Eine allgemeine Formel, oder Gleichung für die Theorie der Kegelschnitte mit rechtwinklichen Coordinaten.

Die höhere Geometrie ist die Lehre von den krummen Linien, von denen die Kreislinie bereits in der Elementar-Geometrie betrachtet wird. Die Linien zweiter Ordnung, oder diejenigen Linien, welche durch eine Gleichung des zweiten Grades bestimmt werden, heißen Kegelschnitte, weil sie entstehen, wenn ein Kegel durch eine Ebene geschnitten wird.

Die Kegelschnitte wurden schon von den Alten bearbeitet. Der erste, der über die Kegelschnitte geschrieben, war Aristaeus in 5 Büchern, deren die Alten mit vielem Lobe Erwähnung thun. Sie sind leider! verloren gegangen.*) Vor allen zeichnet sich das Werk des Apollonius v. Perga in Pamphilien über die Kegelschnitte aus.**) Seine Zeitgenossen nannten ihn den großen Geometer. Er lebte unter Ptolemäus Euergetes 250 v. Chr., studirte in Alexandrien und schrieb dort 8 Bücher. Die ersten 4 Bücher sind in der Original-Sprache noch übrig, worin er von der Erzeugung der Kegelschnitte und ihren vornehmsten Eigenschaften in Beziehung auf Axen, Brennpunkte und Durchmesser handelt; die drei folgenden sind nur in einer Uebersetzung, die davon um das Jahr 1250 ins Arabische gemacht war, und die um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts ins Lateinische wieder übertragen wurde, zu uns gekommen. Das achte Buch ist verloren gegangen.

§. 1.

Ein grader oder schiefer Kegel läßt sich mittelst einer Ebene auf 5 Arten schneiden.

1) Geht die Ebene des Schnittes längs der Axe des Kegels, im graden Kegel senkrecht auf die Grundfläche, wodurch ein Triangel entsteht, welcher Axentriangel heißt.
2) Der Schnitt ist parallel mit der Grundfläche des Kegels, dann ist der Schnitt ein Kreis.
3) Die schneidende Ebene steht auf der Ebene des Axentriangels senkrecht und die gemeinschaftliche Durchschnittslinie beider geht parallel mit einer Seitenlinie des Kegels. Der Schnitt bildet eine Parabel.

Eine Parabel entsteht, wenn der Durchschnitt mit der Profil-Seite des Kegels parallel geht.

*) Bossut's Geschichte der Mathem. S. 41. Band 1.
**) Bossut's Geschichte der Mathem. S. 90. Band 1.

4) Die schneidende Ebene steht auf der Ebene des Triangels senkrecht, geht aber durch beide Seiten des Axentriangels, die Durchschnittslinie beider ist nicht parallel mit der Grundlinie des Axentriangels. — Der Schnitt ist eine Ellipse.

Eine Ellipse entsteht, wenn der Durchschnitt unter der Spitze beide Seiten des Profils trifft, ohne mit der Grundfläche parallel zu sein.

5) Wenn die schneidende Ebene senkrecht die Ebene des Axentriangels durchschneidet, die gemeinschaftliche Durchschnittslinie beider Ebenen mit der geschnittenen Seite des Axentriangels einen Winkel bildet, der kleiner ist als der Winkel am Scheitel des Axentriangels, so entsteht eine Hyperbel.

Eine Hyperbel entsteht, wenn der Durchschnitt mit der Axe des Kegels parallel geht und verlängert einen darüber verkehrt stehenden Kegel treffen würde.

§. 2.

Jede gerade Linie, welche zwei Punkte einer Curve verbindet heißt Sehne, welche aber alle parallelen Sehnen einer Curve halbirt, heißt Durchmesser. Halbirt ein Durchmesser die parallelen Sehnen unter rechten Winkel, so heißt er eine Axe. Der Punkt, in welchem die Axe die Curve schneidet, heißt Scheitel; der Punkt, in welchem sich alle Sehnen halbiren, der Mittelpunkt der Curve.

§. 3.

Soll die Lage eines Punktes, der sich in einer gegebenen Ebene befindet, angegeben werden, so geschieht dies am bequemsten, indem man eine gerade Linie in derselben Ebene als bekannt annimmt, und jenes Punktes Lage in Vergleichung gegen sie bestimmt. Diese erhält man dadurch, daß man des Punktes Abstände von jener geraden Linie angiebt, und zugleich bestimmt, neben welchem Punkte jener Linie sich der zu bestimmende Punkt befindet. Zu diesem Zwecke nimmt man auf jener geraden Linie ab einen willführlichen Punkt a als Anfangspunkt an, von welchem die auf ab zu messenden Abstände an gerechnet werden. Zieht man nun von einem zu bestimmenden Punkte x die Abstandslinie xz gegen jene Linie unter einem bestimmten Winkel xzb geneigt, so ist die Lage des Punktes x gegen jene Linie bekannt, wenn az, xz, und der Winkel xzb gegeben sind. (Fig. 1.)

Man nennt ab die Abscissenlinie auch wohl die Axe, a den Anfangspunkt der Abscissen, az die Abscisse für den zu bestimmenden Punkt x, zx die Ordinate desselben, beide Linien az, zx auch die Coordinaten des Punktes x oder seine einander zugeordneten Abstände, endlich xzb den Coordinaten-Winkel, welcher gewöhnlich ein rechter Winkel ist.

§. 4.

Die Endpunkte der Ordinaten bestimmen die Bahn der Curve und diese Ordinaten sind Funktionen ihrer Abscissen. Das constante Verhältniß jeder Curve zu ihren Abscissen durch eine Gleichung ausgedrückt heißt die Gleichung für die Curve. Je nachdem die Gleichung vom 1sten, 2ten oder 3ten Grade ist, wird die Curve von der 1sten, 2ten oder 3ten Ordnung genannt.

