Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte einer Raumkurve, s der Bogen der Kurve, τ ihr Torsionsradius, a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' die Richtungskosinus der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale der Kurve. Die Frenet-Serret'schen Formeln[1]) geben b, b', b'' als Funktionen der Abgeleiteten von c, c', c'':

$$b = \tau \cdot \frac{dc}{ds}, \quad b' = \tau \cdot \frac{dc'}{ds}, \quad b'' = \tau \cdot \frac{dc''}{ds}.$$

Führt man diese Werte in die folgenden bekannten Beziehungen zwischen den neun Kosinus ein:

$$a = b'c'' - c'b''; \quad a' = b''c - c''b; \quad a'' = bc' - cb';$$

so erhält man:

$$a = \frac{\tau}{ds}(c''\,dc' - c'\,dc'')$$

$$a' = \frac{\tau}{ds}(c\,dc'' - c''\,dc)$$

$$a'' = \frac{\tau}{ds}(c'\,dc - c\,dc')$$

Unter der Voraussetzung, dass τ konstant ist, erhält man daraus für die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Kurve die Formeln

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \int a\,ds = \tau \cdot \int (c''\,dc' - c'\,dc'') \\ y = \int a'\,ds = \tau \cdot \int (c\,dc'' - c''\,dc) \\ z = \int a''\,ds = \tau \cdot \int (c'\,dc - c\,dc'), \end{cases}$$

---

[1]) Journ. de Math. XVII, 1852, S. 437 ff.

in denen c, c', c'' drei Funktionen ein und derselben Variabeln sind, die lediglich der Bedingung unterliegen:

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \tag{2}$$

Diese Bedingung kann man dadurch beseitigen, dass man in die Formeln (1) an Stelle von c, c', c'' Funktionen einsetzt, die ihr von selbst genügen. Setzt man z. B.

$$\frac{c}{h} = \frac{c'}{k} = \frac{c''}{l} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}},$$

so ist jener Bedingung genügt und man erhält die Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \tau \int \frac{l\,dk - k\,dl}{h^2 + k^2 + l^2} = -\tau \int \frac{k\,dl - l\,dk}{h^2 + k^2 + l^2} \\ y &= \tau \int \frac{h\,dl - l\,dh}{h^2 + k^2 + l^2} = -\tau \int \frac{l\,dh - h\,dl}{h^2 + k^2 + l^2} \\ z &= \tau \int \frac{k\,dh - h\,dk}{h^2 + k^2 + l^2} = -\tau \int \frac{h\,dk - k\,dh}{h^2 + k^2 + l^2} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

wo h, k, l drei Funktionen ein und derselben Variabeln bedeuten, die keiner Bedingung mehr unterworfen sind.

Diese Entwicklung rührt von Darboux her [Surfaces, I, p. 42—43],[1]) der daran die folgende Bemerkung knüpft (p. 46): „Man kennt, wie wir glauben, bisher keine reelle algebraische Kurve, deren Torsion konstant ist. Es wäre interessant zu untersuchen, ob alle Kurven konstanter Torsion notwendigerweise transzendent sein müssen, oder, wenn es algebraische gibt, die einfachsten unter ihnen näher zu bestimmen.“ Diese Bemerkung hat Anlass zu verschiedenen Versuchen gegeben, reelle algebraische Kurven konstanter Torsion zu bestimmen. Die bemerkenswertesten dieser Versuche sind die Arbeiten von Fabry (Annales de l'Ec. Norm. Sup. 3e série, IX, p. 177—196) und von Lyon (Diss., Paris 1890).

Fabry nimmt für h, k, l die folgenden drei linearen Funktionen der sinus und cosinus der Vielfachen ein und desselben Winkels Θ:

$$\begin{aligned} h &= a + b \cos \lambda\Theta + c \sin \lambda\Theta + d \cos \mu\Theta + e \sin \mu\Theta \\ k &= a' + b' \cos \lambda'\Theta + c' \sin \lambda'\Theta + d' \cos \mu'\Theta + e' \sin \mu'\Theta \\ l &= a'' + b'' \cos \lambda''\Theta + c'' \sin \lambda''\Theta + d'' \cos \mu''\Theta + e'' \sin \mu''\Theta \end{aligned}$$

[1]) Genauere Angaben der benützten Literatur auf S. 22.

und bestimmt die Koeffizienten so, dass in den Formeln (3) der Nenner $h^2 + k^2 + l^2$ konstant wird und dass in den drei Zählerausdrücken $l\,dk - k\,dl$, etc. die konstanten Glieder verschwinden, so dass also die Zähler lineare Funktionen der sinus und cosinus der Vielfachen von Θ werden. Es werden dann auch die x, y, z lineare Funktionen der sin und cos der Vielfachen von Θ; und wenn diese Vielfachen in rationalen Verhältnissen zu einander stehen, so ist die so ausgedrückte Kurve reell und algebraisch. Fabry hat dieses Verfahren mit Erfolg durchgeführt und tatsächlich vier verschiedene Klassen reeller algebraischer Kurven konstanter Torsion erhalten.

Lyon schlägt einen anderen Weg ein. Er zeigt zunächst, indem er die Darboux'schen Formeln (3) mehreren Transformationen unterwirft, dass, um reelle Kurven zu erhalten, die h, k, l reell gewählt werden müssen. Er setzt dann für die h, k, l ganze Polynome mit reellen Koeffizienten, die er der Einfachheit halber als vollständig, vom gleichen Grade n und ohne gemeinschaftlichen Faktor voraussetzt, also:

$$(4) \quad \begin{cases} h = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 t + a_0 \\ k = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots\cdots + b_1 t + b_0 \\ l = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots\cdots + c_1 t + c_0 \end{cases}$$

wobei t die Variable bedeutet. Er rechnet die Ausdrücke (3) für x, y, z aus und sucht die Bedingungen dafür auf, dass die Integrale in diesen Ausdrücken algebraisch werden. Er erhält dadurch für die Koeffizienten a, b, c der drei Polynome $3 \cdot (2n - 1)$ Bedingungsgleichungen; und jedes System von Werten der a, b, c das diesen $3 \cdot (2n - 1)$ Bedingungsgleichungen genügt, liefert eine reelle algebraische Kurve konstanter Torsion. Leider werden aber schon für sehr niedrige Werte von n die Bedingungsgleichungen sehr kompliziert und von verhältnismässig hohem Grade, so dass es praktisch fast unmöglich ist, Werte für die a, b, c zu finden, die ihnen genügen, namentlich wenn man auf reelle Lösungen ausgeht. Es ist denn auch Lyon selbst nicht gelungen, reelle algebraische Kurven aufzufinden; die von ihm gebrachten Beispiele liefern, wenn sie algebraisch sind, imaginäre Kurven.

