# Die Transformation der Figuren durch reciproke Radiivectoren.

Unser Thema betrifft eine jener Transformationsarten, deren sich seit Monge die namhaftesten Geometer mit einer gewissen Vorliebe zur Auffindung geometrischer Wahrheiten bedient haben. Obgleich die von uns zu behandelnde Methode mit überraschender Leichtigkeit vermittelst allgemeiner Principien aus Eigenschaften einfacher Figuren wichtige Lehrsätze über complicirtere herleitet, ist sie unseres Wissens nicht hinreichend bekannt. —

Die erste Anregung zur Behandlung des in Rede stehenden Verfahrens gab Thomson in einer Abhandlung über die Vertheilung der Electricität auf zwei Kugeloberflächen. (Liouville'sches Journal Bd. 10). Er nannte zwei auf dem Radius einer Kugel und dessen Verlängerung derart gelegene Punkte Q und Q', daß das Product ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte der Kugel gleich dem Quadrate des Radius ist, reciproke Punkte oder Bildpunkte in Bezug auf die Kugel und den Ort der Bildpunkte einer Figur das Bild derselben. Weitere Aufmerksamkeit widmete diesem Gegenstande Liouville (Liouville'sches Journal Bd. 12.) bei Gelegenheit der Untersuchung der algebraischen Eigenschaften dreier Functionen $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ von der Beschaffenheit daß:

$$\xi = \frac{nx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\eta = \frac{ny}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\zeta = \frac{nz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Der Wechselbeziehung, in welcher die Größen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ einerseits und x, y, z andrerseits stehen, daß nämlich die ersten drei sich aus den zweiten gerade wie die zweiten sich aus den ersten bilden, indem auch

$$x = \frac{n\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$$y = \frac{n\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$$z = \frac{n\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

gab er eine geometrische Deutung. Er zeigte, daß, wenn x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P bedeuten in einem System, dessen Anfangspunkt O ist, dann $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten eines zweiten auf OP gelegenen Punktes bedeuten, so daß

$$OP \,.\, OP' = n = \text{const. ist.}$$

Er nannte im Anschluß an Thomson die Punkte P und P' reciproke Punkte und die Art, eine Figur so umzuformen, daß jedem Punkte in der einen Figur ein reciproker in der zweiten entspricht die Transformation der Figuren durch reciproke Radiivectoren. Sein Memoire sowie eine sich auf diese Transformation beziehende Abhandlung Serret's (Méthodes en géométrie) liegt unserer folgenden Untersuchung zu Grunde. —

Ein Punkt P' (Fig. I.) heißt der reciproke Punkt eines Punktes P in Bezug auf den Punkt O, wenn beide in gerader Linie liegen und

$$OP \,.\, OP' = m^2 \text{ ist.}$$

Der Punkt O heißt der Anfangspunkt und $m^2$ die Potenz der Reciprocität.*) Eine Figur (in der Ebene oder im Raum) heißt die reciproke Figur einer zweiten, wenn jedem Punkte der erstern ein reciproker Punkt der zweiten entspricht. Es ergiebt sich demgemäß, daß man durch die in Rede stehende Transformation aus einer Figur eine unendliche Anzahl reciproker Figuren ableiten kann, indem man entweder den Anfangspunkt oder die Potenz variiren läßt.

Sind nun (Fig I.) P und Q zwei Punkte der einen Figur, P, Q' die entsprechenden der reciproken Figur, so ist

$$OP \,.\, OP' = OQ \,.\, OQ' = m^2.$$

Daher:

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$$

Die Dreiecke OPQ und OP'Q' sind also ähnlich und es ist folglich

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OQ'}$$

oder da $OP = \dfrac{m^2}{OP'}$.

$$PQ = \frac{P'Q'}{OQ' \,.\, OP'} \,.\, m^2 \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(I.)}$$

Die Entfernung zweier Punkte der einen Figur ist also gleich der Entfernung der entsprechenden Punkte der reciproken Figur dividirt durch das Product der Radiivectoren derselben und multiplicirt mit der Potenz.

Nehmen wir an daß die Punkte P und Q unendlich nah gelegen sind und bezeichnen wir ihre Entfernung mit ds, die der entsprechenden Punkte mit $d\sigma$, so ist nach obigem Satze:

---

*) Die reciproke Curve einer Curve in unserm Sinne ist nicht zu verwechseln mit der reciproken Polare derselben. Letztere steht in solcher Reciprokität zu der gegebenen Curve, daß der Abstand eines Punktes der Polare von einem festen Punkte multiplicirt mit dem Abstande einer Tangente der ursprünglichen Curve von dem festen Punkte eine constante Größe giebt.

$$d\sigma = \frac{ds}{OP\,.\,OQ}\,.\,m^2$$ oder, da OP und OQ in diesem Falle keinen merkbaren Unterschied haben

$$d\sigma = \frac{ds}{OP^2}\,.\,m^2\,^{*)}$$

Ist R ein dritter unendlich nah gelegener Punkt und bezeichnen wir mit $ds'$ und $ds''$ seine Entfernungen von P und Q mit $d\sigma'$ und $d\sigma''$ die Entfernungen der entsprechenden Punkte in der reciproken Figur, so ist

$$d\sigma' = \frac{ds'}{OP^2}\,.\,m^2$$

$$d\sigma'' = \frac{ds''}{OP^2}\,.\,m^2$$

daher $d\sigma : d\sigma' : d\sigma'' = ds : ds' : ds''$

Die entsprechenden unendlich kleinen Dreiecke sind folglich ähnlich, woraus sich der wichtige Satz ergiebt:

*Der Winkel, unter welchem sich zwei Linien in der einen Figur schneiden, ist gleich dem Winkel, unter welchem sich die entsprechenden Linien in der reciproken Figur schneiden.* . . . . . . . . (II.)

Unter Beachtung, daß man den Winkel, unter welchem sich zwei Oberflächen in einem Punkte m schneiden, mißt, durch Linien, welche im Punkte m die Durchschnittscurve der beiden Oberflächen rechtwinklig durchschneiden, ergiebt sich unmittelbar aus (II.), daß *der Winkel zweier Oberflächen in einem Punkte ihrer Durchschnittscurve gleich ist dem Winkel der reciproken Oberflächen in dem entsprechenden Punkte.*

Da (Fig. I.) $OP\,.\,OP' = OQ\,.\,OQ'$, so ist PQP′Q′ ein Sehnenviereck, folglich: $\angle PP'Q' + PQQ' = 2\,R$.

Diese Relation besteht, wie nah die Punkte P und Q zusammenfallen mögen. Je näher aber OQQ′ dem Radiusvector OPP′ rückt, desto mehr nähert sich die Sehne PQ der Tangente PT und Sehne P′Q′ der Tangente P′T′, ferner $\angle PP'Q'$ dem $\angle PP'T'$ und $\angle PQQ'$ dem Scheitelwinkel des Winkel OPT. Läßt man daher OQQ′ mit OPP′ zusammenfallen, so erhält man $OPT + OP'T' = 2\,R$. d. h.

*Der Radiusvector schneidet zwei reciproke Figuren in den entsprechenden Linien unter supplementären Winkeln.* . . . . . . . . (III.)