Ein algebraischer oder analytischer Ausdruck, worin veränderliche Größen mit einer oder mehreren beständigen Größen verbunden sind, heißt eine Funktion dieser veränderlichen Größe.

Die Kegelschnitte gehören aber zu Curven der 2ten Ordnung, demnach muß auch die allgemeine Gleichung für alle Kegelschnitte eine Gleichung vom 2ten Grade sein.

§. 5.

Um eine allgemeine Form oder Gleichung für alle Kegelschnitte zu finden, nehme ich an an Fig. 2. sei fer ein Kegelschnitt, emr der eine Ast der Curve, die Abscisse $ep = x$, die Ordinate $pm = y$. Die Entfernung des Schnittes vom Scheitel $ce = d$ und der Winkel $acb = x$ der Winkel $keb = u$.

Der Schnitt fer stehe auf der Ebene des Axentriangels senkrecht; es sei daher die Durchschnittslinie pm des Schnittes und des Kreises senkrecht auf die Ebene des Axentriangels. Weil nun nmg parallel arb und im geraden Kegel acb senkrecht auf arb ist, muß auch $npm = mpg = mpe = R$, denn eine Linie senkrecht auf eine Ebene gezogen, steht auf allen Linien, die durch den Durchschnittspunkt in derselben Ebene gehen, senkrecht. —

Nach der ebenen Geometrie ist der aus einem Punkte der Peripherie eines Kreises auf den Diameter gefällte Perpendikel die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Segmenten des Diameters, also: $np : mp = mp : gp$ oder $mp^2 = y^2 = np \,.\, gp$. Nun werden die Werthe von np u. gp. zu bestimmen gesucht. Nach der ebenen Trigonometrie verhalten sich in jedem Triangel je zwei Seiten zu einander, wie die sinusse der ihnen gegenüberliegenden Winkel. Daher im Triangel $epg : ep : pg = \sin egp : \sin peg$. Zieht man $et \parallel ng$, so ist $\sin egp = \sin ceq = \cos qce = \cos\frac{\alpha}{2}$ und da $ep = x$, $peg = u$ so steht obige Proportion $x : pg = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin u$ oder $pg = \frac{x \sin u}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

Zieht man nun $pl \parallel ac$, welche te in v schneidet, so ist $tv = np$ und $tv = te - ve$. Nun verhält sich im Triangel tce; $te : ce = \sin tce : \sin cte$. oder weil $\sin cte = \cos etq = \cos\frac{\alpha}{2}$ und wenn $ce = d$ gesetzt wird . $te : d = \sin\alpha : \cos\frac{\alpha}{2}$ oder $te = \frac{d \sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Es ist ferner $peg = plg + lpe$ nach der ebenen Geometrie oder weil $peg = u$ und $plg = acb = \alpha$ muß $u = \alpha + lpe$ demnach $lpe = u - \alpha = vpe$.

Im Triangel pve wird aber $pe : ve = \sin pve : \sin vpe$ und da sinus $pve = \sin nte = \sin cte = \cos teq = \cos\frac{\alpha}{2}$ so ist $x : ve = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin(u - \alpha)$ also: $ve = \frac{x \sin(u-\alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Demnach $te - ve = tv = \frac{d \sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{x \sin(u-\alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

folglich ist $np = tv = \frac{d \sin\alpha - x \sin(u-\alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ und da $pg = \frac{x \sin u}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ und $y^2 = np \,.\, gp$, muß

$$y^2 = \frac{x \sin u}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left[\frac{d \,.\, \sin \alpha - x \sin (u - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right] \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{d\, x \sin \alpha \,.\, \sin u - x^2 \sin u \,.\, \sin (u - \alpha)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

eine allgemeine Gleichung für alle Kegelschnitte. Aus dieser allgemeinen Gleichung soll die einfache Gleichung für jeden Kegelschnitt dargestellt und die vorzüglichsten Eigenschaften entwickelt werden.

§. 5.

Nach §. 1. 1. ist der Schnitt ein Axentriangel, wenn die schneidende Ebene durch die Spitze längs der Axe des Kegels gelegt wird. In diesem Falle wird ce = d = o und $u = \frac{\alpha}{2}$: daher aus der Gleichung $y^2 = -\frac{x^2 \sin \frac{\alpha}{2} \,.\, \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha\right)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ oder

$$y^2 = -\frac{x^2 \sin \frac{\alpha}{2} \,.\, \sin - \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

und hieraus, weil der sin. eines negativen Winkels negativ ist wird $\sin - \frac{\alpha}{2} = - \sin \frac{\alpha}{2}$ und

$$y^2 = \frac{x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ und}$$

$$y = \frac{x \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \text{ und hinaus}$$

$$y = x \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$$

Eine Gleichung für die gerade Linie mit rechtwinklichen Coordinaten, wenn der Durchschnittspunkt zugleich der Anfangspunkt der Abscissen ist. Wäre der Durchschnittspunkt nicht der Anfangspunkt der Abscissen, sondern x = a + v, so ist

$$y = (a + v) \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = a \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} + v \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man nun $a \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = b$, so ist $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$ und

$$y = \frac{ab}{a} + \frac{vb}{a} = b + \frac{vb}{a}$$

eine allgemeine Gleichung für die gerade Linie, wenn v die Abscisse ist. *)

Wäre Fig. 3. ab die gerade Linie, welche die Abscissenlinie unter dem Winkel $\frac{\alpha}{2}$ schneidet, die Abscisse $cp = x$, die rechtwinklichte Ordinate $mp. = y$, so ist im Triangel cmp.

$$mp : cp = \sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{2} \text{ oder}$$

$$y : x = \sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$y = \frac{x \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = x \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

Wäre aber g der Anfangspunkt der Abscissen, $cg = a$, $gf = b$, $gp = v$, $pm = y$ so ist $\triangle.\ cmp \sim \triangle\ cgf$. daher

$$cg : gf = cp : pm$$
$$a : b = (a + v) : y$$
$$y = \frac{(a + v)\ b}{a} = b + \frac{vb}{a}.$$

§. 6.

