruppe I bekommt man die Bildkurven des dem System $d_{34}\ u_{14\,23}$ verwandten Systemes $d_{34}\ u_{13\,24}$ (S. die Tabelle S. 18), wenn man unter Vertauschung der Indices $_1$ und $_2$ Δ_1 und Δ_2 ihre Rolle vertauschen läßt. Das Bild einer Kurve des Systemes $d_{34}\ u_{13\,24}$ ist also von der in Figur 14 angedeuteten Art.



Figur 14.
Bild einer Kurve $R^4_{II\,2D}$ aus dem System $d_{34}\ u_{13\,24}$.

Denkt man sich Figur 13 auf Figur 14 gelegt, so erhält man nebeneinander die Bildkurven zweier Kurven verwandter Systeme, im vorliegenden Fall aus Gruppe IV. Der einzige gemeinsame Fundamentalpunkt ist hier Δ_3, der für 5 Schnittpunkte zählt und darum noch 9—5=4 Schnittpunkte außerhalb der Fundamentalpunkte erfordert, was uns zu dem vorhin gefundenen Satz über die Zahl 4 der Schnittpunkte zweier Kurven aus verwandten Systemen zurückführt.

Mit den zu Gebote stehenden Hülfsmitteln erledigt sich nun leicht auch noch die Frage nach den Schnittpunkten zweier Raumkurven aus einander fremden Systemen, d. h. zweier solcher Kurven 4. Ordnung $R^4_{II\,2D}$, welche durch zwei verschiedene Paare von Doppelpunkten unserer Fläche hindurchgehen.

Schon früher wurde bemerkt, daß diese Frage doppeldeutig ist, insofern die beiden Systeme, denen die Kurven angehören, in der unären Geraden übereinstimmen oder auch verschieden sein können. In diesem Sinne wurde damals (S. 19 oben) das System $d_{12}\ u_{14\,23}$ einerseits mit $d_{34}\ u_{14\,23}$, andrerseits mit $d_{34}\ u_{13\,24}$ zusammengestellt.

Wir betrachten zuerst den Fall zweier Kurven aus den Systemen $d_{12}\ u_{14\,23}$, $d_{34}\ u_{14\,23}$; Gestalt und Verlauf beider Kurven ist aus den Figuren 12 und 13 zu ersehen. Wir halten beide Figuren nebeneinander und zählen die Schnittpunkte ab: Δ_3 zählt inanbetracht der gemeinsamen Berührung der Kurven mit t_3 für 2.2+2=6 gemeinsame Punkte; Δ_2 zählt für 2+1=3 gemeinsame Punkte; Δ_1 ist gar kein Schnittpunkt; die beiden Bildkurven schneiden sich also außerhalb der Fundamentalpunkte 4.3—6—3=3 mal und es ergibt sich der Satz:

Zwei Raumkurven 4. Ordnung II. Art, welche durch zwei verschiedene Paare von Doppelpunkten der Fläche hindurchgehen, schneiden sich, wenn ihre Systeme in der unären Geraden übereinstimmen, in 3 Punkten.

In dem anderen Falle, in welchem die beiden fremden Systeme verschiedene unäre Geraden haben, betrachten wir zwei Kurven aus den Systemen $d_{12}\ u_{14\,23}$ und $d_{34}\ u_{13\,24}$. Wir halten jetzt die beiden Figuren 12 und 14 nebeneinander und erkennen Δ_3 wiederum als 6fachen, Δ_1 als einfachen Schnittpunkt, während Δ_2 überhaupt nicht Schnittpunkt ist. Die beiden Kurven haben also bereits 6+1=7 Punkte gemeinsam, und mithin noch 5 Punkte außerhalb der Fundamentalpunkte, was zu dem Satze führt:

Zwei Raumkurven 4. Ordnung II. Art, welche durch zwei verschiedene Paare von Doppelpunkten der Fläche hindurchgehen, schneiden sich, wenn ihre Systeme in der unären Geraden verschieden sind, in insgesamt 5 Punkten.

Auch durch rein räumliche Betrachtungen kann man zu den beiden letztgenannten Sätzen gelangen, wenn man die beiden die Kurven ausschneidenden Flächen 2. Ordnung heranzieht und die 8 Schnittpunkte der einen dieser Flächen mit der Raumkurve 4. Ordnung der anderen Fläche abzählt.

Schlußbemerkungen.

Durch Betrachtung der Figuren

1	2	4	5	7	8	10	11	12 13 14

bekommen wir im Bilde einen Ueberblick über die verschiedenen charakteristischen Kurventypen der Fläche

bez.	K^2_{2D}	K^2_{0D}	C^3	R^3_{4D}	R^3_{2D}	R^4_{12D}	R^4_{10D}	R^4_{114D}	R^4_{112D}

Die Zahl der Systeme, in welche die Kurven eines und desselben Typus weiterhin zerfallen, beträgt

bez.	6	3	—	1	6.2	6	3	3	6.2

Da jede ebene oder räumliche Kurve einem vollen ebenen Schnitt 3. Ordnung so oft begegnet, als ihre Ordnungszahl angibt, bekommen wir für die Gesamtheit der Bildkurven folgende Allgemeinregel:

Jede Bildkurve muß der Bildkurve eines ebenen Schnittes (Figur 4) so oft außerhalb der Fundamentalpunkte begegnen, wie die Ordnungszahl ihrer auf der Fläche verlaufenden Stammkurve angibt.

Wie früher (S. 5, Abs. 6) gezeigt, kann als Bild des Doppelpunktes D_4, des Projektionszentrums, jeder Punkt gelten, in welchem sein Tangentialkegel 2. Grades die Bildebene schneidet; dieser Kegelschnitt, Δ_4^2, muß durch die 3 Fundamentalpunkte Δ_1, Δ_2, Δ_3 hindurchgehen und in ihnen die Geraden bez. t_1, t_2, t_3 berühren. Hieraus ergibt sich sofort die weitere allgemeine Kontrolle:

Ebenso oft wie eine der Bildkurven den Kegelschnitt Δ_4^2 außerhalb der Fundamentalpunkte trifft, muß ihre auf der Fläche verlaufende Stammkurve durch den Punkt D_4 hindurchgehen.

Ohlau, im März 1909.

Dr. Waldemar Jaeckel.