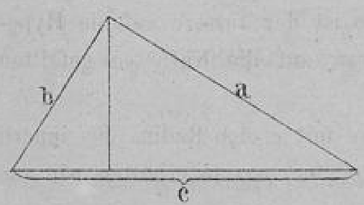
Methodologisch-mathematische Aphorismen.*)

Theil I.

Der geometrisch-algebraische Pythagoras.



Sowie sich aus dem Satze: »Wenn man im rechtwinkligen Dreiecke aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Senkrechte fällt, so ist jede der beiden Katheten die mittlere Proportionale zwischen dem an ihr liegenden Abschnitt und der ganzen Hypotenuse«, auf algebraischem Wege ergiebt, dass

$$c^2 = a^2 + b^2$$

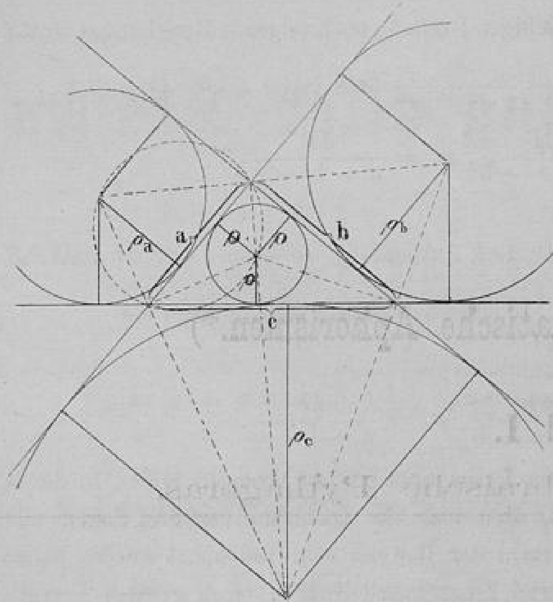
ist, ebenso kann man noch auf vielfache andere Arten zu demselben Ziele gelangen.

Den Beweisen selbst wollen wir einige ziemlich bekannte Sätze vorausschicken, wie sie Nagel in seinen »Materialien« verzeichnet hat:

»Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke die Winkel halbirt und von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der 3 Halbirungslinien auf eine Seite einen Perpendikel fällt, so ist dieser gleich dem halben Ueberschusse der Kathetensumme über die Hypotenuse.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke den rechten Winkel und die beiden an der Hypotenuse liegenden Aussenwinkel halbirt, so ist der von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte auf eine Seite gefällte Perpendikel gleich dem halben Umfange des Dreiecks.

*) Die zum Druck bereit liegende Einleitung über den Inhalt des Folgenden, über die Tendenz desselben u. s. w. scheint mir jetzt entbehrlich, weil der kundige Leser bald erkennen wird, was ganz, was nur theilweise und in welcher Hinsicht es neu ist, ob dem Wesen nach oder in der Darstellungsweise; ebenso wird sich der Ernst der Wissenschaft vom „geflügelten Worte“ leicht unterscheiden lassen.



Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke sowohl die beiden innern als auch die beiden äussern an einer Kathete liegenden Winkel halbirt und von den beiden Durchschnittspunkten der Halbirungslinien auf diese Kathete Perpendikel fällt, so ist die Summe beider Perpendikel gleich der genannten Kathete.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke sowohl die beiden innern als auch die beiden äussern an der Hypotenuse liegenden Winkel halbirt und von den beiden Durchschnittspunkten der Halbirungslinien auf die Hypotenuse Perpendikel fällt, so ist die Differenz beider Perpendikel der Hypotenuse gleich.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke sowohl an der Hypotenuse als auch an beiden Katheten die innern und äussern Winkel halbirt und auf jede der genannten 3 Seiten von dem innern und äussern Durchschnittspunkte zwei Perpendikel fällt, so ist der äussere auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel gleich der Summe der beiden äussern auf die Katheten gefällten Perpendikel und eines innern Perpendikels.«

Bezeichnen wir die Katheten mit a und b, die Hypotenuse mit c, den Radius des innern Berührungskreises mit ρ, die Radien der äusseren bezüglich mit ρ_a, ρ_b, ρ_c, so erhalten wir aus jenen Sätzen die Gleichungen:

$$\rho = \frac{a + b - c}{2};$$

$$\rho_c = \frac{a + b + c}{2};$$

$$\rho_a = a - \rho = \frac{a + c - b}{2}, \quad \rho_b = \frac{b + c - a}{2}$$

$$\rho_c - \rho = c$$

$$\rho_c = \rho + \rho_a + \rho_b.$$

Die Beweise für die ersten 2 Sätze sind sehr leicht; beim dritten beachte man, dass die Mittelpunkte der 2 Berührungskreise und die Endpunkte der Kathete Winkelpunkte eines Sehnenvierecks sind; der vierte und fünfte enthalten unmittelbare Folgerungen aus dem Vorigen.