Wenn die Ebene den Kegel parallel mit der Grundfläche schneidet, so ist der Schnitt ein Kreis nach §. 1. 2. dann ist

$$keb \text{ oder } u = cqe + ecq = 90° + \frac{\alpha}{2} \text{ u. } \sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Nach der allgemeinen Gleichung wird

$$y^2 = \frac{dx \sin\left(90 + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha - x^2.\sin\left(90 + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(90 + \frac{\alpha}{2} - \alpha\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$y^2 = \frac{dx \cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha - x^2\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

nach der ebenen Trigonometrie ist $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}$. Daher

---

*) Brandes höhere Geometrie 1. Theil.

$$y^2 = \frac{dx \,.\, 2 \sin\frac{\alpha}{2} \,.\, \cos^2\frac{\alpha}{2} - x^2 \,.\, \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\, xd \sin\frac{\alpha}{2} - x^2$$

Im Triangel cqe aber steht $ce : qe = \sin tot : \sin\frac{\alpha}{2}$

$$d : qe = 1 : \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$qe = d \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$2qe = 2d \sin\frac{\alpha}{2} \text{ demnach}$$

$y^2 = 2x \,.\, qe - x^2$ nun ist $2qe = te$ gleich dem Durchmesser des parallel gelegten Kreises $= 2r$ folglich

$y^2 = 2rx - x^2$ Gleichung für den Kreis. *)

§. 7.

Die schneidende Ebene geht parallel mit der Seitenlinie des Kegels; der Schnitt ist nach §. 1. 3. eine Parabel.

In diesem Falle ist Fig. 4. der Winkel u oder $< keb = \alpha = acb$ und $ek \parallel ac$. Es wird

$$y^2 = \frac{d \,.\, x \sin\alpha \sin\alpha - x^2 \sin\alpha \,.\, \sin(\alpha - \alpha)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$y^2 = \frac{dx \sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

Nun ist aber $\frac{d \sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ eine beständige Größe, von welcher der Umfang der Parabel abhängt, denn je größer der Winkel α, desto größer ist der Umfang des Kegels und je größer $d = ce$, desto tiefer ist der Schnitt, desto umfassender die Parabel. Diese für einen und denselben Schnitt beständige Größe $\frac{d \,.\, \sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ heißt Parameter und wird durch p bezeichnet.

Obige Gleichung wird also

$$y^2 = px$$

eine Gleichung für die Parabel. **)

---

*) Brande's Lehrbuch der höhern Geometrie 1. Theil §. 94.

**) Brande's höhere Geometrie 1. Theil.

§. 8.

Ist der Schnitt eine Ellipse, so ist Fig. 5. keb oder $u > \alpha$. Die allgemeine Gleichung läßt sich ohne Umänderung seines Werthes folgendermaßen darstellen.

$$y^2 = \frac{dx \sin u . \sin \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{x^2 \sin u . \sin (u - \alpha)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} . \frac{d \sin \alpha}{d . \sin \alpha.}$$

$\dfrac{d . \sin u . \sin \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ ist für einen und denselben Schnitt eine beständige Größe, von welcher der Umfang der Ellipse abhängt: denn je tiefer der Schnitt $ce = d$, je umfassender der Kegel wegen α und je kleiner u ist, desto umfassender und länger wird die Ellipse. Diese beständige Größe heißt der Parameter $= p$. Die Gleichung wird

$$y^2 = px - \frac{x^2 . d \sin u . \sin \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} . \frac{\sin (u - \alpha)}{d \sin \alpha}$$

$$y^2 = px - \frac{px^2 . \sin (u - \alpha)}{d . \sin \alpha.}.$$

Nun ist $keb = u = ekc + kce = ekc + \alpha$ folglich $ekc = u - \alpha$. ferner verhält sich im Triangel kce

$$ce : ke = \sin ekc : \sin kce$$

$$d : ke = \sin (u - \alpha) : \sin \alpha \text{ und}$$

$$\sin (u - \alpha) = \frac{d \sin \alpha}{ke} \text{: obige Gleichung wird also}$$

$$y^2 = px - \frac{px^2 . d . \sin \alpha}{ke . d \sin \alpha} = px - \frac{px^2}{ke}$$

Setze ich nun $ke = a$. so ist

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a}$$

eine Gleichung für die Ellipse für Abscissen in der großen Axe aus deren Scheitel und für rechtwinkeliche Ordinaten.

§. 9.

Wenn Fig. 6. der Winkel $keb = u < \alpha$, dann ist der Schnitt eine Hyperbel nach §. 1. 5.

Die allgemeine Gleichung kann wiederum ohne Aenderung des Werthes folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$y^2 = \frac{dx . \sin u . \sin \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{x^2 . \sin u \sin (u - \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} . \frac{d \sin \alpha}{d \sin \alpha}$$

Nach §. 8. ist $\dfrac{d \sin u . \sin \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ eine beständige Größe $= p$. daher

$$y^2 = px - \frac{px^2 . \sin(u - \alpha)}{d . \sin \alpha}.$$

Nun ist $\alpha = cqe + ceq$ oder $\alpha = cqe + keb$ weil $qec = keb$ als Scheitelwinkel
$\alpha = cqe + u$ oder $- cqe = u - \alpha$ folglich
$\sin(u - \alpha) = \sin - cqe = - \sin cqe$ und

$$y^2 = px - \frac{px^2 . - \sin cqe}{d . \sin \alpha} = px + \frac{px^2 \sin cqe}{d . \sin \alpha .}$$

Nun verhält im Triangel cqe

$$qe : ce = \sin qce : \sin cqe .$$

da nun $\sin qce = \sin ace = \sin \alpha$. so ist

$$qe : ce = \sin \alpha : \sin cqe$$

$$qe : d = \sin \alpha : \sin cqe$$

$$\sin cqe = \frac{d . \sin \alpha}{qe} \text{ daher}$$

$$y^2 = px + \frac{px^2 \, d \, \sin \alpha}{qe . d . \sin \alpha} = px + \frac{px^2}{qe}$$

Setze ich $qe = a$ so ist $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ die Gleichung für die Hyperbel.

