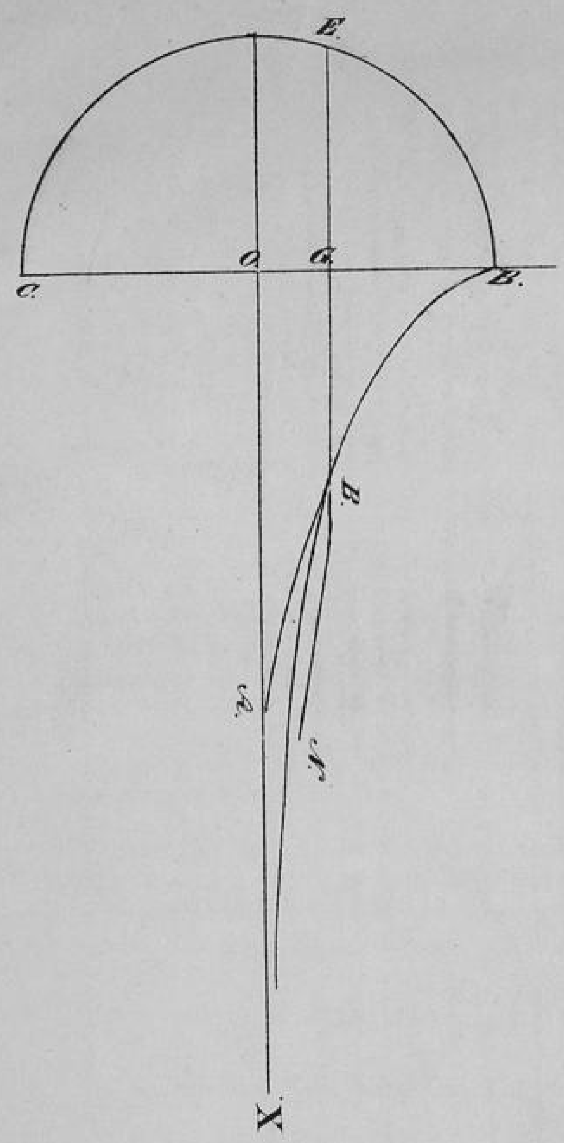
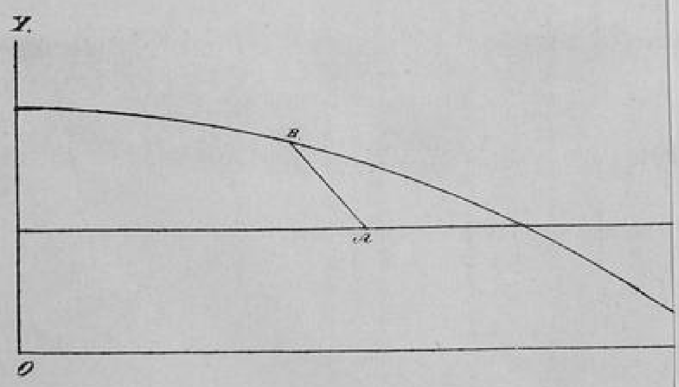
Fig. 1.





…ene Art fort-
…ng der Fälle,
…hriebene Bahn

…s Punktes A,

…e, m und m,
Nach dem
…e allgemeine

…, sind

…ls ist

1

Fig. 1.

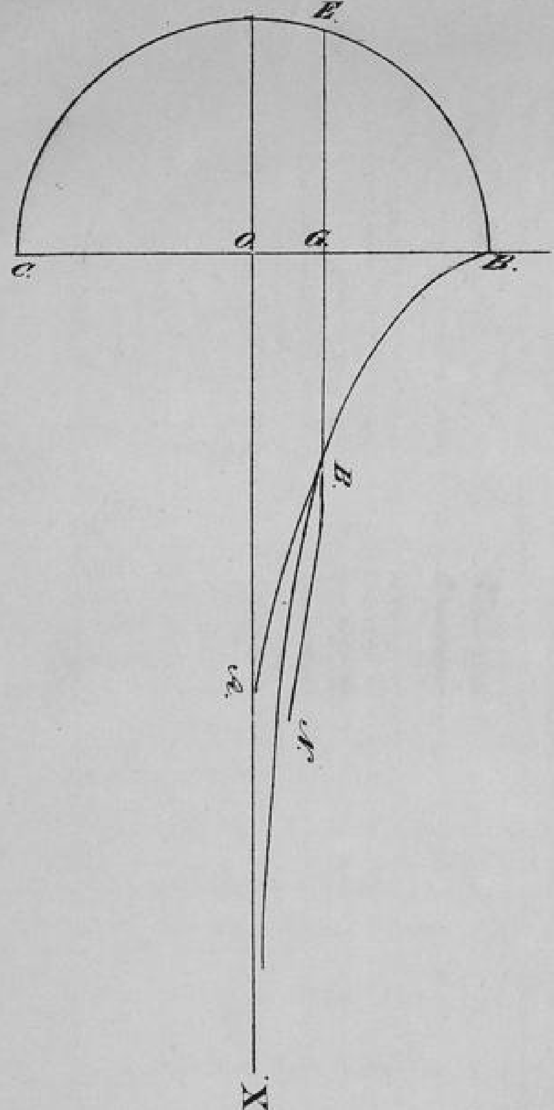


Fig. 2.