Ausserdem finden bekanntlich in jedem beliebigen Dreiecke noch folgende Beziehungen statt:

$$\rho = \frac{2F}{a + b + c};$$

$$\rho_a = \frac{2F}{b + c - a}, \ \rho_b = \frac{2F}{a + c - b}, \ \rho_c = \frac{2F}{a + b - c},$$

worin F die Fläche des Dreiecks bedeutet.

Machen wir davon für das rechtwinklige Dreieck Anwendung, so können wir ab statt $2F$ schreiben, wodurch wir erhalten:

$$\rho = \frac{ab}{a + b + c};$$

$$\rho_a = \frac{ab}{b + c - a}, \ \rho_b = \frac{ab}{a + c - b}, \ \rho_c = \frac{ab}{a + b - c}.$$

Wie man nun bei den geometrischen Beweisen des Pythagoras gewisse Gruppen bildet, in denen der Unterschied der Figuren nur darin besteht, dass man die Quadrate der drei Seiten alle möglichen Lagen einnehmen lässt, wodurch die Anzahl der Beweise sehr bedeutend werden kann; ebenso können wir uns auch hier durch mancherlei Zusammenstellungen einen grossen Vorrath algebraischer Beweise verschaffen.

I.

$$\rho = \rho \text{ oder: } \frac{a + b - c}{2} = \frac{ab}{a + b + c}; \text{ daraus } a^2 + b^2 = c^2.$$

II.

$$\rho_a = \rho_a \text{ oder: } \frac{a + c - b}{2} = \frac{ab}{b + c - a}; \text{ u. s. w.}$$

$$\rho_b = \rho_b \text{ oder: } \frac{b + c - a}{2} = \frac{ab}{a + c - b}; \text{ u. s. w.}$$

III.

$$\rho_c = \rho_c \text{ oder: } \frac{a + b + c}{2} = \frac{ab}{a + b - c}; \text{ u. s. w.}$$

IV.

$$c = \rho_c - \rho \text{ oder: } c = \frac{a + b + c}{2} - \frac{ab}{a + b + c}; \text{ daraus } a^2 + b^2 = c^2.$$

V.

$$c = \rho_c - \rho \text{ oder: } c = \frac{ab}{a + b - c} - \frac{a + b - c}{2}; \text{ u. s. w.}$$

VI.

$$c = \rho_c - \rho \text{ oder: } c = \frac{ab}{a + b - c} - \frac{ab}{a + b + c}; \text{ u. s. w.}$$

VII.

$$a = \rho_a + \rho \text{ oder: } a = \frac{a + c - b}{2} + \frac{ab}{a + b + c}; \text{ daraus } a^2 + b^2 = c^2.$$

$$b = \rho_b + \rho \text{ oder: } b = \frac{b + c - a}{2} + \frac{ab}{a + b + c}; \text{ u. s. w.}$$

VIII.

$$a = \rho_a + \rho \text{ oder: } a = \frac{ab}{b + c - a} + \frac{a + b - c}{2}; \text{ u. s. w.}$$

$$b = \rho_b + \rho \text{ oder: } b = \frac{ab}{a + c - b} + \frac{a + b - c}{2}; \text{ u. s. w.}$$

IX.

$$a = \rho_a + \rho \text{ oder: } a = \frac{ab}{b + c - a} + \frac{ab}{a + b + c}; \text{ u. s. w.}$$

$$b = \rho_b + \rho \text{ oder: } b = \frac{ab}{a + c - b} + \frac{ab}{a + b + c}; \text{ u. s. w.}$$

X.

$$\rho_c = \rho + \rho_a + \rho_b \text{ oder: } \frac{ab}{a + b - c} = \frac{a + b - c}{2} + \frac{a + c - b}{2} + \frac{b + c - a}{2},$$

woraus wiederum die Behauptung hervorgeht.

Jetzt sollen noch einige Gleichungen angeführt werden, die ebenfalls Verwendung finden können; es mag jedoch fernerhin, wie bereits bei Nro. X. geschehen, von jeder derselben nur einmal Gebrauch gemacht werden, da wir nicht gar zu ausführlich werden dürfen.

XI.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c},$$

$$\frac{2}{a + b - c} = \frac{b + c - a}{ab} + \frac{a + c - b}{ab} + \frac{a + b - c}{ab};$$

XII.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}, \text{*)}$$

$$\frac{2}{a + b - c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{c}{ab};$$

*) h_a, h_b, h_c, sind die Höhen eines beliebigen Dreiecks auf die Seiten a, b, c.

XIII.

$\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$, und da $4F = 2ab$,

$$\frac{a + c - b}{2} + \frac{b + c - a}{2} + \frac{a + b + c}{2} = 4.\ \frac{abc}{2ab} + \frac{ab}{a + b + c};$$

XIV.

