Zur Winkeltheilung.

Man macht bisweilen die Erfahrung, dasz strebsame Schüler der oberen, ja wohl schon der mittleren Klassen unserer Schulen sich mit der Lösung gerade solcher Probleme befassen, die ihnen als bisher ungelöst bezeichnet worden; so die geometrische Rectification der Kreislinie und die Quadratur der Kreisfläche, die allgemeine Winkeltheilung und die Construction beliebiger regulären Polygone. Einmal geht denselben die Kenntniss davon ab, wie wahrhaft grossartig die Schöpfungen unserer mathematischen Heroen sind, um zu ermessen, was dazu gehöre, etwas entdecken zu wollen, was diesen Geistern unbekannt geblieben; dann rechnen aber wohl manche auf einen glücklichen Zufall und meinen, irgend eine gute Idee gehöre nur dazu, um diese oder jene doch so einfach erscheinende Aufgabe zu lösen, wie ihnen ja schon manchmal eine gute Idee, über die sie sich doch auch hätten keine Rechenschaft geben können, bei anderen, besonders geometrischen Aufgaben zu Statten gekommen sei. Ich könnte auch Namen nennen von Männern, die schon längst in Amt und Würde stehen, aber aus besonderer Neigung noch einige Mathematik treiben; ich weiss, dass ihnen diese unglückliche Idee, auf eine glückliche Idee zu hoffen, schon viel Zeit gekostet und sogar manche schlaflose Nacht bereitet hat.

Hauptsächlich diesen und unseren Schülern zu Liebe sind die folgenden Zeilen geschrieben. Ich hoffe, es werde mir gelungen sein, auch diesem gedachten Leserkreise ein gewisses Verständniss der Sachlage zu eröffnen; eine geringe Nachhilfe dürfte dort genügen, wo einige Schwierigkeiten hervortreten, die ich nicht wohl gänzlich vermeiden konnte. Manche Einzelheiten können auch ganz übergangen werden, ohne dass dadurch das Verständniss des Ganzen leiden wird.

§. 1.

Constructionen, die mit Lineal und Zirkel ausgeführt sind, gibt man vor allen übrigen den Vorzug, und zwar mit Recht, da diese Werkzeuge als die gleichsam ursprünglichen zur Herstellung anderer unentbehrlich sind, und da ferner schon bei dieser Herstellung Fehler begangen sein können, welche die Brauchbarkeit des neuen Instrumentes bezweifeln lassen. Es ist nun üblich, jene Constructionen allein geometrisch zu nennen, im Gegensatze zu diesen, den mechanischen. Dieser herkömmliche Gebrauch eben hat nicht selten zu Missverständnissen Veranlassung gegeben, da ein Mann aus dem nicht specifisch mathematischen Volke nur zu leicht geneigt ist, unter dem Mechanischen sich etwas Handwerksmässiges vorzustellen. Wenn aber von geometrischen Constructionen die Rede ist, so sind damit solche gemeint, wie sie in der sogenannten Geometrie der Alten vorkommen, in der die gerade Linie und der Kreis die Hauptrolle spielen. Jahrhunderte haben all' ihren Scharfsinn aufgeboten, um fast ausschliesslich die Lehre von geradlinigen Figuren und dem Kreise auszubilden und zu vervollkommnen; kein Wunder also, dass Lineal und Zirkel zu Ehren gekommen sind.

Die analytische Geometrie, erst etwa 200 Jahre alt, welche alle möglichen, irgend welchem Gesetze entsprungenen mathematischen Gebilde untersucht, verschmäht es indessen auch nicht, Instrumente an die Hand zu geben, mit denen man diese Gebilde construiren kann. Diese Constructionen nennt man, vielleicht nicht ganz passend, mechanisch, womit wieder die annäherungsweisen Constructionen und die, welche durch Probiren ausgeführt werden, nicht zu verwechseln sind. Wenn nur erst die Kegelschnitte und andere Formen aus der analytischen Geometrie im gemeinen Leben in einigen tausend Fällen zur Anwendung kämen, wer weiss, ob man den zu ihrer Darstellung erforderlichen Werkzeugen dann nicht ein bescheidenes Plätzchen neben den fast allmächtig gewordenen Usurpatoren gönnen würde. Und wer weiss, ob nicht der menschliche Genius dann noch ein allgemeines Mittel schaffen würde, mit dessen Hilfe man Cycloiden, Epicycloiden und Hypocycloiden, Cissoiden, Conchoiden und Cardioiden ebenso in einem Zuge beschreiben kann, wie Kreise mit dem Zirkel. Schon Newton's Fluxionen, denen man natürlich mit einem starren Systeme von Lineal und Zirkel nicht folgen kann, weisen darauf hin, welcher Art dieses Mittel sein müsste; was am Ellipsen-Zirkel oft getadelt wird, als sei er kein geometrisches Werkzeug, weil bei ihm der Begriff der Bewegung in den Vordergrund tritt, der doch eigentlich nur in die Mechanik gehöre, eben das ist es, wovon wir in Bezug auf Constructionswerkzeuge, so zu sagen, das Heil der Zukunft erwarten dürfen.

Es ist wohl gewiss, dass unsere heutigen Mechaniker (nicht gerade die, welche Werke über höhere Mechanik schreiben) allerlei Instrumente zu liefern vermögen, die in Bezug auf Genauigkeit in der Anwendung entweder eben so brauchbar sind wie Lineal und Zirkel, oder doch denselben nicht so sehr nachstehen, dass man hierin einen wesentlichen Unterschied machen müsste; denn auch der Gebrauch von Lineal und Zirkel leidet immer an einer gewissen Mangelhaftigkeit. Wer vermöchte gerade Linien und Kreise herzustellen, welche der mathematischen Idee entsprechen? In weit höherem Grade, als unser Wissen, ist unser Thun Stückwerk.

§. 2.

In dem Vorhergehenden glaube ich zur Genüge gezeigt zu haben, wie es mit den geometrischen und nicht geometrischen Constructionen steht. Wir brauchen uns gar nicht zu scheuen, ja ich sage, wir sind verpflichtet und gezwungen, neue Instrumente zu erdenken, wenn bei der Lösung gewisser Aufgaben die alten uns ihre Dienste versagen; denn oft fehlt uns eben nur das richtige Werkzeug hierzu, und es heiszt vom Zirkel zu viel verlangen, wenn er uns überall zum

Ziele führen soll. Ist es doch auch noch Niemanden eingefallen, mit einem Malerpinsel den Obliegenheiten eines Schneidermeisters nachzukommen.

In vielen Fällen ist es auch gar nicht schwer, in der angedeuteten Beziehung die Zahl der Erfindungen zu vermehren. Ein Beispiel mag als Beweis dienen. Es haben sich bekanntlich schon viele hundert, wenn nicht tausend oder mehr Menschen damit abgemüht, mit dem Zirkel die Kreislinie zu rectificiren, aber vergebens. Warum? Weil es durchaus mit dem Zirkel geschehen sollte. Ein anderes Werkzeug würde mit Leichtigkeit dem Wunsche der Suchenden Genüge leisten. Wenn mir auch noch kein solches bekannt geworden ist, so bin ich doch überzeugt, dass schon Viele dergleichen gefunden haben, oder doch finden würden, wenn sie wollten. Von denen, die sich mir nach kurzer Überlegung dargeboten haben, will ich eins beschreiben:

In Fig. 1 ist ab ein an der Vorderseite etwas dickes Lineal; diesem entlang wird ein gerader, kreisförmiger Cylinder cd fortgerollt, und zwar so weit, bis die Spitze p des in o auf der Oberfläche des Cylinders befestigten Pfeiles die Fläche des untergelegten Papieres in x trifft. Nun wird der Pfeil abgenommen (wobei in o wohl eine Öffnung, aber keinerlei Erhebung eintreten darf), und der Cylinder weiter vorgerollt, über die Öffnung hinweg, bis dieselbe auf der hinteren Seite wieder zum Vorschein kommt. Endlich wird der Pfeil wieder eingesetzt, dessen Spitze p bei fernerem Fortrollen die Fläche des Papieres in einem anderen Punkte y zum zweiten Male treffen wird. Die gerade Linie xy ist, wie man sofort einsieht, die rectificirte Kreislinie des senkrecht zur Axe gelegten Cylinderdurchschnitts. Dabei ist allerdings auch angenommen, dass op selbst zur Axe senkrecht angebracht ist. —

Hat man irgend eine Kreislinie auf diese Weise rectificirt, so findet für alle übrigen der Satz Anwendung: „Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich zu einander, wie ihre Radien oder Durchmesser". Hat man also zwei gerade Linien irgendwo verzeichnet, von denen die eine den Radius (oder den Durchmesser) eines Kreises, die andere die Länge der dazu gehörigen Peripherie darstellt, so können diese 2 Linien als Normallinien für jede andere Rectification benützt werden.

Über die Genauigkeit der Construction braucht man gar kein Bedenken zu tragen, wenn man das Lineal und den Cylinder genau gearbeitet annimmt; und dazu sind wir berechtigt, wenn nicht überhaupt der Gebrauch eines jeden Werkzeuges, also auch des Zirkels verworfen werden soll. Später werde ich noch ein anderes Instrument beschreiben, das zur Theilung eines beliebigen Winkels in beliebig viele Theile angewendet werden kann, unter der Voraussetzung seiner absoluten Vollkommenheit, was hier, wie ich selbst gestehen will, etwas gewagt sein dürfte.

Die Quadratur der Kreisfläche und die Construction der regulären Polygone fallen, wie wohl Jeder weisz, mit den 2 eben bezeichneten Aufgaben zusammen.

§. 3.

Ich gehe nun zu meiner Hauptaufgabe über, zur Beantwortung der Frage, ob und wie sich ein Winkel in gleiche Theile zerlegen läszt. Dass man einen Winkel in 2, daher auch in 4, 8 (gleiche) Theile etc. theilen kann, lehrt jede Planimetrie; ebenso kann man speciell einen rechten Winkel in 3, 5, 6, 10, 15, 17 Theile*) theilen und die regulären Polygone mit der betreffenden Anzahl von Seiten in den Kreis zeichnen. Zu weiteren Theilungen aber hat man mit Hilfe des Zirkels und Lineals noch nicht gelangen können, und es scheint, als ob man auf andere Hilfsmittel denken müsse.