Da unter Kegelschnitten eigentlich nur Parabel, Ellipse und Hyperbel verstanden werden, so beschränke ich mich in der Entwickelung der wesentlichsten Eigenschaften nur auf diese drei Kegelschnitte, welche auch die Appollonischen genannt werden.

§. 10.

Aus der Gleichung für die Parabel nach §. 7, worin $y^2 = \frac{xd . \sin^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ od. $y^2 = px$ war, lassen sich folgende Eigenschaften entwickeln:

1) Setzt man $x = 0$, so wird $y = 0$, wo aber die Ordinate $= 0$ wird, dort ist der Scheitel der Curve. Die Parabel hat im Anfangspunkte der Abscissen einen Scheitel.
2) Je größer x wird, desto größer wird y: Die Parabel hat keinen 2ten Scheitel, ist daher keine in sich zurückkehrende Curve.
3) Da $y^2 = \frac{xd \sin^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = px$, folglich $y = \pm \frac{\sqrt{xd} \sin^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \pm \sqrt{px}$; so giebt es für jede Abscisse zwei gleichgroße aber entgegengesetzte Ordinaten. Die Parabel hat zwei Aeste, die sich auf jede Seite der Abscissen hinziehn.
4) Wird x negativ, so wird $y = \pm \sqrt{-px}$ eine unmögliche Größe; folglich giebt es keine entgegengesetzte Parabel.
5) In der Parabel verhalten sich die Quadrate der senkrecht auf die Abscisse gezogenen Ordinaten, wie die zugehörigen Abscissen, oder da $y^2 = px$ und $Y^2 = pX$, so steht $y^2 : Y^2 = px : pX$ oder $y^2 : Y^2 = x : X$.

§. 11.

In allen Kegelschnitten heißt derjenige Punkt der Axe, in welchem die senkrechte Ordinate dem halben Parameter gleich ist, der Brennpunkt. Die Entfernung dieses Brennpunktes vom Scheitel ist bei der Parabel gleich dem 4ten Theile des Parameters: denn wäre $y = \frac{p}{2}$ so ist $\frac{p^2}{4} = px$ oder $x = \frac{p}{4}$.

§. 12.

Ein Perpendikel (Fig. 7.) auf die verlängerte Hauptaxe außerhalb der Parabel in derselben Entfernung vom Scheitel wie der Brennpunkt, heißt Directrix. Jede gerade Linie aus dem Brennpunkte nach der Curve gezogen heißt **rad. vector.**

Jeder Punkt der Curve ist vom Brennpunkte und der Directrix gleich weit entfernt; denn:
$ab^2 = cb^2 + (gc - ag)^2$

ab der **rad. vector.** $= r$

$$r^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{4}p)^2, \text{ da } y^2 = px$$
$$r^2 = px + x^2 - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{16}p^2$$
$$r^2 = x^2 + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{16}p^2 = (x + \tfrac{1}{4}p)^2$$
$$r = x + \tfrac{1}{4}p.$$

Ergänzt man das Parallelogramm ecbd, muß $bd = ce = cg + ge$ sein

$$bd = x + \tfrac{1}{4}p. = r.$$

§. 13.

Eine Tangente ist eine gerade Linie, welche mit der Curve nur einen Punkt gemein hat, sonst ganz außerhalb derselben liegt. Bei der Parabel ist die Tangente derjenige Theil jener unbegränzten geraden Linie zwischen dem Berührungspunkte der Curve und dem Einschnittspunkte in die Abscissenlinie. Die Subtangente ist ein Stück der Abscissenlinie zwischen dem Einschnittspunkte der Tangente und der Ordinate. — Die Normale ist der Perpendikel auf die Tangente im Berührungspunkte bis zur Abscissenaxe. Subnormale ist der Theil der Abscissenaxe zwischen dem Einschnittspunkte der Ordinate und der Normalen.

Bei jeder Parabel ist: (Fig. 8.)

Subtang $= 2x$ denn ist b der Brennpunkt, $ed =$ **tang**. $df =$ **Normal**. $cd = y$ so ist

$$ec = \text{subtang},\ cf = \text{subnormale}.$$
$$eb = bd = x + \tfrac{1}{4}p.$$
$$\underline{bc = ac - ab = x - \tfrac{1}{4}p}$$
$$eb + bc = 2x = \text{subtang}$$

subnorm $cf = \frac{1}{2}p$ denn im rechtwinkl. Triangel ist $ec : cd = cd : cf$. oder $2x : y = y : \text{subn.}$

$$\text{subn.} = \frac{y^2}{2x} = \frac{px}{2x} = \frac{p}{2}$$

tang $ed = \sqrt{px + 4x^2}$ denn im rechtwinkl. Triangl ecd ist $ed^2 = ec^2 + cd^2$

$$ed^2 = 4x^2 + y^2$$
$$ed^2 = px + 4x^2$$
$$ed = \sqrt{px + 4x^2}$$

2

$$\text{tang ed} = \sqrt{\left[\frac{4px}{4} + 4x^2\right]} = \sqrt{4x\left(\frac{p}{4} + x\right)}$$

Die tang. ist mittlere Proportionale zwischen der 4fachen Abscisse und dem rad. vector. Die Normale fd ist mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und dem rad. vector: (denn in jedem rechtw. Triangel ist das Quadrat jeder Kathete gleich dem Rechtecke aus der Hypothenuse in das der Kathete anliegende Segment der Hypothenuse)

$$fd^2 = ef . cf . \text{ oder}$$

$$ef : fd = fd : cf .$$

$$(2x + \tfrac{1}{2} p) : fd = fd : \tfrac{1}{2} p .$$

$$fd^2 = px + \frac{p^2}{4}$$

$$fd = \sqrt{\left[px + \frac{p^2}{4}\right]} = \sqrt{p\left(x + \frac{p}{4}\right)}.$$

§. 14.