Hieraus folgt unmittelbar, daß die unendliche Anzahl Curven, welche durch Variation der Potenz als reciproke Curven ein und derselben Curve betrachtet werden können, von einem

---

*) Dasselbe können wir unabhängig von (I.) folgendermaßen ableiten: Bezeichnen wir die entsprechenden Bogenelemente in beiden Fig. mit $ds$ und $d\sigma$, die zugehörigen Radiivectoren mit $r$ und $r'$, den Polarwinkel mit $\varphi$, so ist $r' = \frac{m^2}{r}$; $dr' = \frac{-m^2}{r^2}\,.\,dr$. Nun ist aber $d\sigma = \sqrt{r'^2\,d\varphi + dr'^2}$; daher $d\sigma = \sqrt{\frac{m^4}{r^2}\,d\varphi + \frac{m^4}{r^4}\,dr^2} = \frac{m^2}{r^2}\sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2} = \frac{m^2}{r^2}\,.\,ds.$

in beliebiger Richtung vom gemeinsamen Anfangspunkte aus gezogenen Radiusvector unter demselben Winkel geschnitten werden, da alle Durchschnittswinkel die Supplemente zu dem Winkel sind, unter welchem er die ursprüngliche Linie durchschneidet.

## Die reciproken Figuren der geraden Linie, des Kreises, der Ebene und der Kugel.

1) Die reciproke Linie der geraden Linie in Bezug auf einen in ihr gelegenen Punkt ist dieselbe gerade Linie, auf welcher indeß die Punkte ihre gegenseitige Lage vertauscht haben; die dem Anfangspunkt fern gelegenen sind nah gerückt und umgekehrt.

2) Die reciproke Curve der geraden Linie (Fig. II.) in Bezug auf einen außer ihr gelegenen Punkt $o$ nach der Potenz $m^2$ ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt in dem von $o$ auf die gerade Linie gefällten Perpendikel $og$ liegt und dessen Durchmesser $oe$ sich bestimmt aus der Beziehung $og \cdot oe = m^2$

Der Beweis, daß $og \cdot oe = oa' \cdot oa$ folgt unmittelbar aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $oag$ und $oa'e$.

3) Umgekehrt ist die reciproke Figur eines Kreises in Bezug auf einen in seiner Peripherie gelegenen Punkt eine zu dem Anfangsradius senkrechte gerade Linie.

4) Um die reciproke Curve eines Kreises in Bezug auf einen beliebigen Punkt seiner Ebene zu bestimmen, erinnern wir uns, daß das Product der Entfernungen zweier potenzhaltenden Punkte zweier Kreise von dem Aehnlichkeitspunkte constant ist. Hieraus folgt, daß die potenzhaltenden Punkte als reciproke Punkte in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt als Anfangspunkt betrachtet werden können und daß daher die reciproke Linie eines Kreises in Bezug auf einen beliebigen in seiner Ebene gelegenen Punkt ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungslinie des geebenen Punktes mit dem Mittelpunkt des Kreises liegt.

Bezeichnen wir den Anfangspunkt mit $O$, die Durchschnittspunkte der zu ihm gehörigen Centrale mit dem ursprünglichen Kreise mit $P$ und $Q$ und mit dem reciproken Kreise mit $Q'$ und $P'$, so daß $P$ und $P'$, $Q$ und $Q'$ nicht homogen gelegen sind, die Potenz mit $m^2$ so bestimmt sich die Lage von $P'$ und $Q'$ und damit die Lage des reciproken Kreises aus den Relationen: $OP \cdot OP' = m^2$; $OQ \cdot OQ' = m^2$.

5) Auf der Oberfläche einer Kugel $S$ sei ein Punkt $O$ gegeben. Denkt man sich einen zu diesem Punkte gehörigen Großkreis $K$ construirt, so wird demselben als reciproke Linie eine Gerade $L$ entsprechen. Ein beliebiger, durch $O$ gelegter Kleinkreis $K'$ wird $K$ in einem zweiten Punkte $P$ schneiden. Daher wird die dem $K'$ entsprechende Gerade $L'$ die Gerade $L$ in dem entsprechenden Punkte $P'$ schneiden. $L$ und $L'$ liegen daher in einer Ebene. Da man nun durch jeden Punkt der Kugeloberfläche sich einen Kleinkreis gezogen denken kann, welcher $K$ schneidet, so werden alle entsprechenden Geraden $L$ schneiden und folglich mit ihr in einer Ebene liegen. Es ergiebt sich daher der Satz:

Die reciproke Figur einer Kugel in Bezug auf einen Punkt ihrer Oberfläche ist eine Ebene, welche zu dem Anfangsradius der Kugel senkrechte Lage hat.

6) Die reciproke Linie eines Kreises K in Bezug auf einen beliebigen Punkt seiner Ebene O ist nach 4) ein Kreis K', dessen Mittelpunkt auf der Centrale OK liegt. Denkt man sich die Hälften der Kreise K und K' gemeinsam um OK gedreht, so wird in jeder Lage dem Halbkreise K der Halbkreis K' als reciproke Linie entsprechen. Beide Halbkreise aber beschreiben bei dieser Drehung Kugeln. Daraus folgt:

Die reciproke Figur einer Kugel in Bezug auf einen beliebigen Punkt des Raumes ist eine Kugel, deren Mittelpunkt auf der zum gegebenen Punkte gehörigen Centrale liegt.

7) Vermittelst des letzten Satzes bestimmen wir schließlich die reciproke Linie eines Kreises K in Bezug auf einen beliebigen Punkt des Raumes O. Betrachten wir den Kreis K als den Durchschnitt zweier Kugeln S und $S_1$, so entsprechen beim Uebergang zur transformirten Figur nach 6) den Kugeln S und $S_1$ zwei neue $S_2$ und $S_3$. Der Durchschnitt beider, also ein Kreis, ist demnach die reciproke Figur von K.

# Anwendung der entwickelten Sätze auf Planimetrie und Stereometrie.

## A. Planimetrie.

### 1. Eine Gerade.

Als metrische Grundeigenschaft der Geraden kann gelten, daß unter den Entfernungen dreier Punkte derselben a, b und c (Fig. II.) die Beziehung besteht, daß $ab + bc = ac$.

Beim Uebergang zur reciproken Figur in Bezug auf einen außer ihr gelegenen Punkt o erhalten wir einen Kreis, welcher durch o geht und auf dessen Peripherie die entsprechenden Punkte a'b'c' liegen.

Nach (I.) ist nun wenn $m^2$ die Potenz bez.:

$$ab = \frac{a'b'}{oa' \,.\, ob'}\, m^2$$

$$bc = \frac{b'c'}{ob' \,.\, oc'}\, m^2$$

$$ac = \frac{a'c'}{oa' \,.\, oc'}\, m^2$$

$$\text{daher: } \frac{a'b'}{oa' \,.\, ob'} + \frac{b'c'}{ob' \,.\, oc'} = \frac{a'c'}{oa' \,.\, oc'}$$

$$\text{oder: } a'b' \,.\, oc' + b'c' \,.\, oa' = a'c' \,.\, ob',$$

d. h. auf die Lagenverhältnisse in der (Fig. II.) übertragen:

Im Sehnenviereck ist die Summe der Rechtecke aus je 2 gegenüberliegenden Seiten gleich dem Rechteck aus den Diagonalen.