Da hat man sich nun zunächst bemüht, die Dreitheilung eines beliebigen Winkels zu ermöglichen, und mit Benützung der Kegelschnitte ist dies auf vielfache Weise gelungen. Von drei solchen Lösungen habe ich bis jetzt Kenntniss erhalten; zwei derselben sind in dem Lehrbuche der höheren Mathematik von Burg, Wien 1833, 2. Theil, Seite 321, enthalten, die dritte bildet eine Programm-Abhandlung (Oppeln, 1830) des jetzigen Professors Herrn Uhdolf in Grosz-Glogau. Die letztere empfiehlt sich durch ihre Einfachheit, da nur die Scheitelgleichung der Hyperbel als bekannt vorausgesetzt, übrigens Alles auf elementare Weise abgemacht wird. Seitdem mögen wohl noch manche andere Lösungen erfolgt sein, und man findet jetzt in Lehrbüchern der höheren Geometrie diese Dreitheilung schon als blosze Übungsaufgabe, ohne Auflösung, hingestellt. Wenn aber diese Sache auch nicht mehr neu ist, so will ich doch hier eine Auflösung hinzufügen, die von einem unserer Schüler, ganz ohne mein Zuthun, gefunden worden ist.

Aufgabe: Der beliebige Winkel abc (α) ist in drei gleiche Theile zu theilen. (S. Fig. 2).

Auflösung: Von einem Punkte a des einen Schenkels fälle ich eine Senkrechte auf den anderen (am $\perp$ bc) und schlage von b aus nach dem geometrischen Orte der Spitzen aller Dreiecke, in welchen die Basis (ab) und die Differenz der ihr anliegenden Winkel ($\delta = R - \alpha$) konstant ist**), mit dieser Basis einen Kreis; den Durchschnittspunkt d verbinde ich mit b und behaupte, dasz $\angle$ dbc (z) $= \frac{\alpha}{3}$ ist.

*) Es scheint mir empfehlenswerth, die letzte Theilung, diese merkwürdige Erfindung unseres groszen Gauss, den Schülern mitzutheilen, da dies, wie ich aus Erfahrung weisz, denselben eine sehr angenehme Abwechselung bietet, und der von Ampère gelieferte geometrische Beweis nicht so schwer ist, dasz er nicht von einer Anzahl der Schüler verstanden werden könnte. Dasz man denselben in das gewöhnliche Lehrpensum aufnehmen solle, ist damit gar nicht gesagt. Aber es giebt gewisse Stunden, z. B. kurz vor oder nach den Ferien, die man mit dergleichen Extravaganzen nach meiner Meinung ganz zweckmäszig verwenden kann. Nicht wohl geneigt, für die weisen Lehren ihres Handbuches sich zu begeistern, sammeln doch die Schüler in solchen Stunden ihre Aufmerksamkeit, wenn es gilt, etwas Auszergewöhnliches zu erfahren, wie Mittheilungen aus dem Leben und Streben groszer Männer, oder etwas über die Lösung gewisser berühmt gewordener Probleme. Wenn es ihnen dabei freilich auch Hauptsache ist, dass sie dies nicht zu lernen haben, so wird sich ein gewisser Nutzen sicherlich auch hierbei herausstellen, da es nach dem Ausspruche berühmter Pädagogen auf der Schule nicht nur darauf ankommt, die Zöglinge zu speisen und zu tränken, sondern auch darauf, dieselben hungrig und durstig zu machen. Warum sollten die Schüler nicht auch wenigstens oberflächliche Kenntniss nehmen dürfen von Miquel's Satz über das Fünfeck, von Pascal's Satz über das Sechseck im Kreise, oder von dem Probleme des Pappus?

**) Man weisz, dass dieser Ort eine gleichseitige Hyperbel ist, in welcher die als unveränderlich gegebene Basis (ab) ein Durchmesser ist. Die Lage der Hyperbel nebst Hauptaxe und Asymptoten habe ich mir mit durchbrochenen Linien anzudeuten erlaubt; ebenso habe ich noch einige andere solche Linien beigegeben, mit deren Hilfe man bald erkennen wird, was der Durchschnittspunkt (D) des Kreises mit dem anderen Aste der Hyperbel bedeutet.

Beweis: Verbinde ich d mit a und fälle bf $\perp$ ad, so ist $\triangle$ abd $\sim$ had, weil $\angle$ bda beiden gemeinsam und $\angle$ had = abd nach Construction. Da $\triangle$ abd gleichschenklig (ab = bd nach Construction), so auch $\triangle$ ahd, also $\angle$ adh = ahd. Nun ist $\angle$ bhm = ahd als Scheitelwinkel, also

$$\angle \text{ bad} = \text{bda} = \text{bhm};$$

daher sind auch ihre Complemente einander gleich:

$$\angle \text{ x} = \text{y} = \text{z},$$

d. h. $\angle\ \alpha$ ist in drei gleiche Theile getheilt.

Zusatz: Verlängere ich ab über b hinaus, bis sie die Peripherie des in voriger Auflösung geschlagenen Kreises trifft, in g, beschreibe ferner von d mit ab einen Kreisbogen nach dem freien Schenkel des $\angle\ \alpha$ und verbinde den Durchschnittspunkt k mit d und g, so entsteht ein gerades Trapez (bgkd); in dem Kreise, der sich bekanntlich um ein solches legen läszt, stehen die Peripheriewinkel, welche zu bd, bk, kg gehören, im Verhältnisz von 1 : 2 : 3.

Beweis: Ziehe ich noch dg, so ist $\angle$ bgd = bdg, weil bd = bg nach Construction, und $= \frac{\alpha}{3}$ als Peripheriewinkel zu $\angle$ abd $\left(= \frac{2}{3}\,\alpha\right)$; ferner $\angle$ dkb = z $= \frac{\alpha}{3}$, weil bd = dk nach Construction. Nun ist

$$\triangle \text{ gbd} \cong \text{bdk},$$

wie sich leicht zeigen läszt, und da diese Dreiecke dieselbe Grundlinie (bd) haben, so muss auch ihre Höhe gleich sein, d. h.

$$\text{gk} \nparallel \text{bd},$$

oder das Vierseit bgkd ist ein Trapez; gerade ist dasselbe, weil ja jede der beiden Seitenlinien gleich bd gemacht worden ist. — Da endlich der nach unten gelegene, in der Figur nicht gezeichnete Peripheriewinkel (p) über der Sehne gk das Supplement zu $\angle$ gbk ist, also

$$\angle \text{ p} = \text{bgk} + \text{bkg} = \tfrac{2}{3}\,\alpha + \tfrac{1}{3}\,\alpha = \alpha,$$

so ergibt sich daraus die Behauptung von selbst.

Folgerung. Wäre zufällig gk die Seite eines regelmäszigen Nseits, S_n, so würden bk und bd, wenn $\angle$ abc $<$ R, $= S_{2n}$ und S_{3n} sein.

§. 4.

Sehen wir nun zu, ob wir mit Benützung anderer Hilfsmittel diese Dreitheilung nicht auf einfachere Weise bewirken können, die jedem einleuchten wird, der die ersten Elemente der Geometrie überwunden hat. Hierzu schicke ich einen Satz voraus, der zwar nicht neu, aber doch vielleicht nicht hinlänglich bekannt ist.

Ist (Figur 3) das äuszere Stück der Sekante qα, nämlich pα, bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung des Durchmessers og gerechnet, gleich dem Radius des Kreises (αp = ap), so ist $\angle$ oaq = 3αap (= 3aαp), oder Bogen oq = 3pg.

Der sehr einfache Beweis kann übergangen werden.

I. Construction. Ist (Fig. 4) $\angle$ oaq fest, so wie aq = ap = αp constant, letztere beide beweglich, pq und aα variabel, und bewegen sich Punkt α und q in den angedeuteten Rinnen, so wird, wenn man α so lange (hier nach rechts) geschoben denkt, bis das Knie bei p verschwunden, also αpq gerade geworden ist, der $\angle$ αap oder aαp $= \frac{1}{3}$ oaq, womit die Dreitheilung des Winkels oaq vollführt ist.

II. Constructon. Man kann auch den Winkel oaq variabel, hingegen αpq stets eine gerade Linie sein lassen. Ist also (Figur 5) oa und seine Verlängerung fest, und bewegt man Punkt α fort, so wird das Verhältnisz der beiden Winkel oaq und paα (3 : 1) immerwährend festgehalten, und die Bewegung kann leicht so weit fortgesetzt werden, bis $\angle$ oaq so grosz ist, als der gegebene zu theilende Winkel. In dem Momente, wo dies eintritt, musz der Schenkel aq oder ein anderer der beweglichen Theile festgehalten werden, was nicht schwer ist. (Vergleiche § 6.)

§ 5.

In ähnlicher Weise läszt sich jede andere Theilung ausführen, z. B. die Siebentheilung. Ist (Figur 6) ab = bc = cp = pα (wir nennen sie constante Radien und bezeichnen sie mit r), so wird bei jeder Verschiebung von α immer der Winkel oaq = 7bac bleiben, wenn man nämlich dafür sorgt, dass auch Dreieck apq immer gleichschenklig, aq = ap bleibt, was stets möglich ist (diese Linien nennen wir variable Radien und bezeichnen sie mit ρ). Da ich aber später (§ 6) noch eine andere Construction angebe, bei welcher auch dieser kleine Übelstand wegfällt, so überlasse ich es dem Leser, darüber nachzudenken, durch welches Hilfsmittel aq gezwungen werden kann, dem selbst veränderlichen ap immer gleich zu bleiben.

Bei diesen Constructionen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dasz der Winkel oaq nicht zu grosz werde; sonst würde einmal ap mit aq zusammen, oder gar links von aq fallen, was für ein deutliches Verständnisz und auch für die verlangte Herstellung eines Apparates, der in allen seinen Theilen eine leichte Bewegung gestatten soll, sicherlich seine Schwierigkeit haben würde. Diese stillschweigende Voraussetzung ist aber auch gerechtfertigt; denn die Möglichkeit einer beliebigen Theilung ist immer vorhanden, ohne dasz man nöthig hat, die zwei bewuszten Winkel über einander rücken zu lassen. Ist nämlich der zu theilende Winkel zu grosz, so kann man ja seine Hälfte, oder den 4., 8., 16. ..... Theil davon zerlegen, wie es verlangt wird, und ein solches nach der Zerlegung erhaltenes Theilchen dann wieder 2, 4, 8, 16... mal nehmen.

Die Grenze, bis zu welcher die Grösze des zu theilenden Winkels oaq gehen darf, ist natürlich leicht zu bestimmen. Höchstens darf, und dann fällt ap mit aq zusammen, der Winkel oaq bei der n-Theilung $= \frac{2nR}{n+1}$ sein, da $\frac{2nR}{n+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2nR}{n+1} = 2R$ ist.

Mag nun auch, wie bereits bemerkt, die praktische Ausführung nicht unerhebliche Schwierigkeiten bieten, unsere Ideen reichen weiter als die Praxis. Wir lassen also in Gedanken die 2 Winkel über einander weggehen und wollen uns wenigstens für ein bestimmtes Beispiel davon überzeugen, dasz das Verhältnisz der 2 Winkel stets dasselbe bleibt, wenn sich auch die Schenkel beliebig weit gedreht haben.