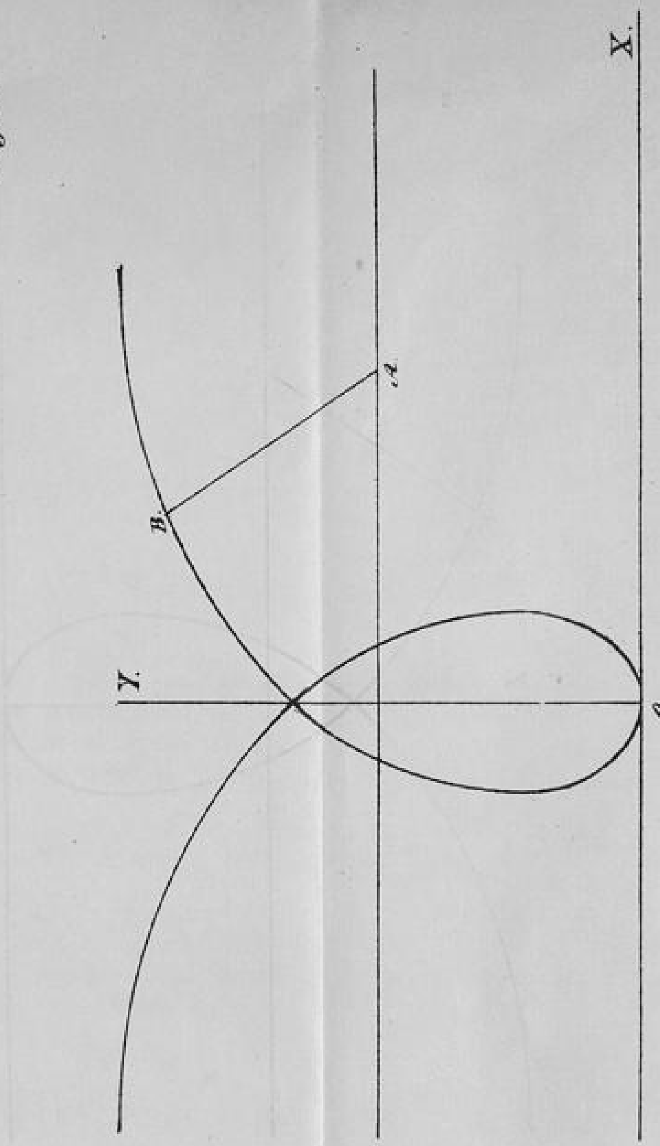
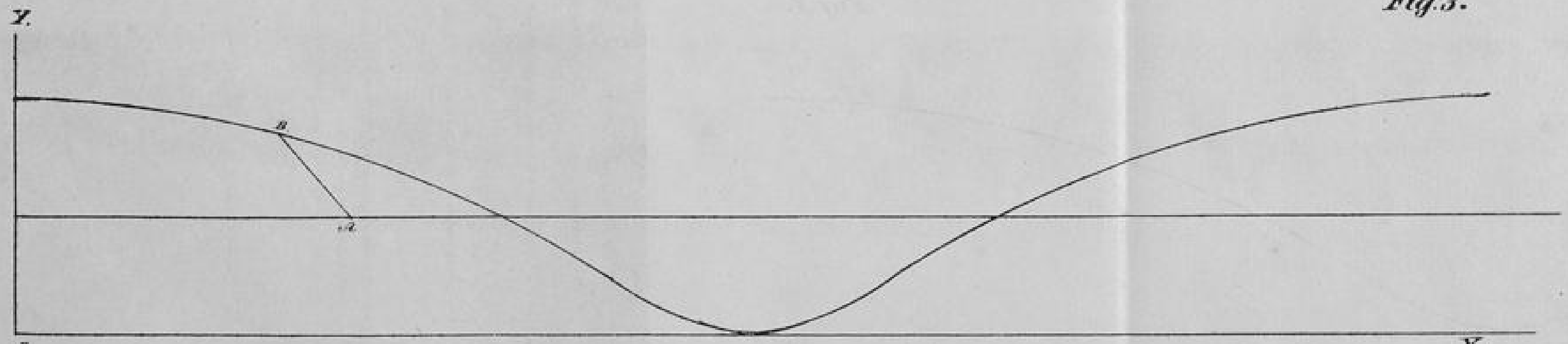
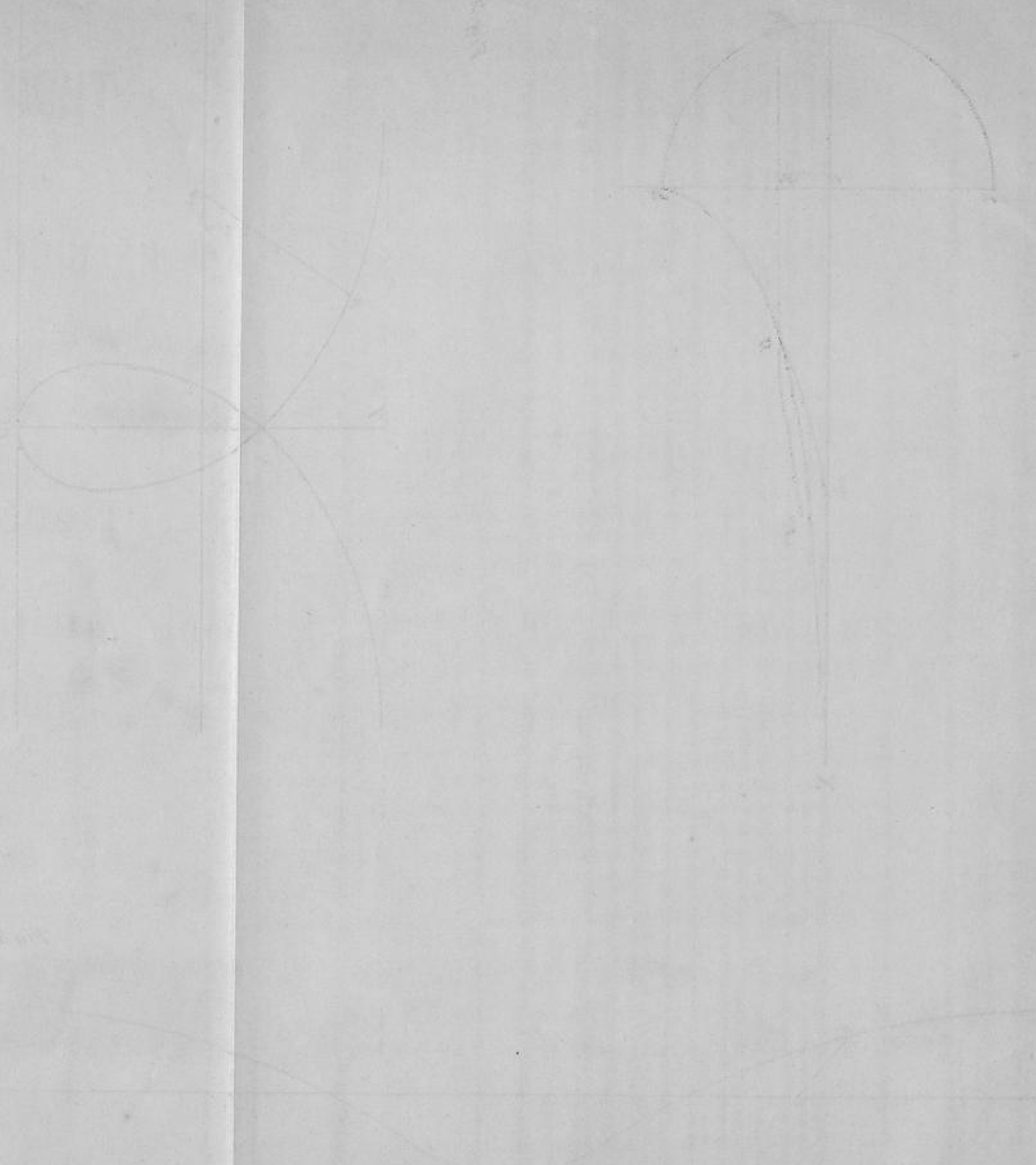
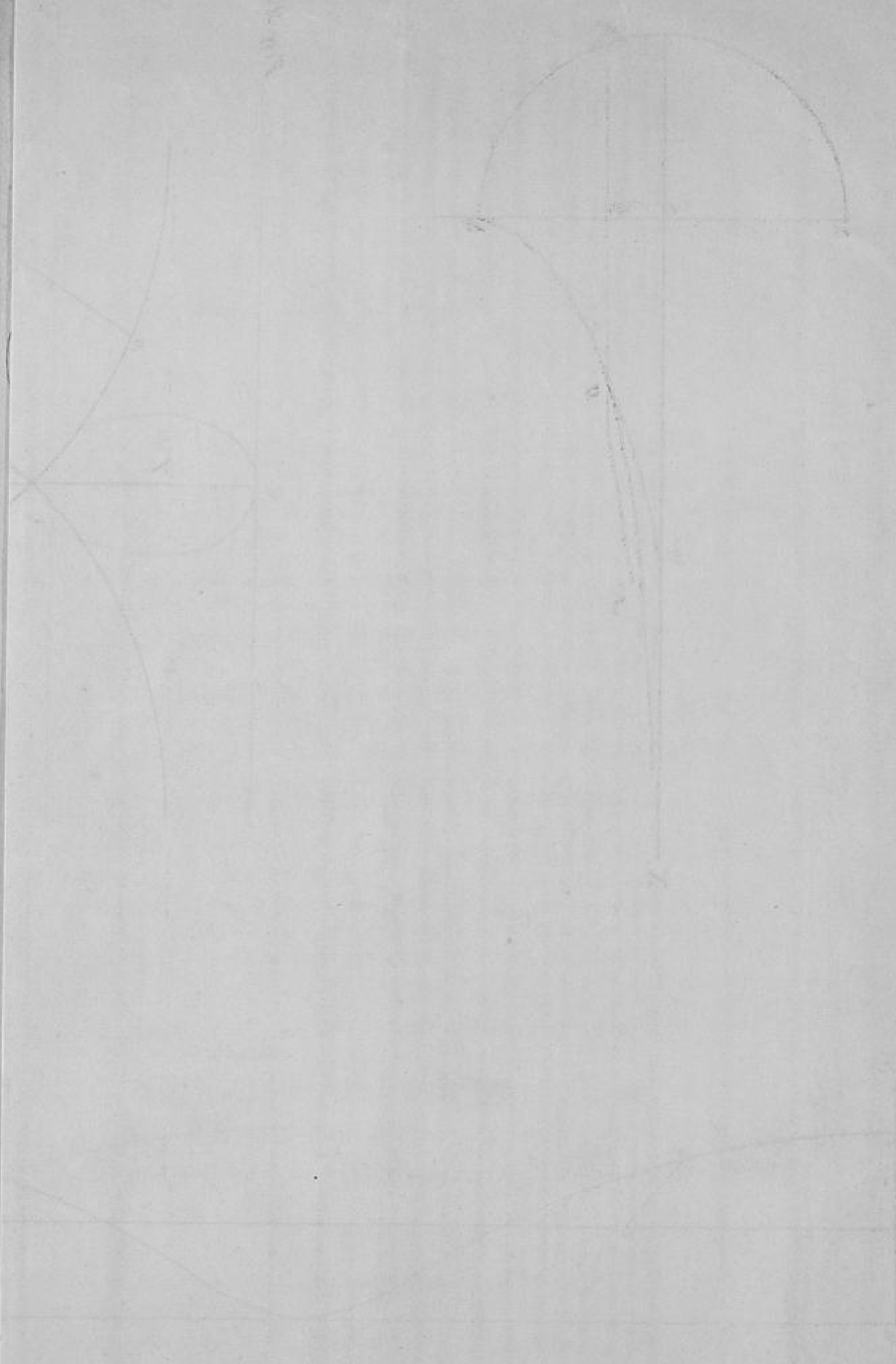