Ein von beiden, dem Fabry'schen wie dem Lyon'schen, abweichendes Verfahren erhält man, wenn man zwar mit Lyon für h, k, l in den Formeln (3) algebraische Funktionen nimmt, dieselben aber mit Fabry so wählt, dass der Nenner unter dem Integralzeichen

$$h^2 + k^2 + l^2 = \text{const.}$$

wird. Nimmt man zunächst wie Lyon ganze rationale Polynome vom Grade n für die h, k, l, also z. B. die Ausdrücke (4), so müssen die Koeffizienten der Potenzen von t in der Entwicklung von $h^2 + k^2 + l^2$ gleich null gesetzt werden und man erhält dadurch eine Anzahl Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten a, b, c. Die erste dieser Gleichungen ist:

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 = 0 \tag{5}$$

und führt notwendigerweise zu imaginären Lösungen. Die dadurch entstehende Schwierigkeit behebt sich sofort, wenn man die Beschränkung aufgibt, dass die Polynome h, k, l rational sein sollen. Fügt man nämlich diesen Polynomen Glieder hinzu von der Form

$$\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots\cdots + \alpha_{2n-1} t^{2n-1} - \alpha_{2n} t^{2n}}, \quad \text{wo } \alpha_{2n} > 0$$

ist, so wird augenscheinlich die Gleichung (5) zur Gleichung

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - \alpha_{2n} - \beta_{2n} - \gamma_{2n} = 0, \tag{6}$$

die nun auch reelle Lösungen zulässt. Allerdings erhält man die irrationalen Glieder auch in den Zählern der zu integrierenden Ausdrücke und zwar dort sowohl als Zähler als, infolge der auszuführenden Differenziation, auch als Nenner. Durch die Integration solcher Glieder entstehen zum Teil transzendente Funktionen; damit diese wegfallen, müssen ihre Koeffizienten gleich null gesetzt werden, was zu den vom Nenner erhaltenen Bedingungsgleichungen noch weitere Bedingungsgleichungen hinzufügt.

Der leichteren Integration wegen wird man die hinzufügenden irrationalen Glieder am einfachsten so wählen, dass ihre Radikanden nicht höher, als vom zweiten Grade sind. Um aber dann die Entwicklung noch möglichst allgemein zu machen, muss man vor den Wurzelzeichen Faktoren t, t^2 ..... hinzufügen.

Man erhält so folgende Formen für die Funktionen h, k, l:

$$h = a_0 + a_1 t + \cdots\cdots + a_n t^n + \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 t - \alpha_2'^2 t^2}$$
$$+ t\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 t - \alpha_4'^2 t^2} + \cdots\cdots + t^{n-1}\sqrt{\alpha^2_{2n-2} + \alpha^2_{2n-1} t - \alpha^2_{2n} t^2}$$

$$k = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n + \sqrt{\beta_0^2 + \beta_1 t - \beta_2'^2 t^2} + t\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2 t - \beta_4'^2 t^2}$$
$$+ \cdots + t^{n-1}\sqrt{\beta^2_{2n-2} + \beta^2_{2n-1} t - \beta^2_{2n} t^2}$$

$$l = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + \sqrt{\gamma_0^2 + \gamma_1 t - \gamma_2'^2 t^2} + t\sqrt{\gamma_2^2 + \gamma_3^2 t - \gamma_4'^2 t^2}$$
$$+ \cdots + t^{n-1}\sqrt{\gamma^2_{2n-2} + \gamma^2_{2n-1} t - \gamma^2_{2n} t^2}$$

wobei die Koeffizienten α, β, γ als Quadrate geschrieben sind, um die Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten in homogener Form zu erhalten.

Das Verfahren werde nun an dem Beispiel $n = 3$ im einzelnen durchgeführt. Es werde hiefür die weitere Vereinfachung getroffen, dass die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_3 \ldots \alpha_{2n-1}, \beta_1, \beta_3 \ldots \beta_{2n-1}, \gamma_1, \gamma_3 \ldots \gamma_{2n-1}$ gleich null angenommen werden, sowie dass die Koeffizienten

$$\alpha_2' = \alpha_0, \quad \alpha_4' = \alpha_2 \ \ldots\ldots \ \alpha_{2n} = \alpha_{2n-2}$$
$$\beta_2' = \beta_0, \quad \beta_4' = \beta_2 \ \ldots\ldots \ \beta_{2n} = \beta_{2n-2}$$
$$\gamma_2' = \gamma_0, \quad \gamma_4' = \gamma_2 \ \ldots\ldots \ \gamma_{2n} = \gamma_{2n-2}$$

seien. Wir setzen also

$$h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \alpha_0\sqrt{1-t^2} + \alpha_2 t\sqrt{1-t^2} + \alpha_4 t^2\sqrt{1-t^2}$$
$$k = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \beta_0\sqrt{1-t^2} + \beta_2 t\sqrt{1-t^2} + \beta_4 t^2\sqrt{1-t^2}$$
$$l = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \gamma_0\sqrt{1-t^2} + \gamma_2 t\sqrt{1-t^2} + \gamma_4 t^2\sqrt{1-t^2}$$