Wählen wir hierzu einmal die Fünftheilung. (Warum hier, wie bei der 9-, 13-Theilung etc., der erste constante Radius ab auf aα, nicht auf ap gelegt wird, ist wohl klar). Ist (Fig. 7) die Drehung so weit fortgesetzt, dasz Winkel oaq schon allein grösser als 2R geworden ist, so ist auch jetzt, wenn ab = bp = pα und aq = ap bleibt,

$$
\begin{aligned}
\angle\ oaq &= 2R + n = 2R + w - m \\
&= 2R + 2x - (x + y) = 2R + x - y \\
&= 2R + x - (2R - 2w) = 2R + x - 2R + 4x \\
&= 5x, \text{ wie es sein soll.}
\end{aligned}
$$

Untersuchen wir noch, wie es steht, wenn die Drehung soweit fortgesetzt ist, dasz der vorher letzte constante Radius $p\alpha$ schon über seinen Vordermann hinweggegangen ist.

Es ist auch hier (Fig. 8) wieder:

$$
\begin{aligned}
\angle\ oaq &= 2R + n = 2R + v - m \\
&= 2R + (y + w) - (x - y) = 2R + 2y + w - x \\
&= 2R + 2\,.\,(2R - 2w) + w - x = 6R - 3w - x \\
&= 6R - 3\,.\,(2R - 2x) - x \\
&= 5x, \text{ wie es sein soll.}
\end{aligned}
$$

Dem Vorigen entsprechend können nun mancherlei Aufgaben gestellt werden. Es mögen ihrer zwei genügen.

1. Aufgabe. Wenn (Fig. 9) mit einem constanten Radius (ab) nach den Schenkeln eines gegebenen Winkels w (xay), von dem Scheitel a angefangen, abwechselnd vier Kreisbogen beschrieben werden, so dasz also

$$ab = bc = cp = p\alpha,$$

und einer mit ap von a aus nach der Verlängerung von $p\alpha$, so dasz

$$aq = ap,$$

dann ist zu beweisen, dasz $\angle\ oaq = 7w$ ist,

2. Aufgabe. Wenn (Fig. 10), ähnlich wie vorher, sechs Kreisbogen beschrieben werden, so dasz

$$ab = bc = cd = de = ep = p\alpha,$$

und dann noch aq = ap eingezeichnet ist, so soll bewiesen werden, dasz der über 4R grosze Winkel $\angle\ oaq = 11w$ ist.

Man sieht bald ein, dasz diese Aufgaben ins Unendliche vermehrt werden könnten.

§ 6.

Den in den vorhergehenden §§ mit aq bezeichneten, zweiten variablen Radius ρ nebst der Rinne pq würde ich, wenn es sich um Herstellung eines brauchbaren Winkeltheilers handelte, ganz weglassen, und dafür einige constante Radien mehr nehmen.

Soll z. B. ein Winkel in 5 gleiche Theile getheilt werden, so gebrauche man eine in Figur 11 angedeutete Vorrichtung mit (5 + 1 =) 6 constanten Radien; der Basiswinkel im letzten gleichschenkligen Dreiecke ist = 5w, wenn der im ersten mit w bezeichnet wird. Wenn nun $\angle$ mpn zu theilen wäre, so müszte der Schenkel ax so weit (hier nach oben) bewegt werden, bis mp und ax über einander liegen, was durch einen Stift s, der von selbst in die Rinne ax hineinfällt und daselbst fest anliegt, markirt werden kann. Der andere Schenkel des Winkels (np) musz schon vorher mit dem letzten constanten Radius fp vereinigt sein. Dann wird sich bei a von selbst das Fünftel von $\angle$ mpn herausstellen.

Eine Voraussetzung, ähnlich der, die im § 5 gemacht und gerechtfertigt wurde, gilt auch hier wieder; eine Kreuzung der constanten Radien ist nie nöthig.

Zur Theilung eines rechten Winkels (Fig. 11) ist es gar nicht nöthig, denselben erst in p anzulegen, wenn man in dem Momente, wo der letzte constante Radius auf ay senkrecht steht, die Drehung aufhören läszt, was leicht bewirkt werden kann. Wie?

Bei n constanten Radien ist dann immer $\angle$ w $= \frac{1}{n}$ R.

§ 7.

Es ist nicht ohne Interesse, die geometrischen Örter aufzusuchen, die in den einzelnen Fällen von dem Punkte p beschrieben werden. Es lässt sich ein Apparat denken (die Schenkel des $\angle$ xay in Fig. 11 müssen über den Scheitel verlängert werden), mit welchem man diese Örter, wenn nicht in allen Punkten, doch dem gröszten Theile nach in einem Zuge construiren kann. Man kann aber auch, wie es bei anderen Curven nicht selten geschieht, so viele Punkte der Örter aufsuchen, dass man, wenn diese durch einen freien Zug mit einander verbunden werden, eine deutliche Vorstellung von dem Laufe der krummen Linien erhält.

In § 5, Aufgabe 1 und 2, ist angedeutet, wie dies anzufangen sei. Ein Beispiel mag noch angeführt werden, in welchem man die Verlängerungen beider Schenkel des Winkels w braucht. Wo der Endpunkt p des 8ten constanten Radius sich befindet, wenn der W. xay $= 80^0$ geworden ist, ersieht man deutlich aus der Figur 12; die Zirkelspitzen berühren nach einander die Punkte a, b, c, d, e, f, g, h, p.

Es ergeben sich bei der Construction dieser Örter zwei von einander verschiedene Reihen von Curven, je nachdem eine ungerade, oder gerade Anzahl von constanten Radien angewendet wird, wobei im ersten Falle r_1 auf den beweglichen Radius ρ, im zweiten Fall auf den festen Schenkel ay zu liegen kommt. Die Figuren 21, 22, 33 bilden den Anfang der ersten Reihe, 24, 25, 26 den der zweiten. Dort beschreibt, was aus den folgenden §§ deutlich werden wird, p (bei der Bewegung von ρ) für alle 360^0 verschiedene Schleifen, hier aber durchläuft er dieselbe Curve zum 2ten Male, nachdem $\angle$ xay $> 180^0$ geworden. In Rücksicht hierauf kann man sagen, dasz, mit Ausschlusz des ersten Kreises, überall $2 \cdot (n-1)$ Schleifen gebildet werden, wenn n die Anzahl der r ist. (Die gröszten Schleifen sind in Fig. 21 bis 26 abgebrochen gezeichnet).

Sämmtliche Schleifenbündel je einer Reihe, und wären alle Örter dieser Reihe (unendlich viele) verlangt, können auf einmal erzeugt gedacht werden, wenn man sich die erforderliche Anzahl constanter Radien und in dem Endpunkte eines jeden einen Zeichnenstift angebracht vorstellt, der auf einer gegebenen Ebene zu schreiben in den Stand gesetzt ist, während ρ die vier Quadranten durchläuft.

§ 8.

Wir wollen nun für diese Curven, gemäsz dem Gesetze ihrer Entstehung, Gleichungen suchen, aus welchen wir umgekehrt die Gestalt der Curven zu erkennen vermögen, wenn wir auch gar nicht wüszten, wie sie entstanden sind. Den veränderlichen Radius ap nennen wir ρ_1, ρ_2, ρ_3 ...., je nachdem 1, 2, 3 .... constante r angenommen sind.

a) $\rho_1 = r$; der geometrische Ort von p ist hier ein Kreis, wie sich von selbst versteht.

b) $\rho_3 = r + 2r \cdot \cos 2w$.

Beweis: (Fig. 13) $\frac{bp}{2} = r \cdot \cos v$; $bp = 2r \cdot \cos 2w$

$\rho_3 = r + bp = r + 2r \cdot \cos 2w$.

Anm. 1. Auf andere, freilich auch umständlichere Weise kann man denselben Ausdruck erhalten, wenn man mit x und y die Coordinaten von p bezeichnet und davon ausgeht, dasz $\rho^2 = x^2 + y^2$ ist.

Anm. 2. Auch der sogenannte Cosinussatz läszt sich dazu gebrauchen, und man hat hierdurch zwei ganz passende goniometrische Übungsbeispiele.

c) $\rho_5 = r + 2r \cdot (\cos 2w + \cos 4w)$.

Beweis: (Fig. 14) $\rho_5 = ab + bd + dp = r + 2r \cdot \cos v + 2r \cdot \cos u$
$= r + 2r (\cos 2w + \cos 4w)$.

Auf gleiche Weise ergiebt sich ganz einfach:

d) $\rho_7 = r + 2r (\cos 2w + \cos 4w + \cos 6w)$ u. s. w.

Unter Berücksichtigung der Vorzeichen dieser cos . leuchtet ein, dasz alle Formeln Geltung behalten, mag der Winkel w auch noch so grosz sein, und mögen dabei die r sich wie nur immer kreuzen oder decken.

Ebenso leicht ist zu erkennen, dasz (Fig. 15)

α) $\rho_2 = 2r \cdot \cos w$;

der geometrische Ort von p ist selbstverständlich hier wiederum ein Kreis. Ferner ist

β) $\rho_4 = 2r \cdot (\cos w + \cos 3w)$

γ) $\rho_6 = 2r \cdot (\cos w + \cos 3w + \cos 5w)$

δ) $\rho_8 = 2r \cdot (\cos w + \cos 3w + \cos 5w + \cos 7w)$ u. s. w.

§ 9.