Fig. 3.







Auf einer horizontalen Ebene wird der Endpunkt (A) einer starren Linie auf gegebene Art fortgezogen. Die Bahn des andern Endpunktes (B) soll bestimmt werden unter Berücksichtigung der Fälle, wo die Reibung o und ∞, und mit Durchführung des speciellen Falles, in welchem die vorgeschriebene Bahn eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurückgelegte Gerade ist.

Es sei $y = f(x)$ die auf ein rechtwinkliges Coordinatensistem bezogene Bahn des Punktes A, a dessen constante Entfernung von B.

Es seien X_1 und Y_1 die Componentensummen der auf den Punkt A wirkenden Kräfte, m und m_1 die Massen von A und B, μ der Reibungscoëfficient, ξ und η die Coordinaten von B. Nach dem d'Alembert'schen Prinzip in Verbindung mit dem der virtuellen Geschwindigkeit ist die allgemeine Gleichung der Bewegung in der Ebene

$$\Sigma \left(X - m \frac{d^2 x}{d t^2}\right) \delta x + \Sigma \left(Y - m. \frac{d^2 y}{d t^2}\right) \delta y = 0$$

Im vorliegenden Falle muss also sein

$$\left(X_1 - m \frac{d^2 x}{d t^2}\right) \delta x - \left(\mu\, m'g \frac{d \xi}{d \sigma} + m' \frac{d^2 \xi}{d t^2}\right) \delta \xi$$
$$+ \left(Y_1 - m \frac{d^2 y}{d t^2}\right) \delta y - \left(\mu\, m'g \frac{d \eta}{d \sigma} + m' \frac{d^2 \xi}{d t^2}\right) \delta \eta = 0$$

Die Bedingungsgleichungen, denen während der ganzen Bewegung genügt werden muss, sind