Alle Sätze, welche, wie im vorigen Falle sich auf Punkte beziehen, die auf einer Geraden liegen, werden, wenn man die reciproke Figur bildet, Eigenschaften der in den Kreis eingeschriebenen Vielecke offenbaren.

So wird folgendem Satz:

„Ist eine ungerade Anzahl $(2n + 1)$ von Punkten $a . b . c \ldots$ auf einer Geraden und ein Punkt $o$ außerhalb derselben gegeben, so findet die Beziehung statt:

$$\frac{ao^{2n}}{ab . ac . ad \ldots} + \frac{bo^{2n}}{bc . bd . be \ldots ba} + \ldots = 1.\text{“}$$

ein Satz entsprechen über ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck von gerader Seitenzahl.

Beschränken wir uns z. B. auf 3 Punkte $a . b$ und $c$, so geht die obige Gleichung über in die Stewart'sche Gleichung:

$$oa^2 . bc + oc^2 . ab = ob^2 . ac + ab . bc . ac.$$

Durch Transformation erhalten wir (Fig. II.):

$$\frac{b'c'}{oa'^2 . ob' . oc'} + \frac{a'b'}{oc'^2 . oa' . ob'} = \frac{a'c'}{ob'^2 . oa' . oc'} + \frac{a'b' . b'c' . a'c'}{oa' . ob' . ob' . oc' . oa' . oc'}$$

oder $b'c' . ob' . oc' + a'b' \, o'a . ob' = a'c' . oa' . oc' + a'b' . b'c' . a'c'$

oder $ob' (b'c' . oc' + a'b' . oa') = a'c' (oa' . oc' + a'b' . b'c')$

also den Satz:

In jedem Kreisviereck verhalten sich die Diagonalen wie die Summen der Rechtecke aus denjenigen Seiten, die in ihren Endpunkten zusammen stoßen.

## 2. Zwei Gerade werden von einer dritten durchschnitten.

### a) Die Durchschnittenen sind parallel.

Parallelen Geraden entsprechen als reciproke Linien Kreise, welche sich im Anfangspunkte von Innen berühren. Einer die Parellelen durchschneidenden Geraden wird ein Kreis entsprechen, welcher durch den Anfangspunkt geht und das System sich berührender Kreise durchschneidet. Der Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel liefert daher folgenden ohnehin einleuchtenden Satz:

Legt man durch den gemeinschaftlichen Berührungspunkt mehrerer Kreise einen beliebigen Kreis, so schneidet dieser alle jene Kreise unter demselben Winkel.

### b) Das Dreieck und Vieleck.

Die reciproke Figur eines geradlinigen Polygons $a . b . c \ldots$ in Bezug auf einen beliebigen Punkt seiner Ebene ist ein krummliniges Polygon $a'b'c' \ldots$, welches von Kreisbogen gebildet wird, die sich im Punkt $o$ schneiden. Hieraus ergeben sich sofort folgende Sätze:

1) Die Summe der innern Winkel eines solchen krummlinigen Polygons ist, wenn die Anzahl der Seiten $n$ ist $= 2n\, R. - 4\, R.$

2) Legt man in einem so gebildeten krummlinigen Dreieck durch den Punkt $o$ und durch

jede Spitze des Dreiecks Kreisbogen, welche die Winkel halbiren, so schneiden sich diese Kreise in denselben beiden Punkten.

3) Gleiche Eigenschaft besitzen die 3 Kreise, welche durch den Punkt o durch eine Spitze gehen und den gegenüberliegenden Bogen rechtwinklig durchschneiden.

## 3. Vier Gerade gehen durch einen Punkt und werden von einer 5. durchschnitten.

Legt man durch die 4 Strahlen eines anharmonischen Strahlenbüschels eine Gerade, welche die Strahlen in den Punkten a . b . c . d schneidet, so ist bekanntlich das Doppelverhältniß

$$\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{cd} \text{ für jede Lage der Geraden constant.}$$

Bilden wir die reciproke Figur in Bezug auf den Mittelpunkt des anharmonischen Büschels, so entspricht der durchschneidenden Geraden ein durch den Mittelpunkt gehender Kreis, welcher die Strahlen in den Punkten a'b'c'd' schneidet. Die Verbindungslinien dieser 4 Punkte bilden ein Sehnenviereck. Wir erhalten in demselben:

$$\left(\frac{a'b'}{oa' \cdot ob'} : \frac{c'b'}{ob' \cdot oc'}\right) : \left(\frac{a'd'}{oa' \cdot od'} : \frac{c'd'}{oc' \cdot od'}\right) = \text{const.}$$

für alle durch den Punkt o gehenden Kreise:

$$\text{Daher: } \frac{a'b' \cdot oc'}{oa' \cdot c'b'} : \frac{a'd' \cdot oc'}{oa' \cdot c'd'} = \text{const.}$$

$$\text{oder } \frac{a'b' \cdot c'd'}{c'b' \cdot ad'} = \text{const.}$$

Dies giebt den Satz:

In allen Sehnenvierecken, deren Endpunkte auf 4 anharmonischen Strahlen liegen und deren umschriebene Kreise durch den Mittelpunkt des Büschels gehen, ist das Verhältniß der Rechtecke aus zwei Gegenseiten constant und als unmittelbare Folge:

In allen Sehnenvierecken, deren Ecken auf 4 Harmonikalen liegen und deren umschriebene Kreise durch den Mittelpunkt gehen, ist das Rechteck aus zwei gegenüberliegenden Seiten gleich dem Rechteck aus den andern beiden Seiten.

## 4. Kreis.

Bezeichnen wir den Mittelpunkt eines Kreises mit c, irgend einen außerhalb desselben gelegenen Punkt mit o, die Durchschnittspunkte der Centrale oc mit dem Kreise mit a und b, so besteht die einfache Beziehung ab = ac.

Ziehen wir nun die verschiedenen Radien des Kreises c, welche alle die Peripherie rechtwinklich durchschneiden, und bilden die reciproke Figur in Bezug auf den Punkt o, so erhalten wir einen neuen Kreis, welcher von allen den den Radien entsprechenden Kreisen rechtwinklig durchschnitten wird. Alle diese Kreise gehen durch o und durch den dem Punkte c entsprechenden Punkte c'. Sind nun a'b' reciprok zu a und b, so geht obige Relation über in

$$\frac{a'c'}{oa' \cdot oc'} = \frac{b'c'}{ob' \cdot oc'}$$

oder $$\frac{a'c'}{oa'} = \frac{b'c'}{ob'}$$

d. h. die Punkte c′ und o sind conjugirte Pole in Bezug auf die Punkte a′ und b′.

Es entsteht daher folgender Satz:

1) Die Kreise, welche durch einen Punkt o gehen und einen gegebenen Kreis rechtwinklig durchschneiden, schneiden sich alle in denselben beiden Punkten o und c′, welche conjugirte Pole sind in Bezug auf den durch die Gerade oc′ bestimmten Durchmesser des gegebenen Kreises.