Die im vorigen Paragraph erwähnten Formeln lassen sich auf eine sehr einfache Form bringen, da man, wie die sogenannte Analysis lehrt, die in Klammern geschlossenen Polynomina summiren kann*). Man setzt nämlich:

$$s = \cos \alpha + \cos (\alpha + \varphi) + \cos (\alpha + 2\varphi) + \ldots \cos (\alpha + x\varphi);$$

dann ist auch:

$$2 s \cos \varphi = 2 \cos \alpha \cdot \cos \varphi + 2 \cos (\alpha + \varphi) \cdot \cos \varphi + 2 \cos (\alpha + 2\varphi) \cdot \cos \varphi + \ldots 2 \cos (\alpha + x\varphi) . \cos \varphi.$$

$$= \begin{cases} \cos (\alpha + \varphi) \\ + \cos (\alpha - \varphi) \end{cases} + \begin{cases} \cos (\alpha + 2\varphi) \\ + \cos \alpha \end{cases} + \begin{cases} \cos (\alpha + 3\varphi) \\ + \cos (\alpha + \varphi) \end{cases} + \ldots \begin{cases} \cos [\alpha + (x + 1)\varphi] \\ + \cos [\alpha + (x - 1)\varphi] \end{cases}$$

$$= s - \cos \alpha + \cos [\alpha + (x + 1)\varphi] + \cos (\alpha - \varphi) + s - \cos (\alpha + x\varphi)$$

$$2s\ (1 - \cos \varphi) = \cos (\alpha + x\varphi) - \cos [\alpha + (x + 1)\varphi] - \{\cos (\alpha - \varphi) - \cos \alpha\}$$

$$2s \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \sin [\alpha + (x + 1/2)\varphi] \cdot \sin \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

*) Wie diese Summenformeln durch Integral-Rechnung gefunden werden, kann man z. B. in Navier, Differential- und Integral-Rechnung, 2. Band, § 496 nachsehen.

$$2s \sin\frac{\varphi}{2} = \sin\left[\alpha + (x + {}^1\!/_2)\,\varphi\right] - \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\alpha + \frac{x}{2}\,.\,\varphi\right).\sin\frac{x+1}{2}\,\varphi.$$

Daher ist s oder:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \ldots\ldots \cos(\alpha+x\varphi) = \frac{\cos\left(\alpha+\frac{x}{2}\,.\,\varphi\right).\sin\frac{x+1}{2}\,\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung 2w für α und 2w für φ, so wird:

$$\cos\overset{0}{2w} + \cos\overset{1}{4w} + \cos\overset{2}{6w} + \ldots.\cos\overset{x}{(2x+2)}\,w = \frac{\cos(x+2)\,w\,.\sin(x+1)\,w}{\sin w}. \qquad \text{A.}$$

Setzen wir aber w für α und 2w für φ, so wird:

$$\cos\overset{0}{w} + \cos\overset{1}{3\,w} + \cos\overset{2}{5\,w} + \ldots..\cos(\overset{x}{2\,x}+1)\,w = \frac{\cos(x+1)\,w\,.\sin(x+1)\,w}{\sin w}. \qquad \text{B.}$$

Verallgemeinern wir nun die Gleichung d. aus § 8, indem wir durch Induction weiter schlieszen, so erhalten wir:

$$\rho_n = r + 2r\,.\left\{\cos 2\,w + \cos 4\,w + \cos 6\,w + \ldots \cos(2x+2)\,w\right\},$$

worin, wie man sieht, $2x + 2 = n - 1$, also $2x + 3 = n$ ist. Dies gibt:

$$\rho_n = r + 2\,r\,\frac{\cos(x+2)\,w\,.\sin(x+1)\,w}{\sin w} = r + r\,\frac{2\cos(x+2)\,w\,.\sin(x+1)\,w}{\sin w}$$
$$= r + r\,\frac{\sin(2\,x+3)\,w - \sin w}{\sin w} = r + r\left\{\frac{\sin(2\,x+3)\,w}{\sin w} - 1\right\}$$
$$= r\,\frac{\sin(2\,x+3)\,w}{\sin w} = r\,\frac{\sin nw}{\sin w}.$$

Dasselbe thun wir nun mit Gleichung δ aus § 8. Wir erhalten:

$$\rho_n = 2\,r\left\{\cos w + \cos 3\,w + \cos 5\,w + \ldots.\cos(2\,x+1)\,w\right\}, \qquad \mathit{A.}$$

worin $2\,x + 1 = n - 1$, also $2\,x + 2 = n$ ist. Dies gibt:

$$\rho_n = 2\,r\,\frac{\cos(x+1)\,w\,.\sin(x+1)\,w}{\sin w} = r\,\frac{2\cos(x+1)\,w\,.\sin(x+1)\,w}{\sin w}$$
$$= r\,\frac{\sin(2\,x+2)\,w}{\sin w} = r\,\frac{\sin nw}{\sin w}. \qquad \mathit{B.}$$

Es ist also immer, n mag gerade oder ungerade sein, d. h. für eine beliebige Anzahl von constanten Radien r, allgemein:

$$\rho_n = r\,\frac{\sin nw}{\sin w}.$$

§ 10.

Von der vorher entwickelten Gleichung:

$$\text{A.}\quad \rho_n = r\,\frac{\sin nw}{\sin w},$$

der sogenannten Polargleichung, in welcher ρ durch w bestimmt wird, können wir bald auf eine Gleichung übergehen, die sich auf rechtwinklige Coordinaten bezieht. (Vergleiche § 8, b, Anmerkung 1).

Um nicht zu umständlich zu werden, musz ich als bekannt voraussetzen, dasz

für n ungerad:

$$\sin nw = n \sin w - \frac{n(n^2-1^2)}{2.3} \sin w^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.3.4.5} \sin w^5 - \ldots\ldots$$

für n gerad:

$$\sin nw = \cos w \left\{ n.\sin w - \frac{n(n^2-2^2)}{2.3} \sin w^3 + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.3.4.5} \sin w^5 - \ldots\right\}.$$

Gestützt auf diese Gleichungen erhalten wir aus Gleichung (A.):

für n ungerad:

$$\rho n = r \left\{ n - \frac{n(n^2-1^2)}{2.3} \sin w^2 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.3.4.5} \sin w^4 - \ldots\ldots \pm \frac{n(n^2-1^2)\{n^2-(n-2)^2\}}{2.3.4\ldots.n} . \sin w^{n-1} \right\}$$

In den folgenden Gliedern würde der Factor $(n^2 - n^2)$ erscheinen, weshalb sie alle $= o$ werden, die Reihe daher hier abbricht.

Setzen wir $\frac{y}{\rho}$ (den Index von ρn lassen wir weg) für sin w und multipliciren dann mit $\frac{y}{\rho^{n-1}}$, so kommt:

$$\rho^n = r \left\{ n\rho^{n-1} - \frac{n(n^2-1^2)}{2.3} y^2.\rho^{n-3} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.3.4.5} y^4 \rho^{n-5} - \ldots\right\}$$

Da nun $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{1/2}$ ist, so schreiben wir:

$$\text{I.}\ \sqrt{(x^2+y^2)^n} = r \left\{ n(x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{n(n^2-1^2)}{2.3}.y^2(x^2+y^2)^{\frac{n-3}{2}} + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2.3.4.5} y^4(x^2+y^2)^{\frac{n-5}{2}} - \ldots\right\}$$

Ähnlich für n gerad:

$$\text{II.}\ \sqrt{(x^2+y^2)^n} = r\,x \left\{ n(x^2+y^2)^{\frac{n-2}{2}} - \frac{n(n^2-2^2)}{2.3}.y^2(x^2+y^2)^{\frac{n-4}{2}} + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.3.4.5} y^4(x^2+y^2)^{\frac{n-6}{2}} - \ldots\right\}$$

§ 11.

Aus den allgemeinen Gleichungen I. und II. können mit Leichtigkeit die speciellen abgeleitet werden. Zur Erleichterung kann es dienen, wenn man darauf achtet, dasz $n^2 - m^2 = (n+m)(n-m)$, oder darauf, dasz

für: n =	3,	5,	7,	9,	11	und für n =	4,	6,	8,	10,	12 .....
ist: $n^2 - 1$ =	8.1,	8.3,	8.6,	8.10,	8.15	ist: $n^2 - 2^2$ =	4.3,	4.8,	4.15,	4.24,	4.35....
$n^2 - 3^2$ =		8.2,	8.5,	8.9,	8.14	$n^2 - 4^2$ =		4.5,	4.12,	4.21,	4.32....
$n^2 - 5^2$ =			8.3,	8.7,	8.12	$n^2 - 6^2$ =			4.7,	4.16,	4.27....
$n^2 - 7^2$ =				8.4,	8.9	$n^2 - 8^2$ =				4.9,	4.20....
$n^2 - 9^2$ =					8.5	$n^2 - 10^2$ =					4.11....

Dasz die Coefficienten auch jetzt wieder bestimmten Gesetzen folgen, darf nicht Wunder nehmen, da sie ja aus gesetzmäszig gebildeten Reihen hervorgegangen sind. Diese ganz einfachen Gesetze aufzusuchen und dann, wo möglich, eine Anzahl von Gleichungen hinter einander aus dem Kopfe niederzuschreiben, überlassen wir dem Leser. Wir begnügen uns damit, für jede der zwei Arten von Curven die ersten drei, schon möglichst vereinfachten Gleichungen hinzustellen.

Für ρ_1: $\sqrt{x^2 + y^2} = r$; $(x^2 + y^2) = r^2$.

Für ρ_3: $\sqrt{(x^2 + y^2)^3} = r \,.\, (3x^2 - y^2)$; $(x^2 + y^2)^3 = r^2 \,.\, (3x^2 - y^2)^2$.

Für ρ_5: $\sqrt{(x^2 + y^2)^5} = r \,.\, (5x^4 - 10x^2y^2 + y^4)$; $(x^2 + y^2)^5 = r \,.\, (5x^4 - 10x^2y^2 + y^4)^2$.

Für ρ_2: $(x^2 + y^2)^1 = 2rx$.

Für ρ_4: $(x^2 + y^2)^2 = 2rx \,.\, (2^2x - 2y^2)$.

Für ρ_6: $(x^2 + y^2)^3 = 2rx \,.\, (3x^4 - 10x^2y^2 + 3y^4)$.

§ 12.

Wir wollen uns später aus den gefundenen Gleichungen selbst über den Gang der zugehörigen Curven einigermassen belehren. Bevor wir aber dazu übergehen, scheint es mir zweckmässig, wenigstens die Zahlenwerthe der Cosinusse aller Winkel von 3 zu 3^0 zu notiren. Von einigen werden wir selbst Gebrauch machen, die andern werden mit beigegeben, da Jemand Vergnügen daran finden könnte, eine ganze Reihe von Punkten der geometrischen Örter selbst durch Rechnung zu bestimmen, wozu diese Werthe vollkommen ausreichen werden. Die Herleitung derselben muss ich auch als bekannt voraussetzen. Sie sind nicht gruppenweise, ihrer Ableitung gemäss, geordnet, sondern einfach nach der Grösse der Winkel, damit sie beim Gebrauche schnell gefunden werden können.

Es ist nun:

$\cos 0^0 = -\cos 180^0 = 1$

$\cos 3^0 = -\cos 177^0 = -\cos 183^0 = \cos 357^0 = \frac{1}{8} \,.\, (\sqrt{3} + 1) \,.\, \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \frac{1}{8} (\sqrt{3} - 1) \,.\, \sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

$\cos 6^0 = -\cos 174^0 = -\cos 186^0 = \cos 354^0 = \frac{1}{8} \,.\, \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \frac{1}{8} \sqrt{3} (1 + \sqrt{5})$.

$\cos 9^0 = -\cos 171^0 = -\cos 189^0 = \cos 351^0 = \frac{1}{4} \,.\, \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \frac{1}{4} \sqrt{5 - \sqrt{5}}$.

$\cos 12^0 = -\cos 168^0 = -\cos 192^0 = \cos 348^0 = \frac{1}{8} \sqrt{3} \,.\, \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \frac{1}{8} (-1 + \sqrt{5})$.