Es ist nun:

$$h^2 + k^2 + l^2 = a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2$$
$$+ (2a_0a_1 + 2b_0b_1 + 2c_0c_1 + 2\alpha_0\alpha_2 + 2\beta_0\beta_2 + 2\gamma_0\gamma_2)\,t$$
$$+ (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2a_0a_2 + 2b_0b_2 + 2c_0c_2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2 - \gamma_0^2$$
$$+ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + 2\alpha_0\alpha_4 + 2\beta_0\beta_4 + 2\gamma_0\gamma_4)\,t^2$$
$$+ (2a_1a_2 + 2b_1b_2 + 2c_1c_2 + 2a_0a_3 + 2b_0b_3 + 2c_0c_3 - 2\alpha_0\alpha_2$$
$$- 2\beta_0\beta_2 - 2\gamma_0\gamma_2 + 2\alpha_2\alpha_4 + 2\beta_2\beta_4 + 2\gamma_2\gamma_4)\,t^3$$
$$+ (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + 2a_1a_3 + 2b_1b_3 + 2c_1c_3 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 - \gamma_2^2$$
$$- 2\alpha_0\alpha_4 - 2\beta_0\beta_4 - 2\gamma_0\gamma_4 + \alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2)\,t^4$$
$$+ (2a_2a_3 + 2b_2b_3 + 2c_2c_3 - 2\alpha_2\alpha_4 - 2\beta_2\beta_4 - 2\gamma_2\gamma_4)\,t^5$$

$$
\begin{aligned}
&+ (a_3{}^2 + b_3{}^2 + c_3{}^2 - \alpha_4{}^2 - \beta_4{}^2 - \gamma_4{}^2)\, t^6 \\
&+ (2a_0\alpha_0 + 2b_0\beta_0 + 2c_0\gamma_0) \sqrt{1 - t^2} \\
&+ (2a_1\alpha_0 + 2b_1\beta_0 + 2c_1\gamma_0 + 2a_0\alpha_2 + 2b_0\beta_2 + 2c_0\gamma_2)\, t\sqrt{1 - t^2} \\
&+ (2a_2\alpha_0 + 2b_2\beta_0 + 2c_2\gamma_0 + 2a_1\alpha_2 + 2b_1\beta_2 + 2c_1\gamma_2 + 2a_0\alpha_4 \\
&\qquad + 2b_0\beta_4 + 2c_0\gamma_4)\, t^2 \sqrt{1 - t^2} \\
&+ (2a_3\alpha_0 + 2b_3\beta_0 + 2c_3\gamma_0 + 2a_2\alpha_2 + 2b_2\beta_2 + 2c_2\gamma_2 + 2a_1\alpha_4 \\
&\qquad + 2b_1\beta_4 + 2c_1\gamma_4)\, t^3 \sqrt{1 - t^2} \\
&+ (2a_3\alpha_2 + 2b_3\beta_2 + 2c_3\gamma_2 + 2a_2\alpha_4 + 2b_2\beta_4 + 2c_2\gamma_4)\, t^4 \sqrt{1 - t^2} \\
&+ (2a_3\alpha_4 + 2b_3\beta_4 + 2c_3\gamma_4)\, t^5 \sqrt{1 - t^2}
\end{aligned}
$$

Ferner ist

$$
\begin{aligned}
dh = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 - \frac{\alpha_0 t}{\sqrt{1 - t^2}} + \alpha_2 \sqrt{1 - t^2} - \frac{\alpha_2 t^2}{\sqrt{1 - t^2}} \\
+ 2\alpha_4 t \sqrt{1 - t^2} - \frac{\alpha_4 t^3}{\sqrt{1 - t^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dk = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 - \frac{\beta_0 t}{\sqrt{1 - t^2}} + \beta_2 \sqrt{1 - t^2} - \frac{\beta_2 t^2}{\sqrt{1 - t^2}} \\
+ 2\beta_4 t \sqrt{1 - t^2} - \frac{\beta_4 t^3}{\sqrt{1 - t^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h\,dk - k\,dh = {} & (a_0 b_1 - a_1 b_0 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0) \\
&+ (2a_0 b_2 - 2a_2 b_0 + 2\alpha_0\beta_4 - 2\alpha_4\beta_0)\, t \\
&+ (-a_2 b_1 + a_1 b_2 + 3a_0 b_3 - 3a_3 b_0 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 - \alpha_4\beta_2 \\
&\qquad + \alpha_2\beta_4)\, t^2 \\
&+ (-2a_3 b_1 + 2a_1 b_3 - 2\alpha_0\beta_4 + 2\alpha_4\beta_0)\, t^3 \\
&+ (-a_3 b_2 + a_2 b_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2)\, t^4 \\
&+ (b_1\alpha_0 - a_1\beta_0 + a_0\beta_2 - b_0\alpha_2) \sqrt{1 - t^2} \\
&+ (2b_2\alpha_0 - 2a_2\beta_0 + 2a_0\beta_4 - 2b_0\alpha_4)\, t \sqrt{1 - t^2} \\
&+ (-b_1\alpha_4 + a_1\beta_4 + b_2\alpha_2 - a_2\beta_2 + 3b_3\alpha_0 - 3a_3\beta_0)\, t^2 \sqrt{1 - t^2} \\
&+ (2b_3\alpha_2 - 2a_3\beta_2)\, t^3 \sqrt{1 - t^2}
\end{aligned}
$$

$$+(b_3\alpha_4 - a_3\beta_4)\, t^4\sqrt{1-t^2}$$

$$+(-a_0\beta_0 + b_0\alpha_0)\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$+(-a_1\beta_0 + b_1\alpha_0 - a_0\beta_2 + b_0\alpha_2)\cdot\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$+(-a_2\beta_0 + b_2\alpha_0 - a_1\beta_2 + b_1\alpha_2 - a_0\beta_4 + b_0\alpha_4)\cdot\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$+(-a_3\beta_0 + b_3\alpha_0 - a_2\beta_2 + b_2\alpha_2 - a_1\beta_4 + b_1\alpha_4)\cdot\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$+(-a_3\beta_2 + b_3\alpha_2 - a_2\beta_4 + b_2\alpha_4)\cdot\frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$+(-a_3\beta_4 + b_3\alpha_4)\cdot\frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}}$$

Aus diesem Ausdruck für $h\,dk - k\,dh$ findet man die Ausdrücke für $k\,dl - l\,dk$ und $l\,dh - h\,dl$ durch zyklische Vertauschung der Koeffizienten a, b, c, sowie der Koeffizienten α, β, γ.