$\rho.\ \rho_a + \rho_b.\ \rho_c = bc$,

$$\frac{a + b - c}{2}.\ \frac{a + c - b}{2} + \frac{ab}{a + c - b}.\ \frac{ab}{a + b - c} = bc;$$

(Ebenso: $\rho.\ \rho_b + \rho_a.\ \rho_c = ac$ und: $\rho.\ \rho_c + \rho_a.\ \rho_b = ab$).

XV.

$$h_c = \frac{2\rho\rho_c}{\rho_c - \rho},$$

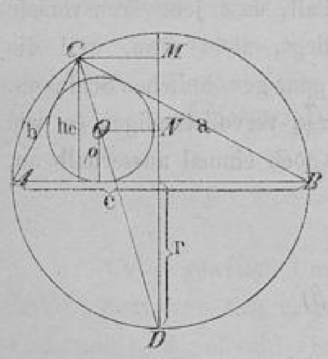
$$\frac{ab}{c} = \frac{2.\ \frac{ab}{a + b + c}.\ \frac{ab}{a + b - c}}{\frac{a + b + c}{2} - \frac{a + b - c}{2}};$$

$$\left(\text{Ebenso: } h_a = \frac{2\rho.\ \rho_a}{\rho_a - \rho} \text{ und: } h_b = \frac{2.\ \rho.\ \rho_b}{\rho_b - \rho}\right).$$

Aber nicht nur bereits fertige Formeln, sondern auch viele, unserer Aufgabe scheinbar fernliegende Lehrsätze über das Dreieck können hier gute Dienste leisten.

XVI.

»Wenn man von der Spitze (C) eines Dreiecks (ABC) an den Mittelpunkt (O) des eingeschriebenen Kreises eine Gerade zieht und diese bis zur Peripherie des umschriebenen (bis D) verlängert, so verhält sich die ganze Linie (CD) zur Verlängerung (OD) ebenso, wie die Summe ($AC + BC$) der anstossenden Seiten zur Grundlinie (AB).«



Nehmen wir nun das Dreieck ABC rechtwinklig an, AB als Hypotenuse, so erhalten wir:

$CD : OD$, oder, wie die Figur leicht erkennen lässt,

$MD : ND = (a + b) : c$,

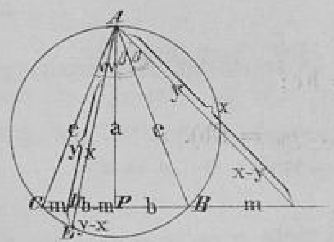
$(r + h_c) : (r + \rho) = (a + b) : c$,

$$\left(\frac{c}{2} + \frac{ab}{c}\right) : \left(\frac{c}{2} + \frac{a + b - c}{2}\right) = (a + b) : c,$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

XVII.

»Wenn man von der Spitze (A) eines gleichschenkligen Dreiecks (ABC) eine Linie (ADE) zieht, welche die Peripherie des umschriebenen Kreises (in E) und die Grundlinie (in D) scheidet, so ist der Schenkel (AC) des Dreiecks die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten (AD, AE) der gezogenen Linie.«



Ziehen wir die Linie ADE so, dass sie den Winkel CAP halbirt, so erhalten wir:

$$x : c = c : y$$

$$a : c = (b - m) : m$$

$$(cx. \ \sin v + ax. \ \sin v = ac. \ 2. \ \sin v. \ \cos v)$$

$$cx + ax = ac. \ 2. \ \frac{a}{x}$$

$$x\,(y - x) = m\,(2b - m).$$

Daraus ergeben sich die Werthe:

$$xy = c^2$$

$$m = \frac{bc}{a + c}$$

$$x^2 = \frac{2a^2c}{a + c}$$

$$xy - x^2 = 2bm - m^2.$$

Setzen wir nun die aus den ersten 3 Gleichungen gewonnenen Werthe in der 4. ein, so giebt dies:

$$c^2 - \frac{2\,a^2\,c}{a + c} = 2b. \ \frac{bc}{a + c} - \frac{b^2\,c^2}{(a + c)^2},$$

und hieraus folgt nach gehöriger Reduction wiederum:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

XVIII.

Den letzten Satz wollen wir noch einmal anwenden für den Fall, dass jene Transversale (im allgemeinen Sinne) ausserhalb des gleichschenkligen Dreiecks liegt, nicht etwa, weil die Betrachtungsweise eine wesentlich andere würde, sondern wegen des nicht ganz gewöhnlichen Schlusses.