$\cos 15^0 = -\cos 165^0 = -\cos 195^0 = \cos 345^0 = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

$\cos 18^0 = -\cos 162^0 = -\cos 198^0 = \cos 342^0 = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

$\cos 21^0 = -\cos 159^0 = -\cos 201^0 = \cos 339^0 = \frac{1}{8} \,.\, (\sqrt{3} + 1) \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \frac{1}{8} \,.\, (\sqrt{3} - 1) \sqrt{5 - \sqrt{5}}$.

$\cos 24^0 = -\cos 156^0 = -\cos 204^0 = \cos 336^0 = \frac{1}{8} \,.\, (1 + \sqrt{5}) + \frac{1}{8} \,.\, \sqrt{3} \,.\, \sqrt{10 - 2 \,.\, \sqrt{5}}$.

$\cos 27^0 = -\cos 153^0 = -\cos 207^0 = \cos 333^0 = \frac{1}{4} \,.\, \sqrt{5 + \sqrt{5}} + \frac{1}{4} \,.\, \sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

$\cos 30^0 = -\cos 150^0 = -\cos 210^0 = \cos 330^0 = \frac{1}{2} \,.\, \sqrt{3}$.

$\cos 33^0 = -\cos 147^0 = -\cos 213^0 = \cos 327^0 = \frac{1}{8} \,.\, (\sqrt{3} + 1) \,.\, \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \frac{1}{8} (\sqrt{3} - 1) \,.\, \sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

$\cos 36^0 = -\cos 144^0 = -\cos 216^0 = \cos 324^0 = \frac{1}{4} \,.\, (1 + \sqrt{5})$.

$\cos 39^0 = -\cos 141^0 = -\cos 219^0 = \cos 321^0 = \frac{1}{8} \,.\, (\sqrt{3} + 1) \,.\, \sqrt{5 - \sqrt{5}} + \frac{1}{8} \,.\, (\sqrt{3} - 1) \,.\, \sqrt{3 + \sqrt{5}}$.

$\cos 42^0 = -\cos 138^0 = -\cos 222^0 = \cos 318^0 = {}^1/_8 \sqrt{10 + 2 . \sqrt{5}} + {}^1/_8 . \sqrt{3} . (-1 + \sqrt{5})$

$\cos 45^0 = -\cos 135^0 = -\cos 225^0 = \cos 315^0 = {}^1/_2 . \sqrt{2}.$

$\cos 48^0 = -\cos 132^0 = -\cos 228^0 = \cos 312^0 = {}^1/_8 \sqrt{3} . \sqrt{10 + 2 \sqrt{5}} - {}^1/_8 . (-1 + \sqrt{5}).$

$\cos 51^0 = -\cos 129^0 = -\cos 231^0 = \cos 309^0 = {}^1/_8 . (\sqrt{3} + 1) . \sqrt{3 + \sqrt{5}} - {}^1/_8 (\sqrt{3} - 1) . \sqrt{5 - \sqrt{5}}.$

$\cos 54^0 = -\cos 126^0 = -\cos 234^0 = \cos 306^0 = {}^1/_4 \sqrt{10 - 2 \sqrt{5}}.$

$\cos 57^0 = -\cos 123^0 = -\cos 237^0 = \cos 303^0 = {}^1/_8 . (\sqrt{3} + 1) . \sqrt{3 - \sqrt{5}} + {}^1/_8 . (\sqrt{3} - 1) . \sqrt{5 + \sqrt{5}}.$

$\cos 60^0 = -\cos 120^0 = -\cos 240^0 = \cos 300^0 = {}^1/_2.$

$\cos 63^0 = -\cos 117^0 = -\cos 243^0 = \cos 297^0 = {}^1/_4 . \sqrt{5 + \sqrt{5}} - {}^1/_4 \sqrt{3 - \sqrt{5}}.$

$\cos 66^0 = -\cos 114^0 = -\cos 246^0 = \cos 294^0 = {}^1/_8 \sqrt{3} . (1 + \sqrt{5}) - {}^1/_8 \sqrt{10 - 2 \sqrt{5}}.$

$\cos 69^0 = -\cos 111^0 = -\cos 249^0 = \cos 391^0 = {}^1/_8 . (\sqrt{3} + 1) . \sqrt{5 - \sqrt{5}} - {}^1/_8 (\sqrt{3} - 1) \sqrt{3 + \sqrt{5}}.$

$\cos 72^0 = -\cos 108^0 = -\cos 252^0 = \cos 288^0 = {}^1/_4 . (-1 + \sqrt{5}).$

$\cos 75^0 = -\cos 105^0 = -\cos 255^0 = \cos 285^0 = {}^1/_2 . \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$

$\cos 78^0 = -\cos 102^0 = -\cos 258^0 = \cos 282^0 = {}^1/_8 . \sqrt{10 + 2 \sqrt{5}} - {}^1/_8 \sqrt{3} (-1 + \sqrt{5}.$

$\cos 81^0 = -\cos 99^0 = -\cos 261^0 = \cos 279^0 = {}^1/_4 . \sqrt{3 + \sqrt{5}} - {}^1/_4 . \sqrt{5 - \sqrt{5}}.$

$\cos 84^0 = -\cos 96^0 = -\cos 264^0 = \cos 276^0 = {}^1/_8 \sqrt{3} . \sqrt{10 - 2 \sqrt{5}} - {}^1/_8 (1 + \sqrt{5}).$

$\cos 87^0 = -\cos 93^0 = -\cos 267^0 = \cos 273^0 = {}^1/_8 . (\sqrt{3} + 1) \sqrt{3 - \sqrt{5}} - {}^1/_8 . (\sqrt{3} - 1) . \sqrt{5 + \sqrt{5}}.$

$\cos 90^0 = -\cos 270^0 = \pm 0.$

§ 13.

Sehen wir nun zu, ob wir von der Curve, welche p bei ρ_3 beschreibt, aus ihren Gleichungen ein ungefähres Bild gewinnen können.

Wir wissen, dass

$$\rho = r + 2r . \cos 2w. \quad \text{I.}$$

$$= r . \frac{\sin 3w}{\sin w} \quad \text{II.}$$

$$= r . (4 . \cos^2 w - 1) \quad \text{III.}$$

a) Wann wird $\rho = o$? d. h. bei welchen Werthen von w geht die Curve durch den Punkt a?

Aus III. folgt, dass, wenn wir $\rho = o$ setzen,

$\cos w = \pm \, {}^1/_2$ werden muss.

Also $w = 60^0, 120^0, 240^0, 300^0$. (S. § 12.)

b) Wann wird $\rho = \pm r$? d. h. bei welchen Werthen von w geht die Curve durch den Kreis, den man mit r um a beschreibt?

Aus I. folgt:

$+ r = r + 2 r . \cos 2 w$; $\cos 2 w = o$; $w = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0$

$- r = r + 2 r . \cos 2 w$; $\cos 2 w = -1$; $w = 90^0, 270^0$.

Der erwähnte Kreis wird von der Curve viermal durchschnitten, zweimal berührt.

c) Wann wird $\rho = 2 r$? d. h. bei welchen Werthen von w geht die Curve durch den Kreis, den man mit 2r um a beschreibt?

Aus III. folgt:

$r \,.\, (4 \cos^2 w - 1) = 2\,r$; $\cos w = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{3}$; $w = 30°, 150°, 210°, 330°$.

Aufgabe: Benütze jedesmal die in Vorstehendem nicht angewendeten zwei Gleichungen. (I., II. oder III.) Siehe auch zu, wie gross ρ wird, wenn: $w = o$ und $w = 180°$ ist.*)

Da ρ von $w = o°$ bis $w = 60°$ fortwährend abnimmt, etc., so sieht man aus dem Gesagten schon, dass die Curve viermal durch a geht und aus vier Schleifen besteht, von denen zwei 3r, die anderen zwei aber r zum Längendurchmesser haben.

§ 14.

Betrachten wir für ρ_3 auch die Gleichung für rechtwinklige Coordinaten:

$$\text{A.} \quad (x^2 + y^2)^3 = r^2 \,.\, (3x^2 - y^2)^2.$$

Da x und y nur im Quadrate vorkommen, wird die Curve durch jede der Ordinaten-Axen in 2 kongruente Theile getheilt.

a) Wann wird $y = 0$? Setzt man in A. $y = 0$, so erhält man sofort die dazu gehörigen Werthe:

$x = 0, 0, 0, 0, + 3r, - 3r$. Viermal geht also die Curve durch a.

b) Wann wird $y = \pm r$? Ohne Schwierigkeit erhält man:

$$x = 0, + r \,.\, \sqrt{3}, - r \,.\, \sqrt{3};$$

oder: $x = 0, + 2r \,.\, \tfrac{1}{2} \sqrt{3}, - 2\,r \,.\, \tfrac{1}{2} \sqrt{3}$. Vergleiche hiermit § 13 c.

Da, wie man leicht aus der Entstehung der Curve schlieszen kann, niemals $y = 2e$ werden kann, so fragen wir dafür einmal:

c) Wann wird $y = \frac{r}{2}$?

Bei Beantwortung dieser Frage musz man aber in Bezug auf x^2 eine cubische Gleichung lösen**). Leichter wird es sein, wenn wir von obiger Gleichung A. abstrahiren und auf die Entstehung der Curve zurückgehen. Es ist bekannt, dasz, wenn eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks $\left(\frac{r}{2}\right)$ die Hälfte der Hypotenuse (r) sein soll, der Gegenwinkel von jener $\alpha = 30°$ sein musz. Mit Hilfe der Figuren 16, 17, 18 wird man nun leicht einsehen, bei welcher Winkelweite von $\angle$ w das $y = \frac{r}{2}$ wird.

Fig. 16. α oder $30° = w + v = 3w$; $w = 10°$

Fig. 17. $30° = v - w = 180 - 3w$; $w = 50°$

Fig. 18. $30° = w - v = 3w - 180$; $w = 70°$.

Da aber, wie schon am Anfange dieses § angedeutet wurde, im zweiten, dritten und vierten Quadranten y dieselben Werthe erhält wie im ersten, so sehen wir, dasz es im Ganzen zwölfmal $= \frac{r}{2}$ wird, sechsmal positiv, sechsmal negativ, und zwar:

für $w = 10°, 50°, 70°, 110°, 130°, 170°, 190°, 230°, 250°, 290°, 310°, 350°$

wird $y = +\frac{r}{2}, +\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}, +\frac{r}{2}, +\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}, +\frac{r}{2}, +\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}$.

---

*) Sehr leicht bestimmen sich auch die Maxima und Minima von ρ

$$\frac{d\,\rho}{d\,w} = -\,2 \sin w = o; \ \sin 2\,w = o$$

$$w = 0°, 90°, 180°, 270°.$$

Dafür wird $\rho = 3r, - r, 3r, - r$.