2) $y = f(x)$
3) $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = a^2$

Durch Variation erhält man aus 2) und 3)

$$\delta y = f'(x)\, \delta x$$
$$(x - \xi)\, \delta x - (x - \xi)\, \delta \xi + (y - \eta)\, \delta y - (y - \eta)\, \delta \eta = 0$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen lassen sich zwei Variationen aus 1) eliminiren. Es ist

$$\delta x = \frac{(x - \xi)\, \delta \xi + (y - \eta)\, \delta \eta}{x - \xi + (y - \eta)\, f'(x)}$$

$$\delta y = \frac{(x - \xi)\, \delta \xi + (y - \eta)\, \delta \eta.}{x - \xi + (y - \eta)\, f'(x)}\, f'(x)$$

Hierdurch geht die Gleichung 1) in folgende über:

$$\left[X_1 - m\frac{d^2x}{dt^2} + \left(Y_1 - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) f'(x)\right] \frac{(x-\xi)\,\delta\xi + (y-\eta)\,\delta\eta}{x-\xi+(y-\eta)\,f'(x)}$$

$$-\left(\mu\, m'\, g\,\frac{d\xi}{d\sigma} + m'\,\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)\delta\xi - \left(\mu\, m'\, g\,\frac{d\eta}{d\sigma} + m'\,\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\delta\eta = 0.$$

Da die Variationen $\delta\,\xi$ und $\delta\,\eta$ willkührlich bleiben, so müssen die Coëfficienten derselben $= 0$ werden. Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left[X_1 - m\frac{d^2x}{dt^2} - \left(Y_1 - \mu.\ m g. - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) f'(x)\right].\ \frac{x-\xi}{x-\xi+(y-\eta)\,f'(x)}$$

$$-\left(\mu\, m'\, g\,\frac{d\xi}{d\sigma} + m'\,\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = 0 \qquad \text{und}$$

$$\left[X_1 - m\frac{d^2x}{dt^2} - \left(Y_1 - m\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) f'(x)\right].\ \frac{y-\eta}{x-\xi+(y-\eta)\,f'(x)}$$

$$-\left(\mu.\ m'\, g\,\frac{d\eta}{d\sigma} + m'\,\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) = 0.$$

Multiplicirt man nun die erste dieser beiden Gleichungen mit $\frac{y-\eta}{x-\xi+(y-\eta)\,f'(x)}$, die andere mit $\frac{x-\xi}{x-\xi+(y-\eta)\,f'(x)}$, so erhält man folgende:

$$4)\ (y-\eta)\left(\mu\, g.\,\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = (x-\xi)\left(\mu\, g.\,\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\right)$$

Ist nun x und damit auch $y = f(x)$ eine bekannte Funktion der Zeit, so kann man η, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ und $\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2}$ in 4) mit Hülfe der Gleichung

$$5)\ y - \eta = \sqrt{a^2 - (x-\xi)^2}$$

durch t und durch die Ableitungen von ξ nach t ausdrücken und gelangt so zu einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwischen ξ und t. Hat man aus dieser $t = \psi(\xi)$ gefunden, so lässt sich t aus 5) eliminiren und es ergiebt sich eine Gleichung zwischen ξ und η als Ausdruck der Trajectorie des Punktes B.

Ist der Reibungscoëfficient $\mu = 0$, so hat man statt der Gleichung 4) einfach

$$6)\ (y-\eta)\,\frac{d^2\xi}{dt^2} = (x-\xi)\,\frac{d^2\eta}{dt^2}$$

Wird aber der Reibungscoëfficient $\mu = \infty$, so nimmt

$$\frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{\mu\, g.\,\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{d^2\eta}{dt^2}}{\mu\, g.\,\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{d^2\xi}{dt^2}}$$

die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ an. Wird daher die rechte Seite im Zähler und Nenner zur Bestimmung des wahren Werthes nach μ differentiirt, so ist

$$7)\ \frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

Für die Untersuchung des Falles $\mu = o$ und zu weiterer Behandlung der Gleichung 6) muss nun x als Function der Zeit gegeben sein. Anders gestaltet sich die Sache für den Fall eines unendlichen Reibungscoëfficienten. Gleichung 7) in Verbindung mit 3) lehrt hier eine merkwürdige Beziehung zwischen den beiden von A und B beschriebenen Curven. Zieht man nämlich aus einem beliebigen Puncte der ersten eine Tangente an die zweite, so ist die Länge derselben stets = a. Während also die Linie A B dem Zuge in A folgt, bleibt sie immer Tangente für die entstehende Trajectorie von B. Umgekehrt, bewegte man an der Bahn von B hin eine Tangente von der Länge a, so würde ihr Endpunkt die durch $y = f(x)$ gegebene Curve beschreiben.

Bezeichnet man $\frac{d\eta}{d\xi}$ kurz mit η', so ergiebt sich aus Gleichung 7) und 5) $x - \xi = \frac{a}{\sqrt{1+\eta'^2}}$, oder $x = \xi + \frac{a}{\sqrt{1+\eta'^2}}$; und aus $\frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{f(x)-\eta}{x-\xi} = \eta'$ erhält man dann

$$9)\quad f\left(\xi + \frac{a}{\sqrt{1+\eta'^2}}\right) - \eta = \frac{a\,\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}}.$$

Wäre also die Bahn von A ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so erhielte man, da $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ aus 9) die Gleichung

$$\sqrt{r^2 - \left(\xi + \frac{a}{\sqrt{1+\eta'^2}}\right)^2} - \eta = \frac{a\,\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}}$$

Beschreibt der Endpunkt A der starren Linie AB mit gleichförmiger Geschwindigkeit eine Gerade, und nimmt man diese zur Axe der x, so ist $y = f(x) = o$. Giebt man nun der Gleichung 4) die Form

$$\text{IV)}\quad \mu g.\left[(y-\eta)\frac{d\xi}{dt} - (x-\xi)\frac{d\eta}{dt}\right] = -\frac{d\sigma}{dt}\left[(y-\eta)\frac{d^2\xi}{dt^2} - (x-\xi)\frac{d^2\eta}{dt^2}\right]$$

und substituirt nun $y - \eta = a \sin\varphi$, oder, weil $y = o$, $-\eta = a\sin\varphi$, so hat man

$$\frac{d\eta}{dt} = -a\cos\varphi.\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - a\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Ferner hat man, weil nun $x - \xi = a\cos\varphi$ und $\frac{dx}{dt}$ nach Annahme constant, $= c$, ist

$$\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt} = c - \frac{d\xi}{dt} = -a\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\text{also}\quad \frac{d\xi}{dt} = c + a\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = a\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + a\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt_2}$$

Demnach $\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2} = \sqrt{c^2 + 2ac.\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$

Die Gleichung IV geht durch diese Substitutionen über in:

$$\mu g\left[a\sin\varphi\,(c + a\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}) + a^2\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right] = -\sqrt{c^2 + 2ac.\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + a^2.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$
$$\left[a^2\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + a^2\sin^2\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} - a^2\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + a^2\cos^2\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]$$

Durch naheliegende Vereinfachungen ergiebt sich hieraus

$$10)\quad \mu g\left(c\sin\varphi + a\frac{d\varphi}{dt}\right) = -a\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sqrt{c^2 + 2ac.\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades zugleich, auf deren allgemeine Lösung verzichtet werden muss. Durchführbar ist die Auflösung für die beiden Fälle, dass $\mu = \infty$ und $\mu = o$ ist.