Die Gleichung für die Ellipse aus §. 8. war

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a.}$$

Wird $x = o$ so ist $y = o$ folglich im Anfangspunkte der Abscissen der Scheitel der Ellipse; setzt man aber $x = a$ so ist $y^2 = pa - \frac{pa^2}{a} = pa - pa$ oder $. y^2 = o ..$ d. i. in der Entfernung von $x = a$. giebt es noch einen Scheitel.

Weil $y = \pm \sqrt{\left[px - \frac{px^2}{a}\right]}$, so gehören zu jeder Abscisse zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten. Die Ellipse ist eine in sich selbst zurückkehrende Curve, deren Axe $= a$ die große Axe heißt. Wird x negativ, so erhält man eine unendliche Größe, welche angiebt, daß keine entgegengesetzte Ellipse möglich ist.

§. 15.

Die in der Mitte der großen Axe $= a$ errichtete senkrechte Ordinate, welche zur Abscisse $x = \frac{a}{2}$ gehöret, heißt die halbe kleine Axe und wird mit $\frac{b}{2}$. bezeichnet. Man findet.

$$\frac{b^2}{4} = \frac{pa}{4} \text{ und hieraus}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

der Parameter ist gleich der senkrechten Ordinate durch den Brennpunkt.

§. 16.

Um die Entfernung der Brennpunkte vom Scheitel oder die Abscisse x zu finden, nehme man nach §. 13.

$$y = \frac{p}{2} = \frac{b^2}{2a}.$$

Nach §. 14. ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ oder statt $p = \frac{b^2}{a}$ gesetzt

$$y^2 = \frac{b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{ab^2x - b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$$

Nun ist $y^2 = \frac{b^4}{4a^2} = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$

$$b^2 = 4ax - 4x^2$$

$$x^2 - ax = -\frac{b^2}{4}$$

$$x = \tfrac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - b^2})$$

Dieser doppelte Werth für $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b^2})$ und $\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b^2})$ zeigt, daß die Ellipse zu beiden Seiten in gleicher Entfernung von ihren Endpunkten einen Brennpunkt, also zwei Brennpunkte hat, die von dem Mittelpunkte der Ellipse gleich weit entfernt sind. $cF = cf = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$. Diese Entfernung des Mittelpunktes von dem Brennpunkte der Ellipse heißt Excentricität (Fig. 9.), da $cF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$ ist, muß $cF^2 = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$ u. $4cF^2 = a^2 - b^2$ das ist $= (a + b)(a - b)$. Das vierfache Quadrat der Excentricität ist dem Rechteck aus der Summe in die Differenz der großen und kleinen Axe gleich.

Die Brennpunkte F und f sind auch von den Endpunkten der kleinen Axe gleich weit entfernt und dieser Abstand von jedem Endpunkte der kleinen Axe ist gleich der halben großen Axe, denn:

$\triangle.\ Fdc \cong \triangle\ fdc.$ folglich

$Fd = fd.$ und weil $\triangle\ Fdc =$ rechtwinkl. $\triangle.$

$$Fd^2 = Fc^2 + cd^2.$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$fd = \frac{a}{2}$ der halben großen Axe gleich.

§. 17.

Die geraden Linien von den Brennpunkten nach irgend einem Punkte der Curve heißen **radien vectoren**, und deren Summe ist immer gleich der großen Axe.

Wäre $ap = x$, so ist $Fp = ap - aF. = x - (a - \sqrt{a^2 - b^2})$ und $pf = a + \sqrt{a^2 - b^2} - x$; ferner ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ folglich:

im $\triangle.$ fmp ist $fm^2 = mp^2 + pf^2$

$$= y^2 + pf^2$$

$$fm^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) + (a - x + \sqrt{a^2 - b^2})^2$$

$$fm^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2} + a^2 - 2ax + x^2 + 2(a - x)\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2$$

$$fm^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2} + a^2 - \frac{2a^2x}{a} + \frac{a^2x^2}{a^2} + 2(a-x)\sqrt{a^2-b^2} + a^2 - b^2$$

$$fm^2 = \frac{x^2}{a^2}(a^2-b^2) - \frac{2x}{a}(a^2-b^2) + \frac{a^2}{a^2}(a^2-b^2) + a^2 + \frac{2a}{a}(a-x)\sqrt{a^2-b^2}$$

$$fm^2 = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)(x^2-2ax+a^2) + \frac{2a(a-x)}{a}\sqrt{a^2-b^2} + a^2$$ aus beiden Seiten die Wurzeln gezogen

$fm = a + \left(\frac{a-x}{a}\right)\sqrt{a^2-b^2}$. und da $Fp = -(a-x) + \sqrt{a^2-b^2}$ so folgt wie vorher: $Fm^2 = \frac{b^2}{a}(2ax-x^2) + x^2 - 2ax + a^2 - 2(a-x)\sqrt{a^2-b^2} + (a^2-b^2)$ woraus nach ganz gleicher Rechnung wie vorher

$Fm = a - \frac{a-x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$ erfolgt, daher

$Fm + fm = a - \frac{a-x}{a}\sqrt{a^2-b^2} + a + \frac{a-x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$ oder

$Fm + fm = 2a$. .