**) Dieselbe entspricht dem irreduciblen Falle, hat also drei reelle Wurzeln, wie zu erwarten stand.

§ 15.

Wollte man aus der Gleichung A. des vorigen § das y^2 entwickeln, so wäre dies allerdings auf cubischem Wege möglich. Da aber das bisher Gesagte hinreichen wird, um den Gang der Curve zu kennzeichnen, so wollen wir nur noch die Grenzen angeben, in welche dieselbe eingeschlossen ist.

Da aus Gleichung A., §. 14, folgt, dasz

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt[3]{r(3x^2 - y^2)},$$

so musz, wenn man $x^2 + y^2 = m^2$ setzt, $r(3x^2 - y^2) = m^3$ sein.

Daraus ergiebt sich: $x^2 = \frac{m^3 + r^2 m^2}{4r}$ und $y^2 = \frac{3r^2 m^2 - m^3}{4r^2}$.

Für $m^3 = 3r^2 m^2$ wird: $x = \pm 3r$ und $y = 0$. (Vergl. § 14. a.)

Wird $m^3 > 3r^2 m^2$, also $x > \pm 3r$, so wird y^2 negativ, y imaginär. Da ferner, wie wir aus der Entstehung der Curve wissen, höchstens $y = \pm r$ werden kann, so ist die Curve ringeshlossen in ein Rechteck, dessen Seiten 6r und 2r sind.

§ 16.

Um auch eine Curve der zweiten Art etwas näher kennen zu lernen, nehmen wir die Gleichung:

$$\rho_4 = 2r \, . \, (\cos w + \cos 3w) \quad \text{I.}$$

$$= r \, . \, \frac{\sin 4w}{\sin w}. \quad \text{II.}$$

$$= 4r \, . \, \cos w . \cos 2w \quad \text{III.}$$

a) Wann wird $\rho = 0$?

Aus Gleichung I. folgt: $\cos 3w = -\cos w$.

Dann ist entweder $\cos w = 0$ oder $= \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$

und darum $\rho = 0$ für $w = 90°, 270°$ und $w = 45°, 135°, 225°, 315°$.

Die Curve ginge also sechsmal durch a. Da aber:

$$\cos \{ 180 + w \} + \cos [3 (180 + w)] = - \cos w - \cos 3w,$$

so müssen sich bei der Drehung von ρ über $w = 180°$ hinaus die früher erhaltenen Punkte der Curve wiederholen; denn die negativen Zeichen deuten an, dasz ρ nur rückwärts verlängert gedacht werden mnsz, so dasz man also eben gerade dieselben Werthe erhält, wie früher, da die absolut genommene Summe der früheren $(\cos w + \cos 3w)$ gleich ist. Hierdurch findet die am Schlusse des § 7 ganz im Allgemeinen hingestellte Bemerkung für diesen speciellen Fall ihre Begründuug. — Die Curve geht also nur dreimul durch a, nämlich für $w = 45°, 90°, 135°$.

b) Wann wird $\rho = r$?

Aus Gleichung I. folgt:

$$\cos w^3 - \frac{1}{2} \cos w - \frac{1}{8} = 0.$$

Diese cubische Gleichung*) führt uns auf die Winkel: $w = 36°, 180°, 120°$. Von der

---

*) Hier will ich kurz den Gang der Rechnung angeben. Nach dem sog. irreduciblen Falle findet man, $\cos \varphi = \frac{3}{8} \sqrt{6}$ schon ausgerechnet gedacht, folgende Werthe:

Richtigkeit des Gesagten kann man sich überzeugen, indem man z. B. in Gleichung III. für w den Werth von 36° einsetzt. Man erhält (Vergl. §. 12):

$$\rho = 4r \,.\, \cos 36 \,.\, \cos 72 = 4r \,.\, \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \,.\, \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = r.$$

Ebenso kann man sich davon überzeugen, dasz $\rho = -r$ wird

für $w = 60°, 72°, 144°$.

c) Wann wird $\rho = 2r$? d. h. bei welchem Werthe von w geht die Curve durch den Kreis, den man mit 2r um a beschreibt?

Da hier $\angle$ w, der auch durch eine cubische Gleichung gefunden werden kann, nicht in ganzen Graden erscheint, so hat er für uns ein geringeres Interesse und ich notire einfach, dasz

$$\left.\begin{array}{l}\rho = +2r \text{ wird für ungefähr } w = 28° \\ \rho = -2r \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; w = 152°\end{array}\right\}$$

Anmerkung: Besser gestaltet sich die Sache, wenn wir zusehen, wo die Curve den mit r um α beschriebenen Kreis durchschneidet. Der Durchschnittspunkt ist die Spitze des rechten Winkels in einem Dreiecke, das 2r zur Hypotenuse hat. Darin ist:

$$x : y = y : (2r - x)$$
$$y^2 = 2rx - x^2; \text{ daher}$$
$$2rx - x^2 = -x^2 - 2rx \pm 2x\sqrt{r^2 + 2rx}.$$

Hieraus $x = \tfrac{3}{2}\, r$; $y = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Dazu gehören die Winkel: $w = 30°, 150°$. (Vergl. § 18. c.)*)

§ 17.

Die entsprechende Gleichung für rechtwinklige Coordinaten:

$$(x^2 + y^2)^2 = 4rx\,(x^2 - y^2) \quad \text{I.}$$

läszt sich leicht nach y auflösen.

$$\cos w_{,} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6} \,.\, \cos\frac{\varphi}{3}$$
$$\cos w_{,,} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{6} \,.\, \cos\left(60 + \frac{\varphi}{3}\right)$$
$$\cos w_{,,,} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{6} \,.\, \cos\left(60 - \frac{\varphi}{3}\right).$$

Es ist aber $\log\cos\varphi = 9{,}9631070$; $\varphi = 23°-17'$; $\frac{\varphi}{3} = 7°\,45'\,40''$. Daher:

$\log\cos w_{,} = 9{,}9079578-10$; $w_{,} = 36°$.
$\log\cos(180-w_{,,}) = 9{,}4899748-10$; $180-w_{,,} = 72°$; $w_{,,} = 108°$.
$\log\cos(180-w_{,,,}) = 9{,}6989687-10$; $180-w_{,,,} = 60°$; $w_{,,,} = 120$.

*) Die Maxima oder Minima von ρ finden statt, wenn

$$\cos w = +1,\ -1,\ +\tfrac{1}{6}\sqrt{6},\ -\tfrac{1}{6}\sqrt{6}.$$
$$w = 0°,\ 180°,\ \underbrace{66°,\ 114° \text{ ungefähr}}$$
$$\rho = 4a,\ -4a,\ -\tfrac{4}{9}a\sqrt{6},\ +\tfrac{4}{9}a\sqrt{6}$$
$$\underbrace{-\tfrac{11}{10}a,\ +\tfrac{11}{10}a \text{ ungefähr.}}$$

Die ersten zwei Werthe von ρ sind, wie man sofort sieht, identisch.

Wir erhalten:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 4rx^3 - 4rxy^2$$
$$y^4 + (2x^2 + 4rx)\,y^2 = 4rx^3 - x^4$$
$$y^2 = -(x^2 + 2rx) \pm \sqrt{4x^2(2rx + r^2)}$$
$$y = \pm\sqrt{-(x^2 + 2rx) \pm 2x\sqrt{2rx + r^2}} \quad \text{II.}$$

Aus Gleichung I. ersieht man, dasz für positive Abscissen $x > y$ sein musz, und umgekehrt für negative Abscissen $x < y$; man kann sagen, die Curve sei auf dieser Seite steiler, als auf jener. Da ferner y nur im Quadrate vorkommt, so theilt die x-Axe die Curve in zwei kongruente Theile; nicht so die y-Axe.

Wenn für eine negative Abscisse [x] $2rx > r^2$, $x > \frac{r}{2}$ genommen wird, so wird in Gleichung II. der Radicandus der kleinen Wurzel negativ, also y imaginär. An der Grenze, für $x = -\frac{r}{2}$, fällt die kleine Wurzel weg, so dasz y nur zwei Werthe hat, nämlich:

$$y = \pm \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Für jeden anderen Werth von $x = -\frac{r}{2}$ bis $x = o$ hat y vier Werthe. Es liegen hier 2 Schleifen der Curve übereinander.

Wenn für eine positive Abscisse [x] das untere Zeichen der kleinen Wurzel genommen wird, so wird in jedem Falle y imaginär. Daher kann hier nur das obere Zeichen gelten, und y immer nur zwei Werthe haben, so lange nämlich $(x^2 + 2\,rx)^2 < 4x^2\,(r^2 + 2\,rx)$, d. h. $x < 4r$ bleibt; darüber hinaus (weiter nach rechts) wird y auch hier imaginär.

An der Grenze, für $x = 4r$, fallen beide Wurzeln weg, so dasz

$$y = o.$$

Da wir nun auch wissen, dasz höchstens $y = \pm r$ werden kann, so ist die Curve eingeschlossen in ein Rechteck, dessen Seiten $4\frac{1}{2}r$ und $2r$ sind.

§ 18.

a) Wann wird $y = o$? Für $y = o$ ergibt sich aus Gleichung I. § 17 sofort:

$$x = o,\ o,\ o,\ 3r.$$

Dreimal geht also die Curve durch a.

b) Wann wird $y = \pm r$? Jene Gleichung erhält für $y = r$ zunächst die Form:

$$x^4 - 4\,rx^3 + 2\,r^2x^2 + 4r^3x = -r^4$$

Diese Gleichung lässt sich quadratisch lösen. Da nämlich: $2r^2x^2 = 4r^2x^2 - 2r^2x^2$ ist, so bekommen wir:

$$(x^2 - 2\,rx)^2 - 2\,r^2(x^2 - 2\,rx) = -r^4$$
$$x^2 - 2\,rx = r^2$$
$$x = r \pm r\sqrt{2} = r\,(1 \pm \sqrt{2})$$
$$= \begin{cases} r\,.\,\mathrm{cotg}\,22\tfrac{1}{2}^0 = -r\,.\,\mathrm{cotg}\,157\tfrac{1}{2}^0 \\ -r\,.\,\mathrm{cotg}\,67\tfrac{1}{2}^0 = r\,.\,\mathrm{cotg}\,112\tfrac{1}{2}^0. \end{cases}$$

$$y \text{ wird} = + r, \text{ wenn } \sphericalangle w = 22\tfrac{1}{2}^0 \text{ oder} = 112\tfrac{1}{2}^0$$
$$y \text{ wird} = - r, \text{ wenn } \sphericalangle w = 67\tfrac{1}{2}^0 \text{ oder} = 157\tfrac{1}{2}^0.$$

Wir wollen auch einmal für ein irrationales y die dazu gehörigen Werthe von x suchen und stellen die Frage:

c) Wann wird $y = \frac{r}{2}\sqrt{3}$?