Dividirt man in 10) auf beiden Seiten durch μ und setzt hierauf $\mu = \infty$, so wird

$$c \sin\varphi + a \frac{d\varphi}{dt} = o.$$

Aus dieser Gleichung ist nun $dt = -\frac{a}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$.

$$\text{also } t = -\frac{a}{c}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} + \text{Const.}$$

$$t = -\frac{a}{c}\log\left(\text{tang}\frac{\varphi}{2}\right) + \text{Const.}$$

Ist nun für $t = o$, also für den Beginn der Bewegung, $\varphi = \alpha$, so ist

$$\text{Const.} = \frac{a}{c}\log\left(\text{tang}\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\text{folglich } t = \frac{a}{c}\left[\log\left(\text{tang}\frac{\alpha}{2}\right) - \log\left(\text{tang}\frac{\varphi}{c}\right)\right] = \frac{a}{c}\log\left(\text{tang}\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\text{cotang}\frac{\varphi}{2}\right)$$

Um nun ξ als Funktion von η zu erhalten, muss noch $\text{cotg}\frac{\varphi}{2}$ durch η ausgedrückt werden. Da $\sin\varphi = -\frac{\eta}{a}$, so ist $\cos\varphi = \sqrt{\frac{a^2 - \eta^2}{a}} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{a - \sqrt{a^2 - \eta^2}}{2a}, \quad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2})^2}{2a}$$

$$\text{cotg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{a - \sqrt{a^2 - \eta^2}} = \frac{(a + \sqrt{a^2 - \eta^2})^2}{\eta^2}$$

$$\text{cotg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta}, \quad \text{also}$$

$$11)\ \xi = a\log\left[\text{tang}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta}\right] - \sqrt{a^2 - \eta^2} + a\cos\alpha$$

Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, fällt also A B beim Beginne der Bewegung mit der Ordinatenaxe zusammen, so hat man wegen $\text{tang}\frac{\alpha}{2} = 1$, $\cos\alpha = o$, die einfachere Gleichung

$$12)\ \xi = a\log\frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta} - \sqrt{a^2 - \eta^2}$$

Diese Gleichungen lehren, dass ξ für abnehmende η wächst und für $\eta = o$ unendlich wird, d. h. die von B durchlaufene Bahn hat die von A beschriebene Gerade zur Asymptote. [„Ist also die Bahn von A eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufene Gerade und der Reibungscoëfficient unendlich, so hat die Bahn des starr mit A verbundenen Punktes B jene Gerade zur Asymptote. Die Gestalt der Trajectorie von B ist von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig."]

Denkt man sich die Bewegung nach der negativen Seite der Absscissenaxe ausgeführt, so ergeben sich für dieselben Ordinaten gleiche, aber entgegengesetzte Werthe der Absscissen, und die Curve der Gleichung 12) besteht demnach aus zwei congruenten Zweigen, die, wie aus $\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{\sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta}$ leicht ersichtlich ist, für $\eta = a$ eine gemeinschaftliche Tangente haben. Da ξ für $\eta > a$ imaginär wird, so ist der Punkt, dessen Coordinaten $\eta = a$ und $\xi = 0$ sind, ein Rückkehrpunkt der Curve.

Zum Zwecke der Construction der Curve ist zunächst $\log \frac{a+\sqrt{a^2-\eta^2}}{\eta}$ für aufeinanderfolgende Werthe von η zu berechnen.

Ist η = 0,1. a,	so ist $\log \frac{a+\sqrt{a^2-\eta^2}}{\eta}$	= 2,9932.
= 0,2. a,		= 2,2924.
= 0,3. a,		= 1,8729.
= 0,4. a,		= 1,5668.
= 0,5. a,		= 1,3170.
= 0,6. a,		= 1,0986.
= 0,7. a,		= 0,8956.
= 0,8. a,		= 0,6923.
= 0,9. a,		= 0,4672.
= a,		= 0.

$\sqrt{a^2-\eta^2}$ ist die mittlere Propectionale für $\alpha+\eta$ und $\alpha-\eta$, die am angemessensten durch einen Kreis über OB' + OC = 2a (Fig. 1) erhalten wird. $a. \log \frac{a+\sqrt{a^2-\eta^2}}{\eta}$ vermindert um die zu η gehörende Absscisse des Kreises giebt das zugehörige ξ der Bahn von B. In Fig. 1 ist EB = $a \log \frac{a+\sqrt{a^2-\eta^2}}{\eta}$ gemacht, EG $= -\sqrt{a^2-\eta^2}$, GB also die Absscisse der von B beschriebenen Curve.