2) Drückt man den Satz, daß in einem Kreise alle Peripheriewinkel über demselben Bogen gleich sind, folgendermaßen aus:

Schneiden sich von mehreren Geraden, von denen die einen durch den Punkt A, die andern durch B gehen, je zwei unter demselben Winkel, so ist der geometrische Ort der Durchschnittspunkte ein Kreis;

so erhellt beim Uebergang zur transformirten Figur leicht die Richtigkeit folgender Behauptung:

Der geometrische Ort der zweiten Durchschnittspunkte zweier Kreise, welche bezüglich durch die Punkte o und A′, o und B′ gehen und sich unter constantem Winkel schneiden, ist ein Kreis.

3) Ebenso führt der Satz:

Ein Winkel am Kreise, welcher von einer Sehne und einer Tangente gebildet wird, ist gleich dem Peripheriewinkel auf dem Bogen zwischen seinen Schenkeln

durch Umformung in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene zu dem folgenden:

Wenn sich zwei Kreise durchschneiden, und man zwei andere Kreise zieht, von denen jeder durch einen Durchschnittspunkt der beiden ersten und beide durch zwei andere auf den Kreisen beziehlich angenommene Punkte gehen, so schneiden sich diese letzten beiden Kreise unter demselben Winkel, wie die ersten beiden. —

Nicht ohne Vortheil ist die Anwendung der in Rede stehenden Transformationsmethode bei der Lösung von Aufgaben, welche sich auf die Berührung von Kreisen mit Kreisen und geraden Linien beziehen. Es zeigt sich, daß vermittelst derselben Probleme, welche die Berührung von Kreisen mit Kreisen behandeln, sich zurückführen lassen auf die Berührung von Kreisen mit geraden Linien. Der Gedanke, welcher bei dieser Reduction zu Grunde liegt, ist der, daß der in Bezug auf einen passend gewählten Anfangspunkt construirte reciproke Kreis eines Kreises, welcher durch einen Punkt geht und einen Kreis berührt, durch den diesem Punkte entsprechenden Punkt gehen und die diesem Kreise entsprechende Gerade berühren muß. So läßt sich die Aufgabe „einen Kreis zu construiren, welcher durch 2 Punkte P und P′ geht und einen Kreis K berührt", zurückführen auf die Construction eines Kreises, welcher durch 2 Punkte geht und eine Gerade berührt. Zu dem Zwecke construire man in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Peripherie von K nach beliebiger Potenz die K entsprechende Gerade L, (was auf das Ziehen einer beliebigen Geraden herauskommt) und nach denselben Bestimmungen die den Punkten P und P′ entsprechenden Punkte $P_1$ und $P_1'$; ferner den Kreis, welcher durch $P_1$, $P_1'$ geht und L berührt. Der reciproke Kreis K′ dieses Kreises ist der gesuchte. Derselbe läßt sich leicht durch folgende Betrachtungen construiren. Der Punkt X, in welchem K′ L berührt, ist der reciproke Punkt des Punktes, in welchem der gesuchte Kreis K berührt. Zieht man also von X nach dem Anfangspunkt eine Gerade, so ist der Durchschnittspunkt derselben mit K der Punkt, in welchem der gesuchte Kreis K berührt. Auf ähnliche Weise kommt die Construction eines 3 gegebene Kreise berührenden Kreises zurück auf die Construction eines Kreises, welcher 2 Gerade und einen Kreis berührt.

## B. Stereometrie.

Von Wichtigkeit ist die Anwendung des betrachteten Princips auf Lagenverhältnisse dreier Dimensionen, da dasselbe planimetrische Sätze in Sätze über Figuren auf der Kugeloberfläche mit großer Leichtigkeit übertragen lehrt.

Nach dem Früheren leuchtet unmittelbar ein, daß einem Kreise in der Ebene ein Kreis auf der Kugeloberfläche und einer Geraden in der Ebene ein Kreis auf derselben entspricht, welcher durch den Anfangspunkt geht.

Dies vorausgeschickt ist die Uebertragung folgender Sätze selbstverständlich:

1) planimetrischer Satz:

Die Winkel im Dreieck sind gleich 2 R.

stereometrischer Satz:

Die Winkel in einem Dreieck auf der Kugeloberfläche, dessen Seiten durch einen Punkt gehen, sind gleich 2 R.

2) planimetrischer Satz:

Der von einer Sehne und einer Tangente gebildete Winkel am Kreise ist gleich dem Peripheriewinkel auf dem zwischen den Schenkeln liegenden Bogen;

stereometrischer Satz:

Legt man durch die Punkte A und B, und A und C einer Kugeloberfläche zwei Systeme von Kleinkreisen, so daß sich die Kreise beider Systeme auf einem durch B und C gehenden Kleinkreis K schneiden, so ist der Winkel, unter welchem sich dieselben schneiden, gleich dem Winkel, welchen K mit dem durch A, B und C bestimmten Kreis bildet.

3) planimetrischer Satz:

In jedem dem Kreise eingeschriebenen Sechseck liegen die Durchschnittspunkte der Gegenseiten in einer Geraden.

Satz auf der Kugeloberfläche:

Liegen auf der Kugeloberfläche die Ecken eines Sechsecks, dessen Seiten durch einen Punkt P gehen, auf ein und demselben Kreise, so liegen die Durchschnittspunkte der Gegenseiten (d. h. der 1. und 4., 2. und 5., 3. und 6.) auf einem Kreise, welcher durch P geht.

Umgekehrt kann man aus Sätzen über die sphärischen Dreiecke Sätze über drei in einer Ebene gelegene Kreise ableiten, von denen sich je zwei durchschneiden. So transformirt sich der Satz, daß die Höhenbogen, (d. h. die Kreise, die durch die Ecken eines sphärischen Dreiecks gehen und die Gegenseiten rechtwinklig durchschneiden) sich in denselben beiden Punkten schneiden in den folgenden:

Legt man durch die Durchschnittspunkte je zweier von drei in einer Ebene gelegenen Kreisen, Kreise, welche den dritten rechtwinklig durchschneiden, so treffen sich die drei neuen auf diese Weise entstandenen Kreise in denselben beiden Punkten.

In gleicher Weise, wie in der Planimetrie die Appolonius'sche Berührungsaufgabe durch unsere Transformation lösbar war, läßt sich in der Stereometrie das Problem „Eine Kugel zu construiren, welche 4 gegebene Kugeln berührt" zurückführen auf die Construction einer Kugel, welche 3 Ebenen und eine Kugel berührt. Denn nimmt man den einen der Durchschnittspunkte dreier Kugeln zum Anfangspunkt, so transformiren sich diese 3 Kugeln in Ebenen, welche sich in einem Punkte schneiden und die 4. Kugel in eine Kugel. Durchschneiden sich die Kugeln nicht, so müssen zuvor ihre Radien um gleiche Stücke verlängert werden, bis sich die Kugeln schneiden, wodurch die Lage des Mittelpunktes der gesuchten Kugel nicht verändert wird.