Nehmen wir ein rechtwinkliges Dreieck an, in welchem $b < a$, vervollständigen es, wie Figur 4 angiebt, zu einem gleichschenkligen, tragen den Winkel β noch einmal ausserhalb an, u. s. w., dann erhalten wir (rechts in der Figur):

$$x : c = c : y$$

$$a : x = b : m$$

$$(ac. \ \sin \beta + cx \ \sin \beta = ax. \ 2 \ \sin \beta. \ \cos \beta)$$

$$ac + cx = ax. \ 2. \ \frac{a}{c}$$

$$m\,(m + 2b) = x\,(x - y).$$

Daraus ergeben sich die Werthe:

$$xy = c^2$$

$$m = \frac{bc^2}{2a^2 - c^2}$$

$$x = \frac{ac^2}{2a^2 - c^2}$$

$$x^2 - xy = m^2 + 2bm.$$

Durch Einsetzung der Werthe aus den ersten 3 Gleichungen in die letzte entsteht die Gleichung:

$$\frac{a^2c^4}{(2a^2 - c^2)^2} - c^2 = \frac{b^2c^4}{(2a^2 - c^2)^2} + 2b.\ \frac{bc^2}{2a^2 - c^2},$$

und hieraus nach gehöriger Reduction:

$$(a^2 + b^2 - c^2).\ (c^2 - 4a^2) = 0.$$

Da nun gemäss der Voraussetzung ($b < a$) unmöglich der zweite Factor $= 0$ sein kann, weil ja sonst $c = 2a$ würde, so erfüllt sich diese Gleichung nur dadurch, dass

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \text{ ist.}$$

Dies mag genügen. Hätte Jemand Zeit und Lust genug dazu, sämmtliche Combinationen aufzustellen, welche nach den im Früheren gegebenen Andeutungen möglich sind (vergl. Nro. I. bis IX.) und wollte er alle die Sätze, welche hierbei herangezogen werden können (ausser andern enthalten die geometrischen Werkchen von Wiegand und Adams, die auch ich benützt habe, noch reichlichen Stoff dazu) gehörig ausbeuten, dann würde er, so meine ich, diese Art von Beweisen des Pythagoras nicht nur nach Dutzenden, sondern nach Schocken zu zählen in den Stand gesetzt werden.

Theil II.

Einzelheiten aus verschiedenen Gebieten.

I.

Unter gewissen Umständen wird man, um zu nöthig scheinenden Wiederholungen u. s. w. Zeit zu gewinnen, sich veranlasst sehen, hier und dort möglichste Kürze eintreten zu lassen. So wird man z. B., obwohl die genetische Darstellung der betreffenden Formel aus mehr als einem Grunde vorzuziehen ist, sagen können:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

ist richtig, weil

$$\left(\sqrt{a \pm \sqrt{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\right)^2,$$

oder, weil $a \pm \sqrt{b} = a \pm \sqrt{b}$ richtig ist.

II.

Die Aufgabe: „Drei ganze Zahlen (Phythagoreische Dreieckszahlen) der Art zu finden, dass das Quadrat der einen gleich der Summe der Quadrate der zweiten und dritten ist“, kann man, wie auf andere, so auch auf folgende Weise lösen:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\text{oder: } x^2\,[= z^2 - y^2] = (z + y).\,\overbrace{(z - y)}^{\xi}.$$

Setzen wir, wie angedeutet, ξ statt $z - y$, so ist:

$$\begin{aligned} z + y &= \frac{x^2}{\xi} \\ z - y &= \xi \\ \hline z = \frac{x^2 + \xi^2}{2\xi} &\text{ und } y = \frac{x^2 - \xi^2}{2\xi}; \end{aligned}$$

also:

$$x^2 + \left(\frac{x^2 - \xi^2}{2\xi}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + \xi^2}{2\xi}\right)^2,$$

worin x und ξ beliebige Werthe annehmen können; oder, für ganze Zahlen, die bekannte Gleichung:

$$(2x\xi)^2 + (x^2 - \xi^2)^2 = (x^2 + \xi^2)^2.$$

III.

Vorausgesetzt, dass von den »figurirten Zahlen« wenigstens die Dreiecks- und Quadratzahlen nebst ihren summatorischen Gliedern bekannt sind, lässt sich, ohne dass man die Progressionen des zweiten Grades (arithmetischen Reihen zweiten Ranges) in ihrer Allgemeinheit zu Grunde legt, der sogenannte rechteckige Kugelhaufen ausrechnen.