Für die Integrale dieser Ausdrücke hat man die Formeln (unter Weglassung der Integrationskonstanten):

$$\int\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\,t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t$$

$$\int t\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{3}\,t^2\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{3}\sqrt{1-t^2} = -\frac{1}{3}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}$$

$$\int t^2\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\,t^3\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{8}\,t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{8}\arcsin t$$

$$\int t^3\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{5}\,t^4\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{15}\,t^2\sqrt{1-t^2} - \frac{2}{15}\sqrt{1-t^2}$$

$$\int t^4\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{6}\,t^5\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{24}\,t^3\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{16}\,t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{16}\arcsin t$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\sqrt{1-t^2}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{1}{2}\,t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{1}{3}\,t^2\sqrt{1-t^2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-t^2}$$

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{1}{4}\,t^3\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\,t\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\arcsin t$$

$$\int \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{1}{5}\,t^4\sqrt{1-t^2} - \frac{4}{15}\,t^2\sqrt{1-t^2} - \frac{8}{15}\sqrt{1-t^2}$$

$$\int \frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{1}{6}\,t^5\sqrt{1-t^2} - \frac{5}{24}\,t^3\sqrt{1-t^2} - \frac{5}{16}\,t\sqrt{1-t^2}$$
$$+ \frac{5}{16}\arcsin t$$

Es müssen nun bei der Integration die Glieder, die arcsin t enthalten, verschwinden; es muss also sein:

$$\frac{1}{2}(b_1\alpha_0 - a_1\beta_0 + a_0\beta_2 - b_0\alpha_2) + \frac{1}{8}(-b_1\alpha_4 + a_1\beta_4 + b_2\alpha_2 - a_2\beta_2$$
$$+ 3b_3\alpha_0 - 3a_3\beta_0) + \frac{1}{16}(b_3\alpha_4 - a_3\beta_4) + \frac{1}{2}(-a_1\beta_0 + b_1\alpha_0 - a_0\beta_2$$
$$+ b_0\alpha_2) + \frac{3}{8}(-a_3\beta_0 + b_3\alpha_0 - a_2\beta_2 + b_2\alpha_2 - a_1\beta_4 + b_1\alpha_4)$$
$$+ \frac{5}{16}(-a_3\beta_4 + b_3\alpha_4) = 0 \text{ oder}$$

$$8a_1\beta_0 - 8b_1\alpha_0 + 2a_1\beta_4 - 2b_1\alpha_4 + 4a_2\beta_2 - 4b_2\alpha_2 + 6a_3\beta_0 - 6b_3\alpha_0$$
$$+ 3a_3\beta_4 - 3b_3\alpha_4 = 0$$

Zwei weitere Gleichungen dieser Art erhält man aus den Ausdrücken für $k\,dl - l\,dk$ und $l\,dh - h\,dl$. Ferner soll $h^2 + k^2 + l^2$ konstant werden; es müssen also die Koeffizienten der t und von $\sqrt{1-t^2}$ in der Entwicklung von $h^2 + k^2 + l^2$ gleich null sein. Damit erhält man im ganzen 15 Bedingungsgleichungen, denen die 21 Koeffizienten a, b, c, α, β, γ genügen müssen, damit man algebraische Kurven konstanter Torsion erhält. Es liefert also dieses Verfahren im ganzen ∞^6 reelle algebraische Kurven konstanter Torsion. Da die 15 Bedingungsgleichungen sämtlich vom zweiten Grade in den Koeffizienten sind, so sind sie wesentlich einfacher als die nach dem Lyon'schen Verfahren erhaltenen, und es ist tatsächlich nicht schwer, reelle Wertsysteme für die Koeffizienten zu finden, die ihnen genügen.

Diese 15 Bedingungsgleichungen lauten:

I. $a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1 + \alpha_0 \alpha_2 + \beta_0 \beta_2 + \gamma_0 \gamma_2 = 0$

II. $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2a_0 a_2 + 2b_0 b_2 + 2c_0 c_2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2 - \gamma_0^2$
$+ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + 2\alpha_0 \alpha_4 + 2\beta_0 \beta_4 + 2\gamma_0 \gamma_4 = 0$

III. $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + a_0 a_3 + b_0 b_3 + c_0 c_3 - \alpha_0 \alpha_2 - \beta_0 \beta_2 - \gamma_0 \gamma_2$
$+ \alpha_2 \alpha_4 + \beta_2 \beta_4 + \gamma_2 \gamma_4 = 0$

IV. $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + 2a_1 a_3 + 2b_1 b_3 + 2c_1 c_3 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 - \gamma_2^2$
$- 2\alpha_0 \alpha_4 - 2\beta_0 \beta_4 - 2\gamma_0 \gamma_4 + \alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2 = 0$

V. $a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 - \alpha_2 \alpha_4 - \beta_2 \beta_4 - \gamma_2 \gamma_4 = 0$

VI. $a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - \alpha_4^2 - \beta_4^2 - \gamma_4^2 = 0$

VII. $a_0 \alpha_0 + b_0 \beta_0 + c_0 \gamma_0 = 0$

VIII. $a_1 \alpha_0 + b_1 \beta_0 + c_1 \gamma_0 + a_0 \alpha_2 + b_0 \beta_2 + c_0 \gamma_2 = 0$

IX. $a_2 \alpha_0 + b_2 \beta_0 + c_2 \gamma_0 + a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2 + a_0 \alpha_4 + b_0 \beta_4$
$+ c_0 \gamma_4 = 0$