## Reciproke Curven der Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Bei der Untersuchung der reciproken Curven der Parabel, Ellipse und Hyperbel bietet sich von selbst die Frage zunächst dar, in welche Curven sich im Allgemeinen die Tangenten und Krümmungskreise der Curven transformiren. —

Da die an einen Punkt m construirte Tangente außer diesem Punkt den ihm unendlich nah gelegenen Punkt mit der Curve gemein hat, so wird der ihr entsprechende Kreis mit der reciproken Curve die entsprechenden beiden unendlich nah gelegenen Punkte gemein haben. Derselbe wird also ein Kreis sein, welcher durch den Anfangspunkt geht und die reciproke Curve im ersten Grade berührt. Eine an diesen Kreis im Berührungspunkte gezogene Tangente wird daher auch Tangente an die Curve sein in demselben Punkte.

Fassen wir analog den Krümmungskreis als einen Kreis auf, welcher drei unendlich nah gelegene Punkte mit der Curve gemein hat, so folgt, daß der entsprechende Kreis mit der reciproken Curve die drei entsprechenden unendlich nah gelegenen Punkte gemein haben muß und folglich der an den correspondirenden Punkt construirte Krümmungskreis ist.

Um nun die reciproken Curven der Kegelschnitte zu bestimmen, haben wir als allgemeine Polargleichung derselben in Bezug auf den Brennpunkt nach der gewöhnlichen Bezeichnung:

$$r = \frac{\frac{1}{2}\,p}{1 + \varepsilon \cos.\ \varphi}$$

Bezeichnen wir daher die Potenz mit $m^2$, so ist die allgemeine Polargleichung der reciproken Curven, wenn der Brennpunkt zum Anfangspunkte der Transformation genommen wird:

$$r' = \frac{2\,m^2}{p}\,(1 + \varepsilon\cos.\,\varphi)$$
$$= \frac{2\,m^2}{p} + \frac{2\,m^2}{p}\,.\,\varepsilon\cos.\,\varphi$$

oder, wenn wir $\frac{2\,m^2}{p} = a$; $\frac{2\,m^2}{p}\,.\,\varepsilon = b$ setzen, $r' = a + b\cos.\,\varphi$.

Dieselbe giebt die reciproke Curve der Hyperbel, Ellipse oder Parabel, je nachdem

$$b > a$$
$$b < a$$
$$b = a$$

ist.

Alle 3 Curven lassen sich auf folgende Art leicht construiren:

Man beschreibe mit b als Durchmesser einen Kreis, welcher durch den Anfangspunkt o geht und dessen Mittelpunkt auf der positiven Anfangsrichtung des Radiusvectors liegt. Zieht man von o aus eine Sehne in diesem Kreise, welche mit der Anfangsrichtung den Winkel $\varphi$ bildet, so ist dieselbe $= b\,.\,\cos.\,\varphi$, und man erhält daher sämmtliche Punkte der gesuchten Curven, wenn man in dem Kreise von o aus alle möglichen Sehnenzieht und von ihrem Durchschnittspunkte mit der Peripherie Längen $= a$ sowohl rückwärts als vorwärts abträgt. Führt man diese Construction aus, so erhält man in allen 3 Fällen herzförmige Linien. Mit Hülfe der sub. I. II. III. angegebenen Principien können wichtige Eigenschaften dieser Curven unabhängig von ihren Gleichungen aus den Eigenschaften der Parabel, Ellipse und Hyperbel abgeleitet werden.

Wir beschränken uns auf die Transformirte der Parabel, welche eine bekannte Curve ist.

Setzen wir zu dem Zweck in der obigen allgemeinen Gleichung der Reciproken der Kegelschnitte $\varepsilon = 1$, so erhalten wir als Gleichung der reciproken Curve der Parabel in Bezug auf den Brennpunkt als Anfangspunkt:

$$r' = \frac{2\,m^2}{p}\,(1 + \cos.\,\varphi)$$

d. i. die Gleichung der Cardioide.

Letztere entsteht bekanntlich, wenn ein Kreis auf der Peripherie eines ihm gleichen (der Basis) rollt. Ein Punkt in der Peripherie des rollenden Kreises beschreibt die Cardioide Derselben entspricht die obige Polargleichung unter der Voraussetzung, daß wir den Anfangspunkt des Polar-Coordinatensystems in den Punkt verlegen, in welchem der beschreibende Punkt auf der Peripherie des ruhenden Kreises liegt und die positive Anfangsrichtung mit dem Durchmesser der Basis zusammen fällt.

Die diesen Bedingungen entsprechende Lage der Cardioide in Bezug auf die Parabel ist durch Fig. IV veranschaulicht. Der Umstand, daß die Radiivectoren der Parabel unendlich werden für wachsende $\varphi$ steht nicht im Widerspruch mit unserer Behauptung, daß das Rechteck aus dem Radiusvector der Parabel und dem entsprechenden der Cardioide constant ist, da in demselben Maße, wie die Brennstrahlen der erstern unendlich werden, die der letztern sich dem Nullwerthe nähern.

Aus der abgeleiteten Reciprocität der beiden Curven lassen sich für die Cardioide folgende Eigenschaften entwickeln:

1) Da alle Cardioiden, welche den Scheitel (d. ist den Rückkehrpunkt) o und die Axe x gemein haben, als transformirte Curven ein und derselben Parabel betrachtet werden können, so schneidet nach früheren Gesetzen eine in beliebiger Richtung von o ausgehende Gerade alle auf obige Art construirten Cardioiden unter demselben Winkel.

2) Bekanntlich sind sämmtliche Parabeln, welche eine gemeinschaftliche Axe und denselben Brennpunkt haben die rechtwinkligen Trajectorien aller der Parabeln, welche dieselbe Axe und denselben Brennpunkt haben, deren Scheitel aber auf der entgegengesetzten Seite des Brennpunktes liegen. Daraus folgt für die Cardioide, daß die Cardioiden von derselben Axe und demselben Scheitel alle die Cardioiden rechtwinklig durchschneiden, welche auf der entgegengesetzten Seite des Scheitelpunktes liegen.

3) Da jeder Radiusvector die entsprechenden Curven unter Supplementwinkeln durchschneidet, so halbirt er den in dem Durchschnittspunkte zweier Curven gebildeten Winkel. Ist daher m Fig. III. der Durchschnittspunkt einer Parabel und Cardioide, my und mx die im Punkte m gezogenen Tangenten, so ist $\angle$ xmo $= \angle$ ymo. Zugleich ist aber bei der Parabel, wenn tz eine durch m zur Axe gezogene Parallele ist,

$$\angle \text{tmx} = \angle \text{xmo},$$

daher $$\text{omy} = \tfrac{1}{2} \angle \text{tmo}.$$

Hieraus ergiebt sich eine leichte Construction der Tangente an denjenigen Punkt der Cardioide, in welchem sie von der Parabel durchschnitten wird. Nun lassen sich aber alle Punkte der Cardioide als Durchschnittspunkte derselben mit einer reciproken Parabel betrachten. Das Quadrat des zu jedem Punkte der Cardioide gehörigen Radiusvectors ist die Potenz, in Bezug auf welche man die Parabel construirt denken muß.

Deshalb haben wir allgemein für jeden Punkt m der Cardioide folgende Construction der Tangente:

Man ziehe den Radiusvector om und durch m eine Parallele tz zu X, halbire $\angle$ tmo und mache $\angle$ omy $= \frac{1}{2} \angle$ tmo, so ist my Tangente an m.