Entweder: Nehmen wir, wie es gewöhnlich geschieht, n Schichten an und in der obersten Kante m Kugeln, so haben wir unter einander:

$$\left.\begin{array}{r} m \\ 2\,(m+1) \\ 3\,(m+2) \\ 4\,(m+3) \\ \vdots \\ \vdots \\ n\,(m+n-1) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \quad m \\ 2\,m + \ \ 2 \\ 3\,m + \ \ 6 \\ 4\,m + 12 \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ nm + n\,(n-1) \text{ Kugeln.} \end{array}\right.$$

Die erste Vertikalkolonne rechts enthält eine gewöhnliche arithmetische Progression, ihre Summe ist also:

$$(m + mn) \,.\, \frac{n}{2} = m \,.\, \frac{n(n+1)}{2}; \; (\alpha)$$

Die zweite, worin aber nur (n — 1) Glieder sind, enthält, nachdem der gemeinschaftliche Faktor 2 abgesondert ist, die Dreieckszahlen, ihre Summe ist also:

$$2\left(1 + 3 + 6 + \ldots \frac{(n-1)\,.\,n}{2}\right) = 2.\ \frac{(n-1)\,.\,n\,(n+1)}{1.\ 2.\ 3}; \; (\beta)$$

$$\alpha + \beta = \frac{n\,(n+1)}{1.\ 2} \,.\, \left\{m + \frac{2\,(n-1)}{3}\right\} = \frac{n\,(n+1)}{1.\ 2} \,.\, \frac{3\,m + 2\,n - 2}{3}.$$

Die interessante Vega'sche Gedächtnissregel hierfür ist wohl allbekannt.

Oder:

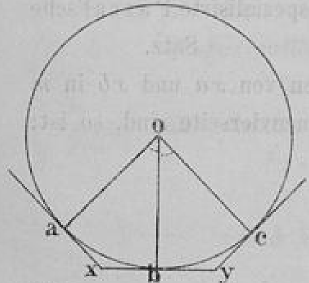
$$\left.\begin{array}{c} m + 1.1 - 1 \\ 2\,m + 2.2 - 2 \\ 3\,m + 3.3 - 3 \\ 4\,m + 4.4 - 4 \\ \vdots \\ n\,m + n^2 - n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} m - 1 + 1^2 \\ 2\,(m-1) + 2^2 \\ 3\,(m-1) + 3^2 \\ 4\,(m-1) + 4^2 \\ \vdots \\ n\,(m-1) + n^2. \end{array}\right.$$

$$S = (m-1).\ (1 + 2 + 3 + \ldots n) + (1 + 4 + 9 \ldots n^2)$$

$$= (m-1).\ \frac{n\,(n+1)}{1.\ 2} + \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1.\ 2.\ 3} \text{ u. s. w.}$$

IV.

»Wenn man die Peripherie eines Kreises in gleiche Theile theilt und durch die Theilpunkte Tangenten legt, so bilden diese ein reguläres Polygon um den Kreis.«



Beweis: Sind *a*, *b* und *c* drei benachbarte Theilpunkte, so ist nach ganz elementaren Sätzen Viereck $ab \cong bc$,

sowohl, wenn *ao* auf *bo*,

als auch, wenn *ao* auf *co* gelegt wird. Darum ist:

$\sphericalangle\, x = y$, u. s. w.

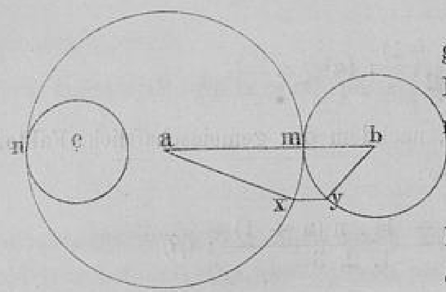
Ferner: $ax = by$

$bx = by$; d. h. xy halbirt u. s. w.

$ax = bx.$

Sind nun die halben Seiten gleich, so sind es auch die ganzen.

V.



»Die Centrallinie zweier einander berührenden Kreise geht durch den Berührungspunkt und steht auf der beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangente dieses Punktes senkrecht.« Direkter Beweis.

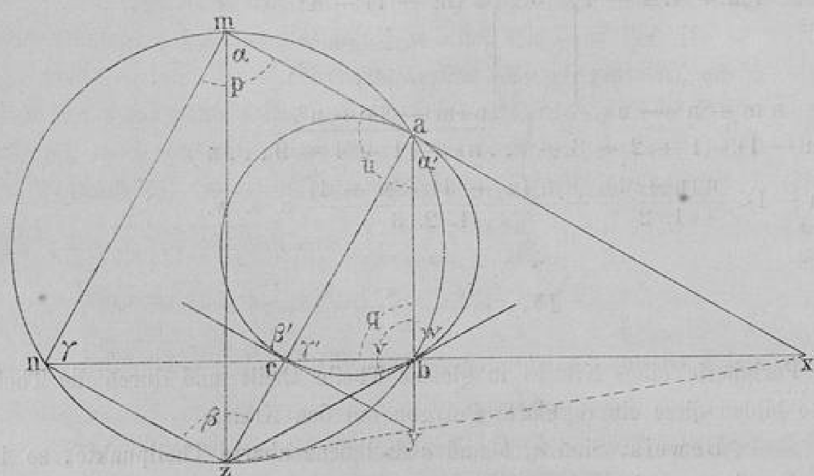
Erster Fall: Die Kreise berühren einander von aussen.