Wenn über der Entfernung beider Brennpunkte Triangel beschrieben werden von der Beschaffenheit, daß die Summe der beiden andern Seiten jedesmal gleich der großen Axe ist, so liegen ihre Scheitel in der Curve der Ellipse.

§. 18.

Die Subnormale der Ellipse zu bestimmen: (Fig. 10.)

$np = nf - fp$.

$< qrm = < mrf = R$.

mn senkrecht auf tang., daher $mn \parallel qf$.

Im $\triangle$. qsf ist $mn \parallel pf$ daher

$sq : mq = sf : nf$

$sq = sm + mq$

$mq = fm$.

$sq = sm + mf = ab =$ der großen Axe,

$sf = sc + cf = 2e$ worin e die Excentricität bedeutet,

daher $a : mf = 2e : nf$

$mf =$ rad. vect. $= \frac{a}{2} - \frac{2eu}{a}$

$a : \left(\frac{a}{2} - \frac{2eu}{a}\right) = 2e : nf$

$a . nf = ae - \frac{4e^2u}{a} = \frac{a^2e - 4e^2u}{a}$

$nf = \frac{a^2e - 4e^2u}{a^2}$

$$\mathfrak{f}p = \mathfrak{f}c - cp = e - u$$

$$np = nf - \mathfrak{f}p = \frac{a^2e - 4e^2u}{a^2} - (e - u)$$

$$np = \frac{a^2e - 4e^2u - ea^2 + ua^2}{a^2} = \frac{ua^2 - 4e^2u}{a^2} = \frac{4a^2}{a^2} - \frac{4u}{a^2} . e^2$$

$$np = \frac{a^2u}{a^2} - \frac{4u}{a^2}\left(\frac{a^2 - b^2}{4}\right) = \frac{a^2u}{a^2} - \frac{4a^2u - 4b^2u}{4a^2} = \frac{a^2u - a^2u + b^2u}{a^2}$$

$np = \frac{b^2u}{a^2}$ oder statt der kleinen Axe den Parameter substituirt, da die kleine Axe die mittlere Proportionale ist zwischen der großen Axe und dem Parameter, da

$a : b = b : p$ und $b^2 = pa$ demnach

$$np = \frac{pu}{a} = \text{subnormale.} -$$

Die **Subtang.** $pt.$ ergiebt sich aus dem $\triangle$ nmt in welchem nm senkrecht steht auf der tang.

$np : pm = np : pt$ woraus

$$pt = \frac{a^2 - u^2}{a}$$

Die Normale $mn. = \sqrt{\left[\frac{b^2}{4} - \frac{b^2u^2}{a^2} + \frac{b^2a^2}{a^4}\right]}$

$$= \frac{b}{2a^2}\sqrt{a^4 - 4a^2u^2 + 4u^2}$$

§. 19.

Aus der allgemeinen Gleichung für die Kegelschnitte war die Gleichung für die Hyperbel

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

1) Wird in dieser Form $x = o$ so ist $y^2 = o$. derjenige Punkt, worin die Curve die Axe durchschneidet und die Ordinate $= o$ ist, wird der Scheitel der Curve genannt, da aber $y = o$ wird, sobald $x = - a$, folglich $x^2 = a^2$

$$y^2 = - ap + \frac{a^2p}{a}$$

$$y^2 = - ap + ap = o \cdot$$

so muß es bei der Hyperbel zwei Scheitel geben; der eine im Anfange der Abscissen, der andere im entgegengesetzten Punkte der Abscissenlinie, welcher vom Anfange der Abscissen um die Länge der Axe — Zwerchaxe — entfernt ist.

2) Es giebt 2 gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten: denn

$$y = \pm \sqrt{[px + \frac{px^2}{a}]}$$

Da nun die beständigen Größen p und a auf y keinen Einfluß haben, so hängt die Größe der Ordinate blos von der Größe der Abscisse ab, daher wenn x unendlich wird, kann auch y unendlich werden. —

3) Die Mitte der Hauptaxe heißt der Mittelpunkt der Hyperbel. — Die mittlere Proportionallinie zwischen der Hauptaxe und dem Parameter heißt nach Aehnlichkeit der Ellipse die kleine Axe, folglich

$$a : b = b : p.$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

§. 20.

Die Gleichung für die Hyperbel kann auch durch die kleine Axe ausgedrückt werden. Man setze statt des Parameters den Werth desselben:

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$y^2 = \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{ab^2x + b^2x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$$

$$y^2 = \pm \frac{b}{a}\sqrt{ax + x^2}$$

Ist die große Axe (Zwerchaxe) gleich der kleinen Axe, so ist $y^2 = ax + x^2$. Diese Hyperbel heißt eine gleichseitige Hyperbel.

§. 21.

Eine Gleichung für die Hyperbel aus dem Mittelpunkte zu formiren. (Fig. 11.)

Vorher hieß die Abscisse vom Scheitel $ap = x$, die dazu gehörige ordin. $pm = y$. Jetzt heißt die Abscisse vom Mittelpunkte $cp = u$, die Ordinate pm.

$$ap = cp - ac.$$

$$x = u - \frac{a}{2},\ x^2 = u^2 - ax + \frac{a^2}{4}$$

$$y^2 = \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} \text{ nach §. 20.}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a}(u - \tfrac{1}{2}a) + \frac{b^2}{a^2}\left(u^2 - au + \frac{a^2}{4}\right)$$

$$y^2 = \frac{b^2u - \tfrac{1}{2}ab^2}{a} + \frac{b^2u^2 - ab^2u + \tfrac{1}{4}a^2b^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2u}{a} - \tfrac{1}{2}b^2 + \frac{b^2u^2}{a^2} - \frac{b^2u}{a} + \frac{b^2}{4}$$

$$y^2 = \frac{b^2u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}b^2$$

Gleichung für die Hyperbel vom Mittelpunkte aus.

§. 22.