Aus der Gleichung $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-\eta}{\sqrt{a^2-\eta^2}}$ folgt dasselbe, was Gleichung 7) in Verbindung mit 3) lehrte, dass nämlich AB während der ganzen Bewegung Tangente der Bahn des Punktes B ist; und dass die Länge der Tangente = a ist, folgt aus der Proportion

$$\eta : \text{Tang.} = \frac{-d\eta}{d\xi} : \sqrt{1+\frac{d\eta^2}{d\xi}}, \text{ also}$$

$$\text{Tang.} = \eta \sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} \cdot \left(-\frac{d\eta}{d\xi}\right) = \sqrt{1+\frac{\eta^2}{a^2-\eta^2}} \cdot \sqrt{a^2-\eta^2} = a.$$

Die gefundene Curve kann eine annähernde Verwirklichung in der Thierwelt finden. Es befinde sich in A ein Wild, das mit constanter Geschwindigkeit in der Richtung AX davonläuft, in B ein Hund, welcher jenes mit gleichbleibender Distanz verfolgt. Der Hund würde nun einen Punkt in's Auge fassen, in welchem er muthmasslich mit dem Wilde zusammenträfe und desshalb etwa in der Richtung BN vorgreifen, wenn er menschliche Ueberlegung besässe. Da ihm aber diese abgeht, so nimmt er sein point de vue für jeden Augenblick anderswo, da nämlich, wo das eilende Wild sich gerade befindet. Seine Sehlinie ändert continuirlich ihren Winkel gegen die als Axe der ξ zu betrachtenden Lauflinie des Wildes und bildet die Tangente an den zurückgelegten Weg. Die Länge der Tangente ist constant, da sie die nach der Voraussetzung unveränderliche Distanz der beiden Thiere ist. Würde letztere sich verkürzen, so hörte die Lauflinie des Wildes auf, Asymptote der Kynodrome zu sein.

Der specielle Fall einer geradlinigen Bahn des auf horizontaler Ebene fortgezogenen Punktes A, bei unendlicher Reibung führt offenbar zu demselben Resultate, wie die Aufgabe, die Curve mit constanter Tangentenlänge zu finden. In der That, es ist, wenn a die genannte Länge bezeichnet,

$$a^2 = \eta^2 + \text{Subtg.}^2, \text{ und da } (\text{Subtg.})^2 = \eta^2 . \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2, \text{ so ist } a^2 = \eta^2\left[1+\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2\right],$$

$$\text{woraus } \xi = \int \frac{\sqrt{a^2-\eta^2}}{\eta} . d\eta + C.$$

Substituirt man $\eta = a \sin\varphi$, so dass $d\eta = a \cos\varphi$, so ist $\xi = a \int \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} . d\varphi + C =$

$$a\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - a\int\sin\varphi\, d\varphi + C;\ \xi = a\left[\log\left(\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\varphi\right] - a\left[\log\left(\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\alpha\right]$$

$$\text{da } C = -a\left[\log\left(\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\alpha\right]$$

Drückt man nun tang $\frac{\varphi}{2}$ und cos φ wieder durch η aus, so ergiebt sich schliesslich

$$x = -a\log\frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta} + \sqrt{a^2 - \eta^2} - a\cos\alpha.$$

Vertauscht man die negative Seite der ξ mit der positiven, so wird die letzte Gleichung identisch mit 11), und ist der Anfangswerth von $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so verschwindet die Constante und man hat

$$\xi = a\log\frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta} - \sqrt{a^2 - \eta^2},$$

welche mit 12) übereinstimmt. Zum Zwecke der Rectification der von B beschriebenen Curve soll wieder η als die unabhängige Variabile angesehen werden. Da $\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 = \frac{a^2 - \eta^2}{\eta^2}$, so ist

$$\int\sqrt{1 + \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2}.\ d\eta = a\int\frac{d\eta}{\eta} + C = a\ \log\frac{\eta}{a} + C', \text{ worin } C' = C - a\log a \text{ ist.}$$

Nun ist auch

$$a\int\frac{d\eta}{\eta} + C = a\int\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi + C = a\ \log\ (\sin\varphi) + C.$$

Integrirt man zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und o, so erhält man eine unendliche Länge, wie vorauszusehen war. Nimmt man zu Grenzen $\frac{n}{m}\sin\alpha$ und $\frac{p}{m}\sin\alpha$, so ist die entsprechende Bogenlänge $=$ a (log p — log n).

Bezeichnet man $\xi - a\cos\alpha + \sqrt{a^2 - \eta^2} - a\log\left(\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta}\right)$ kurz mit $F(\xi, \eta, \alpha)$, so ist der durch a) $F(\xi, \eta, \alpha) = o$ bestimmten Curve unendlich nahe diejenige, welche ausgedrückt wird durch b) $F(\xi, \eta, \alpha + d\alpha) = o$, und $F(\xi, \eta, \alpha + d\alpha) - F(\xi, \eta, \alpha)$ ist die Gleichung einer durch die gemeinschaftlichen Puncte von a) und b) hindurchgehenden. Mit Hülfe von $\frac{F(\xi, \eta, \alpha + d\alpha - F(\xi, \eta, \alpha)}{d\alpha} = \frac{d\,F(\xi, \eta, \alpha)}{d\alpha} = o$ lässt sich a aus $F(\xi, \eta, \alpha) = o$ eliminiren und man erhält dann die Gleichung derjenigen Curve, welche durch das Continuum sämmtlicher Durchschnittspuncte der aufeinanderfolgenden unendlich nahen Curven gebildet wird, oder der Umhüllenden. Die Differentiation von $\xi - a\cos\alpha + \sqrt{a^2 - \eta^2} - a\log\left(\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta}\right) = o$ nach α ergiebt

$$a\sin\alpha - \frac{a}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = o$$

$$\text{oder } 4\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = o, \text{ woraus } 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha = 1,\ \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Man erhält also die Gleichung 12), woraus folgt, dass die Umhüllende vom Puncte B beschrieben wird, wenn AB im Anfange der Bewegung mit der Ordinatenaxe zusammenfällt, also senkrecht zur Bahn des Punktes A ist.

Zur Complanation der von den beiden Axen und einem Zweige der von der gefundenen Curve begrenzten Fläche, also von der Ordinate des Rückkehrpunktes gerechnet, dient das Integral

$$\int_0^a \xi \, d\eta = a\int_0^a \log \frac{a+\sqrt{a^2-\eta^2}}{\eta}\, d\eta - \int_0^a \sqrt{a^2-\eta^2}.\, d\eta$$

Nach der der Gleichung vorangeschickten Rechnung ist
$\sqrt{a^2-\eta^2} = a\cos\varphi$, $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \frac{\eta}{a+\sqrt{a^2-\eta^2}}$; da nun $d\eta = a\cos\varphi\, d\varphi$, so ist

$$\int_0^a \xi\, d\eta = -a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi.\, d\varphi - a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi\, d\varphi.$$