Man verbindet a und b mit m; dann ist amb kürzer als die beliebige, von a nach b gezogene Linie $axyb$, nämlich um xy. Darum ist amb gerade, u. s. w.

Zweiter Fall: Die Kreise berühren einander von innen.

Legt man in n eine Tangente an den grösseren Kreis (ausser n liegen also alle ihre Punkte ausserhalb), so ist sie erst recht Tangente zum kleineren (kann mit der Peripherie desselben um so weniger noch einen zweiten Punkt gemein haben); eine in n errichtete Senkrechte wird also c und a treffen; u. s. w.

VI.



»Wenn man in den Winkelpunkten eines Dreiecks (abc) an den umgeschriebenen Kreis Tangenten legt und die Dreiecksseiten verlängert, so liegen die 3 Durchschnittspunkte von je einer Tangente und der verlängerten Gegenseite (x, y und z) auf derselben geraden Linie.« Der spezialisirte Pascal'sche Satz.

Lege durch a, b und z einen Kreis, welcher die Verlängerungen von xa und xb in m und n trifft, und ziehe mz, nz, mn. Da nun $abzm$, $aznm$, $abnm$ Sehnenvierseite sind, so ist:

$$\begin{array}{l|c} \alpha = 180 - v = w = \alpha' & ay \parallel mz \\ \beta = 180 - p = q = \beta' & cy \parallel nz \\ \gamma = 180 - u = \alpha' = \gamma' & ac \parallel mn \\ \hline & \triangle\, acy \backsim mnz. \end{array}$$

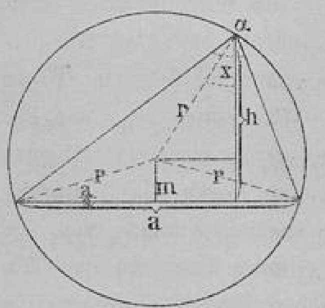
Da nun auch $\triangle$ xac $\backsim$ xmn, so erhalten wir die Proportionen

$$ay : mz = ac : mn$$
$$xa : xm = ac : mn$$
$$xa : xm = ay : mz \text{ u. s. w.}$$

Dieser Beweis ist natürlich nicht der einzig mögliche, da ja der Pascal'sche Satz selbst auch verschiedene Arten des Beweises zulässt.

VII.

Sowie es jedenfalls den Unterricht belebt, wenn bei geometrischen Constructionsaufgaben nach Möglichkeit die algebraische Auflösung mit der geometrischen verbunden und darauf hingewiesen wird, ob beide auf denselben Constructionen beruhen, oder nicht, und ob die eine oder die andere die einfachere sei; ebenso wünschenswerth scheint es auch, dass bei trigonometrischen Aufgaben die synthetische Auflösung von der allerdings wohl im Allgemeinen eleganteren analytischen nicht allzusehr in den Hintergrund gedrängt werde. Es möge hier aus den zahlreichen Beispielen wenigstens eins aufgenommen werden, in welchem die Schlussformeln congruiren; gerade diese Harmonie zwischen den verschiedenen mathematischen Disciplinen spricht das jugendliche Gemüth besonders an, was den scheinbar unnöthigen Zeitverlust reichlich aufwiegt.



»Es soll aus einer Seite a, ihrem Gegenwinkal α und der Fläche F des Dreiecks dasselbe aufgelöst werden.

Synthetisch: Aus a und α ergiebt sich r und m, aus a und F ferner h, aus r und $(h - m)$ endlich $\cos x$, d. i. $\cos(\alpha - \beta)$.

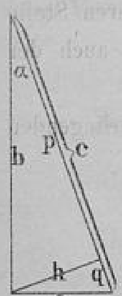
Analytisch: Man ersetzt bekanntlich in der Gleichung

$$F = \frac{a^2 \sin\beta \,.\, \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$$ das Produkt $\sin\beta . \sin\gamma$ durch

$$\frac{1}{2}\cos(\beta - \gamma) - \frac{1}{2}\cos(\beta + \gamma)$$

und bestimmt $\cos(\beta - \gamma)$, woraus das Uebrige leicht folgt.

VIII.



Ein gewisser Vorzug vieler Aufgaben besteht darin, dass sie sich auf mehreren Wegen auflösen lassen; so die folgende:

»Die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind zu bestimmen aus der Summe aller Seiten (s) und der Höhe auf die Hypotenuse (h).«

Erste Auflösung (Wittiber's Sammlung trigonometrischer Aufgaben, Nro. 286):

s und h werden durch c und 2α ausgedrückt; dadurch erhält man

$$\sin 2\alpha = \frac{4h(h + s)}{s^2}, \text{ u. s. w.}$$

Zweite Auflösung (ebendaselbst):

$$\left.\begin{aligned} h &= c \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \beta \\ \text{und } s &= 4c.\ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos 45^0 \end{aligned}\right\} \text{ giebt } \frac{h}{s}\text{; darauf:}$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{2h + s}{s\sqrt{2}}, \text{ u. s. w.}$$

Dritte Auflösung, in der nur die allergewöhnlichsten Formeln zur Anwendung kommen:

Aus $a^2 + b^2 = c^2$ erhalten wir $(a + b)^2 = [c^2 + 2ab] = c^2 + 2ch$;

ferner ist $(a + b)^2 = (S - c)^2$.