Der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte oder die Excentricität zu finden. —

Man nehme in der Axe ein Paar Punkte an, die vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, $cf = cs$ nur daß cs der Lage nach negativ ist.

cf ist eine Abscisse vom Mittelpunkte

$$u = e$$

Die Ordinate zu dem Brennpunkte ist gleich $\frac{1}{2}p$

$$y = \tfrac{1}{2}p,\ y^2 = \tfrac{1}{4}p^2$$

$$p = \frac{b^2}{a},\ p^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^4}{4a^2}$$

$$\frac{b^4}{4a^2} = \frac{b^2e^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}b^2 \text{ nach §. 21.}$$

$$\frac{a^2b^4}{4a^2b^2} = e^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\frac{b^2}{4} = e^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$e^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + a^2}{4}$$

$$e = \pm\ \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2}$$

Die Hyperbel hat so wie die Ellipse zwei gleiche aber entgegengesetzte Brennpunkte.

§. 23.

In der Hyperbel ist die Entfernung der Brennpunkte von einander die Hypothenuse eines rechtwinkl. Triangels, dessen Katheten die beiden Axen sind

nach §. 22. ist $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$

$$4e^2 = a^2 + b^2$$

$$e = cf = cs$$

$$2e = cf + cs$$

$$2e = fs$$

$$4e^2 = fs^2$$

$$a^2 = ab^2,\ b^2 = lk^2$$

$$fs^2 = ab^2 + lk^2.$$

§. 24.

Zieht man aus irgend einem Punkte der Hyperbel radien vectoren, so ist ihr Unterschied gleich der großen Axe.

Man ziehe aus m eine Ordinate mp so ist

$$mpf = R. \text{ daher}$$

$$mf^2 = fp^2 + pm^2$$

$$fp = cp - cf.$$

$$mf^2 = (cp - cf)^2 + pm^2$$

$$= \left(u - \frac{\sqrt{c^2 + e^2}}{2}\right)^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2 \text{ nach §. 21.}$$

$$= u^2 - \sqrt{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$$

$$mf^2 = u^2 - u\sqrt{c^2 + a^2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2u^2}{a^2}$$

$$u^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} = \frac{u^2}{a^2}(a^2 + c^2)$$

$$mf^2 = \frac{u^2}{a^2}(a^2 + c^2) - u\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{a^2}{4} \text{ und}$$

$$mf = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 + c^2} - \frac{a}{2}$$

$$ms = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{a}{2}$$

$$ms - mf = a.$$

Die Differenz der beiden aus einem Punkte der Curve gezogenen **radien vectoren** ist der großen Axe gleich.

§. 25.

Zieht man an die Hyperbel eine Tangente tm so ist (Fig. 12.)

subtang. tp.
normal mn
subnorm. pn.

Für diese Größen einen geeigneten Ausdruck zu finden:

1) Für Subnormale $pn = fn - fp$.

$qf \parallel mn$ folglich

im $\triangle$ $smn.\ sq : sf = qm : fn$

$$qm = fm$$

$$sq : sf = fm : fn.$$

$$sq = sm - qm$$

$sz = sm - fm$ dieses sind rad. vect. deren Differenz $= a$. nach §. 24.

$$sq = a.$$

$$sf = 2e.$$

$$a : 2e = \left(\frac{2eu}{a} - \frac{a}{2}\right) : fn.$$

$$fn = 2e\,\frac{\left(\frac{2eu}{a} - \frac{a}{2}\right)}{a} =$$

$$fn = \frac{4e^2u - a^2e}{a^2}$$

Den Werth für fp zu finden.

$fp = cp - cf = u - e$ folglich:

$$pn = \frac{4e^2u - a^2e}{a^2} - (u - e) = \frac{4e^2u - a^2e}{a^2} - \frac{a^2u - a^2e}{a^2}$$

$$pn = \frac{4e^2u}{a^2} - \frac{a^2u}{a^2} = e^2\left(\frac{4u}{a^2}\right) - \frac{a^2u}{a^2}$$

$$e^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$$

$$pn = \frac{a^2 + c^2}{4} \cdot \frac{4u}{a^2} - \frac{a^2u}{a^2} = \frac{4a^2u + 4c^2u}{4a^2} - \frac{a^2u}{a^2}$$

$pn = \frac{c^2u}{a^2}$ und statt der kleinen Axe den Parameter gesetzt, da

$$c^2 = ap.$$

$pn = \frac{apu}{a^2} = \frac{pu}{a}$ und statt der Absciſſe vom Mittelpunkte die Absciſſe x vom Scheitel geſetzt,

$$cp = ap + ac$$

$$u = x + \tfrac{1}{2}a$$

$$pn = \frac{p}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)$$

$$pn = \frac{px}{a} + \frac{p}{2}.$$

Die Subnormale bei der Hyperbel hat zur Absciſſe ein beſtändiges Verhältniß; denn

$pn = \frac{pu}{a}$ hieraus $pn : u = p : a$.

2) Für die Subtangente tp einen einfachen Ausdruck zu finden.

$\triangle tmn$ iſt rechtwinkl., daher

$$pn : pm = pm : pt$$

nach 1) $\frac{c^2u}{a^2} : y = y : pt$

$$pt = \frac{y^2}{\frac{c^2u}{a^2}}$$

$$y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$$

$$pt = \frac{\frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}}{\frac{c^2u}{a^2}} = \left(\frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)\frac{a^2}{c^2u} = u - \frac{\tfrac{1}{4}a^2}{u}$$

$$pt = \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u} = \text{subtang. vom Mittelpunkte.}$$

Wird statt der Abscisse u vom Mittelpunkte die Abscisse x vom Scheitel gesetzt:

$$cp = ac + ap.$$

$$u = \frac{a}{2} + x$$

$$pt = \frac{(\frac{a}{2} + x)^2 - \frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2} + x} = \frac{ax + x^2}{\frac{a}{2} + x}$$

3) Einen einfachen Ausdruck für die Normale mn zu finden.