X. $a_3 \alpha_0 + b_3 \beta_0 + c_3 \gamma_0 + a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2 + a_1 \alpha_4 + b_1 \beta_4$
$+ c_1 \gamma_4 = 0$

XI. $a_3 \alpha_2 + b_3 \beta_2 + c_3 \gamma_2 + a_2 \alpha_4 + b_2 \beta_4 + c_2 \gamma_4 = 0$

XII. $a_3 \alpha_4 + b_3 \beta_4 + c_3 \gamma_4 = 0$

XIII. $8a_1 \beta_0 - 8b_1 \alpha_0 + 2a_1 \beta_4 - 2b_1 \alpha_4 + 4a_2 \beta_2 - 4b_2 \alpha_2 + 6a_3 \beta_0$
$- 6b_3 \alpha_0 + 3a_3 \beta_4 - 3b_3 \alpha_4 = 0$

XIV. $8b_1 \gamma_0 - 8c_1 \beta_0 + 2b_1 \gamma_4 - 2c_1 \beta_4 + 4b_2 \gamma_2 - 4c_2 \beta_2 + 6b_3 \gamma_0$
$- 6c_3 \beta_0 + 3b_3 \gamma_4 - 3c_3 \beta_4 = 0$

XV. $8c_1 \alpha_0 - 8a_1 \gamma_0 + 2c_1 \alpha_4 - 2a_1 \gamma_4 + 4c_2 \alpha_2 - 4a_2 \gamma_2 + 6c_3 \alpha_0$
$- 6a_3 \gamma_0 + 3c_3 \alpha_4 - 3a_3 \gamma_4 = 0$

Man erhält eine bedeutende Vereinfachung, wenn man eine Anzahl der Koeffizienten gleich null annimmt.

So vereinfacht sich das Gleichungssystem insbesondere für folgendes Wertesystem der Koeffizienten:

a_0	$a_1 = 0$	a_2	$a_3 = 0$	$\alpha_0 = 0$	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_4 = 0$
$b_0 = 0$	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$	$b_3 = 0$	β_0	β_2	β_4
$c_0 = 0$	c_1	$c_2 = 0$	c_3	$\gamma_0 = 0$	$\gamma_2 = 0$	$\gamma_4 = 0$

Für dieses Wertesystem erhält man die Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \beta_0 \beta_2 = 0$$

$$\text{II.}\quad c_1^2 + 2a_0 a_2 - \beta_0^2 + \beta_2^2 + 2\beta_0\beta_4 = 0$$

$$\text{III.}\quad -\beta_0\beta_2 + \beta_2\beta_4 = 0$$

$$\text{IV.}\quad a_2^2 + 2c_1c_3 - \beta_2^2 - 2\beta_0\beta_4 + \beta_4^2 = 0$$

$$\text{V.}\quad -\beta_2\beta_4 = 0$$

$$\text{VI.}\quad c_3^2 - \beta_4^2 = 0$$

$$\text{XIII.}\quad 4a_2\beta_2 = 0$$

$$\text{XIV.}\quad -8c_1\beta_0 - 2c_1\beta_4 - 6c_3\beta_0 - 3c_3\beta_4 = 0$$

Aus VI folgt: $\beta_4 = \pm c_3$; aus V: $\beta_2 = 0$; damit vereinfacht sich das Gleichungssystem auf das folgende:

$$\text{II.}\quad c_1^2 + 2a_0a_2 - \beta_0^2 \pm 2c_3\beta_0 = 0$$

$$\text{IV.}\quad a_2^2 + 2c_1c_3 + c_3^2 \mp 2c_3\beta_0 = 0$$

$$\text{XIV.}\quad \mp 2c_1c_3 \mp 3c_3^2 - (8c_1 + 6c_3)\beta_0 = 0$$

Es ist nun aus XIV: $\beta_0 = \mp \dfrac{2c_1c_3 + 3c_3^2}{8c_1 + 6c_3}$

Dies in IV eingesetzt gibt:

$$a_2^2 = -2c_1c_3 - c_3^2 - \frac{4c_1c_3 + 6c_3^2}{8c_1 + 6c_3} \cdot c_3$$

$$a_2 = \pm\sqrt{\frac{-16c_1^2c_3 - 8c_1c_3^2 - 12c_1c_3^2 - 6c_3^3 - 4c_1c_3^2 - 6c_3^3}{8c_1 + 6c_3}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{-16c_1^2c_3 - 24c_1c_3^2 - 12c_3^3}{8c_1 + 6c_3}} = \pm\sqrt{-2c_3 \cdot \frac{4c_1^2 + 6c_1c_3 + 3c_3^2}{4c_1 + 3c_3}}$$

Aus II: $2a_0a_2 = -c_1^2 + \left(\frac{2c_1c_3 + 3c_3^2}{8c_1 + 6c_3}\right)^2 + \frac{4c_1c_3^2 + 6c_3^3}{8c_1 + 6c_3}$

$$= \frac{-64c_1^4 - 96c_1^3c_3 - 36c_1^2c_3^2 + 4c_1^2c_3^2 + 12c_1c_3^3 + 9c_3^4}{4 \cdot (4c_1 + 3c_3)^2} +$$

$$\frac{+32c_1^2c_3^2 + 48c_1c_3^3 + 24c_1c_3^3 + 36c_3^4}{4 \cdot (4c_1 + 3c_3)^2}$$

$$a_0 = \frac{-64c_1^4 - 96c_1^3c_3 + 84c_1c_3^3 + 45c_3^4}{8 \cdot (4c_1 + 3c_3)^2 a_2}$$