Daher: $\dfrac{s^2}{2s + 2h} = c = p + q = h \,.\, \mathit{cotg}\ \alpha + h \,.\, tg\ \alpha = h.\ \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$,

woraus, wie bei Auflösung 1, folgt: $\sin 2\alpha = \dfrac{4h.\,(s + h)}{s^2}$.

Vierte Auflösung (synthetisch):

Verlängert man die Hypotenuse nach beiden Seiten entsprechend um die Katheten, verbindet die Endpunkte der Verlängerungen mit der Spitze des rechten Winkels, so ist

$$S = x + y$$

$$= h \,.\, \mathit{cotg} \frac{\alpha}{2} + h \,.\, \mathit{cotg} \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{S}{h} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}.\ \sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2}.\ \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}.\ \sin \frac{\beta}{2}},$$

woraus, wie bei Auflösung 2, folgt: $\cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} = \dfrac{2h + s}{s\sqrt{2}}$.

Man könnte noch mehrfache Abänderungen im Einzelnen eintreten lassen.

IX.

Viele Sätze, z. B. der Pythagoreische Lehrsatz, deren Beweis an einer früheren Stelle ziemlich umständlich war, finden später auf ganz leichte Weise ihre Bestätigung. So auch der folgende:

»In einer gleichschenkligen (dreiseitigen) Ecke sind die den Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich.«

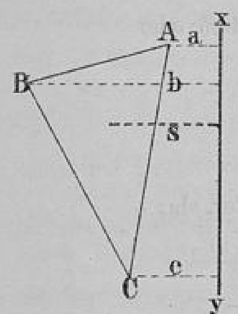
Die sphärische Trigonometrie lehrt, dass

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b.\ \cos c}{\sin b\ .\ \sin c} \text{ und } \cos \beta = \frac{\cos b - \cos a\ .\ \cos c}{\sin a\ \sin c}.$$

Werden hierin a und b gleich angenommen, so ist auch $\alpha = \beta$.

X.

Die Identität der 2 Formeln für den Guldin'schen Satz:



$$\text{Vol} = \frac{2}{3}\ (a + b + c).\ \pi\ .\ ABC$$

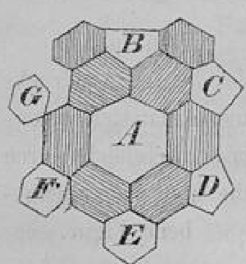
$$\text{und Vol} = 2 s \pi\ .\ ABC$$

springt in die Augen, wenn man sich die Mühe giebt, in der Geometrie gelegentlich zu beweisen, dass s das arithmetische Mittel zwischen a, b und c ist. Bekanntlich findet diese Beziehung unter a, b, c und s allgemein statt (ohne dass sie gerade $\perp xy$ sind), wenn sie einander parallel gezogen werden. Auch kann darauf aufmerksam gemacht werden, wie sich für verschiedene Lagen der Linie xy der Satz gestaltet.

XI.

Einfacher Beweis des (Euler'schen) Satzes:

»In jedem convexen Polyeder ist die Zahl der Eckpunkte (e), vermehrt um die Zahl der Grenzflächen (f), um 2 grösser als die Zahl der Kanten (k).«



Wird aus der Begrenzung eine Fläche (A) ausgeschieden, welche ringsum mit Nachbarflächen zusammenhängt, so fällt keine Kante und keine Ecke fort. Bei dem Ausscheiden aller übrigen x Flächen ($B, C, D, E \ldots.$), mit Ausschluss der letzten, geht immer, mag ihr Zusammenhang mit den übrigen sein, welcher er wolle, eine Kante mehr verloren, als Ecken, wenn nämlich das Ausscheiden immer von der Oeffnung aus geschieht. Die einfachste Ueberlegung lehrt uns dies. Bei der zuletzt übrigbleibenden Fläche ist natürlich die Zahl der verschwindenden Kanten gleich der der Ecken.