$\triangle$ mpn ist rechtwinklich, daher

$$mn^2 = pm^2 + pn^2$$

$$pm^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$$

$$pn = \frac{c^2u}{a^2} \text{ und } pn^2 = \frac{c^2u^2}{a^4}$$

$$mn^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^4u^2}{a^4} \text{ woraus}$$

$$mn^2 = \frac{c^2}{4a^4}(4a^2u^2 - a^4 + 4c^2u^2)$$

$$mn = \frac{c}{2a^2}\sqrt{[4a^2u^2 - a^4 + 4c^2u^2]}.$$ Ein algebraischer Ausdruck für die Normale. Setzt man statt u vom Mittelpunkte die Abscisse vom Scheitel x.

$$pm^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \frac{a^2}{4}) \text{ nun ist } u = \frac{1}{2}a + x$$

$$u^2 = \frac{a^2}{4} + ax + x^2$$

$$pm^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$$

In obige Form $mn^2 = pm^2 + pn^2$ diesen Werth substit.

$$mn^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2) + pn^2$$

$$pn = \frac{c^2u}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}(x + \frac{a}{2}) = \frac{c^2x + \frac{1}{2}ac^2}{a^2}$$

$$pn^2 = (\frac{c^2x + \frac{1}{2}ac^2}{a^2})^2$$

$$mn^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2) + \left(\frac{c^2x + \frac{ac^2}{2}}{a^2}\right)^2$$

$$mn = \sqrt{\left[\frac{c^2}{a^2}(ax + x^2) + \left(\frac{c^2x + \frac{ac^2}{2}}{a^2}\right)^2\right]}$$ Ausdruck für die Normale vom Scheitel.

4) Einen algebraischen Ausdruck für die Tangente tm zu finden.

$\triangle$. mpt ist rechtwinklich

$$tm^2 = pm^2 + pt^2$$

$$pm^1 = \frac{c^2}{a^2}\left(u^2 - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$pt = \frac{u^2 - \frac{a^2}{4}}{u}, \quad pt^2 = \left(\frac{u^2 - \frac{a^2}{4}}{a}\right)^2$$

$$tm^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(u^2 - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{\left(u^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2}{u^2}$$

$$tm = \sqrt{\left[\frac{c^2}{a^2}\left(u^2 - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{\left(u^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2}{a^2}\right]}$$

Wird statt der Abscisse u vom Mittelpunkte die Abscisse x vom Scheitel gesetzt.

nach vorherigem $pm^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$

nach Nr. 2. $pt = \frac{ax + x^2}{\frac{a}{2} + x}$ und $pt^2 = \left(\frac{ax + x^2}{\frac{a}{2} + x}\right)^2$

$$tm^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2) + \left(\frac{ax + x^2}{\frac{a}{2} + x}\right)^2$$

$$tm = \sqrt{\left[\frac{c^2}{a^2}(ax + x^2) + \left(\frac{ax + {}^2x}{\frac{a}{2} + x}\right)^2\right]}$$

ein algebraischer Ausdruck für die Tangente durch die Abscisse vom Scheitel aus.

Die Figuren hierzu folgen auf einem besondern Blatte.

Oppeln, im August 1850.

Peschke.

Fig. 1.

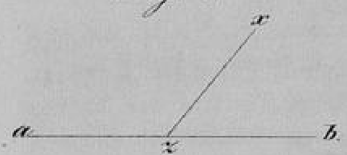

Fig. 2.

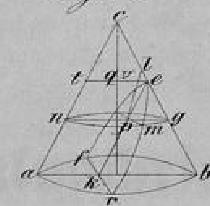

Fig. 3.

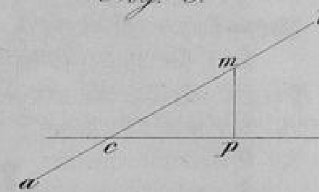

Fig. 4.

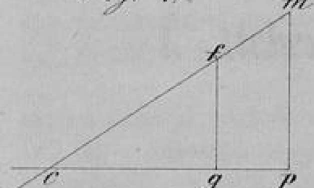

Fig. 6.

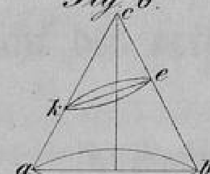

Fig. 5.

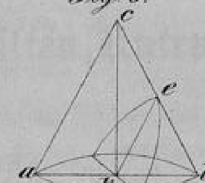

Fig. 7

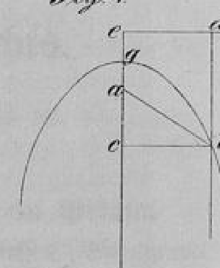

Fig. 8.

Fig. 9.

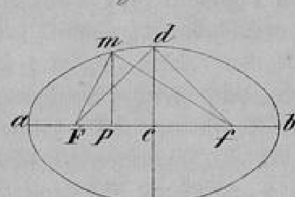

Fig. 10.

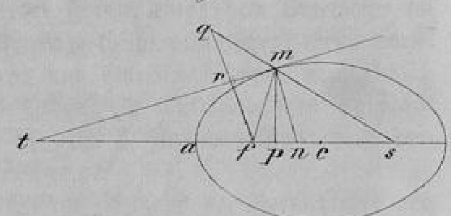

Fig. 11.

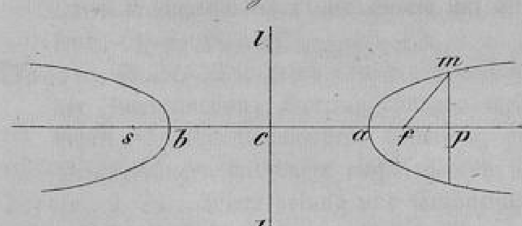

Fig. 12.