Jene Gleichung (I.) erhält die Form:

$$x^4 - 4rx^3 + \tfrac{3}{2} r^2x^2 + 3r^3x + \tfrac{9}{16} r^4 = 0.$$

Diese Gleichung vierten Grades lösen wir durch Factorenbildung. Wir können dafür aber schreiben:

$$x^4 - \underbrace{3rx^3 - rx^3} + \underbrace{3r^2x^2 - \tfrac{3}{4} r^2x^2 - \tfrac{3}{4} r^2x^2} + \underbrace{\tfrac{3}{4} r^3x + \tfrac{9}{4} r^3x} + \tfrac{9}{16} r^4 = 0.$$
$$x^4 - 3rx^3 - \tfrac{3}{4} r^2x^2 - rx^3 + 3r^2x^2 + \tfrac{3}{4} r^3x - \tfrac{3}{4} r^2x^2 + \tfrac{9}{4} r^3x + \tfrac{9}{10} r^4 = 0.$$
$$x^2.(x^2 - 3rx - \tfrac{3}{4} r^2) - rx(x^2 - 3rx - \tfrac{3}{4} r^2) - \tfrac{3}{4} r^2(x^2 - 3rx - \tfrac{3}{4} r^2) = 0.$$
$$(x^2 - 3rx - \tfrac{3}{4} r^2).(x^2 - rx - \tfrac{3}{4} r^2) = 0.$$

Jeder dieser beiden Factoren gibt nun eine quadratische Gleichung.

$$\text{Aus} \quad x^2 - 3rx - \tfrac{3}{4} r^2 = 0$$
$$\text{folgt:} \quad x = \begin{cases} r(\tfrac{3}{2} + \sqrt{3}) \\ r(\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}); \end{cases}$$
$$\text{Aus} \quad x^2 - rx - \tfrac{3}{4} r^2 = 0$$
$$\text{folgt:} \quad x = \begin{cases} \tfrac{3}{2} r \\ -\tfrac{1}{2} r. \end{cases}$$

Man findet (auf welche Weise?), dasz dann sein musz:

$$\text{Für } y = + \frac{r}{2}\sqrt{2} : w = 15^0,\ 105^0,\ 30^0,\ 120^0;$$

Darum ist

$$\text{Für } y = - \frac{r}{2}\sqrt{2} : w = 165^0,\ 75^0,\ 150^0,\ 60^0.$$

§ 19.

Da in Gleichung II., § 17, y durch x ausgedrückt ist, so könnte man für jedes mögliche x das dazu gehörige y bestimmen. Wir wollen aber noch ein anderes Verfahren andeuten, durch welches wir die Werthe von y finden können.

Wir wollen jedoch in der Gleichung:

$$\text{A.)} \quad y^2 = -x^2 - 2rx \pm 2x\sqrt{r^2 + 2rx}$$

für x nur solche Werthe nehmen, dasz wenigstens y^2 rational wird. Dann musz $r^2 + 2rx$ ein vollständiges Quadrat bilden. Dies wird auf mannigfache Weise erzielt; z. B., wenn wir setzen:

$$\text{B.)} \quad x = 2rn(n - 1).$$

Dann erhalten wir:

$$r^2 + 2rx = (r - 2rn)^2 = (2rn - r)^2.$$

Tragen wir B in A ein, so erhalten wir wegen des doppelten Wurzelwerthes die zwei verschiedenen Gleichungen:

$$\text{C.)} \left\{ \begin{array}{ll} y^2 = 4r^2 n(-n^3 + 4n^2 - 5n + 2) & \text{I.} \\ y^2 = 4r^2 n^2 (1 - n^2) & \text{II.} \end{array} \right\}$$

Beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen können nun für n in B und C eingesetzt werden, wodurch man jedesmal die 2 zusammengehörigen Werthe von x und y findet. Man möge hierbei aber noch Folgendes bedenken:

Für positive Abscissen gilt in A. nur das obere Zeichen (s. § 17), daher auch nur C. I.; für negative aber gelten beide Zeichen in A., also auch C. I. und II.

Da wir ferner wissen, dasz $+x$ zwischen o und 4r variirt, und $-x$ zwischen o und $-\frac{r}{2}$, so musz im ersten Falle (s. B.) $n > 1$ und < 2, im zweiten aber $n < 1$ und $> o$ genommen werden. Im letzten Falle könnte man auch sagen, dasz $n < 1$ und $> \frac{1}{2}$ zu nehmen sei, da die Werthe von x dieselben sind, ob ich n zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2}$ und 0 wähle;

denn: (s. B.) $2r \cdot (\frac{1}{2} + \alpha) \cdot (\frac{1}{2} + \alpha - 1) = 2r \cdot (\frac{1}{2} - \alpha) \cdot (\frac{1}{2} - \alpha - 1)$.

Es ist nun z. B. für $n = o : x = o,\ y^2 = o$.

$$n = 2 : x = 4r,\ y^2 = o.$$

$$n = \tfrac{1}{2} : x = -\frac{r}{2},\ y^2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}\, a^2 \\ \frac{3}{4}\, a^2. \end{array} \right.$$

Das letzte Resultat wird nicht überraschen, da ja für $x = -\frac{r}{2}$, wie uns schon bekannt ist, statt der vier Werthe von y nur 2 erscheinen dürfen.

§ 20.

Wir haben gesehen, dasz schon die zwei behandelten Curven reichlichen Stoff zur Betrachtung darbieten, wiewohl auch über diese nur Einiges mitgetheilt worden ist. Solcher Curven gibt es aber unendlich viele, und wenn auch über alle zugleich gewisse allgemeine Bemerkungen gemacht werden können, so wollen wir uns doch auf das Gesagte beschränken. Nur damit doch wenigstens Gelegenheit geboten wird, die mitgetheilten Figuren (21 bis 26) etwas genauer anzuschauen, möge man sich fragen:

1) Wie oft wird ρ_7 oder $r \cdot \frac{\sin 7w}{\sin w} = o$?

Es ergibt sich leicht:

$$w = 1 \cdot 25\tfrac{5}{7}{}^0,\ 2 \cdot 25\tfrac{5}{7}{}^0 \ldots 6 \cdot 25\tfrac{5}{8}{}^0,\ 8 \cdot 25\tfrac{5}{7}{}^0,\ 9 \cdot 25\tfrac{5}{7}{}^0 \ldots 13 \cdot 25\tfrac{5}{7}{}^0.$$

Wie steht es bei $w = o^0$ und $7 \cdot 25\frac{5}{7}{}^0$? S. § 13. I. oder III.)

2) Wie oft wird ρ_8 oder $r \cdot \frac{\sin 8w}{\sin w} = o$?

Es ergibt sich ebenso leicht:

$$w = 1 \cdot 22\tfrac{1}{2}{}^0, \ldots 7 \cdot 22\tfrac{1}{2}{}^0.$$

Was tritt hier ein bei $w = 9 \cdot 22\frac{1}{2}{}^0$ bis $15 \cdot 22\frac{1}{2}{}^0$?

Wie steht es bei $w = o^0$ und $8 \cdot 22\frac{1}{2}{}^0$? (S. § 16. I. oder III.)

Schlieszlich sei es mir noch erlaubt, allen jenen, deren ich anfänglich gedacht, noch ein Paar Worte zu sagen. Wenn man mit gewissen Aufgaben nicht in's Reine kommen kann, so liegt der Grund hierzu, abgesehen von oft ziemlich mangelhaften Vorkenntnissen, nicht etwa immer, ja vielleicht sogar sehr selten, in dem auf den ersten Seiten dargelegten Umstande, sondern in der Regel wohl darin, dasz die Aufgaben selbst nicht gehörig formulirt sind. Soweit meine Erfahrung reicht, sind es gewöhnlich Constructions-Aufgaben und Gleichungen, welche das meiste Interesse haben für solche, die nicht ex professo oder ex officio Mathematik treiben. Aber vielleicht in noch höherem Grade, als anderwärts, ist gerade dabei von der grössten Wichtigkeit, dasz die Aufgabe richtig formulirt sei, während es oft gar nicht leicht ist, dies zu beurtheilen. Die Abhängigkeit gewisser gegebener Stücke, oder ihr innerer Widerspruch ist bisweilen nur mit groszer Mühe herauszufinden. Hier, meine ich, sei es anzuempfehlen, dasz man sich an geeigneter Stelle Rath hole, oder sich, was wohl das Beste wäre, an den vortrefflichen Aufgabensammlungen, die wir besitzen, genügen lasse. Überreicher Stoff für weit mehr, als mehrere Menschenalter, wird hierin jenen Freunden der Mathematik geboten, und ohne vorhergegangene gründliche Studien wird es in dieser, wie auch in anderen Wissenschaften, sicherlich nicht gelingen, neue Erfindungen zu machen, die wirklich neu wären. Aber auch schon das Nacherfinden hat für uns einen groszen Reiz; nur ist es eben gut, wenn man die edle Zeit nicht zu solchen Untersuchungen verwendet, die nach dem zuverlässigen Urtheile Anderer unfruchtbar sein müssen.

Verbesserungen.

Seite 10 Zeile 17 stelle das A 2 Zeilen höher. — S. 11 Z. 8 lies $n(n^2 - 1^2) \ldots \{n^2 - (n-2)^2\}$ S. 11. Z. 13 lies ρ^{n-1} statt $\frac{y}{\rho^n - 1}$ — S. 11 Z. 17 lies $(n^2 - 1^2)$ statt $(n^2 - 2^2)$. — S. 12 Z. 8 lies r^2 im letzten Producte. — S. 12 Z. 10 lies $2x^2$ statt 2^2x.