Lösen wir nun eine Fläche nach der andern aus ihrer Verbindung, so zwar, dass die zurückbleibenden noch Zusammenhang behalten, und zählen dabei Flächen, Ecken und Kanten bei ihrem Verschwinden, so erhalten wir:

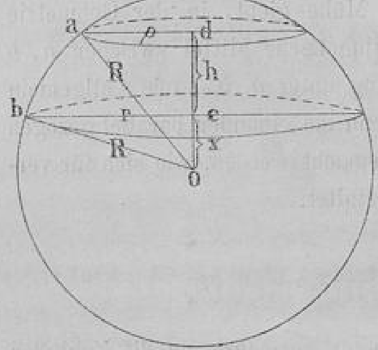
$$\left.\begin{array}{l} \text{1 Fläche, 0 Ecken, 0 Kanten,} \\ \text{x Flächen, y }\ „\ ,\ x + y\ „ \\ \underline{\text{1 Fläche, z }\ „\ ,\ \ z\ \ „} \\ x + 2 = f;\ y + z = e;\ x + y + z = k; \end{array}\right|\quad e + f = k + 2.$$

XII.

Die Formel für das Volumen einer Kugelschicht will ich der Abwechselung wegen (eine Vereinfachung wird dadurch keineswegs erzielt) auf eine dritte, von den zwei gebräuchlichen Methoden abweichende Weise herleiten.

Deuten wir die Rotationskörper, wie üblich, mit Hilfe der rotirenden Flächen an, so haben wir

$$\text{Schicht } \widehat{\mathrm{a}}\mathrm{bcd} = \text{Kegel aod} + \text{Hohlkegel } \widehat{\mathrm{a}}\mathrm{bo} - \text{Kegel bco, oder}$$



$$= \frac{\rho^2 \pi (\mathrm{h} + \mathrm{x})}{3} + \frac{2\,\mathrm{R}\,\pi\,\mathrm{h}\,\mathrm{R}}{3} - \frac{\mathrm{r}^2\,\pi\,\mathrm{x}}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3}\,(\rho^2\,\mathrm{h} + \rho^2\,\mathrm{x} + 2\,\mathrm{R}^2\,\mathrm{h} - \mathrm{r}^2\,\mathrm{x})$$

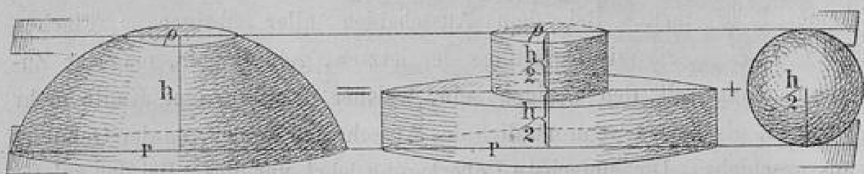
$$= \frac{\pi}{3}\,[\rho^2\,\mathrm{h} + 2\,\mathrm{R}^2\,\mathrm{h} + \mathrm{x}\,(\rho^2 - \mathrm{r}^2)], \text{ oder, da:}$$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \mathrm{R}^2 - (\mathrm{h} + \mathrm{x})^2 \\ \mathrm{r}^2 &= \mathrm{R}^2 - \mathrm{x}^2 \\ \hline \rho^2 - \mathrm{r}^2 &= -(\mathrm{h}^2 + 2\,\mathrm{h}\,\mathrm{x}) \text{ und} \\ \mathrm{R}^2 &= \mathrm{r}^2 + \mathrm{x}^2 \text{ ist,} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{3}\,(\rho^2\,\mathrm{h} + 2\,\mathrm{r}^2\,\mathrm{h} - \mathrm{h}^2\,\mathrm{x}), \text{ oder endlich, weil:}$$

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{r}^2 - \rho^2 - \mathrm{h}^2}{2\,\mathrm{h}} \text{ ist,}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3\,\rho^2\,\mathrm{h} + 3\,\mathrm{r}^2\,\mathrm{h} + \mathrm{h}^3}{2} = \frac{\rho^2 \pi .\,\mathrm{h}}{2} + \frac{\mathrm{r}^2\,\pi\,\mathrm{h}}{2} + \frac{\mathrm{h}^3\,\pi}{6}.$$



Den Inhalt des letzten Ausdrucks merkt man sich ausserordentlich leicht durch die hierneben angegebene Figur.

Wird $\rho = 0$, so hat man natürlich:

$$Sgm = \frac{\mathrm{r}^2\,\pi\,\mathrm{h}}{2} + \frac{\mathrm{h}^3\,\pi}{6};$$

in der Figur rundet sich die Schicht oben ab, ohne dass sich jedoch h ändert, und der kleine Cylinder verschwindet. Die Formel

$$Sgm = \mathrm{R}\,\mathrm{h}^2\,\pi - \frac{1}{3}\,\mathrm{h}^3\,\pi,$$

welche sich ergiebt, wenn man $2Rh - h^2$ statt r^2 setzt, möchte sich weniger empfehlen, da R dem zu berechnenden Körper eigentlich fremd ist (wenn man nicht von einer vollständigen Kugel erst das Segment abschneidet); auch ist hier der Sinn der Formel, weil nicht recht natürlich, sowie die entsprechende Zeichnung, gewiss nicht so leicht zu merken, wie oben.