Offenbar ist $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi.\, d\varphi$, und wenn man $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi$ auf beiden Seiten addirt,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{also I)} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Weiter ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right).\cos\varphi.\, d\varphi = \left[\sin\varphi.\log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi\, \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \left[\sin\varphi\log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \left[\sin\varphi\log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} = o\,\infty - \frac{\pi}{2},$$

da $\sin\varphi\log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)$ für die untere Grenze die Form $-\, o.\,\infty$ annimmt, während es für die obere verschwindet. Es ist aber für $\varphi = o$

$$\sin\varphi.\log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{1}{\sin\varphi}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Differenticirt man Zähler und Nenner nach φ, so wird für $\varphi = o$

$$\frac{\log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{1}{\sin\varphi}} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\frac{1}{2}}{-\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} = \frac{\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}}{-\frac{\cos\varphi}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}} = -\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} = \operatorname{tang}\varphi = o,$$

so dass also

$$\text{II)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi.\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Aus den Gleichungen I) und II) ergiebt sich

$$\int_0^a \xi \, d\eta = \frac{a^2 \pi}{4}.$$

Die von der Axe der ξ, der durch den Rückkehrpunct der Trajectorie geführten Ordinatenaxe, und von der Trajectorie selbst eingeschlossene Fläche ist also gleich dem Inhalte eines Kreises, dessen Durchmesser gleich der Entfernung von A und B ist. Dieses Resultat lässt sich auch so fassen: Macht eine starre Linie $OB' = a$ nur die drehende Bewegung, welche $AB = a$ unter den Bedingungen der Aufgabe gleichzeitig während ihres Fortschreitens ausführt, und erreichen beide zugleich (AB unendlich nahe) die Absscissenaxe, während sie zu Anfange ihrer Bewegung in der Ordinatenaxe zusammenfielen, so haben beide gleiche Flächen beschrieben; die erste einen Quadranten, die andere das Areal einer transcendenten Curve, deren Ausdruck die Gleichung 12) ist.

Die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher AB während der fortschreitenden Bewegung um den beweglichen Mittelpunct A schwingt, ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{c}{a} \sin\varphi$$

welche unmittelbar aus 10) folgt $\frac{d\varphi}{dt}$ hat seinen grössten Werth, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und verschwindet für $\varphi = o$. Für sehr kleine φ ist sie diesen selbst proportional, weil sie sich nur um sehr kleine Grössen zweiter Ordnung von $\sin\varphi$ unterscheidet.

Bezeichnen x und f (x), $x + \delta$ und $f(x + \delta)$ die rechtwinkligen Coordinaten zweier naheliegenden Puncte einer Curve, so ergeben sich die Coordinaten (x' und y') des Durchschnittes zweier unendlich nahen Normalen, für verschwindende δ, aus den beiden Gleichungen

$$x' - x = -\frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)} . f'(x), \quad y' - y = \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)}$$

Will man hiervon Anwendung machen auf die Bahn von B, so ist zu bemerken, dass, weil hier η die unabhängig Veränderliche ist, dem entsprechend zu setzen ist

$$\eta' - \eta = -\frac{1 + [f'(\eta)]^2}{f''(\eta)} . f'(\eta), \quad \xi' - \xi = \frac{1 + [f'(\eta)]^2}{f''(\eta)}$$

Nun ist $\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{\sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta}$, $\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 = \frac{a^2 - \eta^2}{\eta^2}$, $\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{a^2}{\eta^2 \sqrt{a^2 - \eta^2}}$, $\eta' - \eta = \frac{a^2 - \eta^2}{\eta}$,

woraus $\eta' = \frac{a^2}{\eta}$, $\eta = \frac{a^2}{\eta'}$, $\xi' - \xi = \sqrt{a^2 - \eta^2}$

folglich

$$\xi' = \xi + \sqrt{a^2 - \eta^2} = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta} - \sqrt{a^2 - \eta^2} + \sqrt{a^2 - \eta^2}, \quad \xi' = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta}$$

Führt man nun $\eta = \frac{a^2}{\eta'}$ in die letzte Gleichung ein, so erhält man $\xi' = a \log \frac{\eta' + \sqrt{\eta'^2 - a^2}}{a}$

Setzt man nun ξ, η für ξ' η', so ist die Gleichung der Evolute der Bahn von B

$$\xi = a \log \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - a^2}}{a}$$

Für den Fall einer geradlinigen Bahn von A und eines unendlichen Reibungscoëfficienten lässt sich die Gleichung der von B beschriebenen Curve, unanhängig von den hier angewandten Entwickelungen aus Gleichung 9) herstellen; denn indem dann

$$f(x) = f\left(\xi + \frac{a}{\sqrt{1 + \eta'^2}}\right) = o \text{ is, hat man } -\eta = \frac{a}{\sqrt{1 + \eta'^2}}$$

Hieraus ist $d\xi = -\frac{\sqrt{a^2-\eta^2}}{\eta}. d\eta$, und indem man $-\eta = a \sin\varphi$ substituirt, erhält man

$$\xi = -a\int\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}. d\varphi + C,\ \xi = -a\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} + a\int\sin\varphi\, d\varphi + C = -a\log\left(\text{tang}\frac{\varphi}{2}\right) - a\cos\varphi + C$$

$$= a\log\left(\text{cotang}\frac{\varphi}{2}\right) - a\cos\varphi + C$$

C ist $= a\cos\alpha + a\log\left(\text{tang}\frac{\alpha}{2}\right)$; $a\cos\varphi = \sqrt{a^2-\eta^2}$, $\text{cotg}\ \frac{\varphi}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2-\eta^2}}{\eta}$, woraus sich dann Gleichung 11) und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die Gleichung 12) ergiebt.

Ist Reibungscoëfficient $\mu = o$, während A mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf der Absscissen-Axe fortgleitet, so ergiebt sich die Gleichung der Bahn des Punctes B aus Folgendem:

Die Gleichung 10), nämlich

$$\mu g\left(c\sin + a\frac{d\varphi}{dt}\right) = a\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}\sqrt{c^2 + 2ac.\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

geht für $\mu = o$ über in

$$13)\ \frac{d^3\varphi}{dt^2}\cdot\sqrt{c^2 + _\varphi 2\,ac.\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

Dieser wird genügt durch

$$c^2 + 2\,a\,c\sin\varphi.\ \frac{d\varphi}{dt} + a^2.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = o.$$

Da aber hierin $(ac\sin\varphi)^2 - a^2c^2 \angle o$, so würde $\frac{d\varphi}{dt}$ imaginär ausfallen; es bleibt also zur Befriedigung der Gleichung 13) nur