4) Untersuchen wir, in welcher Beziehung die Leitlinie der Parabel zur Cardioide steht. Die Entfernung der Leitlinie L' vom Brennpunkte ist $\frac{p}{2}$; ihr entsprechender Kreis ist daher ein durch den Brennpunkt gehender Kreis, dessen Mittelpunkt auf O X' liegt und mit einem Durchmesser d, welcher bestimmt ist durch die Gleichung

$$d' \cdot \frac{p}{2} = m^2$$

$$d' = \frac{2\, m^2}{p}$$

Der reciproke Kreis der Leitlinie der Parabel ist also die Basis der Cardioide.

Ist nun (Fig. III.) $LL'$ die Leitlinie der Parabel, opq ihr reciproker Kreis, n ein beliebiger Punkt der Parabel, nl seine Entfernung von der Leitlinie, $n'$, $l'$ die entsprechenden Punkte von n und l in der Cardioide, welche nach der Potenz P construirt sein mag, so findet die Relation statt:

$$ln = on$$

Aber $$ln = \frac{l'n' \cdot P}{ol' \cdot on'}$$

$$on = \frac{P}{on'}$$

daher $$\frac{l'n' \cdot P}{ol' \cdot on'} = \frac{P}{on'}$$

oder $$ol' = l'n'.$$

Die Punkte $l'$ und $n'$ liegen aber, da $ln \parallel XX'$ auf der Peripherie eines Kreises, welcher die Axe im Punkt o berührt.

Demgemäß erhalten wir folgende Construction der Cardioide:

Beschreibt man einen Kreis $K'$, welcher einen gegebenen Kreis K in den Punkten o und $l'$ rechtwinkelig durchschneidet und nimmt auf der Peripherie von $K'$ einen Punkt $n'$ an, so daß $ol' = nl'$, so ist $n'$ ein Punkt der Cardioide, deren Scheitelpunkt o und deren Basis K ist. —

Wir haben im Obigen an der Parabel und Cardioide gezeigt, wie unsere Transformation von Eigenschaften eines Kegelschnitts zu Eigenschaften der Reciproken führt. Dies Verfahren ist leicht auf die allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnitte, welche sich auf die Brennpunkte beziehen, auszudehnen und es leuchtet ein, daß Sätzen über Kegelschnitte Sätze über die herzförmigen Linien von der allgemeinen Gleichung

$$r = a + b \cos \varphi$$

entsprechen.

Einige Sätze werden genügen, um dies zu verdeutlichen.

### Satz über Kegelschnitte:

Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einem Kreise (die gerade Linie als Kreis mit unendlich großem Halbmesser mit einbegriffen) und läuft der eine Schenkel desselben durch einen festen Punkt, so umhüllt der andere Schenkel einen Kegelschnitt.

### Satz über die Transformirten:

Die Kreise, deren Mittelpunkt auf den von einem Punkte o nach den Punkten einer Kreisperipherie gezogenen Geraden liegen und deren Durchmesser diese Geraden sind, umhüllen eine der drei durch die Gleichung

$$r = a + b \cos \varphi$$

repräsentirten Linien, wobei $a \begin{smallmatrix} > \\ < \\ = \end{smallmatrix} b$ ist, je nachdem der Punkt innerhalb, außerhalb oder auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt.

Die im Vorigen sub. 4 der Transformation zu Grunde gelegte Eigenschaft der Parabel ist ein specieller Fall des folgenden allgemeinen Satzes:

Der Ort aller derjenigen Punkte in der Ebene, deren Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden in einem gegebenen unveränderlichen Verhältniß zu einander stehen, ist ein Kegelschnitt und zwar Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem der Werth der gegebenen Verhältnisse $> 1$, $= 1$, oder $< 1$ ist.

Aus diesem leiten wir folgenden allgemeinen, unsere herzförmigen Linien betreffenden Satz ab: Bestimmt man auf der Peripherie der Kreise, welche einen festen Kreis im Pte O rechtwinkelig durchschneiden, Punkte, deren Abstände vom Punkte O und von dem zweiten Durchschnittspunkte der Kreise in einem gegebenen unveränderlichen Verhältniß zu einander stehen, so ist der Ort dieser Punkte eine der Curven, deren Gleichung

$$r = a + b \cos \varphi$$

und zwar ist in dieser $a \gtreqless b$, je nachdem der Werth jenes Verhältnisses $< 1$, $> 1$ oder $= 1$ ist.

## Reciproke Curve der Parabel in Bezug auf den Scheitel.

Wie die Transformation der Parabel in Bezug auf den Brennpunkt, so ist auch die Reciproke derselben in Bezug auf den Scheitel derselben eine definirte Curve, nämlich die Cissoide. Dies könnten wir aus der Polargleichung der Parabel ableiten. Wir wollen indeß, um die Transformation bei rechtwinkeligen Coordinaten zu zeigen, die zu Anfang unserer Untersuchung aufgestellten Gleichungen benutzen, nach welchen, wenn x, y die Coordinaten eines Punktes in der Ebene bezeichnen, die Coordinaten des reciproken Punktes $(\alpha, \beta)$ in Bezug auf die Potenz $m^2$ bestimmt sind durch

$$\alpha = \frac{m^2 x}{x^2 + y^2}; \; \beta = \frac{m^2 y}{x^2 + y^2}$$

Auf die Scheitelgleichung der Parabel angewandt ist

$$y^2 = p\,x; \text{ daher}$$

$$\alpha = \frac{m^2 x}{x^2 + px}; \; . \; . \; . \; (1) \quad \beta = \frac{m^2 \sqrt{px}}{x^2 + px} \; . \; . \; . \; (2)$$

Quadriren wir (1) und (2) und addiren, so kommt

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{m^4 (x^2 + px)}{(x^2 + px^2)} = \frac{m^4}{x^2 + px} \; . \; . \; . \; (3)$$

Quadriren wir (2) und dividiren dieses Quadrat durch die mit p multiplicirte Gleichung (1), so erhalten wir

$$\frac{\beta^2}{\alpha p} = \frac{m^4 \, . \, px}{(x^2 + px)^2} : \frac{m^2 px}{x + px} = \frac{m^2}{x^2 + px} \; . \; . \; . \; (4)$$

(4) mit $m^2$ multiplicirt giebt $\dfrac{m^2 \beta^2}{\alpha p} = \dfrac{m^4}{x^2 + px}$

Wir erhalten daher als Gleichung der Transformirten:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{m^2}{p} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha}$$

d. i. die Gleichung der Cissoide.*) Analoge Betrachtungen, wie wir sie bei der Cardioide anstellten, führen zur Ableitung von Eigenschaften der Cissoide aus denen der Parabel.

Wir wollen dies an zwei Entwickelungen zeigen.

Die Parabel kann man sich bekanntlich auf folgende Weise entstanden denken: Im Abstande AC = p vom Scheitel (Fig. IV.) errichte man die feste Gerade CD senkrecht zur Axe. Wird dann durch den Scheitel A die Gerade AP in beliebiger Richtung gelegt, hierauf das Perpendikel AN gefällt und zuletzt NP parallel zur Axe AX gezogen, so liegt der Punkt P auf der Parabel.