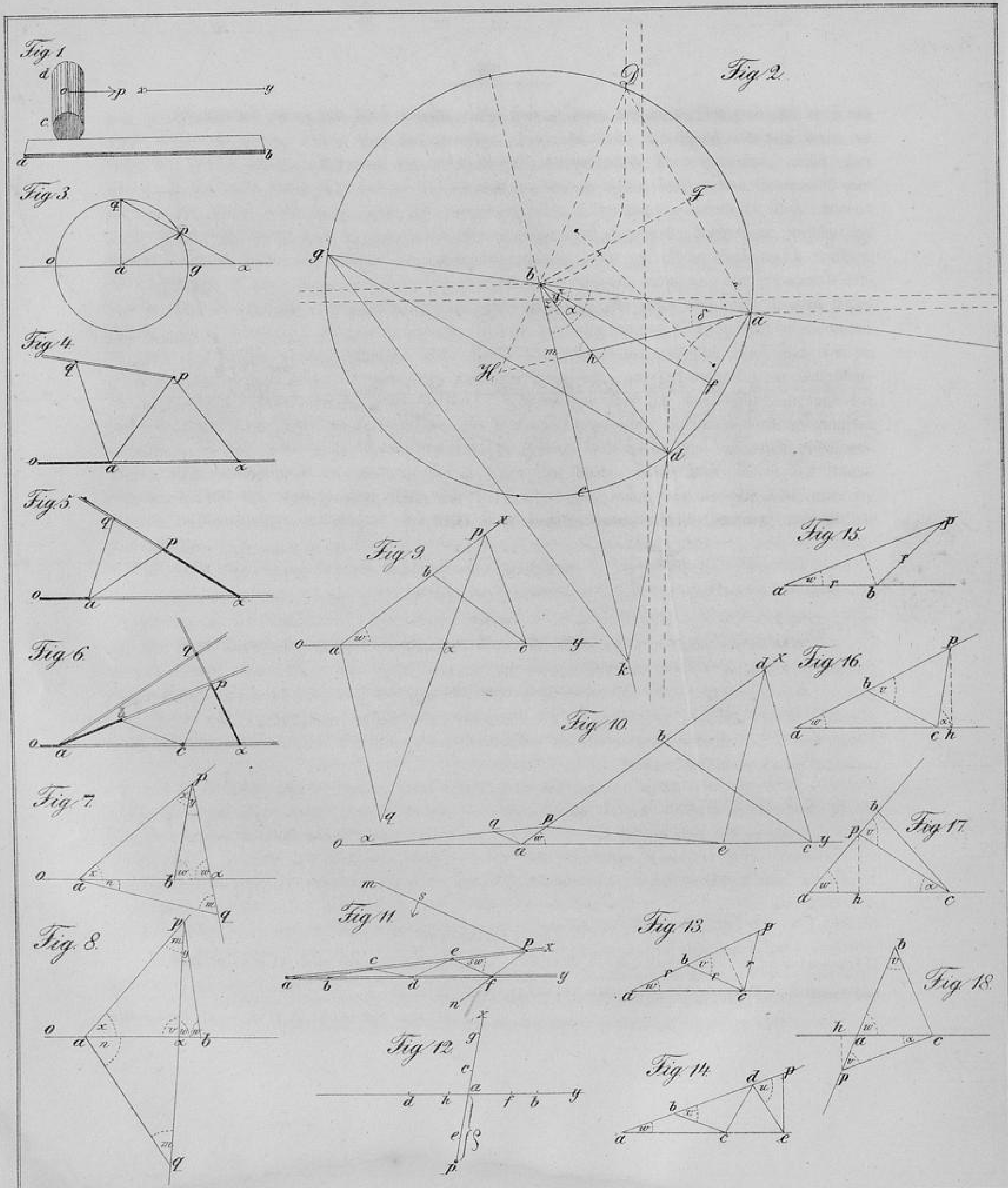


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

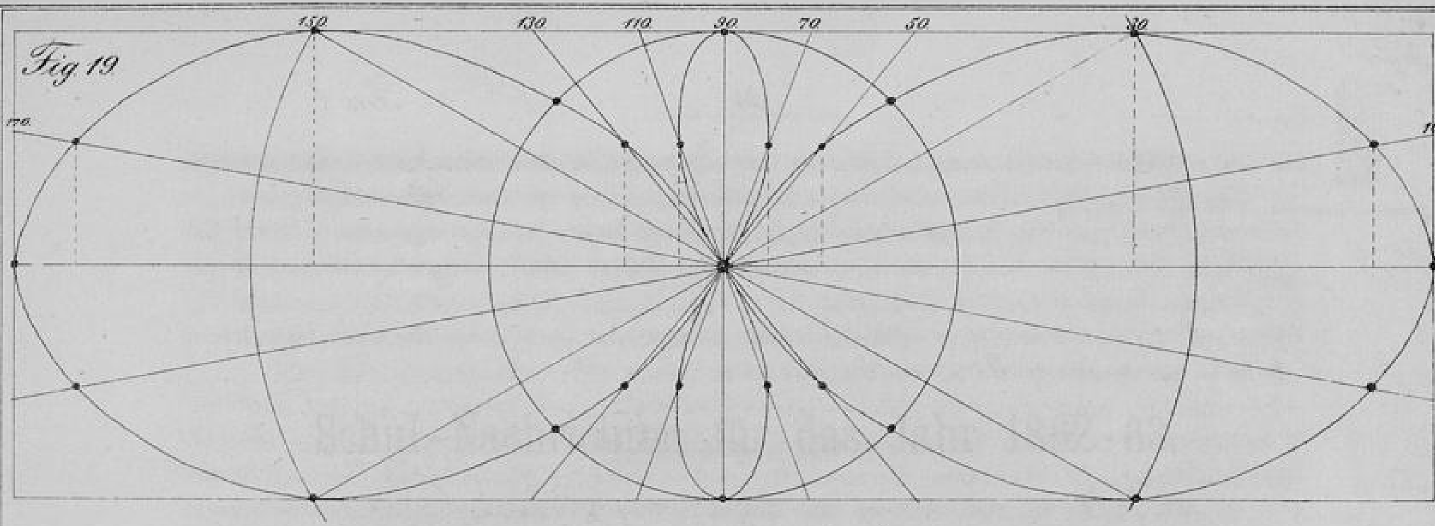
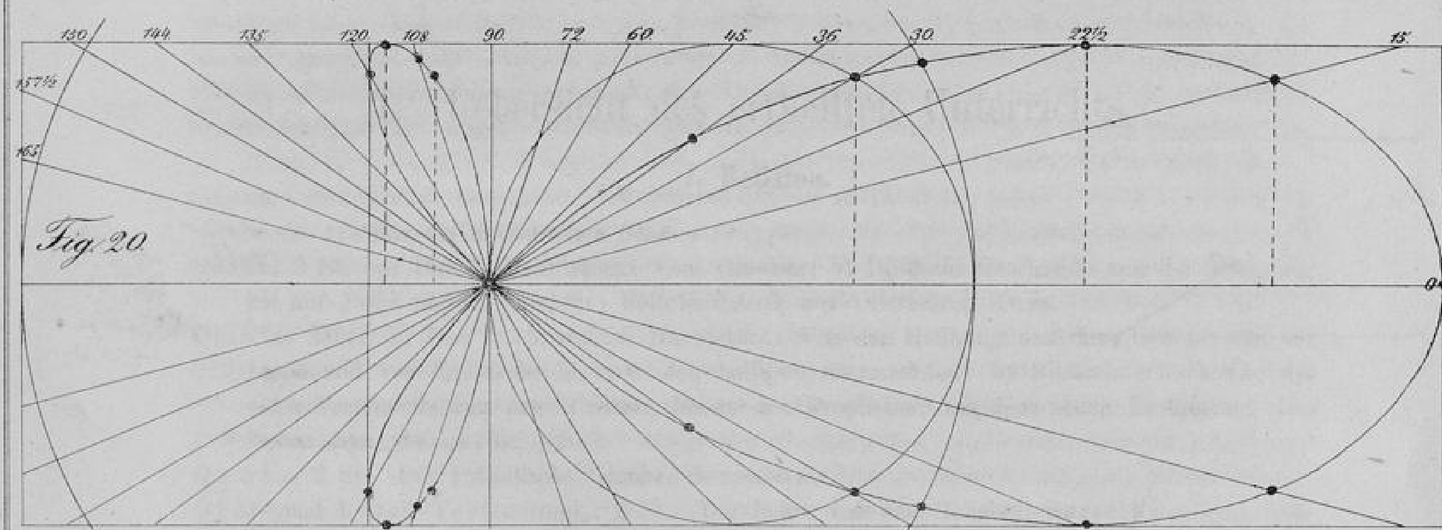


Fig 19.
170.
150
130.
110.
90.
70.
50.
30
10.
0


180.
144.
135.
120.
108.
90.
72.
60.
45.
36.
30.
22½
15.
157½
165.
Fig. 20.
0

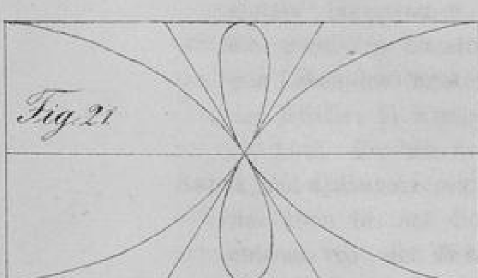


Fig. 21.

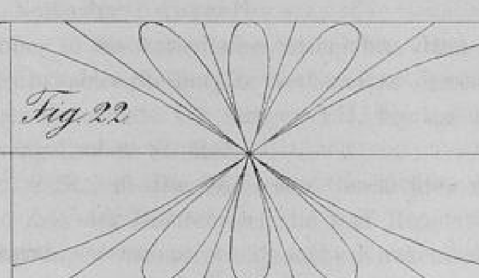


Fig. 22.

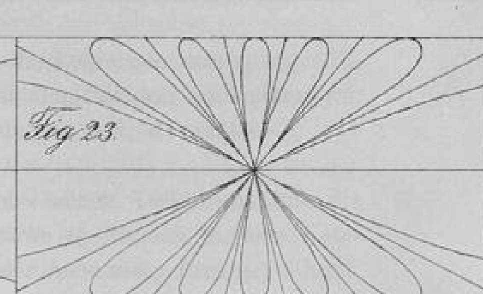


Fig. 23.

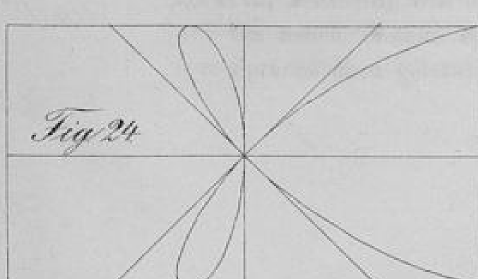


Fig. 24.

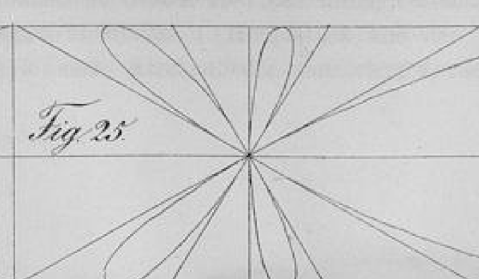


Fig. 25.

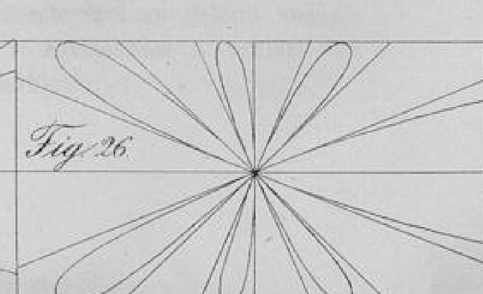


Fig. 26.