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = o, \text{ so dass man hat } \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.} = w$$

$$\varphi = wt + w.$$

Die Winkelgeschwindigkeit also, mit der B um den beweglichen Mittelpunct A schwingt, ist constant. Wenn sie im Anfange der Bewegung $= o$, so ist $\varphi = w.$; bildet nun aber AB während der ganzen Bewegung stets denselben Winkel w. (α) mit der Axe der x, so ist die Bahn von B′ eine Parallele der von A beschriebenen Geraden. Ihr senkrechter Abstand von der letzteren ist $= a. \sin w$, oder da w, nichts anderes ist, als der Neigungswinkel von AB gegen die Absscissenaxe, $= a\sin\alpha$. Ist aber $w \lessgtr o$, so hat man zur Bestimmung der Bahngleichung für B die beiden folgenden:

$$\varphi = wt + \alpha,\ \xi = ct - \sqrt{a^2-\eta^2}$$

Die letztere folgt aus $(x - \xi)^2 = a^2 - \eta^2$, wenn man beachtet, dass $x = ct$. Da $t = \frac{\varphi - a}{w}$, so ergiebt sich $\xi = \frac{c}{w}\varphi - \sqrt{a^2-\eta^2} - \frac{c\alpha}{w} = \frac{c}{w}\text{acc.}\cos\frac{\sqrt{a^2-\eta^2}}{a} - \sqrt{a^2-\eta^2}\ \frac{ca}{n}$ oder $\xi = \cdot\frac{c}{w}\text{acc.}\sin\left(\frac{\eta}{a}\right) - \sqrt{a^2-\eta^2} - \frac{ca}{w}$. Verlegt man die Absscissenaxe um a, parallel zu sich selbst, rückwärts, so hat man, wenn y die neuen Ordinaten bezeichnet, $y = a + \eta$, also ist $\text{arc.}\sin\left(\frac{\eta}{a}\right) = \text{arc.}\sin\frac{y - a}{a}$ $= -\text{arc.}\cos\left(\frac{a - y}{a}\right) - \frac{\pi}{2}$ folglich $\xi = \frac{c}{w}\text{arc.}\cos\frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} - \frac{c}{w}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Verlegt man noch die Ordinatenaxe derart, dass $\xi + \frac{c}{w}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = x$ wird, so hat man die Gleichung $x = \frac{c}{w}.\ \text{arc.}\cos\left(\frac{a - y}{a}\right) - \sqrt{2\,a\,y - y^2}$ und wenn v die wahre Geschwindigkeit des Punctes B ein A bezeichnet, so dass $v = aw$, so hat man statt der letzten Gleichung schliesslich

$$14)\ a\frac{c}{v}\ \text{arc.}\cos\left(\frac{a - y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

Ist nun im besonderen Falle $c = v$, d. h. die Rotationsgeschwindigkeit von B um A gleich derjenigen, mit welcher A auf der Absscissenaxe fortgleitet, so ist die Trajectorie von B eine Cycloide, da ihre Gleichung ist

$y = a \text{ arc. cos. } \left(\frac{a - y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$, welche man sofort als diejenige dieser Curve erkennt. Ebenso wie die Cycloide, ist auch die durch Gleichung 14) bestimmte Curve periodisch, wenn $c \lessgtr v$ ist. Für $y = o$ hat man $x = \frac{ac}{v} . 2\pi, \frac{ac}{v}\, 4\pi, \ldots . \frac{ac}{v} . 2n\pi$. Ist $y = 2a$, so ist $x = \frac{ac}{v} . \pi$, $\frac{ac}{v} . 3\pi, \frac{ac}{v} . 5\pi, \ldots . \frac{ac}{v}\,(2n - 1)\pi$, Wenn $c < v$, so ist die von B beschriebene Curve eine zwischen den beiden Parallelen $y = o$ und $y = 2a$ zusammengeschobene Cycloide. (Fig. 2.) Die periodischen Bogen, deren Spannung auf der Absscissenaxe immer $\frac{ac}{v} . 2\pi$ ist, müssen sich schneiden. Aus ihrer Symmetrie gegen die durch die höchsten Bogenpuncte gelegten Ordinaten ergeben sich leicht die Coordinatenwerthe der aufeinanderfolgenden Durchschnittspuncte. Die Absscissen sind $\frac{ac}{v} . 2\pi, \frac{ac}{v} . 4\pi$, $\frac{ac}{v}\, 6\pi$ etc.; die Ordinaten sind sämmtlich gleich und ihren Werth y' findet man aus der transcendenten Gleichung

$$\frac{ac}{v} . 2\pi = \frac{ac}{v} . \text{ arc. cos } \left(\frac{a - y'}{a}\right) - \sqrt{2ay' - y'^2},$$

oder, wenn man bedenkt, dass ein solcher Knotenpunct auf die Axe der y fällt, aus der einfacheren

$$\text{Gleichung } \frac{ac}{v} . \text{ arc. cos } \frac{a - y'}{a} - \sqrt{2ay' - y'^2} = o$$

Die cycloidische Curve (Fig. 3), welche entsteht, wenn $c > v$, kann man sich entstanden denken durch eine Streckung der eigentlichen Cycloide. Ihre periodisch aufeinanderfolgenden Bogen schneiden sich nicht, wie in dem Falle, wo $c < v$.

Zwei auf einander folgende Bogen der Cycloide haben für $x = 2a\pi, 4a\pi, 6a\pi$ etc. eine gemeinschaftliche Tangente, welche auf der Axe der x senkrecht steht.

Aus Gleichung 14) ist $\frac{dx}{dy} = \frac{ac}{v\sqrt{2ay - y^2}} - \frac{a - y}{\sqrt{2ay - y^3}} = \frac{a(c - v) + vy}{v\sqrt{2ay - y^2}}$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{v\sqrt{2ay - y^2}}{ac - av + vy}$. Der Werth von y, für welchen die Tangente auf der Absscissenaxe senkrecht steht, ergiebt sich aus der Gleichung $ac - av + vy = o$. Dann ist $x = \frac{ac}{v} . \text{ arc. cos } \frac{c}{v} - \frac{a}{v}\sqrt{v^2 - c^2}$. Ist nun $c > v$, so wird sowohl arc. cos $\frac{c}{v}$, als auch $\sqrt{v^2 - c^2}$ imaginär. Es giebt also nur für den Fall, dass $c < v$, mit der Ordinatenaxe parallelen Tangenten der Curve, ihre Berührungspunkte liegen auf der Schleife und sämmtlich auf der durch $y = a - \frac{ac}{v}$ bestimmten Parallelen.