Man hat damit a_0, a_2, β_0, β_4 durch c_1, c_3 ausgedrückt, die beliebig gewählt werden dürfen mit der Einschränkung, dass a_0, a_2, β_0, β_4 nicht imaginär werden. Es ist dazu nötig und hinreichend, dass der Radikand in dem Ausdruck für a_2 positiv wird. Es muss also sein

$$-2c_3 \cdot \frac{4c_1^2 + 6c_1c_3 + 3c_3^2}{4c_1 + 3c_3} > 0$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn c_1 und c_3 verschiedene Vorzeichen haben. Wählt man c_3 positiv und c_1 negativ, etwa $= -c_1'$, wobei $c_1' > 0$ ist, so muss sein

$$-2c_3 \cdot \frac{4c_1'^2 + 3c_3^2 - 6c_1'c_3}{-4c_1' + 3c_3} > 0$$

Nun ist der Zähler immer positiv; denn er lässt sich als Summe der zwei wesentlich positiven Summanden schreiben:

$$(2c_1' - \sqrt{3}c_3)^2 + (4\sqrt{3} - 6) \cdot c_1'c_3$$

Man erhält somit die Bedingung

$$4c_1' - 3c_3 > 0 \quad \text{oder}$$

$$c_1' > \frac{3}{4} c_3 \text{ oder}$$

$$c_1 < -\frac{3}{4} c_3$$

Wählt man c_3 negativ und c_1 positiv, so erhält man die analoge Bedingung

$$c_1 > -\frac{3}{4} c_3 .$$

Es wird nun

$$h^2 + k^2 + l^2 = a_0^{\,2} + \beta_0^{\,2}$$

$$\begin{aligned}
h\,dk - k\,dh = & (-2a_2\beta_0 + 2a_0\beta_4)\ t\sqrt{1-t^2} \\
& - a_0\beta_0 \cdot \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\
& + (-a_2\beta_0 - a_0\beta_4)\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \\
& - a_2\beta_4 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k\,dl - l\,dk = & c_1\beta_0 \sqrt{1-t^2} \\
& + (-c_1\beta_4 + 3c_3\beta_0)\,t^2\sqrt{1-t^2} \\
& + c_3\beta_4\,t^4\sqrt{1-t^2} \\
& + c_1\beta_0 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \\
& + (c_3\beta_0 + c_1\beta_4)\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} \\
& + c_3\beta_4 \frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l\,dh - h\,dl = & -c_1 a_0 \\
& + (c_1 a_2 - 3c_3 a_0)\,t^2 \\
& - c_3 a_2\,t^4
\end{aligned}$$

$$x = -\frac{\tau}{a_0{}^2 + \beta_0{}^2} \cdot \int \Big[(-2a_2\beta_0 + 2a_0\beta_4)\, t\sqrt{1-t^2} - a_0\beta_0 \cdot \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$- (a_2\beta_0 + a_0\beta_4) \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} - a_2\beta_4 \cdot \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}} \Big] dt$$

$$y = -\frac{\tau}{a_0{}^2 + \beta_0{}^2} \int \Big[c_1\beta_0 \sqrt{1-t^2} + (-c_1\beta_4 + 3c_3\beta_0)\, t^2 \sqrt{1-t^2}$$

$$+ c_3\beta_4\, t^4 \sqrt{1-t^2} + c_1\beta_0 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} + (c_3\beta_0 + c_1\beta_4) \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$+ c_3\beta_4 \frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}} \Big] dt$$

$$z = -\frac{\tau}{a_0{}^2 + \beta_0{}^2} \cdot \int \Big[-c_1a_0 + (c_1a_2 - 3c_3a_0)\, t^2 - c_3a_2\, t^4 \Big] dt$$

Durch Integration erhält man:

$$x - x_0 = -\frac{\tau}{a_0{}^2 + \beta_0{}^2} \Big[\frac{2}{3} (a_2\beta_0 - a_0\beta_4)(1 - t^2)\sqrt{1-t^2} + a_0\beta_0\sqrt{1-t^2}$$

$$+ \frac{1}{3} (a_2\beta_0 + a_0\beta_4)(t^2 + 2)\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{15} a_2\beta_4 (3t^4 + 4t^2 + 8)$$

$$\cdot \sqrt{1-t^2} \Big]$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{\tau}{a_0{}^2 + \beta_0{}^2} \cdot \Big[(-20a_2\beta_0 - 15a_0\beta_0 - 8a_2\beta_4) + (5a_2\beta_0$$

$$- 15a_0\beta_4 - 4a_2\beta_4)\, t^2 - 3a_2\beta_4\, t^4 \Big] \cdot \sqrt{1-t^2}$$

$$y - y_0 = -\frac{\tau}{a_0{}^2 + \beta_0{}^2} \Big[\frac{1}{2} c_1\beta_0\, t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{8} (-c_1\beta_4 + 3c_3\beta_0)(2t^3 - t)$$

$$\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{48} \cdot c_3\beta_4 (8t^5 - 2t^3 - 3t)\sqrt{1-t^2}$$

$$- \frac{1}{2} c_1\beta_0\, t\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{8} (c_3\beta_0 + c_1\beta_4)(2t^3 + 3t)\sqrt{1-t^2}$$

$$- \frac{1}{48} c_3\beta_4 (8t^5 + 10t^3 + 15t)\sqrt{1-t^2} \Big]$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\tau}{a_0^2+\beta_0^2}\Big[(6c_3\beta_0+3c_3\beta_4+2c_1\beta_4)t+(-4c_3\beta_0+2c_3\beta_4$$
$$+4c_1\beta_4)\cdot t^3\Big]\sqrt{1-t^2}$$

$$z-z_0=-\frac{\tau}{a_0^2+\beta_0^2}\cdot\left[-c_1a_0t+\frac{1}{3}(c_1a_2-3c_3a_0)t^3-\frac{1}{5}c_3a_2t^5\right]$$
$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{\tau}{a_0^2+\beta_0^2}\cdot\left[15c_1a_0t+(15c_3a_0-5c_1a_2)t^3+3c_3a_2t^5\right]$$