Beim Uebergang zur Transformirten geht über CD in einen Kreis mit dem Durchmesser $\frac{m^2}{p}$, dessen Mittelpunkt auf AC liegt, NP in einen CX im Punkte A berührenden Kreis. Die Geraden AN und AP, welche beide durch den Anfangspunkt gehen, bleiben bei der Transformation. Es folgt hieraus folgende Construction der Cissoide, deren Gleichung ist $x^2 + y^2 = f \cdot \frac{y^2}{x}$.

Durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems A beschreibe man einen Kreis AQM, dessen Mittelpunkt auf der negativen Abscissenrichtung in einer Entfernung vom Pte A $= \frac{f}{2}$ liegt. Hierauf construire man einen die Abscissenaxe in A berührenden Kreis APQ, welcher AMQ in Q schneidet. Errichtet man jetzt auf AQ in A eine Senkrechte, so ist ihr Durchschnittspunkt mit APQ, P ein Punkt der Cissoide.

Beachten wir ferner wieder, daß jeder Punkt der Cissoide als ein Durchschnittspunkt derselben mit einer Parabel, welche mit ihr gleiche Axe und den Punkt A gemein hat, betrachtet werden kann und daß der an einen solchen Durchschnittspunkt gezogene Radiusvector den Winkel beider Curven halbirt, so geht aus der Eigenschaft der Parabel, daß die Subtangente jedes Punktes gleich der doppelten Abscisse desselben ist, folgende Tangentenconstruction für die Cissoide hervor für einen Punkt P, dessen Coordinaten x, y, sind. Man mache AR = AS = x,, ziehe den Radiusvector AP, ferner die Gerade RP und trage an AP in P einen Winkel = RPA an, so ist der freie Schenkel desselben PT Tangente in P.

## Die reciproken Curven der Ellipse und Hyperbel in Bezug auf den Mittelpunkt.

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse und Hyperbel ist in gewöhnlicher Bezeichnung

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Daraus bestimmen sich die Coordinaten eines Punktes der Transformirten $\alpha$ und $\beta$ durch

*) Obige Gleichung steht noch in anderer merkwürdiger Beziehung zur Parabel. Setzt man in ihr $\alpha = -\alpha$, so drückt sie die Fußpunktcurve der Parabel aus.

$$\alpha = \frac{m^2 x}{x^2 \pm \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} \quad . \; . \; . \; (1)$$

$$\beta = \frac{m^2 \cdot \frac{b}{a} \sqrt{\pm (a^2 - x^2)}}{x^2 \pm \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} \quad . \; . \; . \; (2)$$

1. u. 2. quadrirt und addirt giebt

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{m^4 \left(x^2 \pm \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}\right)}{\left(x^2 \pm \left(\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}\right)\right)^2} = \frac{m^4}{x^2 \pm \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} \quad . \; . \; . \; (3)$$

1. quadrirt und mit $b^2$ multiplicirt, ebenso 2. quadrirt und mit $a^2$ multiplicirt und beides addirt oder subtrahirt giebt

$$\alpha^2 b^2 \pm \beta^2 a^2 = \frac{m^4 \cdot a^2 b^2}{\left(x^2 \pm \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}\right)^2}$$

$$\text{oder } m^4 \cdot \frac{(\alpha^2 b^2 \pm \beta^2 a^2)}{a^2 b^2} = \frac{m^8 \cdot}{\left(x^2 \pm \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}\right)^2} \quad . \; . \; . \; (4)$$

Dasselbe kommt, wenn wir 3 quadriren. Wir erhalten daher als reciproke Mittelpunktsgleichungen:

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = \left(\frac{m^2}{ab}\right)^2 \cdot (\alpha^2 b^2 \pm \beta^2 a^2)$$

Für $m^2 = ab$ und unter Einführung der gewöhnlichen Bezeichnung der Coordinaten durch x und y, geht diese Gleichung über in

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 \pm a^2 y^2$$

Daraus geht hervor:

Die Fußpunktscurve einer Ellipse und Hyperbel, deren Halbaxe a und b sind, ist reciprok zu der concentrischen Ellipse und Hyperbel, deren Halbaxen resp. b und a sind.

Wie die Eigenschaften der Fußpunktscurven der Ellipse und Hyperbel, aus denen dieser Curven selbst vermittelst unserer Methode abgeleitet werden können, wollen wir für den besondern Fall der gleichseitigen Hyperbel zeigen. Für diese ist, wenn ihre halbe Axe = a, nach Obigem die Gleichung der reciproken Curve in Bezug auf den Mittelpunkt und nach beliebiger Potenz $m^2$

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{m^2}{a^2} (x^2 - y^2)$$

d. i., wie vorauszusehen war, die Gleichung einer Lemniscate.

Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche mit einer Lemniscate den Mittelpunkt und die Axenrichtung gemein haben, können daher als reciproke Curven derselben betrachtet werden. Den Brennpunkten der Hyperbeln entsprechen Punkte auf der Axe der Lemniscate. Bezeichnen wir die Halbaxe derselben mit a, so ist für eine nach der Potenz P reciproke Hyperbel die Halbaxe $= \frac{P}{a}$; ihre Excentricität daher $\sqrt{2}\,\frac{P}{a}$. Der ihrem Brennpunkte auf der Axe der Lemniscate entsprechende Punkt hat daher einen Abstand y vom Mittelpunkt, welcher sich ergiebt aus der Relation

$$y \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{P}{a} = P$$

$$y = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

also unabhängig von P. Die reciproken Punkte der Brennpunkte sämmtlicher Hyperbeln sind daher dieselben beiden auf der Axe der Lemniscate im Abstande $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ vom Mittelpunkte gelegenen Punkte.

Wir wollen diese Punkte Hauptpunkte der Lemniscatenaxe nennen.

Gestützt auf diese Erörterungen leiten wir folgende Eigenschaften der Lemniscate aus der gleichseitigen Hyperbel ab:

1) Der Satz, daß die an einen Punkt x der Hyperbel gezogene Tangente (Fig. V.) den von den Brennstrahlen xp und xn gebildeten Winkel halbirt, giebt zur folgenden Betrachtung Veranlassung:

Ist x′ der reciproke Punkt zu x, p′ der eine und n′ der zweite Hauptpunkt der Axe, so entstehen bei der Transformation aus px und xn Kreise K und K′, welche bezüglich durch die Punkte p′ox′ und n′ox′ gehen, aus der an x gelegten Tangente ferner ein Kreis K″, welcher durch o und x′ geht und die Lemniscate in x′ im ersten Grade berührt. Da nun die Tangente in x den Winkel pxn halbirt, so wird ihr reciproker Kreis oder die an ihn in x′ gelegte Tangente den von den Kreisen p′ox′ und n′ox′ gebildeten Winkel halbiren und da diese Tangente zugleich Tangente der Lemniscate ist, so folgt folgende Construction der Tangente an einen beliebigen Punkt x′ der Lemniscate: Man beschreibe 2 Kreise, welche sich beide im Punkte x′ und im Mittelpunkte der Lenmiscate schneiden und von welchen jeder durch einen Hauptpunkt geht und halbire den Winkel, unter welchem sie sich in x′ schneiden, so ist die Halbirungslinie Tangente an der Lemniscate.