Für ein numerisches Beispiel werde

$$c_3=+1;\ c_1=-1;\ x_0=y_0=z_0=0$$

gewählt. Es ist dann:

$$\beta_4=\pm1;\ \beta_0=\pm\frac{1}{2};\ a_2=\pm\sqrt{2};\ a_0=\mp\frac{7}{16}\sqrt{2}$$

$$a_0^2+\beta_0^2=\frac{81}{128};\ a_2\beta_0=\frac{1}{2}\sqrt{2};\ a_0\beta_0=-\frac{7}{32}\sqrt{2};\ a_2\beta_4=\sqrt{2}$$

$$a_0\beta_4=-\frac{7}{16}\sqrt{2};\ c_3\beta_0=\pm\frac{1}{2};\ c_3\beta_4=\pm1;\ c_1\beta_4=\mp1;$$

$$c_1a_0=\pm\frac{7}{16}\sqrt{2};\ c_3a_0=\mp\frac{7}{16}\sqrt{2};\ c_1a_2=\mp\sqrt{2};\ c_3a_2=\pm\sqrt{2}.$$

$$x=\frac{27}{640}\tau\cdot\left[\left(-10\sqrt{2}+\frac{105}{32}\sqrt{2}-8\sqrt{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{105}{16}\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)t^2\right.$$
$$\left.-3\sqrt{2}\,t^4\right]\sqrt{1-t^2}$$

$$=\frac{81\cdot\sqrt{2}}{20\,480}\tau\cdot\left[-157+54t^2-32t^4\right]\sqrt{1-t^2}$$

$$y=\frac{81}{1024}\tau\cdot\left[(\pm3\pm3\mp2)t+(\mp2\pm2\mp4)t^3\right]\sqrt{1-t^2}$$

$$=\pm\frac{81}{256}\tau\left[t-t^3\right]\sqrt{1-t^2}$$

$$= \pm \frac{81}{256} \tau \cdot t \sqrt{(1 - t^2)^3}$$

$$z = \frac{27}{640} \tau \cdot \left[\pm \frac{105}{16} \sqrt{2} \cdot t + \left(\mp \frac{105}{16} \sqrt{2} \pm 5\sqrt{2} \right) t^3 \pm 3\sqrt{2}\, t^5 \right]$$

$$= \pm \frac{27\sqrt{2}}{10\,240} \tau \cdot \left[105\, t - 25\, t^3 + 48\, t^5 \right]$$

Erteilt man, um ganzzahlige Ausdrücke zu bekommen, τ den Wert $\frac{20\,480}{27\sqrt{2}}$, so wird

$$x = \left[- 471 + 162\, t^2 - 96\, t^4 \right] \sqrt{1 - t^2}$$

$$y = \pm 120 \sqrt{2} \cdot t \cdot \sqrt{(1 - t^2)^3}$$

$$z = \pm \left[210\, t - 50\, t^3 + 96\, t^5 \right]$$

Dabei muss für reelle Kurven

$$-1 < t < +1$$

sein. Man erhält somit die folgenden beiden Kurven, wobei zugleich berücksichtigt werden soll, dass $\sqrt{1 - t^2}$ zwei Werte liefert.

1. Wenn die Koeffizienten das obere Vorzeichen haben:

$$x = \pm [- 471 + 162\, t^2 - 96\, t^4] \sqrt{1 - t^2}$$
$$y = \pm 120 \sqrt{2}\, t \sqrt{(1 - t^2)^3}$$
$$z = + [210\, t - 50\, t^3 + 96\, t^5]$$

2. Wenn die Koeffizienten das untere Vorzeichen haben:

$$x = \pm [- 471 + 162\, t^2 - 96\, t^4] \sqrt{1 - t^2}$$
$$y = \mp 120 \sqrt{2}\, t \sqrt{(1 - t^2)^3}$$
$$z = - [210\, t - 50\, t^3 + 96\, t^5]$$

Nimmt man die Werte von t zwischen + 1 und — 1 in Abständen von 0,1, so erhält man für die Koordinaten der ersten Kurve folgende Zahlenwerte:

t	x	y	z
— 1	0	0	— 256
— 0,9	∓ 175	∓ 12,6	— 209
— 0,8	∓ 244	∓ 29,3	— 174
— 0,7	∓ 296	∓ 43	— 146
— 0,6	∓ 340	∓ 52	— 123
— 0,5	∓ 379	∓ 55	— 102
— 0,4	∓ 410	∓ 52	— 82
— 0,3	∓ 436	∓ 44	— 62
— 0,2	∓ 455	∓ 32	— 42
— 0,1	∓ 467	∓ 17	— 21
0	∓ 471	0	0
+ 0,1	∓ 467	± 17	+ 21
+ 0,2	∓ 455	± 32	+ 42
+ 0,3	∓ 436	± 44	+ 62
+ 0,4	∓ 410	± 52	+ 82
+ 0,5	∓ 379	± 55	+ 102
+ 0,6	∓ 340	± 52	+ 123
+ 0,7	∓ 296	± 43	+ 146
+ 0,8	∓ 244	± 29,3	+ 174
+ 0,9	∓ 175	± 12,6	+ 209
+ 1	0	0	+ 256

Auf der beigefügten Zeichnung (S. 23) ist diese Kurve in ihren Projektionen auf die drei Koordinatenebenen dargestellt; es wurde dabei der Masstab so gewählt, dass die Einheit durch 0,1 mm dargestellt ist. Dabei wurden der Projektion auf die xy-Ebene an verschiedenen Stellen die betreffenden z-Ordinaten für den gleichen Masstab beigefügt.

Für die Koordinaten der zweiten Kurve erhält man dieselben Zahlenwerte wie für die der ersten, nur mit den entgegengesetzten Vorzeichen bei den Werten für die y und die z. Daraus ergibt sich im Zusammenhalt mit dem Verlauf der Werte selbst, dass die zweite Kurve mit der ersten identisch ist und nur, bei Festsetzung eines Durchlaufungssinnes, in entgegengesetztem Sinn durchlaufen wird.

Es ist leicht zu erkennen, dass das angewandte Verfahren in der gewählten Spezialisierung

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \cdots\cdots = \alpha_{2n-1} = 0$$

$$\alpha_2' = \alpha_0,\ \alpha_4' = \alpha_2,\ \cdots\cdots\cdots \alpha_{2n} = \alpha_{2n-2}$$

und für ähnliche Beziehungen zwischen den β und γ (S. 9) sich auf goniometrische Funktionen zurückführen lässt. Wird $t = \sin\Theta$ gesetzt, so ist $\sqrt{1-t^2} = \cos\Theta$ und für die gefundenen Kurven:

$$x = -(426 + 33\cos 2\Theta + 12\cos 4\Theta)\cos\Theta$$

$$y = +30\sqrt{2}\sin\Theta\,(3\cos\Theta + \cos 3\Theta)$$

$$z = 232{,}5\sin\Theta - 17{,}5\sin 3\Theta + 6\sin 5\Theta$$

Es geht daraus hervor, dass das hier angegebene Verfahren, aus den Darboux'schen Formeln (3) reelle algebraische Kurven konstanter Torsion abzuleiten, nicht nur das Lyon'sche, sondern auch das Fabry'sche Verfahren als spezielle Fälle umfasst. In der Tat erhält man beispielsweise Fabrys Kurve II für das folgende Wertesystem der Koeffizienten:

$a_0 = 0$	$a_1 = b - 3$	$a_2 = 0$	$a_3 = 4$	$\alpha_0 = 0$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 0$
$b_0 = 0$	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$	$b_3 = 0$	$\beta_0 = c - 1$	$\beta_1 = 0$	$\beta_2 = 4$
$c_0 = a - d$	$c_1 = 0$	$c_2 = 2d$	$c_3 = 0$	$\gamma_0 = 0$	$\gamma_1 = 0$	$\gamma_2 = 0$

wo a, b, c, d die von Fabry angegebenen Bedeutungen haben.

Literatur.

Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, I[ère] partie. Paris, 1887, p. 42—43 et p. 46.

Fabry, Sur une courbe algébrique réelle à torsion constante. Comptes Rendus 1892, CXIV, p. 158—161.

Fabry, Sur les courbes algébriques à torsion constante. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1892, IX (3[e] série) p. 177—196.

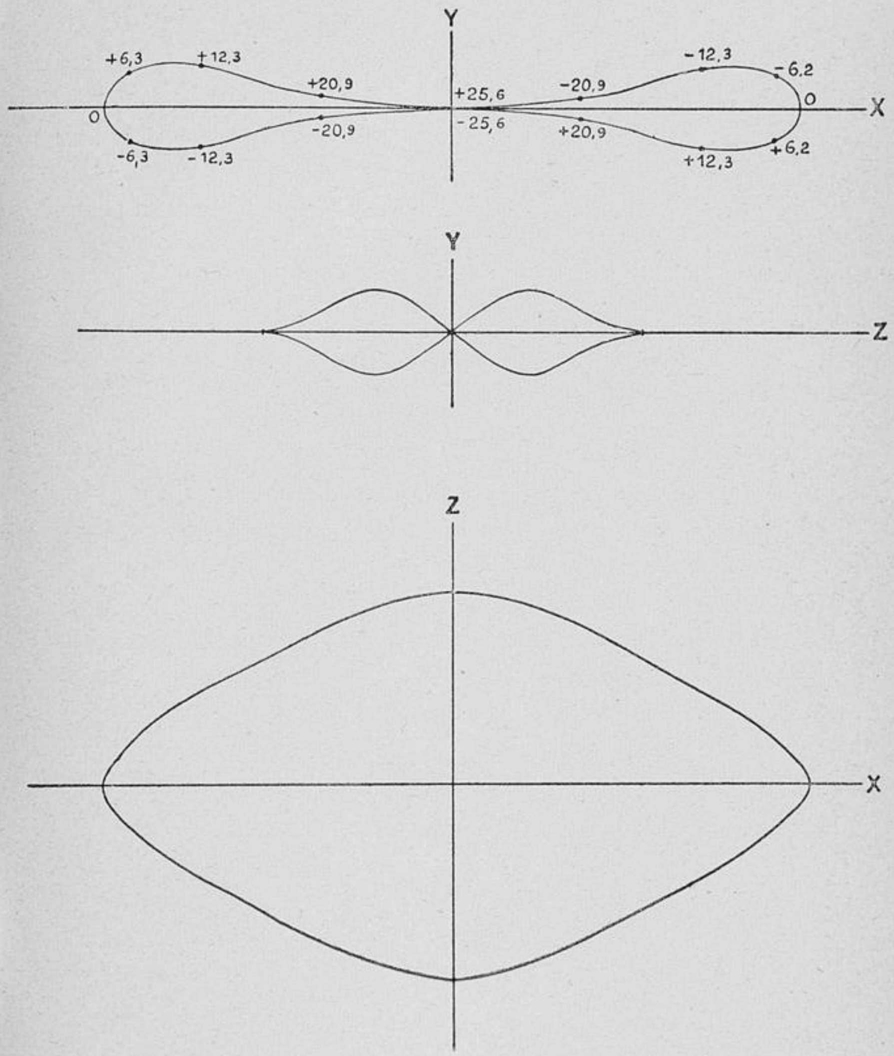
Lyon, Sur les courbes à torsion constante. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques. Paris 1890, 70 p.

Darboux, Leçon … les applications géométriques … Paris, 1887, p. 42—43 e…

Fabry, Sur une … nte. Comptes Rendus 189…

Fabry, Sur les … nte. Annales scientifiques … IX (3e série) p. 177—196…

Lyon, Sur les … présentée à la Faculté des … de docteur ès sciences mat…



Algebraische Kurve konstanter Torsion.