2) Die Grundeigenschaft der Hyperbel liegt ausgedrückt in der Gleichung:

$$xp - xn = \text{Const.} = c.$$

Gehen wir zur Lemniscate über, so erhalten wir

$$\frac{x'p'}{ox' \cdot op'} \cdot m^2 - \frac{x'n'}{ox' \cdot on'} \cdot m^2 = c$$

oder da $op' = on'$

$$m^2\,(x'p - x'n') = c.\ ox'\ on'.$$

$$\frac{(x'p' - x'n')}{ox'} = \frac{c \cdot on'}{m^2} = \text{const.}$$

Die Lemniscate ist also der geometrische Ort der Punkte von der Eigenschaft, daß die Differenz ihrer Entfernungen von 2 gegebenen Punkten zu ihrer Entfernung von dem in der Mitte gelegenen Punkte in constantem Verhältnisse steht.

Da die unter 1) u. 2) abgeleiten Sätze von der Gleichseitigkeit der Hyperpel unabhängig sind, so gelten sie **mutatis mutandis** für alle Fußpunktscurven der Hyperbeln. Ebenso läßt sich leicht zeigen, daß die Fußpunktscurve der Ellipse der Ort der Punkte ist, deren Summe der Entfernungen von 2 gegebenen Punkten zu der Entfernung von dem in der Mitte zwischen beiden gelegenen Punkte in constantem Verhältniß steht.

3) Bei der gleichseitigen Hyperbel ist der vom Mittelpunkt an einen Punkt derselben gezogene Radiusvector die mittlere Proportionale zwischen den zu diesem Punkt gehörigen Brennstrahlen; also (Fig. VII) $px \cdot nx = ox^2$

Beim Uebergang zur Lemniscate kommt:

$$\frac{p'x'}{op' \cdot ox'} \cdot \frac{n'x'}{on' \cdot ox'} \cdot p^2 = \frac{p^2}{ox'^2}$$

$$\frac{p'x' \cdot n'x'}{op'^2} = 1$$

$$p'x' \cdot n'x' = op'^2 = \text{const.}$$

d. h. das Product der Entfernungen eines beliebigen Punktes der Lemniscate von den Hauptaxenpunkten ist constant.

4) Die Eigenschaft der Lemniscate, vermöge welcher sie der Ort der Fußpunkte der von dem Mittelpunkte auf die Tangenten einer gleichseitigen Hyperbel gefällten Perpendikel ist, läßt sich so ausdrücken:

Bewegt sich der Scheitelpunkt eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel durch den Mittelpunkt einer Lemniscate geht, auf der Peripherie derselben, so hüllen die andern Schenkel eine gleichseitige Hyperbel ein.

In dieser Form führt er durch Transformation leicht zu dem entsprechenden:

Alle Kreise, deren Mittelpunkte die Halbirungspunkte der von dem Mittelpunkte nach der Peripherien einer gleichseitigen Hyperbel gezogenen Geraden sind, hüllen die Fußpunktscurve der Hyperbel ein.

## Anwendung der Transformation durch reciproke Radiivectoren auf krumme Oberflächen.

Durch Anwendung der in Rede stehenden Transformation auf die Oberflächen zweiter Ordnung werden sich, wie im Obigen für die reciproken Curven der Curven zweiten Grades, für die reciproken Oberflächen der Oberflächen II. O. entsprechende Eigenschaften ergeben. Wir wollen noch kurz im Folgenden den Nutzen berühren, welchen dieses Princip zur Angabe der Krümmung jener Oberflächen bietet.

Die Krümmung der Oberflächen wird bekanntlich bestimmt durch die Krümmungscurven.

Dieselben sind diejenigen Curven, deren Tangenten sämmtlich Tangenten der Hauptschnitte d. h. derjenigen Normalschnitte sind, für welche die Krümmung der Oberfläche in dem betreffenden Punkte ein Maximum oder Minimum ist. Die Krümmungscurven sind zweifacher Art die einen schneiden die andern senkrecht. Da zwei benachbarte Normalen, welche derselben Krümmungscurve angehören, sich nothwendig schneiden, so bilden alle Normalen einer Oberfläche, welche von derselben Krümmungscurve ausgehen, eine developpabele Oberfläche. Denkt man sich auf diese Weise die allen möglichen Krümmungscurven angehörenden developpabelen Oberflächen construirt, so schneidet das System, der den Curven der einen Krümmung entsprechenden Oberflächen das andere System, sowie beide Systeme sich unter einander rechtwinkelig. In der reciproken Figur werden folglich ebenfalls die den developpabeln Oberflächen entsprechenden Oberflächen, die reciproke Oberfläche der ursprünglichen Oberfläche, sowie auch sich unter einander rechtwinkelig durchschneiden. Nach dem Satz von *Dupin*:

> „Wenn drei Systeme Oberflächen so beschaffen sind, daß durch jeden Punkt des Raumes eine Oberfläche aus jedem der drei Systeme hindurchgeht, und wenn sich jene drei durch den beliebigen Punkt des Raumes gelegten Oberflächen immer senkrecht durchschneiden, so schneiden sich die drei Systeme Oberflächen gegenseitig in ihren Krümmungscurven."

werden sich daher obige Oberflächen in den Krümmungscurven der der ursprünglichen entsprechenden Oberfläche schneiden. Daraus folgt, *daß den Krümmungscurven einer Oberfläche auf der reciproken Oberfläche die Krümmungscurven derselben als reciproke Curven entsprechen.* Die Anwendung dieses Satzes wollen wir an folgender Aufgabe erläutern:

Ein Kreisbogen drehe sich um die ihm zugehörige Sehne mn. Es sollen die Krümmungscurven der hierdurch erzeugten Rotationsoberfläche bestimmt werden.

Bilden wir die reciproke Figur in Bezug aufeinen Endpunkt der Sehne, z. B. n, so entspricht in irgend einer Lage dem Bogen mn eine die Verlängerung von mn in dem Punkte m′, welcher reciprok zu m, durchschneidende Gerade. Bei der Rotation erzeugt diese Gerade einen senkrechten Kegel mit der Axe mn und der Spitze m′, welcher folglich die reciproke Oberfläche der gegebenen ist. Die Krümmungscurven dieses Kegels sind:

1) Die erzeugenden Geraden, welche alle durch den Punkt m′ gehen; in der gegebenen Oberfläche sind also die Krümmungscurven Kreise, welche durch m und n gehen;
2) Kreise, deren Ebenen parallel sind und rechtwinkelig zur Axe des Kegels; aus diesen resultiren als Krümmungscurven der reciproken Oberfläche Kreise, welche die aus den erzeugenden Geraden entstandenen rechtwinkelig durchschneiden.

Tritt an die Stelle des Kreisbogens eine ganze Kreisperipherie und an Stelle der Sehne als Rotationsaxe eine die Peripherie berührende Gerade, so ist die reciproke Figur in Bezug auf den Berührungspunkt ein senkrechter Cylinder, vermittelst dessen die Krümmungscurven der gegebenen Rotationsoberfläche ebenfalls leicht bestimmt werden können.